

Sur les phénomènes de sauts dans certains systèmes non linéaires.

Par

Sigeru MIZOHATA

(Reçu le 31 Juillet 1952)

1. Lorsqu'on entre dans le domaine non linéaire, on rencontre diverses phénomènes qui n'ont pas été traités dans le domaine linéaire ; ce sont par exemple le phénomène de sauts avec hystérésie, la présence des oscillations subharmoniques et les autres. Mais leurs interprétations mathématiquement rigoureuses, selon ma connaissance, ne sont pas encore faites complètement. J'entreprends ici une interprétation rigoureuse du phénomène de sauts (avec hystérésie) sous la condition un peu restreinte pour l'équation différentielle non linéaire suivante

$$(1) \quad \ddot{x} + p\dot{x} + ax + bx^3 = e \cos \omega t$$

où p, a, e sont positifs et b non nul.

Ce sont remarquables que notre raisonnement ne faut pas être borné à l'équation (1), mais seulement pour fixer les idées, nous nous bornerons ici à l'équation (1), et en même temps que les raisonnements ci-dessous donneront quelques compléments aux travaux de plusieurs physico-mathématiciens.

2. *Phénomène de sauts* : Dans l'équation (1), lorsqu'on fait varier e , l'amplitude de la force extérieure périodique, continûment et très lentement en un sens, alors la solution oscillante (ayant la même période que celle de la force extérieure) varie son amplitude continûment, mais en un moment elle se varie brusquement (le phénomène de saut), et d'ailleurs si on fait varier e en sens contraire, alors la solution n'est pas identique que celle que nous avons observée dans le premier processus, et en un moment on voit le phénomène de saut, après lequel on voit le processus exactement réciproque au premier (hystérésie oscillatoire). Le phénomène apparaît aussi lorsqu'on fait varier ω au lieu de e .

3. Mais l'énoncé précédant n'est pas bien clair mathématiquement.

D'abord la solution qui est périodique n'a pas d'importance ou plutôt perd de sens quand'on fait varier e (ou ω) dans (1). En effet, comme nous verrons ci-dessous, nous pouvons démontrer aisément l'existence d'une ou deux solutions périodiques si le paramètre e (ou ω) est tenu fixe, dans le système oscillatoire (1), néanmoins c'est presque impossible que cette oscillation est réalisée justement aussitôt que le système est conduit à cette condition après la variation du paramètre e à partir d'une valeur e_0 , assez lentement mais d'ailleurs d'une manière quelconque. En considérant ces faits, nous interprétons l'énoncé précédant comme il suit :

1°. Lorsqu'on fait varier le paramètre e en un sens déterminé, on peut *considérer* une suite des oscillations à *priori* dépendantes continûment de " e ", excepté pour la valeur de saut, et y on a une certaine discontinuité déterminée.

2°. Lorsqu'on fait varier " e " lentement *réellement*, l'oscillations réalisées sont sensiblement égaux* aux oscillations précédentes si on compare deux à deux les deux oscillations correspondantes au même valeur de e , excepté les oscillations correspondantes aux valeurs de e très voisines de la valeur de saut.

3°. Lorsqu'on conduit le système oscillatoire (1) à la valeur de saut, l'oscillation réalisée aurait l'indétermination, mais si on continue à varier " e " d'une quantité (toujours petite), l'énoncé 2° est réalisé.

4. Commençons par l'étude de l'équation (1) dans le cas où p , b , e , $\omega/\sqrt{a}-1$ (de même $\sqrt{a}/\omega-1$) sont petits et d'ailleurs du même ordre, et e le paramètre de varier. On peut supposer $a=1$ par le changement de variable $\sqrt{a}t=\tau$. Donc nous pouvons écrire (1) sous la form,

$$(2) \quad \ddot{x} + x + \gamma(P\dot{x} + Ax^3) = \gamma E \cos \omega t,$$

où $1/\omega = 1 + \gamma T$, γ étant positif et petit, P et E supposés positifs. Alors démontrerons le lemme suivant qui est fondamental pour nos considérations.

Lemme Fondamental. Regardons dans l'équation (2), E comme paramètre, et supposons que les conditions

$$(3) \quad AT < 0, \quad |T| > \frac{\sqrt{3}}{2} P$$

* Nous dirons que deux solutions $x_1(t)$, $x_2(t)$ sont "sensiblement égaux", lorsque la différence $\delta x = x_1 - x_2$ est très petite avec sa dérivée en comparaison avec $\sqrt{x_1^2 + (\dot{x}_1)^2}$.

sont remplies. Alors si γ est choisi petit, dans (2) le phénomène de sauts avec hystérésis se présente lorsqu'on fait varier E (dans un intervalle) assez lentement; c'est-à-dire qu'on peut trouver un nombre γ_0 dépendant de P, A, T tel que pour $\gamma < \gamma_0$, l'équation (2) présente le phénomène de sauts.

5. Posons $\dot{x}=y$, alors l'équation (2) s'écrit comme suivant

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-x+\gamma(E \cos \omega t - Py - Ax^3). \end{cases}$$

En introduisant les nouvelles variables,

$$\rho = x^2 + y^2, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x},$$

(4) s'écrit

$$(4') \quad \begin{cases} \dot{\rho} = 2\gamma(E \cos \omega t - Py - Ax^3)y = 2\gamma(E \sqrt{\rho} \cos \omega t \cdot \sin \theta \\ \quad - P\rho \sin^2 \theta - A\rho^2 \cos^3 \theta \sin \theta). \\ \dot{\theta} = -1 + \gamma \left(E \frac{\cos \omega t \cdot \cos \theta}{\sqrt{\rho}} - P \sin \theta \cdot \cos \theta - A\rho \cos^4 \theta \right). \end{cases}$$

Cela fait, si nous supposons γ petit, nous aurons la solution de (4) sous la forme

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \rho_0(t) + \gamma \rho_1(t) + \gamma^2 \rho_2(t) + \dots + \gamma^n \rho_n(t) + \dots, \\ \theta(t) &= \theta_0(t) + \gamma \theta_1(t) + \gamma^2 \theta_2(t) + \dots + \gamma^n \theta_n(t) + \dots. \end{aligned}$$

Sous les conditions $\rho_i(0) = \dot{\rho}_i(0) = \theta_i(0) = \dot{\theta}_i(0) = 0, (i \geq 1)$, nous pouvons déterminer ρ_i, θ_i successivement.

D'abord on a

$$(5) \quad \begin{cases} \rho_0(t) = \rho_0 \\ \theta_0(t) = \varphi_0 - t, \end{cases}$$

où ρ_0, φ_0 étant les valeurs initiales ($t=0$). Et en second lieu, on a

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = 2 \{ E \sqrt{\rho_0} \cos \omega t \cdot \sin(\varphi_0 - t) - P\rho_0 \sin^2(\varphi_0 - t) \\ \quad - A\rho_0^2 \cos^3(\varphi_0 - t) \cdot \sin(\varphi_0 - t) \}, \\ \dot{\theta}_1 = E \frac{\cos \omega t \cdot \cos(\varphi_0 - t)}{\sqrt{\rho_0}} - P \sin(\varphi_0 - t) \cdot \cos(\varphi_0 - t) \\ \quad - A\rho_0 \cos^4(\varphi_0 - t). \end{cases}$$

Nous trouverons $\rho_1(t), \theta_1(t)$ en intégrant ces équations, mais notre but est de calculer les variations $\Delta \rho_1, \Delta \theta_1$ de ρ_1 et θ_1 après une période $2\pi/\omega = 2\pi(1 + \gamma T)$. Pour cela, nous calculerons successivement.

$$1^\circ. \quad \cos \omega t \cdot \sin(\varphi_0 - t) = \frac{\sin \varphi_0}{2} \cdot \{\cos(\omega - 1)t + \cos(\omega + 1)t\} \\ - \frac{\cos \varphi_0}{2} \cdot \{\sin(\omega + 1)t - \sin(\omega - 1)t\}.$$

En tenant compte de $1/\omega = 1 + \gamma T$, son intégral est

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos \omega t \cdot \sin(\varphi_0 - t) dt = \frac{\sin \varphi_0}{2} \cdot \frac{\sin(-2\pi/\omega)}{\omega - 1} - \frac{\cos \varphi_0}{2} \\ \times \frac{\cos(-2\pi/\omega) - 1}{\omega - 1} + O(\gamma),$$

et

$$\frac{\sin(-2\pi/\omega)}{\omega - 1} = \frac{-\sin(2\pi\gamma T)}{-\gamma T/1 + \gamma T} = (1 + \gamma T) \left\{ 2\pi - \frac{1}{6} (2\pi)^3 T^2 \gamma^2 + \dots \right\} \\ = 2\pi + O(\gamma), \\ \frac{\cos(-2\pi/\omega) - 1}{\omega - 1} = \frac{\cos(2\pi\gamma T) - 1}{-\gamma T/1 + \gamma T} = \left\{ -\frac{(2\pi\gamma T)^2}{2!} + O(\gamma^3) \right\} \cdot \frac{-\gamma T}{1 + \gamma T} \\ = O(\gamma),$$

par suite, l'intégrale précédente devient

$$\int_0^{2\pi/\omega} \prime\prime dt = \pi \sin \varphi_0 + O(\gamma); \\ 2^\circ. \quad \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\varphi_0 - t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi(1+\gamma T)} [1 - \cos 2(\varphi_0 - t)] dt = \pi + O(\gamma); \\ 3^\circ. \quad \cos \omega t \cdot \cos(\varphi_0 - t) : \text{Comme } 1^\circ \text{ on a } \int_0^{2\pi/\omega} \prime\prime dt = \pi \cos \varphi_0 + O(\gamma); \\ 4^\circ. \quad \int_0^{2\pi/\omega} \cos^4(\varphi_0 - t) dt = \frac{3}{4} \pi + O(\gamma), \text{ puisqu'on a } \cos^4 \theta = \frac{3}{8} \\ + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta.$$

Si nous désignons les variations de ρ_0 et φ_0 après une période $2\pi/\omega$ par $\Delta\rho_0$ et $\Delta\varphi_0$, il devient, en tenant compte de (5) et les calculations $1^\circ - 4^\circ$.

$$(6) \quad \begin{cases} \Delta\rho_0 = 2\gamma(E\sqrt{\rho_0}\pi \sin \varphi_0 - P\rho_0\pi) + O_1(\gamma^2), \\ \Delta\varphi_0 = \gamma \left(-2\pi T + \frac{E}{\sqrt{\rho_0}} \pi \cos \varphi_0 - A\rho_0 \cdot \frac{3}{4} \pi \right) + O_2(\gamma^2). \end{cases}$$

Donnons ici une remarque, nécessaire dans les raisonnements qui suivent : Dans (6), pour les constantes A, P, T , et la variable ρ_0 satisfaisantes aux conditions,

$$|A| < A_0, \quad P < P_0, \quad |T| < T_0, \quad \frac{1}{K} < \rho_0 < K,$$

où $A_0, P_0, T_0, K (> 1)$ sont les quantités positives arbitraires, on peut trouver une quantité R (dépendante en général des A_0, P_0, T_0, K) telle que, dans (6) on a

$$(7) \quad |O_i(\gamma^2)| < R\gamma^2, \quad (i=1, 2).$$

L'expression qui donne la transformation dans le plan (ρ_0, φ_0) s'écrit en divisant par $2\pi\gamma$:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\Delta\rho_0}{2\pi\gamma} = (E\sqrt{\rho_0} \sin\varphi_0 - P\rho_0) + O_1(\gamma), \\ \frac{\Delta\varphi_0}{2\pi\gamma} = \left(-T + \frac{E}{2\sqrt{\rho_0}} \cos\varphi_0 - \frac{3}{8} A\rho_0\right) + O_2(\gamma). \end{cases}$$

Ici, lorsque γ tend vers 0, cette équation (aux différences finies) devient en supprimant l'affixe 0,

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = E\sqrt{\rho} \sin\varphi - P\rho \\ \frac{d\varphi}{dt} = -T + \frac{E}{2\sqrt{\rho}} \cos\varphi - \frac{3}{8} A\rho. \end{cases}$$

6. Pour notre but de démontrer l'existence du phénomène de sauts, il est nécessaire et en même temps intéressant de considérer la solution périodique de l'équation (2) ; mais ce n'est autre que de considérer les points (ρ_0, φ_0) tels que $\Delta\rho_0 = \Delta\varphi_0 = 0$ dans (6). Pour cela, nous cherchons les points singuliers *stables* de l'équation différentielles (9). On trouve aisément dans les raisonnements ultérieurs que dans le voisinage de tel point il y a un point (ρ_0, φ_0) tel que $\Delta\rho_0 = \Delta\varphi_0 = 0$ pour la transformation (6), si γ est choisi petit.

D'abord, au point singulier, on doit avoir

$$(10) \quad \begin{cases} \sin\varphi = \frac{P}{E} \sqrt{\rho}, \\ \cos\varphi = 2\left(T + \frac{3}{8} A\rho\right) \sqrt{\rho}/E. \end{cases}$$

Pour cela, il faut que ρ satisfait à l'équation suivante

$$(11) \quad f(\rho) = \rho \left\{ P^2 + \left(2T + \frac{3}{4} A \rho \right)^2 \right\} = E^2$$

Pour examiner la stabilité, considérons les équations aux variations de (9) :

$$(12) \quad \begin{cases} \delta \rho' = \left(-\frac{E \sin \varphi}{2\sqrt{\rho}} - P \right) \delta \rho + E \sqrt{\rho} \cos \varphi \delta \varphi, \\ \delta \varphi' = \left(-\frac{E \cos \varphi}{4\sqrt{\rho^3}} - \frac{3}{8} A \right) \delta \rho - \frac{E \sin \varphi}{2\sqrt{\rho}} \delta \varphi, \end{cases}$$

ou en tenant compte de la relation (10),

$$(12') \quad \begin{aligned} \delta \rho' &= -\frac{P}{2} \delta \rho + E \sqrt{\rho} \cos \varphi \delta \varphi, \\ \text{ou} &= -\frac{P}{2} \delta \rho + \left(2T + \frac{3}{4} A \rho \right) \rho \delta \varphi \\ \delta \varphi' &= -\left(\frac{E \cos \varphi}{4\sqrt{\rho^3}} + \frac{3}{8} A \right) \delta \rho - \frac{P}{2} \delta \varphi \\ \text{ou} &= -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{\rho} \left(2T + \frac{3}{4} A \rho \right) + \frac{3}{2} A \right] \delta \rho - \frac{P}{2} \delta \varphi. \end{aligned}$$

L'équation caractéristique devient

$$(13) \quad S^2 + PS + \frac{1}{4} f'(\rho) = 0,$$

où $f'(\rho)$ est la dérivée de $f(\rho)$. Cette équation est aisément déduite de la relation (12').

Comme notre attention est dirigée sur les points singuliers *stables*,—nous verrons ultérieurement que les points instables ne sont pas nécessaires pour nos considérations—nous nous bornerons désormais aux points singuliers (ρ, φ) tels que l'on ait $f'(\rho) > 0$.

D'autre part, remarquons que la fonction $f(\rho)$ positive pour ρ positif a un maximum et un minimum en vertu de la condition (3) dans l'énoncé du lemme fondamental (voir Fig. 1).

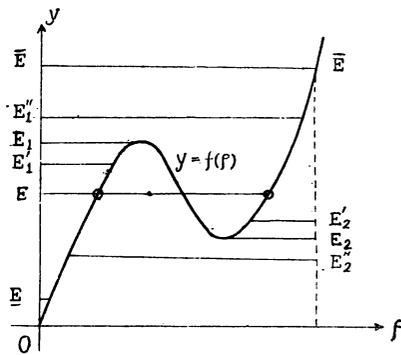


Fig. 1. lire E^2 au lieu de E

En effet, on a

$$f'(\rho) = P^2 + \left(2T + \frac{3}{4} A\rho\right)^2 + 2\rho \frac{3}{4} A \left(2T + \frac{3}{4} A\rho\right) \\ = \frac{27}{16} A^2 \rho^2 + 6AT\rho + P^2 + 4T^2,$$

dont le discriminant est $9/4 \cdot A^2(4T^2 - 3P^2)$. C'est positif et $AT < 0$, d'où nous verrons la propriété de $f(\rho)$.

Considérons ici E comme paramètre, alors les points stables changent ses positions dans le (ρ, φ) plan, et ses positions sont données par les racines de l'équation (11) et puis par (10) avec la condition $f'(\rho) > 0$. Fig. 1 montre les variations des ρ susdits suivant la variation de E . Nous devons remarquer qu'il existe deux points lorsque E est varié dans l'intervalle $E_2 < E < E_1$.

7. Nous allons entrer dans l'analyse du phénomène de saut. D'abord, considérons dans le plan (x, \dot{x}) les lieux des points stables comme on vient de considérer. Nous avons ainsi deux courbes distinctes C_1 et C_2 (voir Fig. 2).

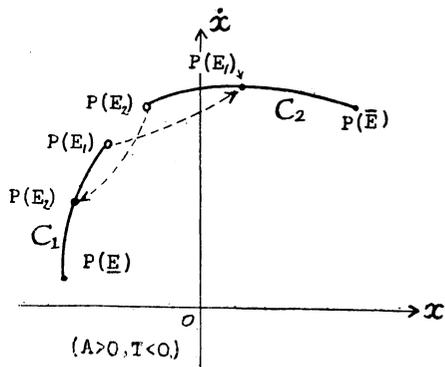


Fig. 2.

Désormais nous ne considérons seulement que le cas où le paramètre E est varié dans l'intervalle $\underline{E} < E$

$< \bar{E}$, où \underline{E} (petit) et \bar{E} (grand) sont choisis convenablement mais fixes une fois pour toutes (voir Fig. 1).

Ceci fait, il faut éclaircir notre plan des raisonnements. Considérons d'abord le cas où E est varié de \underline{E} à \bar{E} . Alors à partir de \underline{E} faisons correspondre pour chaque valeur de E continûment le point de (x, \dot{x}) qui vient d'être défini (voir Fig. 2). Alors, lorsqu'on arrive à la valeur E_1 , on a une discontinuité brusque. On a ainsi une suite des points bien définis dépendants de \bar{E} , excepté le cas où $E = E_1$. Nous voulons prouver ce ne sont autres que les points représentant les oscillations que nous avons dites dans 1° du n°3. C'est-à-dire, si l'on désigne ces points par $(\rho_1(E), \varphi_1(E))$ où $\rho = x^2 + \dot{x}^2$, $\varphi = \tan^{-1}(\dot{x}/x)$, l'oscillation sinusoidale

$$(14) \quad x_1(t; E) = \rho_1(E)^{1/2} \cos \omega \{t - \phi_1(E)\}$$

n'est autre que l'oscillation dite dans 1° du n°3. Autrement dit, si on fait varier E de \underline{E} à \bar{E} lentement, les oscillations réalisées sont toujours sensiblement égaux aux précédentes, excepté le cas où E est voisin de E_1 .

Si nous considérons le cas où E est varié de \bar{E} à \underline{E} en décroissant, nous avons comme au dessus une suite des points dans (x, \dot{x}) , qui sont *distincts* pour les valeurs de E dans $E_2 < E < E_1$, et ayant la discontinuité brusque pour $E = E_2$, et de la même façon, l'oscillation sinusoïdale

$$(15) \quad x_2(t; E) = \rho_2(E)^{1/2} \cos \omega \{t - \phi_2(E)\}$$

qui est *distincte* de (14) pour toute la valeur dans $E_2 < E < E_1$.

Le phénomène d'hystérésie vient de ce fait.

8. Nous allons démontrer la proposition suivante: Choisissons d'abord une valeur $E_1' (< E_1)$ voisine de E_1 mais fixe une fois pour toutes (voir Fig. 2), et considérons le cas où l'on fait varier le paramètre E de \underline{E} à E_1' , nous obtenons ainsi le point $P(E)$, $\underline{E} \leq E \leq E_1'$, sur C_1 (voir Fig. 2).

Nous prouverons alors que, si γ est choisi assez petit, pour l'équation (2) ainsi déterminée, nous voyons que, si la valeur initiale $(x(0), \dot{x}(0))$ est posée dans un voisinage de $P(\underline{E})$ convenablement choisi lorsque $E = \underline{E}$, et puis si le paramètre E est varié lentement, la solution change ses valeurs initiales (nous dirons pour abrégé "les valeurs initiales" les points (x, \dot{x}) qui correspondent aux temps qui sont les multiples entiers de la période, c'est-à-dire $n \cdot 2\pi/\omega$, $n=0, 1, 2, \dots$) selon la variation de E , mais alors ses valeurs initiales (ou position initiales) restent toujours dans un petit voisinage (considéré à priori) de $P(E)$, où E , bien entendu, doit être considéré comme substitué par la valeur à cet instant.

Puisque la démonstration est un peu délicate, partageons-la en deux parties.

9. Le cas où E est varié brusquement d'une petite échelle après une longue pause. Pour la démonstration il suffit de prouver dans le plan des (ρ, φ) , donc nous y considérons désormais. Ici, comme la variation de E est brusque, nous considérons E comme paramètre fixe provisoirement.

D'abord nous voulons connaître un peu précisément l'allure

asymptotique du point (ρ_0, φ_0) quand la transformation (6) est effectuée successivement. Pour cela, nous considérons celle de la solution de l'équation différentielle (9). Comme sur la curve C_1 (voir Fig. 3) on a $d\rho/dt = d\varphi/dt = 0$, l'équation différentielle pour $\begin{cases} \delta\rho = \rho - \rho_0 \\ \delta\varphi = \varphi - \varphi_0 \end{cases}$, (ρ_0, φ_0) indiquant les coordonnées de $P(E)$, devient, en tenant compte de (12), (12')

$$(12'') \quad \begin{cases} \delta\rho' = a\delta\rho + b\delta\varphi + \dots, \\ \delta\varphi' = c\delta\rho + a\delta\varphi + \dots, \end{cases}$$

où $a = -\frac{P}{2} < 0$, $b = E\sqrt{\rho} \cos\varphi$,

$$c = -\left(\frac{E \cos\varphi}{4\sqrt{\rho^3}} + \frac{3}{8}A\right).$$

Rappelons-nous que b et c varient continûment lorsque le point $P(E)$ se meut sur la courbe C_1 , c'est-à-dire ce sont les quantités dépendantes continûment de E . Ici, les termes non écrits sont ceux de troisième degré en $\delta\rho$, $\delta\varphi$, où les coefficients sont uniformément bornés lorsque les coordonnées $(\delta\rho, \delta\varphi)$ sont uniformément petites pour $E \leq E \leq E_1'$.

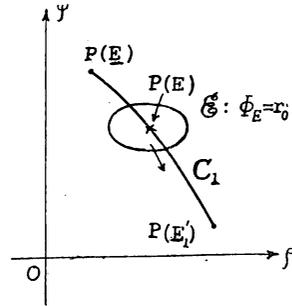


Fig. 3.

Cela fait, considérons la quantité suivante pour chaque valeur fixée de E autour chaque point $P(E)$,

$$(16) \quad \Phi_E(\delta\rho, \delta\varphi) = [u(\delta\rho)^2 + \beta(\delta\varphi)^2]/2,$$

où u et β sont constantes positives que nous allons définir et qui dépendent continûment de E .

Considérons la dérivée de Φ_E prise suivant une solution de (9), il vient

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_E &= u\delta\rho \cdot \delta\rho' + \beta\delta\varphi \cdot \delta\varphi' = u\delta\rho \cdot [a\delta\rho + b\delta\varphi + \dots] \\ &\quad + \beta\delta\varphi \cdot [c\delta\rho + a\delta\varphi + \dots] \\ &= au\delta\rho^2 + (bu + c\beta)\delta\rho\delta\varphi + a\beta\delta\varphi^2 + \dots, \end{aligned}$$

où les termes non écrits sont de troisième degré.

Nous voulons déterminer u , β tels que la dernière expression soit négativement définie. Pour cela, considérons le discriminant

$$(18) \quad (bu + c\beta)^2 - 4a^2u\beta = b^2u^2 + 2(bc - 2a^2)u\beta + c^2\beta^2.$$

Nous devons prendre u , β tels que (18) soit négatif. Pour cela, il

suffit de voir son discriminant (comme les trois quantités b , c , $bc-2a^2$ ne sont pas simultanément nulles), il vient

$$4(bc-2a^2)^2-4b^2c^2=4^2a^2(a^2-bc)=4^2a^2\cdot f'(\rho).$$

Comme cette quantité est toujours positive, et que le coefficient de $a\beta$ dans (18) est négatif, nous pouvons prendre a , β tels que ce soient positifs simultanément et que $a^2+\beta^2=1$ et d'ailleurs qu'ils dépendent continûment de E .

Remarquons que par la continuité par rapport à E , on a

$$(19) \quad 1 \geq a \geq a_0 > 0, \quad 1 \geq \beta \geq \beta_0 > 0$$

pour toutes les valeurs considérées de E .

Pour a , β ainsi déterminées, l'expression $a\alpha\delta\rho^2+\dots+a\beta\delta\varphi^2$ est toujours négativement définie, par conséquent,

$$\sup_{\delta\rho^2+\delta\varphi^2=1} \frac{a\alpha\delta\rho^2+(ba+c\beta)\delta\rho\delta\varphi+a\beta\delta\varphi^2}{[a\delta\rho^2+\beta\delta\varphi^2]/2}$$

est négative pour chaque E , et comme cette quantité dépend continûment de E , on a sa maximum $-\mu_0$ négatif.

Par conséquent, en tenant compte des termes non écrits et les inégalités (19), on a

$$(20) \quad \frac{d}{dt} \Phi_E \leq -\frac{\mu_0}{2} \Phi_E, \quad \text{pour } \Phi_E \leq r_0,$$

où r_0 est un nombre positif choisi convenablement petit.

L'inégalité (20) nous apprend quantitativement l'allure asymptotique de la solution de l'équation différentielle (9), et d'ailleurs de la manière unifiée pour chaque valeur de E ; remarquons ici que, si la position initiale est donnée dans le domaine tel que $\Phi_E \leq r_0$, la solution ainsi déterminée entre dans le domaine tel que $\Phi_E \leq r_0/4$, au plus tard après l'époque $2/\mu_0 \cdot \log 4$, nous la désignons par T . En effet, on a $d/dt \cdot \log \Phi_E \leq -\mu_0/2$, par suite $\log(\Phi_E/\Phi_E^0) \leq -(\mu_0/2)t$, où Φ_E^0 désigne la valeur initiale de Φ_E correspondante au point initiale. Il en résulte immédiatement la proposition demandée.

Nous allons maintenant considérer qualitativement l'allure asymptotique du point (ρ_0, φ_0) lorsque la transformation (6) est effectuée successivement pour γ assez petit. Pour cela, nous considérons la transformation (6) en modifiant comme il suit. D'abord, pour γ fixe, nous considérons un point (ρ_0, φ_0) dans le domaine $r_0/2 \leq \Phi_E \leq r_0$, et transformons-le par (6), nous désignons

ce point par $(\rho_0^{(1)}, \varphi_0^{(1)})$, et encore transformons celui-ci par (6), nous le désignons par $(\rho_0^{(2)}, \varphi_0^{(2)})$, Ainsi nous obtenons une suite de points (ρ_0, φ_0) , $(\rho_0^{(1)}, \varphi_0^{(1)})$, ..., $(\rho_0^{(n)}, \varphi_0^{(n)})$, ..., où il suffit de prendre pour n jusqu'à $[T/2\pi\gamma] + 1$, et nous désignons $2\pi\gamma$ par Δt . Ceci fait, joignons ces points successivement, nous avons ainsi une ligne brisée, alors nous pouvons considérer le mouvement sur cette ligne brisée qui, en partant de (ρ_0, φ_0) , se meut sur chaque segment pendant le temps Δt (commun), à une vitesse uniforme (bien entendu, cette vitesse peut être en général distincte pour chaque segment de la ligne).

Comparons ce mouvement avec celui qui est défini par l'équation différentielle (9) avec le même point initial. Nous pouvons dire que celui-là peut être "approché"* de celui-ci aussi bien qu'on le veut, si γ est choisi petit. Et d'ailleurs, dans ce cas, ce l'est uniformément pour toutes les mouvements qui partent dans le domaine $r_0/2 \leq \phi_E \leq r_0$ et pour toutes les E .

Cette proposition n'est qu'une interprétation cinématique qui justifie la méthode de Cauchy-Lipschitz généralisée en théorie des équations différentielles ordinaires.**

Considérons $(d/dt) \phi_E$ suivant une trajectoire ainsi définie, en comparant avec la trajectoire de (9) avant la même position initiale, on voit que cette dérivée est très voisine de celle qui a été calculée suivant la trajectoire de (9) au même instant. En effet, comme deux trajectoires sont "voisines", (ρ, φ) et $(\dot{\rho}, \dot{\varphi})$ sont très voisins, et comme les dérivées premières de ϕ_E sont continues et bornées, nous avons la propriété demandée.

Par suite, si γ est choisi assez petit, pour les trajectoires ainsi déterminées, nous avons, suivant ces trajectoires,

$$(21) \quad \frac{d}{dt} \phi_E \leq -\frac{\mu_0}{2} (\phi_E - \varepsilon),$$

pour les trajectoires qui partent du domaine $r_0/2 \leq \phi_E \leq r_0$, où ε est une constante positive donnée à l'avance.

Par suite, si on prend $\varepsilon = r_0/4$, comme dans le domaine $\phi_E \geq r_0/2$ on a $\phi_E - \varepsilon \geq r_0/4$, nous avons

* Nous dirons que deux mouvements dans le plan des (ρ, φ) sont "approchants" ou "voisins" dans un intervalle du temps $0 \leq t \leq T$, si les deux points mobiles sont voisins les uns les autres uniformément pendant ce temps avec ses vitesse, c'est-à-dire $\dot{\rho}, \dot{\varphi}$ en chaque instant.

** Voir H. Okamura: L'introduction à la théorie des équations différentielles, p. 127-128.

$$(22) \quad \frac{d}{dt} \phi_E \leq -\frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{r_0}{4}.$$

Nous avons ainsi obtenu un résultat quantitatif demandé: Si (ρ_0, φ_0) dans le domaine $r_0/2 \leq \phi_E \leq r_0$, est transformé par (6), cette variation de position est connue en moyen de celle de ϕ_{∞} que voici;

$$(23) \quad \delta \phi_E \leq -\frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{r_0}{4} 2\pi\gamma = -k, \quad \text{où } k > 0.$$

Avant d'entrer dans la démonstrations, nous remarquons ici; 1°. Que, si une valeur initiale (ρ_0, φ_0) est donnée dans le domaine $\phi_E \leq r_0$, on voit d'après (23) que ces valeurs initiales restent dans le domaine $\phi_E \leq r_0/2$ au plus tard après $(r_0 - r_0/2)/k$ fois de la période;

2°. Lorsqu'on fait varier brusquement la valeur E de E à E' en un instant, nous considérons pour abrèger que ce moment est avant une période $2\pi/\omega$ alors toutes les solutions qui ont les valeurs initiales dans $\phi_E \leq r_0/2$ recevront des variations, mais si $|E' - E|$ est petit, c'est-à-dire si $|E' - E| < \epsilon_1$, ses positions initiales au moment $2\pi/\omega$ restent dans le domaine $\phi_E \leq (2/3)r_0$, et uniformément pour toutes les valeurs de E .

Ceci fait, attachons pour chaque point $P(E)$ de C_1 l'ellipse supérieure $\phi_E = r_0$ et l'ellipse inférieure $\phi_E = (2/3)r_0$ (voir Fig. 3), comme les centres et les formes de ces ellipses changent continûment, nous pouvons trouver un nombre $\epsilon (< \epsilon_1)$ tel que suivant;

Si on prend une division arbitraire $\underline{E} = \tilde{E}_0 < \tilde{E}_1 < \tilde{E}_2 < \tilde{E}_3 < \dots < \tilde{E}_n = \tilde{E}'$ telle que $\max(\tilde{E}_{i+1} - \tilde{E}_i) < \epsilon$, l'ellipse supérieur en \tilde{E}_i contient dans son intérieures l'ellipse inférieure en \tilde{E}_{i-1} .

Par suite, si on change le paramètre E de \underline{E} à \tilde{E}' de la manière brusque en un nombre fini de fois par échelle moins que ϵ , et d'ailleurs chaque intervalle de pause est plus long que $\frac{r_0/2}{k \times 2\pi/\omega}$ (voir 1°), nous verrons qu'une solution arbitraire, commencée par sa valeur initiale dans l'ellipse inférieure en \underline{E} , change sa valeur initiale en restant dans l'ellipse supérieure. Plus précisément, lorsque le paramètre est tenu constant $\underline{E} = \tilde{E}$, alors la solution a toujours sa valeur initiale dans l'ellipse supérieure en $\tilde{E} = \tilde{E}$. Ainsi nous avons démontré la propriété demandée.

10. Le cas où E est varié continûment et lentement.

D'abord, nous voyons dans ce cas la propriété suivante: Lorsque

$\Delta E(t)$ est très petit, $\Delta E(t)$ désignant la variation de $E(t)$ pendant une période, toutes les solutions ayant ses valeurs initiales dans l'ellipse supérieure en $E(t)$ ont ses valeurs initiales, après une période, égaux à erreurs au plus η près à celles des solutions obtenues en supposant E invariable pendant cette période, et d'ailleurs cette propriété est uniforme pour toutes valeurs de E , et où η est un nombre arbitraire choisi à l'avance.

Cela fait, prenons pour η tel que l'on ait, en tenant compte de (23),

$$(24) \quad \delta\phi_E \leq -\frac{k_0}{2}.$$

Il en résulte que si $\Delta E(t)$ est très petit, l'ellipse supérieure en $E + \Delta E$ contient toujours tous les points tels que $\phi_E \leq r_0 - k_0/2$. Par suite, on voit que si $\Delta E(t)$ est très petit, la solution commencée par une valeur initiale arbitraire dans $\phi_{E \leq r_0}$, garde toujours ses valeurs initiales dans $\phi_{E(t)}$. Nous avons ainsi démontré la propriété demandée.

Remarquons ici que lorsqu'on choisit une valeur $E_2' (> E_2)$ voisine de E_2 (voir Fig. 1), alors sur la courbe $C_2: \{P(E); E_2' \leq E \leq \bar{E}\}$, (voir Fig. 2), on peut raisonner de la même manière que sur C_1 qui vient d'être faite. Par suite, fixons, désormais E_1' et E_2' , et considérons que pour chaque point des C_1 et C_2 un voisinage qui est la transformée de l'ellipse supérieure susdite ($\phi_E = r_0$) est attaché. Mais γ est considéré comme indéterminé.

11. L'analyse du phénomène de sauts.

On a vu que, si γ est choisi petit dans le système (2), alors, si on fait varier le paramètre E jusqu'à E_1' lentement, on peut savoir l'allure de la solution précisément à une petite erreur près. Mais, après ce moment on ne sait pas son allure exacte. Nous démontrons, toutefois, que, lorsqu'on fait varier E assez lentement et l'amène à la valeur $E_1'' (E_1'' (> E_1))$ est une valeur voisine de E_1 , choisie à l'avance) (voir Fig. 1), alors les valeurs initiales de cette solution restent dans le voisinage de $P(E_1'')$ considéré au numéro précédent, pourvu que γ est choisi petit dans (2).

12. Transformons dans (9) les variables indépendantes à (x, y) , il vient

$$(9') \quad \dot{x} = (\sqrt{\rho} \cos \varphi)' = \frac{\cos \varphi}{2\sqrt{\rho}} \dot{\rho} - \sqrt{\rho} \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = -\frac{P}{2}x + Ty + \frac{3}{8}Ay(x^2 + y^2),$$

$$\dot{y} = (\sqrt{\rho} \sin \varphi) \dot{\rho} + \sqrt{\rho} \cos \varphi \dot{\varphi} = \frac{E}{2} - Tx - \frac{P}{2}y - \frac{3}{8}Ax(x^2 + y^2).$$

Cette équation nous apprend une propriété très importante. En effet, posons (9') comme suivant,

$$(9'') \quad \begin{cases} \dot{x} = X(x, y), \\ \dot{y} = Y(x, y), \end{cases}$$

alors on a

$$(25) \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = -P.$$

Ceci fait, considérons l'équation (9'') comme définissant un mouvement d'un fluide remplissant le plan, alors, si nous désignerons par $\Omega(t)$ l'aire du fluide, au temps t , qui a occupé initialement ($t=0$) un domaine déterminé, nous avons, en vertu de (25),

$$\frac{d}{dt} \Omega(t) = -P \cdot \Omega(t),$$

par suite, $\Omega(t) = \Omega(0) \cdot e^{-Pt}$. Au contraire, si nous désignerons par $A(t)$ l'aire du domaine occupé par le fluide qui occupera un domaine déterminé après le temps t , on a

$$(26) \quad A(t) = A(0) \cdot e^{Pt}.$$

13. Considérons un grand cercle K de rayon R , centre à l'origine tel que l'on ait dans l'équation (9)

$\rho < -a$ pour $R-1 < \rho < R$ et pour $E_1' \leq E \leq E_1''$, où a est un nombre positif. Alors si γ est choisi petit dans (2), pour l'équation (2) ainsi déterminée on a la proposition suivante :

Si nous faisons varier le paramètre E assez lentement de E_1' à E_1'' , une solution arbitraire qui a sa valeur initiale dans le voisinage de $P(E_1')$ lorsque $E = E_1'$, reste toujours dans K .

En effet, puisque γ est petit, nous avons dans (6),

$$\Delta \rho_0 < (-a + \varepsilon) 2\pi\gamma, \quad \text{pour } R-1 < \rho_0 < R \text{ et } E_1' \leq E \leq E_1'',$$

où ε est infiniment petit avec γ .

Par suite on peut supposer $\Delta \rho_0 < -a/2 \cdot 2\pi\gamma$. Pour γ ainsi déterminé nous considérons (2), alors nous avons la même proposition énoncée au commencement du n°10. Par suite, si ΔE est très

petit, les valeurs initiales successives restent dans K . Nous raisonnerons désormais seulement dans le cercle K .

Considérons l'équation (9) ou sa transformée (9') lorsque $E=E_1''$, alors le point singulier est le point $P(E_1'')$ seulement, et attachons à ce point le voisinage \mathfrak{C} (transformé de l'ellipse supérieure en $P(E_1'')$).

Nous dirons que toutes les solutions de (9) qui partent d'un point arbitraire dans K restent dans le voisinage \mathfrak{C} après un temps T uniformément pour toutes les solutions, où T sera choisi convenablement grand.

D'abord, nous prouverons qu'une solution qui part d'un point arbitraire dans K , entre dans \mathfrak{C} après un temps fini. Nous le ferons par contradiction. Pour cela, considérons l'ensemble $A(t)$ qui devient \mathfrak{C} après le temps t , comme nous avons considéré dans n°12. D'après (26), lorsqu'on fait croître t , l'ensemble $A(t)$ aura nécessairement une partie en dehors de K . Nous fixons tel ensemble et le désignons par $A(t_0)$.

Cela fait, supposons qu'il existe dans K un point tel que la solution de (9) qui part de ce point n'entre jamais dans \mathfrak{C} . Comme il n'existe aucun point singulier dans $K-\mathfrak{C}$, et cette trajectoire n'aurait \mathfrak{C} comme point d'accumulation, cette trajectoire aurait nécessairement un cycle limite dans $K-\mathfrak{C}$. Comme un cycle limite a nécessairement un point singulier, ce cycle limite contiendrait \mathfrak{C} dans son intérieur. Par suite ce cycle limite aurait une partie commune avec $A(t_0)$, donc la trajectoire le serait aussi. Ceci explique que cette trajectoire faut entrer dans \mathfrak{C} après un temps fini, contrairement à la supposition.

Nous prouverons qu'il existe un temps T énoncé précédemment. En effet, s'il n'en est pas ainsi, il existerait un point (dans $K-\mathfrak{C}$) tel qu'aucun voisinage, quelque petit que ce soit, contienne des points tels que les trajectoires partant de ces points n'entrent pas dans \mathfrak{C} après un temps fixé, quelque grand que ce soit. C'est absurde, car ce point a la trajectoire qui, en partant de ce point, entre dans \mathfrak{C} après le temps fini τ . Alors, si nous prendrons un petit voisinage autour de ce point, ce voisinage entre dans \mathfrak{C} après ce temps τ . (C'est une conséquence de la propriété connue sous le nom "la continuité par rapport à la valeur initiale").

14. Cela fait, par l'énoncé précédent, nous pouvons supposer hcaque trajectoire entre dans le petit voisinage ($\subset \mathfrak{C}$): $\Phi_{E_1''} < \gamma_0/4$,

après un temps T_0 . Par suite, en faisant le même raisonnement que celui du $n^{\circ}9$, on voit que si γ est choisi petit, la transformation (6) ainsi déterminée a la propriété suivante ;

Il existe un nombre entier n_0 (dépendant de γ) tel que, si on applique la transformation (6) à un point arbitraire $(\rho_0, \varphi_0) \in K$ successivement n_0 fois, le dernier point entre dans le voisinage $\Phi_{E_1''} < r_0/2$, et d'ailleurs les points successifs restent aussi dans ce voisinage.

Toutefois, il est à remarquer que dans ce raisonnement l'inégalité (7) est utilisée pour $\rho_0 > 1/K$; mais pour $\rho_0 \leq 1/K$ on doit considérer la transformation (6) en transformant en (x_0, y_0) -système.

Cela fait, considérons le cas général où E est varié lentement à partir de $E = E_1''$. Alors, en tenant compte du fait que toutes les solutions ayant ses valeurs initiales dans K restent toujours dans K , et d'ailleurs au plus tard après le temps $n_0 \times 2\pi/\omega$ ses valeurs initiales entrent dans le voisinage $\Phi_{E_1''} < r_0/2$ lorsque E est tenu fixe et égale à E_1'' , nous voyons que, si $\Delta E(t)$ est petit, $\Delta E(t)$ désignant la variation de E pendant le temps $n_0 \times 2\pi/\omega$, toutes solutions correspondantes ont ses valeurs initiales dans l'ellipse inférieure $\Phi_{E_1''} < 2/3 \cdot r_0$ après ce temps. Puisque $\Delta E(t)$ est petit, nous pouvons supposer l'ellipse inférieure en $P(E_1'')$ est contenue dans l'ellipse supérieure en $P(E_1'' + \Delta E)$, où ΔE désigne l'accroissement de E pendant le temps $n_0 \times 2\pi/\omega$.

Nous avons ainsi complété l'analyse du phénomène de sauts.

15. En tenant compte des résultats des $n^{\circ}8$, 10, 14, nous avons démontré l'existence du phénomène de sauts avec hystérésis, quand γ est choisi assez petit dans (2). Alors il est nécessaire de remarquer que sous l'expression (14), (15) du $n^{\circ}15$ le phénomène de sauts se présente quand

- 1) $\pi/2 < \varphi(E) < \pi$ lorsque $A > 0$,
- 2) $0 < \varphi(E) < \pi/2$ lorsque $A < 0$.

Et en parlant grossièrement, lorsque $\varphi(E)$ est voisin de 0 ou π , le phénomène de sauts n'a pas lieu (voir Fig. 2).

A la fin, nous remarquons le suivant : Nous avons considéré A, P, T comme fixés toujours, mais il est à peu près évident que, si T est considéré un paramètre variable autour une valeur T_0 , alors on peut trouver un nombre γ_0 du lemme fondamental commun à tels systèmes (A, P, T) si on restreint l'intervalle de T autour de T_0 convenablement.

16. D'après le lemme fondamental, nous obtenons

Théorème 1. Considérons l'équation

$$(1) \quad \ddot{x} + p\dot{x} + ax + bx^3 = e \cos \omega t, \quad (p, a, e > 0, b \neq 0).$$

Si nous y regardons "e" comme paramètre, et supposons que p/\sqrt{a} soit moindre qu'un nombre γ_0 fixe, on y voit le phénomène de sauts avec hystérésis lorsqu'on choisit ω convenablement.*

Démonstration. Transformons (1) par $\sqrt{a}t = \tau$, il vient

$$(1') \quad \ddot{x} + \frac{p}{\sqrt{a}}\dot{x} + x + \frac{b}{a}x^3 = \frac{e}{a} \cos \frac{\omega}{\sqrt{a}}\tau.$$

Donc il suffit de considérer l'équation

$$(1'') \quad \ddot{x} + p'\dot{x} + x + b'x^3 = e' \cos \omega' t.$$

Considérons, en outre, un système de nombres arbitraires (A, P, T) satisfaisant à (3) du lemme, où $A \geq 0$ selon que $b' \geq 0$, et prendrons $P=1$ pour abrégier. Alors, pour l'équation (2) avec les constants ainsi déterminées, il existe un nombre γ_0 énoncé dans le lemme.**

Nous supposons que la condition $p' < \gamma_0$ est remplie, alors en transformant (1'') par $x = \sqrt{\varepsilon} \xi(t)$, il vient

$$(1''') \quad \ddot{\xi} + p'\dot{\xi} + \xi + \varepsilon b' \xi^3 = \frac{e'}{\sqrt{\varepsilon}} \cos \omega' t.$$

Donc, si nous prendrons ε tel que $\varepsilon b' = p'A$, c'est-à-dire,

$$(27) \quad \varepsilon = \frac{p'}{b'} A,$$

et ω' tel que $1/\omega' = 1 + p'T$, nous obtenons le système considéré dans le lemme fondamental.

Remarque 1. Comme on le voit aisément dans la démonstration, selon notre raisonnement, les valeurs de sauts pour "e" sont en général petites, et aussi les amplitudes des oscillations petites. Mais il est à remarquer que, si nous faisons décroître b dans (1), p, a , et ω étant fixés, alors ε devient grand (d'après (27)), par

* D'après la remarque à la fin du n°15, nous pouvons plus précisément dire que: "lorsqu'on choisit dans un certain intervalle $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ ", mais alors l'intervalle (ω_1, ω_2) n'est pas connu précisément, car sa position et son longueur changent avec p, a, b .

** Il suffit, pour γ_0 de ce théorème de prendre la limite supérieure de tels γ_0 obtenus lorsqu'on fait varier (A, T) , mais ce n'est pas intéressant dans nos considérations. Toutefois, il nous semble désireux de déterminer tel γ_0 effectivement. Par notre raisonnement seul, il semble presque impossible.

suite les amplitudes des oscillations et les valeurs de sauts pour e deviennent grandes. Par suite, alors, les phénomènes de sauts et les hystérésies oscillatoires seront clairement observés. Grossièrement, nous pouvons dire que, lorsque le système (1) est quasi-linéaire, c'est-à-dire si b est très petit par rapport à a , les phénomènes sont clairement observés.

Remarque 2. D'après la condition (3) on doit avoir $AT < 0$. En revenant à (1), nous devons choisir ω comme suivant :

$$\omega \geq \sqrt{a} \quad \text{selon que } b \geq 0, \text{ dans notre raisonnement.}$$

17. Jusqu'ici nous avons considéré e comme paramètre dans (1), nous allons maintenant considérer ω comme paramètre. Alors, on a la même propriété que le lemme fondamental. Nous l'énonçons comme le suivant,

Lemme. Dans l'équation (2) si nous regardons T comme paramètre, le phénomène de sauts avec hystérésie a lieu si γ est choisi petit. C'est-à-dire il existe un nombre γ_0 dépendant des A, P, E tel que, si $\gamma < \gamma_0$ l'équation (2) ainsi déterminée a la propriété demandée.

Démonstration. L'équation $f(\rho) = E^2$ (11), s'écrit

$$(28) \quad \rho + \frac{8T}{3A} = \pm \frac{4E}{3|A|} \sqrt{\frac{1}{\rho} - \left(\frac{P}{E}\right)^2}$$

On voit les variations des racines selon la variation de T (voir Fig. 4).

Par suite le phénomène d'hystérésie est évident.

Comme la démonstration est à peu près la même que le lemme fondamental, nous ne la reprenons plus.

Par suite, nous avons

Théorème 2. Considérons l'équation

$$(1) \quad \ddot{x} + p\dot{x} + ax + bx^3 = e \cos \omega t \quad \left(p, a, e > 0, b \neq 0 \right).$$

Si nous y regardons ω comme paramètre, et supposons que p/\sqrt{a} soit moindre qu'un nombre

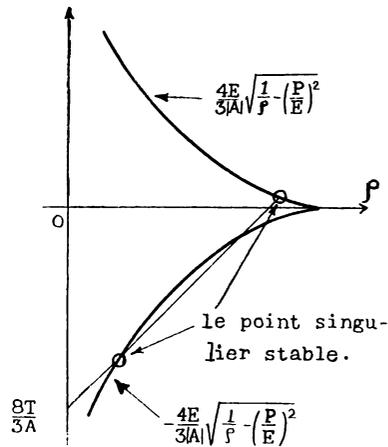


Fig. 4.

γ_0 fixe, on y voit le phénomène de sauts avec hystérésie lorsqu'on choisit "e" convenablement.*

Démonstration. Il est à peu près la même que la démonstration de Théorème 1. Toutefois, ici on doit prendre pour e' dans (1''') tel que $e'/\sqrt{\varepsilon^-} = p'E$, c'est-à-dire que

$$(28) \quad e' = \sqrt{\varepsilon^-} p'E.$$

Remarque 3. De la même façon que Remarque 1., nous voyons que, par notre raisonnement seul, on doit choisir "e" petit en général, et alors les solutions sont petites à ses amplitudes. Mais, si le système est quasi-linéaire, les phénomènes seront clairement observés. Voir Remarque 1.

Remarque 4. Comme on voit aisément dans Fig. 4, les fréquences ω auxquelles le phénomène de saut se présente sont $\cong \sqrt{a}$ selon que $b \geq 0$. Ce fait est d'accord bien avec l'expérience bien connu.

En terminant ce mémoire, l'auteur veut exprimer ses remerciements à M. le Professeur T. Matsumoto qui l'a conduit à ces recherches et encouragé pendant ces recherches, et aussi à mon collègue Masaya Yamaguti qui lui a donné ses conseils précieux.

Bibliographe.

- 1) M. L. Cartwright: On non linear differential equations of the second order Proc. Cambridge Phil. Soc. 45, 495-501.
- 2) N. Minorsky: Introduction to non-linear mechanics. (1947).
- 3) N. Minorsky: Parametric excitation, Journal of applied physics, 22 (1951).
- 4) H. Okamura: L'introduction à la théorie des équations différentielles (en japonais), Libraire Kawadé, 1950.
- 5) G. E. H. Reuter: Subharmonics in a non-linear system with unsymmetrical restoring force, Quart. Journ. Mech. and Appl. Math. Vol. 2, (1949).
- 6) J. J. Stoker: Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems, (1950).

* On peut dire que; "Lorsqu'on choisit dans un certain intervalle $e_1 \leq e \leq e_2$ ". Voir Théorème 1.