MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES A
Vol. XXX, Mathematics No. 3, 1957.

Sur la forme de Darboux relative une variété différentiable

Par

Jôyô Kanitani

(Reç 8, Juin, 1957)

Préliminaire

1. Particularisation du repère mobile.

L'objet de cet article est de généraliser la notion de la forme de Darboux d'une hypersurface pour une variété différentiable.

Envisasaeons $(n+2)^2$ 1-formes $\omega_\alpha^\beta=a_{\alpha j}^\beta du^j$ $(\alpha,\ \beta=0,1,\cdots,n+1\,;\ j:1\to n)$ telles que chacun des systèmes $\omega_0^L(L=1,\cdots,n+1)$, $\omega_A^{n+1}(A=0,1,\cdots,n)$ contienne n formes indépendantes. Nous pouvons associer á une courbe quelconque C dans l'espace R^n décrit par le point arithmétique $(u^1,\cdots,u^n)$ un repère mobile $[A,\ A_1,\cdots,\ A_{n+1}]$ défini par

$$dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha=0,1,\cdots,n+1\,;\ \beta:0\to n+1\,;\ A_0\equiv A)$$

dans un espace projectif S^{n+1}, le systèeme ω_α^β étant nommé ainsi la connexion projective majorante.

Deux connexions ω_α^β, $\omega_\alpha'^\beta$ sont regardées équivalentes, lorsqu'elles font correspondre à une courbe C dans R^n le même développement Γ (lieu du point A), c'est-à-dire,

$$A'=\rho A,\quad A'_L=\gamma_L^\alpha A_\alpha \quad (L=1,\cdots,n+1\,;\ \alpha:0\to n+1).$$

En remplaçant la connexion donnée ω_α^β par une connexion qui lui est équivalente, nous pouvons faire d'abord

$$(1\cdot1)\qquad \omega_0^0=0,\quad \omega_0^{n+1}=0.$$

Chacun des systèmes ω_0^i $(i=1,\cdots,n)$, ω_i^{n+1} $(i=1,\cdots,n)$ se fait alors ceun de n formes linéarement indépemdantes. Ecrivons

$$\omega_0^i=\omega^i=a_j^i du^j,\quad \omega_\alpha^\beta=\Gamma_{\alpha j}^\beta\omega^j.$$

Nous avons

$$|a_j^i|\neq 0,\quad \Gamma_{0j}^{s}=\delta_j^s,\quad |\Gamma_{ij}^{n+1}|\neq 0.$$

Après la transformation

$$A'=A,\ A_i'=A_i,\ A'_{n+1}=\sigma A_{n+1}\quad (\sigma=\sqrt[n]{\varepsilon|\Gamma_{ij}^{n+1}|}),$$

il vient

$$(1\cdot 2)\qquad |\Gamma_{ij}^{n+1}|=\varepsilon\quad (\varepsilon=\pm 1),$$

les valeus de ω_0^0, ω_0^{n+1} étant conservées.

Désignons par (b_i^j), (Γ^{ji}) les matrices inverses de (a_j^i), (Γ_{ij}^{n+1}) respectivement de sorte que nous avons

$$a_i^s b_s^j=a_s^j b_i^s=\Gamma_{is}^{n+1}\Gamma^{sj}=\Gamma_{si}^{n+1}\Gamma^{js}=\delta_i^j$$
$$(i,\ j=1,\ \cdots,\ n).$$

Concernant les étendues des indices nous ferons, d'ores et déjà, la convention suivante:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \sigma,\ \tau,\ \rho=0,\ 1,\ \cdots,\ n+1,$$
$$a,\ b,\ c,\ h,\ i,\ j,\ k,\ l,\ m,\ s,\ t=1,\ \cdots,\ n,$$
$$A,\ B,\ C=0,\ \cdots,\ n,$$
$$H,\ I,\ J,\ K,\ L,\ M=1,\ \cdots,\ n+1.$$

Après la transformation

$$A'=\rho A,\quad A_i'=\rho(\gamma_i A+A_i),\quad A'_{n+1}=\rho(\tau^k A_k+A_{n+1}),$$

où

$$\gamma_i=-\frac{1}{n+1}\Gamma_{Kj}^{K}(K:1\to n+1),\ \rho=e^{\int_c \gamma_i\omega^i},$$
$$\tau^k=-(\Gamma_{n+1\,s}^{n+1}+\gamma_s)\Gamma^{sk},$$

il vient

$$(1\cdot 3)\qquad \omega_i^i=0\quad (i:1\to n),\quad \omega_{n+1}^{n+1}=0.$$

les équations $(1\cdot 1)$, $(1\cdot 2)$ étant conservées. La connexion ainsi particularisée sera dite canonique.

2. Transformatson de la connexion canonique

Puisque

$$df(u^1,\ \cdots,\ u^n)=\frac{\partial f}{\partial u^i}du^i=\frac{\partial f}{\partial u^s}b_i^s\omega^i,$$

nous écrirons

$$\frac{\partial f}{\omega^i}=\frac{\partial f}{\partial u^s}b_i^s\,,\quad \frac{\partial f}{\partial u^j}=\frac{\partial f}{\omega^s}a_j^s\,.$$

Lorsqu'on fait le changement

$$\omega'^i=P_s^i\omega^s\,,$$

il vient

$$\frac{\partial f}{\omega'^i}=\frac{\partial f}{\omega^s}Q_i^s\,,\quad \frac{\partial f}{\omega^j}=\frac{\partial f}{\omega'^s}P_j^s$$

$$(P_i^sQ_s^j=P_s^jQ_i^s=\delta_i^j)\,.$$

La transformation la plus générale amenant une connexion ω_α^β à une autre qui lui est équivalente, en conservant les valeurs de $\omega_0{}^0$, ω_0^{n+1}, $|\Gamma_{ij}^{n+1}|$, $\omega_i^i(i:1\rightarrow n)$, ω_{n+1}^{n+1}, est définie par

$$A'_\alpha=\nu Q_\alpha^\beta A_\beta\,,$$

c'est-à-dire,

$$Q_\beta^\lambda\omega'^\beta_\alpha=Q_\alpha^\tau\omega_\tau^\lambda+dQ_\alpha^\lambda+Q_\alpha^\lambda d\log\nu, \tag{2·1}$$

où

$$\left\{\begin{aligned}&P_0^\beta=\delta_0^\beta,\quad P_\alpha^{n+1}=\delta_\alpha^{n+1}\nu\nu,\quad \nu\nu=\sqrt[n]{|P_i^j|^2}\\ &P_i^0=-\frac{\partial\log\nu}{\omega^i},\quad P_{n+1}^k=P_b^kP_a^0\Gamma^{*ab},\\ &P_\alpha^\tau Q_\tau^\beta=P_\tau^\beta Q_\alpha^\tau=\delta_\alpha^\beta\,,\end{aligned}\right. \tag{2·2}$$

à savoir,

$$\left\{\begin{aligned}&Q_0^\beta=\delta_0^\beta\,,\quad Q_\alpha^{n+1}=\delta_\alpha^{n+1}\frac{1}{\nu\nu}\,,\\ &Q_i^0=\frac{\partial\log\nu}{\omega'^i},\quad Q_{n+1}^k=Q_b^kQ_a^0\Gamma'^{*ab}=-\frac{1}{\nu\nu}P_s^0\Gamma^{*sk},\\ &P_{n+1}^0+P_{n+1}^kQ_k^0+\nu\nu Q_{n+1}^0=0.\end{aligned}\right. \tag{2·3}$$

Dérivons extérieurement l'équation (2·1). Il vient

$$\Theta'^\beta_\alpha=P_\tau^\beta Q_\alpha^\sigma\Theta_\sigma^\tau\,, \tag{2·4}$$

où

$$\Theta_\alpha^\beta=\frac{1}{2}R_{\alpha ij}^\beta\omega^i\wedge\omega^j=-(d\omega_\alpha^\beta+\omega_\tau^\beta\wedge\omega_\alpha^\tau)\,. \tag{2·5}$$

3. Lignes asymptotiques et lignes de Darcoux.

D'après (2·1) et (2·3) nous avons

$$\Gamma'^{n+1}_{ij} = \nu\nu Q^l_i Q^m_j \Gamma'^{n+1}_{lm}$$

ce qui nous montre que l'équation

$$H_{ij} w^i w^j = 0 \quad \left(H_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma'^{n+1}_{ij} + \Gamma'^{n+1}_{ji})\right)$$

est une équation invariante. Celle-ci définit les lignes asymptotiques [1].

Posons ensuite

$$\Delta_k H_{ij} = \frac{\partial H_{ij}}{\omega^k} - \Gamma'^s_{ik} H_{sj} - \Gamma'^s_{jk} H_{si}\,,$$

$$H_{ijk} = \frac{1}{3}(\Delta_i H_{jk} + \Delta_j H_{ik} + \Delta_k H_{ij})\,.$$

D'après (2·1), (2·2), (2·3) il vient

$$H'_{ijk} = \nu\nu Q^l_i Q^m_j Q^s_k (H_{lms} - \lambda_l H_{ms} - \lambda_m H_{ls} - \lambda_s H_{lm})\,,$$

où

$$\lambda_i = \frac{2}{3}\left(\frac{\partial \log \nu}{\omega^i} - \frac{\partial \log \nu}{\omega^t}\Gamma'^{th} H_{hi}\right).$$

En supposant maintenant que det. $|H_{ij}| \neq 0$, et en désignant par (H^{ji}) la matrice inverse de (H_{ij}), posons

$$H_i = \frac{1}{n+2} H_{ijk} H^{jk}\,,$$

$$K_{ijk} = H_{ijk} - H_i H_{jk} - H_j H_{ik} - H_k H_{ij}\,.$$

Il vient alors

$$K^{l}_{i\ l} = K_{ils} H^{sl} = 0\,,$$

et

$$K'_{ijk} = \nu\nu Q^l_i Q^m_j Q^s_k K_{lms}$$

ce qui nous montre que l'équation

$$K_{ijk}\omega^i \omega^j \omega^k = 0$$

est une équation invariante. Celle-ci définit les lignes de Darboux [1].

4. Connexion noramle

En conservant les lignes asymptotiques et celles de Darboux ainsi que la particularisation de la connexion mentionnée au n°1, nous pouvons faire

$$R^{\beta}_{0ij}=0, \quad R^{n+1}_{\alpha\, ij}=0 \tag{4·1}$$

$$(\alpha,\ \beta=0,\ \cdots,\ n+1\,;\ i,\ j=1,\ \cdots,\ n).$$

Pour cela il faut et il suffit de prendre comme connexion nouvelle

$$\left\{\begin{aligned} &\Gamma'^{k}_{0i}=\delta^{\beta}_{i}, \quad \omega^{n+1}_{i}=H_{ij}\omega^{j}, \quad \omega^{n+1}_{n+1}=0,\\ &\Gamma'^{k}_{ij}=\Pi^{k}_{ij}-\frac{1}{2}K^{k}_{ij}, \quad \omega^{0}_{i}=M_{ij}\omega^{j}\\ &\omega^{k}_{n+1}=N^{k}_{j}\omega^{j}, \end{aligned}\right. \tag{4·2}$$

où

$$M_{ij}=\frac{1}{2}(\Gamma'^{0}_{ij}+\Gamma'^{0}_{ji}), \quad N_{ij}=\frac{1}{2}(\Gamma'^{k}_{n+1j}H_{ki}+\Gamma'^{k}_{n+1i}H_{kj}),$$

$$\Pi^{k}_{ij}=\frac{1}{2}H^{ks}\Big(\frac{\partial H_{js}}{\omega^{i}}+\frac{\partial H_{is}}{\omega^{j}}-\frac{\partial H_{ij}}{\omega^{s}}-H_{it}\alpha^{t}_{js}-H_{jt}\alpha^{t}_{is}-H_{st}\alpha^{t}_{ij}\Big),$$

$$\begin{aligned} d\omega^{m} &= -\frac{1}{2}\alpha^{m}_{ij}\omega^{i}\wedge\omega^{j}\\ &=da^{m}_{s}\wedge du^{s}=da^{m}_{s}\wedge b^{s}_{j}\omega^{j}=-a^{m}_{s}db^{s}_{j}\wedge\omega^{j}\\ &=-\frac{1}{2}a^{m}_{s}\Big(\frac{\partial b^{s}_{j}}{\omega^{i}}-\frac{\partial b^{s}_{i}}{\omega^{j}}\Big)\omega^{i}\wedge\omega^{j}, \end{aligned}$$

à savoir,

$$\alpha^{n}_{ij}=a^{m}_{s}\Big(\frac{\partial b^{s}_{j}}{\omega^{i}}-\frac{\partial b^{s}_{i}}{\omega^{j}}\Big)=\Big(\frac{\partial a^{m}_{s}}{\omega^{t}}-\frac{\partial a^{m}_{t}}{\omega^{s}}\Big)b^{s}_{i}b^{t}_{j}.$$

Cela étant fait nous avons d'après (2·1)

$$\begin{aligned} \omega'^{0}_{i}&=P^{0}_{\lambda}(Q^{\tau}_{i}\omega^{\lambda}_{\tau}+dQ^{\lambda}_{i})\\ &=Q^{l}_{i}\omega_{l}{}^{0}+P_{s}{}^{0}Q_{i}{}^{0}\omega^{s}+P_{s}{}^{0}Q^{l}_{i}\omega^{s}_{l}+P^{0}_{n+1}Q^{l}_{i}\omega^{n+1}_{l}-Q^{\lambda}_{i}dP_{\lambda}{}^{0}\\ &=Q^{l}_{i}\Big(M_{lm}-P^{0}_{m}P_{l}{}^{0}+P_{s}{}^{0}\Big(\Pi^{s}_{lm}-\frac{1}{2}K^{s}_{lm}\Big)+P^{0}_{n+1}H_{lm}-\frac{\partial P^{0}_{l}}{\omega_{m}}\Big)\omega^{m}, \end{aligned}$$

$$\omega'^{i}_{n+1}=P^{i}_{\lambda}(Q^{\tau}_{n+1}\omega^{\lambda}_{\tau}+dQ^{\lambda}_{n+1})$$

$$
\begin{aligned}
&= P^i_a\Big(Q^0_{n+1}\omega^a + Q^k_{n+1}\omega^a_k + \frac{1}{\nu\nu}\omega^a_{n+1} - d\Big(\frac{1}{\nu\nu}P^0_t H^{ta}\Big)\Big)\\
&\qquad + P^i_a P^0_b H^{ab}\Big(-\frac{1}{\nu\nu}P^0_t H^{tk}\omega^{n+1}_k + d\Big(\frac{1}{\nu\nu}\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{\nu\nu}P^i_a\Big\{\Big(-P^0_{n+1} + P^0_s P^0_t H^{st}\Big)\omega^a + \omega^a_{n+1} - P^0_t H^{kt}\Big(\Pi^a_{km} - \frac{1}{2}K^a_{km}\Big)\omega^m\\
&\qquad - H^{ta}dP^0_t + P^0_t(H^{ts}\Pi^a_{sm} + H^{as}\Pi^t_{sm} - H^{ta}P^0_m)\omega^m \Big\}\\
&= \frac{1}{\nu\nu}P^i_a\Big\{N^a_m - H^{ta}P^0_t P^0_m + P^0_t H^{as}\Big(\Pi^t_{sm} + \frac{1}{2}K^t_{sm}\Big)\\
&\qquad - H^{ta}\frac{\partial P^0_t}{\omega^m} + \delta^a_m (P^0_s P^0_t H^{st} - P^0_{n+1})\Big\}\omega^m
\end{aligned}
$$

d'où

$$
M'^i_i - N'^i_i = \frac{1}{\nu\nu}(M^a_a - N^a_a + n(2P^0_{n+1} - P^0_s P^0_t H^{st}))
$$

ce qui nous montre que nous pouvons particulariser la connexion de manière à avoir

$$
M^i_i - N^i_i = 0. \tag{4·3}
$$

Pour la transformation conservant cette équation nous avons

$$
P^0_{n+1} = \frac{1}{2}P^0_a P^0_b H^{ab} = \nu\nu Q^0_{n+1}\,. \tag{4·4}
$$

La connexion characterisée par (4·2) et (4·3) sera dite normale.

5. Connexion induite d'une forme quadrique.

D'après (2·4) et (4·2) nous avons maintenant

$$
(5·1)\quad \left\{
\begin{aligned}
R_{lmij} + R_{mlij} &= -K_{lmi|j} + K_{lmj|i}\\
&\quad - H_{li}(M_{mj} - N_{mj}) - H_{mi}(M_{lj} - N_{lj})\\
&\quad + H_{lj}(M_{mi} - N_{mi}) + H_{mj}(M_{li} - N_{li}),\\
R_{lmij} - R_{mlij} &= 2T_{lmij} + \frac{1}{2}(K^s_{li}K_{mjs} - K^s_{lj}K_{mis})\\
&\quad + H_{li}(M_{mj} + N_{mj}) - H_{mi}(M_{lj} + N_{lj})\\
&\quad - H_{lj}(M_{mi} + N_{mi}) + H_{mj}(M_{li} + N_{li}),
\end{aligned}
\right.
$$

en posant

$$K_{lmi/j}=\frac{\partial K_{lmi}}{\omega^j}-\Pi_{ij}^s K_{smi}-\Pi_{mj}^s K_{lsi}-\Pi_{ij}^s K_{lms},$$

$$d(\Pi_{ij}^k\omega^j)+\Pi_{sj}^k\omega^j\wedge\Pi_{li}^s\omega^i=-\frac{1}{2}T_{l\,ij}^k\omega^i\wedge\omega^j,$$

$$R_{lmij}=H_{mk}R_{l\,ij}^k,\quad T_{lmij}=H_{mk}T_{l\,ij}^k.$$

En particuier, si l'on fait $K_{ijl}=0$, $M_{ij}=N_{ij}$, il vient

$$R_{l\cdot it}^{t}-\frac{H_{li}}{2(n-1)}R_{\cdot\cdot st}^{st}=T_{l\cdot it}^{t}-\frac{1}{2(n-1)}T_{\cdot\cdot st}^{st}+(n-2)M_{li},$$

$$\Gamma'^{0}_{n+1,i}=\frac{1}{\nu\nu}Q_i^l\Gamma'^{0}_{n+1,l}.$$

Or, grâce à (4·1) nous avons

$$R'^{k}_{l\cdot ij}=P_t^k Q_l^s Q_i^a Q_j^b R_{s\,ab}^t,$$

$$R'^{k}_{l\cdot ik}=Q_l^s Q_i^a R_{s\,at}^t,\quad R'^{ik}_{\cdot\cdot ik}=\frac{1}{\nu\nu}R_{\cdot\cdot at}^{at}$$

Nous voyons ainsi que, si $n>2$,

$$\Pi_{ij}=\frac{1}{n-2}\left(T_{l\cdot ti}^{t}+\frac{H_{li}}{2(n-1)}T_{\cdot\cdot st}^{st}\right)$$

se transforme de la même maniére que M_{ij}.

Nous avons donc une connexion normale π_α^β en posant

$$\pi_0^0=0,\ \pi_0^i=\omega^i,\ \pi_0^{n+1}=0,$$

$$\pi_i^{n+1}=H_{ij}\omega^j,\ \pi_{n+1}^{n+1}=0,$$

$$\pi_i^0=\Pi_{ij}\omega^j,\ \pi_i^k=\Pi_{ij}^k\omega^j,$$

$$\pi_{n+1}^0=0,\ \pi_{n+1}^k=\Pi_j^k\omega^j\quad(\Pi_j^k=H^{ks}\Pi_{sj}).$$

Nous l'appellerons la connexion induite de la forme $H_{ij}\omega^i\omega^j$.

Variété différentiable à connexion projective majorante.

6. Considérons, dans un espace projectif à $n+1$ dimensions S^{n+1}, une homographique régulière

$$(p_\beta^\alpha):\quad \rho\xi^\alpha=p_\beta^\alpha\xi^\beta\quad(\alpha=0,1,\cdots,n+1\,;\ \beta:0\to n+1)$$

laissant invariant un point O et un hyperplan o qui y passe. Nous avons pour cette transformation

$$(6\cdot 1)\qquad p_0^K=0\ (K=1,\cdots,n+1),\ p_A^{n+1}=0\ (A=0,1,\cdots,n),$$
$$p_0^0|p_i^j|p_{n+1}^{n+1}\neq 0,$$

en prenant O comme point $(1, 0, \cdots, 0)$ et o comme hyperplan $(0, \cdots, 0, 1)$.

Nous ferons

$$p_0^0=1,\ p_{n+1}^{n+1}=\pi^2\ \ (\pi^2=\sqrt[n]{|p_i^j|^2}).$$

Il est fascile de voir que l'ensemble de telles homographiques forme un groupe que nous désignerons par $\mathfrak{P}$. Soit M une variété différentiable à n dimensions qui est un espace de Hausdorff et qui possède une base dénombrable. Elle admet un champ de tenseur différentiable covariant du second ordre. Celui-ci s'exprime par

$$a_{ij}(u^1(x),\cdots,u^n(x))du^i\otimes du^j\ \ (x\in U_m,\ |a_{ij}|>0)$$

rapporté au système des coordonnées locales $u^i(i=1,\cdots,n)$ en voisinage U_m du point $m\in M$. Posons

$$H_{ij}=\frac{a_{ij}}{\kappa}\quad (\kappa=\sqrt[n]{|a_{ij}|})$$

de sorte que nous avons $|H_{ij}|=1$. Lorsque $x\in U_m\cap U'_{m'}$ $(m, m'\in M)$ nous avons

$$H'_{ij}=\nu\nu Q_i^l Q_j^m H_{lm}$$

où

$$Q_j^i=\frac{\partial u^i}{\partial u'^j},\quad P_i^j=\frac{\partial u'^j}{\partial u^i},\quad \nu^2=\sqrt[n]{|P_i^j|^2}.$$

En définissant $P_\alpha^\beta(\alpha,\beta=0,1,\cdots,n+1)$ par $(2\cdot 2)$, $(4\cdot 4)$ nous obtenons une homographique (P_α^β) appartenant à $\mathfrak{P}$ et, par suite, une application continue

$$g_{m,m'}:\ U_m\cap U'_{m'}\to\mathfrak{P}.$$

Soit $B(M,\mathfrak{P})$ un espace fibré principal construit au moyen de cette application ([6] p. 14).

7. Nous pouvons prendre $u^i(i=1,\cdots,n)$, $p_K^A(A=0,1,\cdots,n\,;\ K=1,\cdots,n+1)$ comme coordonnées locales du point $b\in B$. Désignons par $T(b)$ l'espace de vecteurs tangents à b, et par $T^*(b)$ celui de covecteurs tangents. La matrice (p_α^β) peut être regardée aussi comme représentation d'un repère formé par les $n+2$ points $(p_\alpha^0, \cdots, p_\alpha^{n+1})$ $(\alpha=0, 1, \cdots, n+1)$: le point O, n points sur l'hyperplan o, un point hors de cet hyperplan. La transformation d'un tel repère à un autre est définie par

$$p'^\beta_\alpha = c^\gamma_\alpha p^\beta_\gamma \quad ((c^\mu_\lambda) \in \mathfrak{P})$$

Cette transformation induit une translation à droite $\mathfrak{T}$ dans la fibre sur un point x $(x \in M)$ ainsi qu'une homeomorphisme $\mathfrak{T}^*$: $T^*(\mathfrak{T}(b)) \to T^*(b)$. La projection $\pi : B \to M$ dans la structure de l'espace fibré $B(M, \mathfrak{P})$ induit une application linéaire $\pi^* : T^*(x) \to T^*(b)$. Envisageons un sous-espace $g(b) \subset T^*(b)$ tel que $g(b) \cap \pi^*(x) = \phi$. Un tel sous-espace est déterminé par les $(n+1)^2$ covecteurs tangents de la forme

$$\kappa^A_K = dp^A_K + \varphi^A_K \quad (A=0, \cdots, n\,;\ K=1, \cdots, n+1)$$

$$(\varphi^A_K : \text{combinaisons linéaires de } du^i).$$

Puisque $dp^\alpha_0 = 0$, nous avons

$$\mathfrak{T}^* \kappa'^A_K = c^L_K \kappa^A_L + \varphi'^A_K - c^L_K \varphi^A_L \quad (L : 1 \to n+1).$$

La condition pour que $g(b)$ soit conservé pendant la translation à droite s'écrit donc

$$\varphi'^A_K = c^L_K \varphi^A_L .$$

Il en résulte

$$q'^M_K \varphi'^A_M = q^L_K \varphi^A_L$$

ce qui nous montre que $q^L_K \varphi^A_L$ ne dépend que de u^i. Il en est de mêmr pour

$$\frac{1}{n} q^L_i \varphi^i_L = \frac{1}{n} q^s_i \varphi^i_s = \lambda_j du^j .$$

Posons maintenant

$$
\begin{aligned}
&\omega^A_K = q^L_K \varphi^A_L - \delta^A_K \lambda_j du^j,\\
(7\cdot 1)\qquad &\omega_0{}^0 = -\lambda_j du^j, \quad \omega_0{}^K = 0, \quad \omega^{n+1}_A = 0, \quad \omega^{n+1}_{n+1} = \lambda_j du^j,\\
&\tilde{\kappa}^\beta_\alpha = q^\gamma_\alpha dp^\beta_\gamma + \omega^\beta_\alpha - \delta^\beta_\alpha d \log \pi.
\end{aligned}
$$

Nous avons alots

$$\tilde{\kappa}_K^A = q_K^M \kappa_M^A - \frac{1}{n}\delta_K^A q_i^s \kappa_s^i \in g(b),$$

$$\tilde{\kappa}_0^\beta = -\frac{1}{n}\delta_0^\beta q_i^s \kappa_s^i \in g(b), \quad \tilde{\kappa}_\alpha^{n+1} = \frac{1}{n}\delta_\alpha^{n+1} q_i^s \kappa_s^i \in g(b).$$

Nous allons maintenant chercher la condition pour que l'espace $g(b)$ soit déterminé indépendamment du choix des coordonées locals u^i. En efféctuant la transformation

$$p'^\alpha_\beta = P_\gamma^\alpha p_\beta^\gamma, \quad q'^\alpha_\mu = Q_\mu^\gamma q_\gamma^\alpha$$

dans

$$\tau_\lambda^\mu = q_\beta^\mu p_\lambda^\alpha \tilde{\kappa}_\alpha^\beta = q_\beta^\mu (dp_\lambda^\beta + p_\lambda^\alpha \omega_\alpha^\beta) - \delta_\lambda^\mu d \log \pi,$$

nous obtenons

$$\tau'^\mu_\lambda = \tau_\lambda^\mu + q'^\mu_\beta p'^\alpha_\lambda \{\omega'^\beta_\alpha - P_\gamma^\beta (Q_\alpha^\rho \omega_\rho^\gamma + dQ_\alpha^\gamma) - \delta_\alpha^\beta d \log \nu\}.$$

La condition cherchée s'écrit donc

$$\omega'^\beta_\alpha = P_\gamma^\beta (Q_\alpha^\rho \omega_\rho^\gamma + dQ_\alpha^\gamma) + \delta_\alpha^\beta d \log \nu, \tag{7·2}$$

en particulier,

$$\omega'^0_0 = \omega_0^0 + d \log \nu, \quad \omega'^{n+1}_{n+1} = \omega_{n+1}^{n+1} - d \log \nu. \tag{7·3}$$

8. Maintenant, en utilisant la connexion π_α^β induite de $H_{ij} du^i du^j$, posons

$$\tilde{\omega}_\alpha^\beta = 2\omega_\alpha^\beta - \pi_\alpha^\beta, \quad \omega_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha j}^\beta du^j$$

de sorte qu'on ait

$$\tilde{\omega}'^\beta_\alpha = P_\gamma^\beta (Q_\alpha^\rho \tilde{\omega}_\rho^\gamma + dQ_\alpha^\gamma) + \delta_\alpha^\beta d \log \nu,$$

$$\tilde{\omega}^i \equiv \tilde{\omega}_0^i = -du^i, \quad \tilde{\omega}_0^0 = 2\lambda_j \tilde{\omega}^j, \quad \tilde{\omega}_0^{n+1} = 0,$$

$$\tilde{\omega}_i^k = (-2\Gamma_{ij}^k + H_{ij}^k)\tilde{\omega}^j, \quad \tilde{\omega}_i^{n+1} = H_{ij} \tilde{\omega}^j,$$

$$\tilde{\omega}_{n+1}^{n+1} = -2\lambda_j \tilde{\omega}^j.$$

C'est-à-dire qu'on a ainsi une connexion projective majorante.

En la ramenant ensuite à une connexion canonique au moyen de la transformation

$$A' = A, \quad A_i' = A_i + 2\lambda_i A,$$

$$A'_{n+1} = A_{n+1} + 2\lambda^k A_k + 2\lambda^s \lambda_s A \quad (\lambda^k = H^{ks}\lambda_s),$$

on a

$$\tilde{\omega}'^i = \tilde{\omega}^i_., \quad H'_{ij} = H_{ij}$$

$$\tilde{\Gamma}'^k_{ij} = -2\Gamma^k_{ij} + \Pi^k_{ij} - 2\lambda^k H_{ij} + 2\lambda_i \delta^k_j$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}'_k \tilde{H}''_{ij} &= -\frac{\partial H_{ij}}{\partial u^k} + (2\Gamma^s_{ik} - \Pi^s_{ik} + 2\lambda^s H_{ik} - 2\lambda_i \delta^s_k) H_{sj} \\ &\quad + (2\Gamma^s_{jk} - \Pi^s_{jk} + 2\lambda^s H_{jk} - 2\lambda_j \delta^s_k) H_{si} \\ &= -2\Big(\frac{\partial H_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma^s_{ik} H_{sj} - \Gamma^s_{jk} H_{si}\Big) = -2\Delta_k H_{ij}.\end{aligned}$$

Ainsi les K'_{ijl} relatifs la connesxion $\tilde{\omega}'^\beta_\alpha$ sont définis par

$$H'_{ijl} = -\frac{2}{3}(\Delta_l H_{ij} + \Delta_i H_{jl} + \Delta_j H_{il}),$$

$$K'_{ijl} = H'_{ijl} - H'_i H_{jl} - H'_j H_{il} - H'_l H_{ij}$$

$$\Big(H'_i = \frac{1}{n+2} H'^s_{is}\Big).$$

Autrement dit, il existe un champ de tenseur différentiable covariant du trioisième ordre qui s'exprime par

$$b_{ijl} du^i \otimes du^j \otimes du^l \qquad \Big(b_{ijl} = -\frac{1}{2}\kappa K'_{ijl}, \ \kappa = \sqrt[n]{|a_{ij}|}\,\Big)$$

rapporté au système des coordonnées locales u^i en U_m.

9. Réciproquement, si l'on se donne une connexion canonique $\tilde{\omega}'^\beta_\alpha$ où

$$\tilde{\omega}'^i \equiv \tilde{\omega}'^i_0 = -du^i, \quad \tilde{\omega}'^{n+1}_i = H_{ij} \tilde{\omega}^j$$

ainsi que les quantités λ_i qui se transforment d'après

$$\lambda_i' = Q^l_i \Big(\lambda_l - \frac{\partial \log \nu}{\partial u^l}\Big) \tag{9·1}$$

on peut en déduire les ω^β_α qui sont assujéttis à la condition (7·1) et qui se transforme d'après (7·2), car alors l'équation (7·3) est vérifiée

Nous allons maintenant nous occuper du cas où $\tilde{\omega}'^\beta_\alpha$ est une connexion normale. Supposons qu'on se donne un champ de tenseur différentiable symmétrique $b_{ijl} du^i \otimes du^j \otimes du^l$ ainsi que $a_{ij} du^i \otimes du^j$. Nous pouvons former un tel champ, par exemple, en prenant un champ de tenseur différentiable symmétrique $b_{ij}du^i \otimes du^j$ et en posant

$$b_{ijl}=\frac{1}{3}(b_{ij\,;\,l}+b_{jl\,;\,i}+b_{il\,;\,j}).$$

On désigne par $;i$ la différentiation absolue où $a_{ij}du^i du^j$ est prise comme forme fondamentale. Nous pouvons d'ailleurs supposer que les équations

$$a^{jk}b_{ijk}=0 \quad (i=1, \cdots, n)$$

soient vérifiées en remplaçant b_{ijl} par

$$b'_{ijl}=b_{ijl}-a_{ij}b_l-a_{il}b_j-a_{jl}b_i$$

$$\left(b_i=\frac{1}{n+2}a^{jk}b_{ijk}\right),$$

où (a^{ji}) est la matrice inverse de (a_{ij}).

En posant

$$K_{ijl}=-\frac{2b_{ijl}}{\kappa}$$

et en faisant

$$-\Pi^k_{ij}-\frac{1}{2}K^k_{ij}=-2\Gamma'^k_{ij}+\Pi^k_{ij}-2\lambda^k H_{ij}+2\lambda_i\delta^k_j,$$

$$\lambda_i=\frac{1}{2}\frac{\partial \log \kappa}{\partial u^i}$$

de sorte que l'équation (9·1) soit vérifiée, nous obtenons

$$\Gamma'^k_{ij}=\left\{{k \atop ij}\right\}-\frac{1}{2}b^k_{ij}-\frac{1}{2}\delta^k_i\frac{\partial \log \kappa}{\partial u^j} \tag{9·2}$$

où $\left\{{k \atop ij}\right\}$ est le symbole de Christoffel relatif la forme $a_{ij}du^i du^j$.

10. Si l'on pose

$$d\omega^\beta_\alpha+\omega^\beta_\gamma\wedge\omega^\gamma_\alpha=-\frac{1}{2}R^\beta_{\alpha ij}du^i\wedge du^j,$$

il vient d'aprês (7·1)

$$R^k_{lij}=\frac{\partial\Gamma'^k_{li}}{\partial u^j}-\frac{\partial\Gamma'^k_{lj}}{\partial u^i}+\Gamma^s_{li}\Gamma^k_{sj}-\Gamma^s_{lj}\Gamma^k_{si}.$$

Portons-y (9·2), Nous obtenons

$$R^k_{l\,ij}=\{{}^{\,k}_{l\cdot ij}\}-\frac{1}{2}b^k_{li\,;\,j}+\frac{1}{2}b_{lj\,;\,i}^{\,k}+\frac{1}{4}b^s_{li}b^k_{sj}-\frac{1}{4}b^s_{lj}b^k_{si}$$

c'est-à-dire,

$$R_{lmij}+R_{mlij}=b_{lmi\,;\,j}-b_{lmj\,;\,i}\,,$$

$$R_{lmij}-R_{mlij}=2\,\{lmij\}+\frac{1}{2}(b^s_{li}b_{mjs}-b^s_{lj}b_{mis})$$

$$(R_{lmij}=a_{mk}R^k_{l\,ij})\,.$$

Ces équations sont équivalentes à $(5\cdot 1)$.

Nous avons étudié, dans des mémoires précédents ([2], [3], [4], [5]), les significations géométriques de l'équation $R_{lmij}+R_{mlij}=0$ consernant un espace à connexion projective majorante ainsi que les propriétés de lignes de Darboux des espaces assujéttis à cette condition.

Lorsque $R_{lmij}-R_{mlij}=0$, il vient

$$\Omega_{lm}=\frac{1}{2}\{lmij\}\,du^i\wedge du^j=\frac{1}{4}b^s_{li}du^i\wedge b_{mjs}du^j$$

et, par suite, si $n=2p$

$$\Omega_{l_1l_2}\wedge\cdots\wedge\Omega_{l_{2p-1}l_{2p}}=\frac{1}{2^{p-1}}\Delta_{l_1\cdots l_n}du'\wedge\cdots\wedge du^n\,.$$

où

$$\Delta_{l_1\cdots l_n}=\begin{vmatrix} b^{s_1}_{l_11} & b_{l_21s_1} & \cdots & b^{s_p}_{l_{2p-1}1} & b_{l_{2p}1s_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{s_1}_{l_1n} & b_{l_2ns_1} & \cdots & b^{s_p}_{l_{2p-1}n} & b_{l_{2p}ns_p} \end{vmatrix}.$$

Suppoons que $n=2p$ et que la variété M est compacte. Nous avons alors d'après la formule de Gauss-Bonnet [7]

$$\int\varepsilon_{(l)}\Delta_{l_1\cdots l_n}du^1\wedge\cdots\wedge du^n=2^{4p}p!\,\pi^p\chi\,,$$

où χ est l'invariant de Euler-Poincaré.

RÉFÉRENCES

[1] J. Kanitani. Sur l'éspace à connexion projective majorante I. (Jap. Jour. Math. Vol. 19, 1948).

[2] J. Kanitani. Sur les espaces osculatrices à un espace à connexion projective majorante. (Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ. Ser. A, Math. Vol. 26, 1951).

[3] J. Kanitani. Sur la forme de Darboux généralisée, I, (Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ. Ser. A, Math. Vol. 26, 1951).

[4] J. Kanitani. Sur la forme de Darboux généralisée II (Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ. Ser. A, Math. Vol. 29, 1955).

[5] J. Kanitani. Sur la forme de Darboux généralisée III (Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ. Ser. A, Math. Vol. 30, 1956).

[6] N. Steenrod. The topology of fibre bundles.

[7] S. Chern. A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds. (Ann. Math. Vol. 45, 1944).