MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES A
Vol. XXIX, Mathematics No. 2, 1955.

Über den Durchschnitt $\bigcap_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$ der Ideale $\mathfrak{a}_\alpha$

Masazo Sono zum 70 Geburtstag gewidmet

Von

Shinziro MORI

(Eingegangen am 15, Oktober 1954)

Der Krullsche Durchschnittssatz lautet bekanntlich:

Es sei $\mathfrak{R}$ ein Integritätsbereich mit Einheitselement, der der Maximalbedingung genügt. Dann ist der Durchschnitt $\bigcap_i \mathfrak{a}^i$ aller Potenzen eines beliebigen Ideals $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ stets gleich dem Nullideal, wenn $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{R}$ verschieden ist.

Wählt man für $\mathfrak{R}$ an Stelle des Integritätsbereichs mit der Maximalbedingung irgendeinen Integritätsbereich, in dem jedes Ideal sich als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen darstellen lässt, so gilt der Durchschnittssatz bestimmt nicht mehr, wie durch das Beispiel, etwa des Stiemkeschen unendlichen algebraischen Zahlkörpers,[1] gezeigt wird.

Um den Krullschen Satz in den obig besprochenen Integritätsbereichen zu verallgemeineren, erweist es sich aber als nötig, den Durchschnitt $\bigcap_i \mathfrak{a}^i$ durch einen neuen Begriff zu ersetzen, der aber im Noetherschen Integritätsbereich mit $\bigcap_i \mathfrak{a}^i$ übereinzustimmen hat.

Es sei darum $\mathfrak{a}_\alpha$ ein beliebiges Ideal, das gleichzeitig mit einem gegebenen Ideal $\mathfrak{a}$ auch zu demselben Halbprimideal gehört, d.h. jedes Element von $\mathfrak{a}_\alpha$ sei nilpotent in Bezug auf $\mathfrak{a}$ und umgekehrt. Wenn wir wie den Durchschnitt $\bigcap_i \mathfrak{a}^i$ auch den Durchschnitt $\bigcap_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$ von allen Idealen $\mathfrak{a}_\alpha$, welche mit $\mathfrak{a}$ zu demselben Halbprimideal gehören, in Betracht ziehen, so sind im kommutativen Ring mit der Maximalbedingung die beiden Durchschnitten $\bigcap_i \mathfrak{a}^i$ und $\bigcap_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$ identisch.

In erster Linie handelt es sich um die Eigenschaften des

---

1) N. Nakano, Idealtheorie im Stiemkeschen Körper, Jour. of Sci. of Hiroshima Univ. 18, No. 3. (1955), 271–287.

Durchschnittes $\bigcap_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$ in kommutativen Ringen ohne Einheitselement, in denen jedes Ideal sich als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen darstellen lässt, insbesondere um die Verallgemeinerung von Zariskischen Satz[2] für $\bigcap_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$. In § 2 endlich wird die Zusammenhang zwischen $\bigcap_i \mathfrak{a}_i$ und $\bigcap_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$ im allgemeinen kommutativen Ring gegeben.

1. Sätze über $\bigcap_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$

Den Untersuchungen liegt der kommutative Ring $\mathfrak{R}$ ohne Einheitselement stets zugrunde, in dem jedes Ideal sich als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen darstellen lässt.[3]

Um als Hauptziel dieses Abschnittes zu der Verallgemeinerung des Zariskischen Satzes zu gelangen, schicken wir einige Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei Ideale aus* $\mathfrak{R}$ *und ist* $\mathfrak{d}_0$ *ein beliebiges Ideal, das durch* $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$ *teilbar ist, so wird*

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{d}_0, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{d}_0, \mathfrak{b}).$$

Nach unserer Annahme für $\mathfrak{R}$ besitzt $(\mathfrak{a}\mathfrak{d}_0, \mathfrak{b})$ eine kürzeste Darstellung $(\mathfrak{a}\mathfrak{d}_0, \mathfrak{b}) = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$, bei der $\mathfrak{q}_i$ ein zum Primideal $\mathfrak{p}_i$ gehöriges schwaches Primärideal darstellt. Wenn $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ ist, so folgt aus $\mathfrak{a}\mathfrak{d}_0 \subseteqq \mathfrak{q}_i$

$$\mathfrak{d}_0 \subseteqq \mathfrak{q}_i\,.$$

Es sei nun $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}_i$. Da jedes Element aus $\mathfrak{p}_i$ nilpotent in Bezug auf $\mathfrak{q}_i$ ist, muss jedes Element aus $(\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$ auch nilpotent in Bezug auf $\mathfrak{q}_i \cap (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ sein, und umgekehrt. Aus der Definition von $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$ folgt danach $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) \subseteqq \mathfrak{q}_i$, also

$$\mathfrak{d}_0 \subseteqq \mathfrak{q}_i\,.$$

2) O. Zariski, Generalized semi-local rings, Summa Brasiliensis Mathematicae 1 (1946), 169-195.

M. Yoshida and M. Sakuma, The intersection theorem on Noetherian rings, Jour. of Sci. of Hiroshima Univ. 17 (1954), 317-320.

S. Mori, Über die Gleichung $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{x}$ mit einem unbekannten Ideale $\mathfrak{x}$, Jour. of Sci. of Hiroshima Univ. 17 (1954), 303-309.

3) Zur Struktur dieser Ringe vgl. S. Mori, Über kommutative Ringe mit der Teilerkettenbedingung für Halbprimideale, Jour. of Sci. of Hiroshima Univ. 16 (1952), 247-260.

Damit ist $(\mathfrak{d}_0, \mathfrak{b}) = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n = (\mathfrak{a}\mathfrak{d}_0, \mathfrak{b})$ bewiesen.

Hilfssatz 2. *Es sei* $\mathfrak{q}$ *ein schwaches Primärideal und von* $\mathfrak{R}$ *verschieden. Ist* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{q}) \neq \mathfrak{R}$, *oder besitzt der Restklassenring* $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}$ *kein Einheitselement, so ist* $\bigcap_{\alpha} (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$.

Nach Hilfssatz 1 ist

$$(\mathfrak{a}(d), \mathfrak{q}) = ((d), \mathfrak{q})$$

für ein beliebiges Element d aus $\bigcap_{\alpha} (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{q})$. Danach gilt es

$$da \equiv d \ (\mathfrak{q}) \tag{1}$$

für ein Element a aus $\mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{p}$ das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal, so kommen folgende verschiedene Fälle in Betracht.

Ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{p}$, so ist a nilpotent in Bezug auf $\mathfrak{q}$ und daraus folgt nach (1) $d \in \mathfrak{q}$

Ist $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$, so folgt aus (1) $d(ra - r) \equiv 0 (\mathfrak{q})$ für jedes Element r von $\mathfrak{R}$. Wäre dabei $d \notin \mathfrak{q}$, so müsste $ra - r \in \mathfrak{p}$ sein, also würde a Einheitselement von $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$. Daraus ergäbe sich leicht der Widerspruch, dass $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}$ auch Einheitselement besässe, und zugleich $(\mathfrak{a}, \mathfrak{q}) = \mathfrak{R}$ wäre. Also muss $d \in \mathfrak{q}$ sein.

Ist endlich $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{p}$, $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}$, so ist $a \in \mathfrak{p}$ und nach $d \equiv da \equiv da^n (\mathfrak{q})$ erkennen wir daraus $d \in \mathfrak{q}$.

Hiermit ist unserer Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 3. *Es sei* $\mathfrak{d} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_m \neq \mathfrak{R}$ *eine kürzeste Darstellung durch die schwachen Primärideale* $\mathfrak{q}_i$ *aus* $\mathfrak{R}$ *und es besitze jeder der Restklassenringe* $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ *Einheitselement* e_i. *Dann hat auch der Restklassenring* $\mathfrak{R}/\mathfrak{d}$ *Einheitselement* e_0.

Zum Beweise sei $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ das zu $\mathfrak{q}_i$ gehörige Primideal. Dann muss jedes $\mathfrak{p}_i$ von $\mathfrak{R}$ verschieden sein, da $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}_i$ Einheitselement besitzt.

Aus $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_m$ wählen wir $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_l$ aus, so dass sie paarweise unteilbar sind, und jedes der anderen Ideale $\mathfrak{p}_{l+1}, \mathfrak{p}_{l+2}, \dots, \mathfrak{p}_m$ ein Teiler wenigstens eines von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_l$ ist. Wenn e_1 durch $\mathfrak{q}_2, \dots \mathfrak{q}_{l'}$ $(l' \leqq l)$ teilbar, aber durch keines von $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_{l'+1}, \dots, \mathfrak{q}_l$ aus $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_l$ teilbar ist, so können wir annehmen, dass e_1 durch jedes der $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{l'+1}, \dots, \mathfrak{p}_l$ unteilbar ist. Denn aus $e_1 \in \mathfrak{p}_l$ folgt $e_1^k \in \mathfrak{q}_l$, und e_1^k ist Einheitselement von $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}_1$. Da $\mathfrak{p}_1, \dots \mathfrak{p}_l$ paarweise unteilbar sind, gibt es auch ein Element d_1 mit der Eigenschaft

$$d_1 \in \mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{q}_{l'+1} \cdots \mathfrak{q}_l, \ d_1 \notin \mathfrak{p}_2, \ d_1 \notin \mathfrak{p}_3, \dots, d_1 \notin \mathfrak{p}_{l'}. \tag{1}$$

Setzen wir jetzt $e_1' = e_1 + d_1$, so folgt aus $e_1^2 \equiv e_1 (\mathfrak{q}_1)$, $(e_1, \mathfrak{q}_1) = \mathfrak{R}$ und (1)

(2) $\quad e_1'^2 \equiv e_1'(\mathfrak{q}_1), \quad (e_1', \mathfrak{q}_1) = \mathfrak{R}, \quad e_1' \notin \mathfrak{p}_i \ (i=1, 2, \ldots, l).$

Im allgemeinen können wir deshalb annehmen, dass das Einheitselement e_i des Restklassenringes $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}_i$ durch keines der $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_l$ teilbar ist. Daraus folgt $\prod_{i=1}^{l}(e_i^2 - e_i) \equiv 0(\mathfrak{d}')$, wo $\mathfrak{d}' = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_l$ ist. Durch Umformung von $\prod_{i=1}^{l}(e_i^2 - e_i)$ können wir $e_1 e_2 \ldots e_l \equiv e_1 e_2 \ldots e_l e(\mathfrak{d}')$ setzen, und dabei ist e nach (2) ein durch $\mathfrak{d}'$ unteilbares Element. Wegen $e_1 e_2 \ldots e_l \notin \mathfrak{p}_i \ (i=1, 2, \ldots, l)$ ergibt sich daraus

$$r - er \equiv 0(\mathfrak{q}_i) \quad (i=1, 2, \ldots, l), \text{ also } \quad r - er \equiv 0(\mathfrak{d}')$$

für jedes Element r aus $\mathfrak{R}$. Damit ist e das Einheitselement von $\mathfrak{R}/\mathfrak{d}'$.

Da $\mathfrak{d}'$ nach unserer Annahme durch jedes der $\mathfrak{p}_{l+1}, \mathfrak{p}_{l+2}, \ldots, \mathfrak{p}_m$ teilbar und $\mathfrak{d}' \supseteq \mathfrak{d} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_l \cap \mathfrak{q}_{l+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_m$ ist, gilt $(e^3 - e)^k \in \mathfrak{d}$ für eine grosse ganze Zahl k. Aus $(e^3 - e)^k = e^k - e^{k+1} r$ folgt

(3) $$e^k \equiv e^{k+1} r(\mathfrak{d}), \quad e^k \equiv e^{2k} r^k(\mathfrak{d}),$$

wo r ein Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet. Setzen wir nun $e_0 = e^k r^k$, so folgt daraus

$$e_0 \equiv e_0^2(\mathfrak{d}), \quad e_0 \notin \mathfrak{d}.$$

Wäre $e_0 \in \mathfrak{p}_i$ für eines $\mathfrak{p}_i$ von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m$, so würde nach (3) $e \in \mathfrak{p}_i$. Da e aber Einheitselement von $\mathfrak{R}/\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{d}' \subseteq \mathfrak{p}_i$ ist, ergäbe sich damit der Widerspruch $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{R}$. Damit muss $e_0 \notin \mathfrak{p}_i \ (i=1, \ldots, m)$ sein. Da $e_0(re_0 - r) \equiv 0(\mathfrak{d})$ für jedes Element r aus $\mathfrak{R}$ ist, erkennen wir somit, dass e_0 Einheitselment vom Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{d}$ ist.

Jetzt wenden wir uns zum Beweis des folgenden Fundamentalsatzes, der eine Verallgemeinerung des Zariskischen Satzes ist:

Satz 1. *Es seien* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei Ideale aus* $\mathfrak{R}$, *und es sei* $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ *eine kürzeste Darstellung durch die schwachen Primärideale* $\mathfrak{q}_i$. *Wenn die Primärideale* $\mathfrak{q}_{l+1}, \mathfrak{q}_{l+2}, \ldots, \mathfrak{q}_n$ *aus* $\mathfrak{q}_i$ $(i=1, \ldots, l+1, \ldots n)$ *und nur sie folgende beide Eigenschaften haben:*

1 $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}_i$ $(i=l+1, l+2, \ldots, n)$ *besitzt Einheitselement;*

2 $(\mathfrak{a}, \mathfrak{q}_i) = \mathfrak{R}$ *gilt für* $\mathfrak{q}_i$ $(i=l+1, l+2, \ldots, n)$,

so ergibt sich

$$\bigcap_{\alpha} (\mathfrak{a}^{\alpha}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_l.$$

Es sei $\mathfrak{d}' = \mathfrak{q}_{l+1} \cap \mathfrak{q}_{l+2} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$. Dann hat nach Hilfssatz 3 der

Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{d}'$ Einheitselement e', und daraus folgt $(e', \mathfrak{d}')=\mathfrak{R}$. Aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{q}_i)=\mathfrak{R}$ $(i=l+1, \ldots, n)$ ergibt sich danach

$$e'=a_i+q_i \quad (i=l+1, \ldots, n), \quad \text{wobei } a_i \in \mathfrak{a}, \quad q_i \in \mathfrak{q}_i \text{ ist.}$$

Da das Produkt $\prod_{i=l+1}^{n}(a_i+q_i)$ ein Element aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{d}')$ ist, muss $(e', \mathfrak{d}') \subseteqq (\mathfrak{a}, \mathfrak{d}')$, und folglich $(\mathfrak{a}, \mathfrak{d}')=\mathfrak{R}$ sein. Damit können wir annehmen, dass Einheitselement e' von $\mathfrak{R}/\mathfrak{d}'$ ein Element aus $\mathfrak{a}$ ist. Setzen wir nun

$$\mathfrak{d}''=\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_l,$$

so ist $\mathfrak{b}=\mathfrak{d}' \cap \mathfrak{d}''$ und für jedes Element d'' aus $\mathfrak{d}''$ gilt danach

$$e'd'' \equiv d'' \ (\mathfrak{d}'), \quad e'^2 \equiv e' \ (\mathfrak{d}').$$

Da nach $d'' \in \mathfrak{d}''$ selbstverständlich $e'd''-d'' \in \mathfrak{d}''$ ist, so folgt daraus $e'd''-d'' \in \mathfrak{b}$.

Da wir e' als ein Element aus $\mathfrak{a}$ annehmen können, erhalten wir danach $\mathfrak{d}'' \subseteqq \bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$.

Andererseits ergibt sich nach Hilfssatz 2 $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{q}_i)=\mathfrak{q}_i$ $(i=1, 2, \ldots, l)$, und daher folgt $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) \subseteqq \mathfrak{q}_i$. Damit muss $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) \subseteqq \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_l=\mathfrak{d}''$ sein, und unserer Satz ist in vollem Umfange bewiesen.

Aus Satz 1 ergibt sich sofort:

Hilfssatz 4. *Sind* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m$ *die allen zu* $\mathfrak{a}$ *gehörigen minimalen Primideale, so gilt*

$$\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) = \bigcap_{i=1}^{m} \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{i\alpha}, \mathfrak{b})\}$$

für beliebiges Ideal $\mathfrak{b}$. *Dabei bedeutet* $\mathfrak{p}_{i\alpha}$ *ein Ideal, dessen zugehöriges Halbprimideal* $\mathfrak{p}_i$ *ist.*

Der Beweis wird mit Hilfe des Satzes 1 leicht geführt. Im folgenden wird er aber am verallgemeinerten Krullschen Satz (Hilfssatz 1) durchgeführt.

Aus Hilfssatz 1 erkennen wir sofort, dass $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$ die grösste Menge aller Elemente x mit der Eigenschaft $(\mathfrak{a}(x), \mathfrak{b})=((x), \mathfrak{b})$ ist. In gleicher Weise ist $\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{i\alpha}, \mathfrak{b})$ auch die grösste Menge aller Elemente x mit der Eigenschaft $(\mathfrak{p}_i(x), \mathfrak{b})=((x), \mathfrak{b})$. Setzen wir nun $\mathfrak{d}=\bigcap_{i=1}^{m} \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{i\alpha}, \mathfrak{b})\}$, so folgt wegen Hilfssatzes 1

$$(\mathfrak{p}_i\mathfrak{d}, \mathfrak{b})=(\mathfrak{d}, \mathfrak{b}) \quad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Aus $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_m \subseteqq \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_m = \mathfrak{h}$ ergibt sich danach $(\mathfrak{d}\mathfrak{h}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{d}, \mathfrak{b})$. Setzen wir wieder $\mathfrak{d}' = \bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{b})$, so muss nach Hilfssatz 1 $\mathfrak{d}' \supseteqq \mathfrak{d}$ sein. Da $\mathfrak{h}$ aber das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Halbprimideal ist, ergibt sich daher $\mathfrak{d}' = \bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$ und folglich ist $\bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) \supseteqq \mathfrak{d}$.

Andererseits ist aber nach der Definition von $\bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$

$$\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{i\alpha}, \mathfrak{b}) \supseteqq \bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Es gilt damit $\mathfrak{d} \supseteqq \bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$.

Damit bekommen wir unseren Hilfssatz.

Auf Grund dieses Hilfssatzes lässt sich auf folgenden Satz schliessen:

Satz 2. *Setzen wir* $\mathfrak{d}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}$, $\mathfrak{v}=\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ *für zwei Ideale* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{c}$ *aus* $\mathfrak{R}$, *so gelten die Relationen*

$$\bigcap_\alpha (\mathfrak{d}_\alpha, \mathfrak{b}) = \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})\} \cap \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{c}_\alpha, \mathfrak{b})\}, \quad \bigcap_\alpha (\mathfrak{d}_\alpha, \mathfrak{b}) = \bigcap_\alpha (\mathfrak{v}_\alpha, \mathfrak{b}).$$

Wenn wir $\mathfrak{p}_{\mathfrak{a}1}, \ldots, \mathfrak{p}_{\mathfrak{a}m}$ bzw. $\mathfrak{p}_{\mathfrak{c}1}, \ldots, \mathfrak{p}_{\mathfrak{c}n}$ als die minimalen zugehörigen Primideale von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{c}$ bezeichen, so folgt aus Hilfssatz 4

$$\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) = \bigcap_{i=1}^{m} \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{\mathfrak{a}i\alpha}, \mathfrak{b})\}, \quad \bigcap_\alpha (\mathfrak{c}_\alpha, \mathfrak{b}) = \bigcap_{j=1}^{n} \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{\mathfrak{c}j\alpha}, \mathfrak{b})\}.$$

Ist andererseits $\mathfrak{h}_\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{h}_\mathfrak{c}$ das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{c}$, so ist $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_\mathfrak{a}\cap\mathfrak{h}_\mathfrak{c}$ das zu $\mathfrak{d}$ gehörige Halbprimideal, und daraus folgt $\bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{b}) = \bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{d}_\alpha, \mathfrak{b})$. Nach Hilfssatz 4 ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\bigcap_\alpha (\mathfrak{d}_\alpha, \mathfrak{b}) &= \bigcap_\alpha (\mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{b}) = \bigcap_\alpha ((\mathfrak{h}\mathfrak{d})_\alpha, \mathfrak{b}) \\ &= \bigcap_{i=1}^{m} \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{\mathfrak{a}i\alpha}, \mathfrak{b})\} \cap [\bigcap_{j=1}^{n} \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{\mathfrak{c}j\alpha}, \mathfrak{b})\}] = \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})\} \bigcap_\alpha \{\bigcap (\mathfrak{c}_\alpha, \mathfrak{b})\}.\end{aligned}$$

Endlich ist jedes Element von $\mathfrak{h}$ nilpotent in Bezug auf $\mathfrak{v}=\mathfrak{a}\mathfrak{c}$. Ist umgekehrt ein Element r nilpotent in Bezug auf $\mathfrak{v}$, so gehört r zu $\mathfrak{h}_\mathfrak{a}$ und zugleich zu $\mathfrak{h}_\mathfrak{c}$. Damit ist $\mathfrak{h}$ auch das zu $\mathfrak{v}$ gehörige Halbprimideal und folglich ergibt sich $\bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{d}_\alpha, \mathfrak{b}) = \bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{v}_\alpha, \mathfrak{b})$.

Es möge schliesslich noch auf ein anderes Problem hingewiesen werden:

Gilt es $\bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) = \{\bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}_1)\} \cap \{\bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}_2)\}$, *wenn* $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2$ *ist?*

Um dies zu beantworten, beweisen wir zunächst den folgenden

Hilfssatz 5. *Es sei* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal und* $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2$, *dann gilt* $\bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{b}) = \{\bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{b}_1)\} \cap \{\bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{b}_2)\}$.

Zum Beweise setzen wir $\mathfrak{d}=\bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{b})$, $\mathfrak{d}_1=\bigcap\limits_\alpha (\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{b}_1)$, $\mathfrak{d}_2=$

$\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{b}_2)$ und $\mathfrak{d}'=\mathfrak{d}_1 \cap \mathfrak{d}_2$. Dann wird $\mathfrak{d} \subseteqq \mathfrak{d}'$. Es seien auch $\mathfrak{b}_1=\mathfrak{q}_{11} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_{1n_1}$, $\mathfrak{b}_2=\mathfrak{q}_{21} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_{2n_2}$ die kürzesten Darstellungen durch schwache Primärideale, aus welchen nur $\mathfrak{q}_{11}, \ldots, \mathfrak{q}_{1k_1}, \mathfrak{q}_{21}, \ldots, \mathfrak{q}_{2k_2}$ nicht die beiden Eigenschaften haben

1 $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}$ hat Einheitselement;

2 $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = \mathfrak{R}$.

Dann ergeben sich aus Satz 1 folgende Relationen

$$\mathfrak{d}' \subseteqq \mathfrak{d}_1 = \mathfrak{q}_{11} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_{1k_1}, \quad \mathfrak{d}' \subseteqq \mathfrak{d}_2 = \mathfrak{q}_{21} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_{2k_2}.$$

Wenn $\mathfrak{q}_{1i}$ und $\mathfrak{q}_{2j}$ zu demselben Primideal gehören, und wenn eines von ihnen den obig genannten Eigenschaften genügt, so hat $\mathfrak{q}_{1i} \cap \mathfrak{q}_{1j}$ auch dieselben Eigenschaften. Danach erhalten wir durch Verknüpfung von Satz 1 und Formel $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{q}_{11} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_{1n_1} \cap \mathfrak{q}_{21} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_{2n_2}$

$$\mathfrak{d} \supseteqq \mathfrak{d}_1 \cap \mathfrak{d}_2 = \mathfrak{d}'. \quad \text{Also ist } \mathfrak{d}=\mathfrak{d}'.$$

Aus den Hilfssätzen 4 und 5 folgt leicht der folgende

Satz 3. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei Ideale aus* $\mathfrak{R}$ *und ist* $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$, *so gilt* $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) = \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}_1)\} \cap \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}_2)\}$.

Wenn $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ die zu $\mathfrak{a}$ gehörigen minimalen Primideale sind, so wird wegen Hilfssatzes 4 $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) = \bigcap_{i=1}^{m} \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{i\alpha}, \mathfrak{b})\}$.

Nach Hilfssatz 5 ist aber

$$\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{i\alpha}, \mathfrak{b}) = \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{i\alpha}, \mathfrak{b}_1)\} \cap \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{i\alpha}, \mathfrak{b}_2)\} \quad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) &= \bigcap_{i=1}^{m} [\{\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{i\alpha}, \mathfrak{b}_1)\} \cap \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{i\alpha}, \mathfrak{b}_2)\}] \\ &= [\bigcap_{i=1}^{m} \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{i\alpha}, \mathfrak{b}_1)\}] \cap [\bigcap_{i=1}^{m} \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{i\alpha}, \mathfrak{b}_2)\}] \\ &= \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}_1)\} \cap \{\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}_2)\}.\end{aligned}$$

2. Zusammenhang zwischen $\bigcap_i (\mathfrak{a}^i, \mathfrak{b})$ und $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$

Satz 4. *Es sei* $\mathfrak{R}_0$ *ein kommutativer Ring mit keiner Bedingung. In* $\mathfrak{R}_0$ *gilt dann und nur dann*

$$\bigcap_i (\mathfrak{a}^i, \mathfrak{b}) = \bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$$

für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$, *wenn für das zu* $\mathfrak{a}$ *gehörige Halbprimideal* $\mathfrak{h}$ *stets* $\bigcap_i (\mathfrak{h}^i, \mathfrak{b}) = \bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$ *ist.*

Nehmen wir $\bigcap_i (\mathfrak{a}^i, \mathfrak{b}) = \bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$ für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ an, so folgt $\bigcap_i (\mathfrak{h}^i, \mathfrak{b}) = \bigcap_\alpha (\mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{b})$. Da $\mathfrak{h}$ aber das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Halbprimideal ist, erhalten wir $\bigcap_\alpha (\mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{b}) = \bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$. Daraus folgt als notwendinge Bedingung $\bigcap_i (\mathfrak{h}^i, \mathfrak{b}) = \bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$.

Umgekehrt sei $\bigcap_i (\mathfrak{h}^i, \mathfrak{b}) = \bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$ für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, wo $\mathfrak{h}$ das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Halbprimideal ist. Aus $\mathfrak{h} \supseteqq \mathfrak{a}$ folgt zunächst $\bigcap_i (\mathfrak{h}^i, \mathfrak{b}) \supseteqq \bigcap_i (\mathfrak{a}^i, \mathfrak{b})$, und daraus ergibt sich $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) \supseteqq \bigcap_i (\mathfrak{a}^i, \mathfrak{b})$. Nach der Struktur von $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$ gilt aber $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) \subseteqq \bigcap_i (\mathfrak{a}^i, \mathfrak{b})$. Danach erhalten wir $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) = \bigcap_i (\mathfrak{a}^i, \mathfrak{b})$.

Wenn $\mathfrak{R}_0$ einer Endlichkeitsbedingung genügt, so kann Satz 4 noch folgendermassen verschärft werden:

Satz 5 *Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring ohne Einheitselement, in dem jedes Ideal sich als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen darstellen lässt. Dafür, dass für jedes Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{R}$ stets $\bigcap_i (\mathfrak{a}^i, \mathfrak{b}) = \bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$ sei, ist notwendig und hinreichend, dass für beliebiges Primideal $\mathfrak{p}$ und beliebiges schwaches Primärideal $\mathfrak{q}' (\neq \mathfrak{R})$ $\bigcap_i (\mathfrak{p}^i, \mathfrak{q}') = \mathfrak{q}' \neq \mathfrak{R}$ ist oder $\bigcap_i (\mathfrak{p}^i, \mathfrak{q}') = \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}'$ Einheitselement besitzt.*

Die angegebene Bedingung ist notwendig. Denn, nach Hilfssatz 2 ist $\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{q}') = \mathfrak{q}' \neq \mathfrak{R}$, order $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}'$ hat Einheitselement. Im zweiten Falle ist ersichtlich nach Hilfssatz 2, dass $\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{q}') = \mathfrak{q}'$, oder $\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{q}') = (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}') = \mathfrak{R}$ ist. Aus unserer Annahme folgt damit $\bigcap_i (\mathfrak{p}^i, \mathfrak{q}') = \mathfrak{q}'$, oder $\bigcap_i (\mathfrak{p}^i, \mathfrak{q}') = \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}'$ hat Einheitselement.

Das Genügen folgt auch auf folgende Weise. Da in $\mathfrak{R}$ $\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{q}') = \mathfrak{q}' \neq \mathfrak{R}$ ist, oder $\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{q}') = \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}'$ Einheitselement hat, folgt aus unserer Annahme

$$\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{q}') = \bigcap_i (\mathfrak{p}^i, \mathfrak{q}') = \mathfrak{q}', \text{ oder}$$

$$\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{q}') = \bigcap_i (\mathfrak{p}^i, \mathfrak{q}') = \mathfrak{R} \text{ und } \mathfrak{R}/\mathfrak{q}' \text{ hat Einheitselement.}$$

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale aus $\mathfrak{R}$, und sind $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ die zu $\mathfrak{a}$ gehörigen minimalen Primideale, und ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ eine kürzeste Darstellung durch schwache Primärideale, so gilt nach Hilfssatz 4 und Satz 3

$$(1) \qquad \bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) = \bigcap_{j=1}^{m} \{ \bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{b}) \} = \bigcap_{j=1}^{m} [\bigcap_{k=1}^{n} \{ \mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{q}_k) \}],$$

und daraus folgt $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) = \bigcap_{j=1}^{m} [\bigcap_{k=1}^{n} \{ \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_k) \}]$.

Setzen wir nun $\mathfrak{d} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_l$, so gilt es

$$(2)\quad \begin{aligned} &\bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}) = \{ \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_1) \} \cap \{ \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_2) \} \cap \ldots \cap \{ \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_l) \}, \text{ oder} \\ &\bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}) = \{ \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_1) \} \cap \ldots \cap \{ \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_l) \} = \mathfrak{R}, \\ &\qquad\qquad \text{wobei } \mathfrak{R}/\mathfrak{d} \text{ Einheitselement hat.} \end{aligned}$$

Um dies zu beweisen, werden wir drei Fälle unterscheiden.

1. Es seien $\bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_1) = \mathfrak{q}_1 \neq \mathfrak{R}$ und $\bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_2) = \mathfrak{q}_2 \neq \mathfrak{R}$.

Setzen wir $\mathfrak{d} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$, so folgt

$$\mathfrak{q}_1 = \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_1) \supseteqq \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}), \quad \mathfrak{q}_2 = \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_2) \supseteqq \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}),$$

und wir haben daher nach Satz 3

$$\begin{aligned} \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}) &\subseteqq \{ \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_1) \} \cap \{ \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_2) \} \\ &= \{ \bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{q}_1) \} \cap \{ \bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{q}_2) \} = \bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{d}) \end{aligned}$$

Andererseits ist aber $\bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}) \supseteqq \bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{d})$. Damit ist

$$\bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}) = \{ \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_1) \} \cap \{ \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_2) \} = \bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{d}) \neq \mathfrak{R}.$$

Es sei wieder $\bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_3) \neq \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d} \cap \mathfrak{q}_3$. Dann ist

$$\bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}') \subseteqq \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}) = \bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{d}), \quad \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}') \subseteqq \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_3) = \bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{q}_3).$$

Daraus folgt nach Satz 3

$$\bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}') \subseteqq \{ \bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{d}) \} \cap \{ \bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{q}_3) \} = \bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{d}').$$

Da $\bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}') \supseteqq \bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{d}')$ ist, erhalten wir danach $\bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}') = \bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{d}')$. Also ist

$$\bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}') = \{ \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_1) \} \cap \{ \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_2) \} \cap \{ \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_3) \}.$$

2. Es seien $\bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_1) = \ldots = \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_l) = \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{R}/\mathfrak{q}_l$ besässen Einheitselement. Dann ist nach Hilfssatz 3

$$\bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}) = \{ \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_1) \} \cap \ldots \cap \{ \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_l) \} = \mathfrak{R}$$

und $\mathfrak{R}/\mathfrak{d}$ hat Einheitselement.

3. Es seien $\bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_1) = \mathfrak{q}_1 \neq \mathfrak{R}$, und $\bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_2) = \mathfrak{R}$, wo $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}_2$ Einheitselement hat. Setzen wir $\mathfrak{d} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$, so ist nach Satz 1

$$\bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{d}) = \bigcap_\alpha (\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{q}_1) = \mathfrak{q}_1 = \bigcap_i (\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_1).$$

Daraus folgt $\bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}) \subseteqq \bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_1) = \bigcap_\alpha(\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{d})$. Andererseits ist aber $\bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}) \supseteqq \bigcap_\alpha(\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{d})$. Damit ist $\bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}) = \bigcap_\alpha(\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{d})$, und folglich

$$\bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}) = \{\bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_1)\} \cap \{\bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_2)\}.$$

Es sei wieder $\bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_3) = \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}_3$ habe Einheitselement. Setzen wir $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d} \cap \mathfrak{q}_3$, so wird nach Satz 3 $\bigcap_\alpha(\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{d}') = \bigcap_\alpha(\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{d})$. Daraus folgt $\bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}') \subseteqq \bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}) = \bigcap_\alpha(\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{d}) = \bigcap_\alpha(\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{d}')$. Da aber $\bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}') \supseteqq \bigcap_\alpha(\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{d}')$ ist, erhalten wir

$$\bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}') = \bigcap_\alpha(\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{d}'), \quad \bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{d}') = \{\bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_1)\} \cap \{\bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_2)\} \cap \{\bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{q}_3)\}.$$

Nach den Formeln (1) und (2) erhalten wir

$$\bigcap_\alpha(\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) = \bigcap_{j=1}^{m}\{\bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{b})\}. \tag{3}$$

Da nach (2) $\bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{b}) = \bigcap_\alpha(\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{b})$ ist, ergibt sich durch Hilfssatz 4

$$\bigcap_{j=1}^{m}\{\bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{b})\} = \bigcap_{j=1}^{m}\{\bigcap_\alpha(\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{b})\} = \bigcap_\alpha\{(\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_m)_\alpha, \mathfrak{b}\}.$$

Aber ist $\bigcap_i\{(\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_m)^i, \mathfrak{b}\} \subseteqq \bigcap_i(\mathfrak{p}_j^i, \mathfrak{b})$ $(j=1, 2, \ldots, m)$. Damit erhalten wir

$$\bigcap_i\{(\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_m)^i, \mathfrak{b}\} \subseteqq \bigcap_\alpha((\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_m)_\alpha, \mathfrak{b}).$$

Da aber $\bigcap_i\{(\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_m)^i, \mathfrak{b}\} \supseteqq \bigcap_\alpha\{(\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_m)_\alpha, \mathfrak{b}\}$ ist, folgt daraus

$$\bigcap_i\{(\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_m)^i, \mathfrak{b}\} = \bigcap_\alpha\{(\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_m)_\alpha, \mathfrak{b}\},$$

Aus (3) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \bigcap_\alpha(\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) &= \bigcap_{j=1}^{m}\{\bigcap_\alpha(\mathfrak{p}_{j\alpha}, \mathfrak{b})\} = \bigcap_\alpha\{(\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_m)_\alpha, \mathfrak{b}\} \\ &= \bigcap_i\{(\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_m)^i, \mathfrak{b}\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Da aber $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_m$ ist, folgt leicht

$$\bigcap_i(\mathfrak{a}^i, \mathfrak{b}) \subseteqq \bigcap_i\{(\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_m)^i, \mathfrak{b}\}. \tag{5}$$

Es ist auch ersichtlich, dass

$$\bigcap_i(\mathfrak{a}^i, \mathfrak{b}) \supseteqq \bigcap_\alpha(\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) \tag{6}$$

ist. Aus (4), (5) und (6) folgt leicht

$$\bigcap_i(\mathfrak{a}^i, \mathfrak{b}) = \bigcap_\alpha(\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}).$$

Mathematisches Seminar,
Hiroshima Universität