MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES, A
Vol. XXVII, Mathematics No. 2, 1952.

Sur l'équation fonctionnelle rationnelle de la fonction inconnue de deux variables.

Par

Akira KUWAGAKI

(Reçu le 31 Mars 1952)

§ 1 Introduction

Nous allons examiner l'équation fonctionnelle rationnelle de la fonction inconnue $f(x, u)$:

$$f(x+y, u+v) = R\{f(x, u), f(x, v), f(y, u), f(y, v)\} \qquad (1)$$

où R est une fonction rationnelle de quatre variables.

Dans le mémoire précédent,[1] nous avons exprimé la théorie générale de l'équation fonctionnelle algébrique du type semblable. Pas les exemples suivants, il est clair qu'il n'y a pas telles restric tions du degré de la fonction rationnelle R qu'il est nécessaire au cas d'une variable,[2] pour que l'équation (1) possède une solution $f(x, u)$ non constante.

Exemple 1.

$$\begin{aligned} & f(x+y, u+v) \\ = & \frac{1}{2}\{f(x, u)+f(x, v)+f(y, u)+f(y, v)\} \\ & +\{f(x, u)-f(x, v)-f(y, u)+f(y, v)\} \times F \end{aligned}$$

(F est une fonction rationnelle arbitraire de $f(x, u)$, $f(x, v)$, $f(y, u)$ et $f(y, v)$.))

Les solutions sont

$$f(x, u) = \lambda x + \mu u$$

(λ et u sont constantes arbitraires.)

Exemple 2.

$$\begin{aligned} & f(x+y, u+v) \\ = & f(x, u)+f(x, v)+f(y, u)+f(y, v) \\ & +\{f(x, u)\ f(y, v)-f(x, v)\ f(y, u)\} \times F \end{aligned}$$

(F est une fonction comme la précédente.)
Les solutions sont

$$f(x, u)=\lambda xu$$

(λ est une constante arbitraire.)
Exemple 3.

$$f(x+y, u+v)=f(x, u)f(x, v)f(y, u)f(y, v)$$

Les solutions sont

$$f(x, u)=ce^{\lambda xu}$$

(λ est une constante arbitraire et c est une racine de $c^4=c$.)

§ 2 Théorèmes

Dans les lignes suivantes, nous pourrons résoudre complètement le cas où la fonction rationnellè R ne possède les variables x, y, u et v en symbolique au plus qu'une fois respectivement dans le numérateur et aussi dans le dénominateur. Dans ce cas, nous changeons d'abord l'équation (1) en l'égalité des polynômes, par la multiplication du dénominateur. Changeons x et y, et aussi u et v dans chaque polynômes; et addtions les quatre polynômes ainsi obtenus et divisons la somme par 4, nous aurons, sans perdre la généralité, l'équation fonctionnelle symétrique suivante:

$$\begin{aligned} &f(x+y, u+v) \\ &= \frac{a\{f(x, u)f(y, v)+f(x, v)f(y, u)\}+b\{f(x, u)+f(x, v)+f(y, u)+f(y, v)\}+2c}{p\{f(x, u)f(y, v)+f(x, v)f(y, u)\}+q\{f(x, u)+f(x, v)+f(y, u)+f(y, v)\}+2r} \end{aligned} \tag{2}$$

où a, b, c, p, q et r sont constants et $a:b:c \neq p:q:r$.

Théorème 1.

Pour que l'équation fonctionnelle (2) *possède une solution* $f(x, u)$ *uniforme et continue au point* $(0, 0)$ *telle que* $f(x, 0) \neq$ *const.* (*en même temps* $f(0, u) \neq$ *const.*[1]), *il faut et il suffit que*

$$\text{le rang du tableau } \begin{pmatrix} b & a-q & p \\ c & b-r & q \end{pmatrix}=1 \tag{3}$$

Théorème 2.

Sous la condition (3), *les solutions de l'équation* (2) *doivent être égales aux fractions linéaires de* $\lambda x+\mu u$ *ou de* $e^{\lambda x+\mu u}$, λ *et* μ *étant deux constantes arbitraires.*

Non seulement ces deux théorèmes seront démontrés tout ensemble, mais encore toutes les solutions de l'équation (2) seront trouvées par les procédés suivantes.

§ 3 Démonstrations

Posons d'abord $u=v=0$ dans l'équation (2), nous aurons une équation fonctionnelle de la fonction inconnue $f(x, 0)$:

$$f(x+y, 0) = \frac{af(x, 0)f(y, 0)+b\{f(x, 0)+f(y, 0)\}+c}{pf(x, 0)f(y, 0)+q\{f(x, 0)+f(y, 0)\}+r}$$

par conséquent, d'après la restriction $f(x, 0) \not\equiv$ const. et le résultat du cas d'une variable[2], la condition (3) est évidemment nécessaire.

En second, pour la vérification de la suffisance de la condition (3), nous employons la méthode du cas d'une variable[2], et nous trouverons par l'hypothèse (3) que le système des équations algébriques en (ξ, η) :

$$\left.\begin{aligned} a\xi+p\eta &= \xi^2 \\ b\xi+q\eta &= \xi\eta \\ cx+r\eta &= \eta^2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

admet solutions non $(0, 0)$.

Il nous faut considérer ici deux cas différents suivants.

1°. Le cas où le système des équations (4) a deux solutions différentes: (ξ_1, η_1) et (ξ_2, η_2)

D'après les relations (2) et (4), on aura

$$\frac{\xi_1 f(x+y, u+v)+\eta_1}{\xi_2 f(x+y, u+v)+\eta_2} = \frac{\{\xi_1 f(x, u)+\eta_1\}\{\xi_1 f(y, v)+\eta_1\}+\{\xi_1 f(x, v)+\eta_1\}\{\xi_1 f(y, u)+\eta_1\}}{\{\xi_2 f(x, u)+\eta_2\}\{\xi_2 f(y, v)+\eta_2\}+\{\xi_2 f(x, v)+\eta_2\}\{\xi_2 f(y, u)+\eta_2\}} \tag{5}$$

En posant $u=v=0$, cela est réduit à

$$\frac{\xi_1 f(x+y,0)+\eta_1}{\xi_2 f(x+y,0)+\eta_2}=\frac{\xi_1 f(x,0)+\eta_1}{\xi_2 f(x,0)+\eta_2}\cdot\frac{\xi_1 f(y,0)+\eta_1}{\xi_2 f(y,0)+\eta_2}$$

La solution de cette équation fonctionnelle sera donnée par la relation

$$\frac{\xi_1 f(x,0)+\eta_1}{\xi_2 f(x,0)+\eta_2}=e^{\lambda u} \tag{6}$$

λ étant une constante arbitraire.

De même, on aura, en posant $x=y=0$

$$\frac{\xi_1 f(0,u)+\mu_1}{\xi_2 f(0,u)+\eta_2}=e^{\mu u} \tag{6'}$$

μ étant aussi une constante arbitraire.

Il résulte de (6) ou (6′) que

$$\frac{\xi_1 f(0,0)+\eta_1}{\xi_2 f(0,0)+\eta_2}=1 \tag{6''}$$

Alors, posons $y=v=0$ dans l'équation (5), nous aurons, en vertu de (6), (6′) et (6″)

$$\begin{aligned}&\frac{\xi_1 f(x,u)+\eta_1}{\xi_1 f(x,u)+\eta_1}\\&=\frac{\{\xi_1 f(x,u)+\eta_1\}\{\xi_1 f(0,0)+\eta_1\}+\{\xi_1 f(x,0)+\eta_1\}\{\xi_1 f(0,u)+\eta_1\}}{\{\xi_2 f(x,u)+\eta_2\}\{\xi_2 f(0,0)+\eta_2\}+\{\xi_2 f(x,0)+\eta_2\}\{\xi_2 f(0,u)+\eta_2\}}\\&=\frac{\xi_1 f(x,0)+\eta_1}{\xi_2 f(x,0)+\eta_2}\cdot\frac{\xi_1 f(0,u)+\eta_1}{\xi_2 f(0,u)+\eta_2}\\&=e^{\lambda x}\cdot e^{\mu u}=e^{\lambda x+\mu u}\end{aligned}$$

Donc il en résulte que

$$f(x,u)=\frac{\eta_2 e^{\lambda x+\mu u}-\eta_1}{-\xi_2 e^{\lambda x+\mu u}+\xi_1} \tag{7}$$

La fonction (7) est sûrement la solution de l'équation (2), parce que, en employant la relation:

$$\xi_1 f(x,u)+\eta_1=e^{\lambda x+\mu u}\{\xi_2 f(x,u)+u_2\}$$

au lieu de (7), par le calcul facile on voit que les deux membres de l'équation (5) s'identifient.

2°. Le cas où le système des équations (4) a une solution double (ξ,η).

Dans ce cas, en plus, le système des équations homogènes en (ξ', η')[2] :

$$\left.\begin{aligned} a\xi' + p\eta' &= 2\xi\xi' \\ b\xi' + q\eta' &= \xi\eta' + \xi'\eta \\ c\xi' + r\eta' &= 2\eta\eta' \end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

admet une solution (ξ', η') non $(0, 0)$.

D'après les relations (2), (4) et (4'), on aura

$$\frac{\xi' f(x+y, u+v) + \eta'}{\xi f(x+y, u+v) + \eta}$$
$$= \frac{\{\xi f(x,u)+\eta\}\{\xi' f(y,v)+\eta'\} + \{\xi' f(x,u)+\eta'\}\{\xi f(y,v)+\eta\}}{\{\xi f(x,u)+\eta\}\{\xi f(y,v)+\eta\}}$$
$$\frac{+\{\xi f(x,v)+\eta\}\{\xi' f(y,u)+\eta'\} + \{\xi' f(x,v)+\eta'\}\{\xi f(y,u)+\eta\}}{+\{\xi f(x,v)+\eta\}\{\xi f(y,u)+\eta\}} \qquad (5')$$

En posant $u=v=0$, cela est réduit à

$$\frac{\xi' f(x+y,0)+\eta'}{\xi f(x+y,0)+\eta} = \frac{\xi' f(x,0)+\eta'}{\xi f(x,0)+\eta} + \frac{\xi' f(y,0)+\eta'}{\xi f(y,0)+\eta}$$

La solution de cette équation fonctionnelle de Cauchy sera donnée par la relation :

$$\frac{\xi' f(x,0)+\eta'}{\xi f(x,0)+\eta} = \lambda x \qquad (8)$$

λ étant une constante arbitraire.

De même, on aura, en posant $x=y=0$

$$\frac{\xi' f(0,u)+\eta'}{\xi f(o,u)+\eta} = \mu u \qquad (8')$$

μ étant aussi une constante arbitraire.

Il résulte de (8) ou de (8') que

$$\frac{\xi' f(0,0)+\eta'}{\xi f(0,0)+\eta} = 0 \qquad (8'')$$

Puis, posons $y=v=0$ dans l'équation (5'), nous aurons, en vertu de (8), (8') et (8'')

$$\frac{\xi' f(x,u)+\eta'}{\xi f(x,u)+\eta}$$

$$=\frac{\{\xi' f(x,u)+\eta'\}\{\xi f(0,0)+\eta\}+\{\xi f(x,0)+\eta\}\{\xi' f(0,u)+\eta'\}}{\{\xi f(x,u)+\eta\}\{\xi f(0,0)+\eta\}}$$

$$\frac{+\{\xi' f(x,0)+\eta'\}\{\xi f(0,u)+\eta\}}{+\{\xi f(x,0)+\eta\}\{\xi f(0,u)+\eta\}}$$

$$=\frac{\xi' f(x,0)+\eta'}{\xi f(x,0)+\eta}+\frac{\xi' f(0,u)+\eta'}{\xi f(0,u)+\eta}$$

$$=\lambda x+\mu u$$

Donc on aura enfin

$$f(x,u)=\frac{\eta(\lambda x+\mu u)-\eta'}{-\xi(\lambda x+\mu u)+\xi'} \tag{7'}$$

La fonction (7′) est aussi la solution de l'équation (2), parce que, en employant la relation:

$$\xi' f(x,u)+\eta'=(\lambda x+\mu u)\{\xi f(x,u)+\eta\}$$

au lieu de (7′), par le calcul facile on voit aussi que les deux membres de l'équation (5′) s'identifient.

Les relations (7) et (7′) vérifient immédiatement le théorème 2.

§ 4 **Remarque**

Dans le cas où

$$f(x,0)=f(0,u)=\text{const.}=k$$

dans le théorème 1, en posant $v=0$ dans l'équation (2), nous aurons l'équotion:

$$f(x+y,u)=\frac{(ak+b)\{f(x,u)+f(y,u)\}+2(bk+c)}{(pk+q)\{f(x,u)+f(y,u)\}+2(qk+r)} \tag{9}$$

La condition pour que l'équation (9) possède une solution non constante sera

le rang de $\begin{pmatrix} ak+b & -(pk+q) & 0 \\ 2(bk+c) & ak+b-2(qk+r) & pk+q \end{pmatrix}=1$

Donc on aura deux cas possibles suivants.

a) $pk+q=0$ et $ak+b=0$

b) $pk+q=0$ et $ak+b=2(qk+r)\neq 0$

a) D'après l'équation (9) on arrivera à la relation:

$$f(x+y, u)=\text{const.}$$

C'est la contradiction.

b) L'équation (9) sera réduit à la forme simple:

$$f(x+y, u)=f(x, u)+f(y, u)+\frac{bk+c}{qk+r}$$

et en posant $y=0$ dans (2), de même on aura

$$f(x, u+v)=f(x, u)+f(x, v)+\frac{bk+c}{qk+r}$$

La solution du système de ces deux équations sera

$$f(x, u)=\lambda xu-\frac{bk+c}{qk+r} \tag{10}$$

λ étant une constante arbitraire.

En somme, nous n'aurons que la solution de la forme (10).

En terminant cette note, l'auteur veut exprimer ses respects sincères à M. le Professeur T. Matsumoto pour ses conseils précieux qu'il lui a donné pendent la recherche.

Références

1) A. Kuwagaki; "Sur les fonctions de deux variables satisfaisant une formule d'addition algébrique." (pages 139–143, dans ce numéro).

2) A. Kuwagaki; "Sur l'équation fonctionnelle: $f(x+y)=R\{f(x), f(y)\}$." (Memoirs of the College of Science, University of Kyoto, Series A, Vol. XXVI, Mathematics, No. 2,1951)