J. Math. Kyoto Univ.
1-3 (1962) 411-423.

Une remarque sur les opérateurs différentiels hypoelliptiques et partiellement hypoelliptiques

Par

Sigeru MIZOHATA

(Reçu le 18 avril, 1962)

---

1. Récemment, MM. Gårding et Malgrange ont défini la notion de partiellement hypoellipticité [1]. Ce petit article a pour but de montrer comment on étend ce résultat au cas des coefficients variables[1]. Comme on verra dans la suite, il n'y a aucune difficulté à étendre le raisonnement habituel fait pour les opérateus hypoelliptiques aux opérateurs partiellement hypoelliptiques[2]. Nous avons adapté le raisonnement de Malgrange exposé dans [2].

Lemme 1.1. Soit s réel >0. $\gamma_s(x)=(1-\Delta)^{s/2}\delta$, δ étant la mesure de Dirac. On a

$$(1.1)\qquad \|(x^\nu\gamma_s)*\varphi\|_{L^2}\leqslant\varepsilon(\nu,d)\|\gamma_s*\varphi\|_{L^2},\ \text{où}\ \varphi\in\mathfrak{D},\ \nu>0.$$

$\varepsilon(\nu, d)$ est une constante qu'on peut prendre aussi petit qu'on le veut selon que d ($=$diamètre du support de φ) est choisi assez petit.

Preuve. $x^\nu\gamma_s\xrightarrow[\mathcal{F}]{}\left(-\dfrac{i}{2\pi}\right)^{|\nu|}\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\nu}(1+4\pi^2|\xi|^2)^{s/2}=p_\nu(\xi)\hat{\gamma}_s(\xi)$,
où $\hat{\gamma}_s(\xi)=(1+4\pi^2|\xi|^2)^{s/2}$; $p_\nu(\xi)$ tendant vers 0 avec $|\xi|\to\infty$.

---

1) M. S. Matsuura a déjà étendu des résultats de [1] au cas de systèmes: [3].

2) Cette recherche a été faite d'après la question posée par Prof. P. D. Lax quand l'auteur a été Membre Temporiel (Temporary Member) à l'Institut des Sciences Mathématiques (Institute of Mathematical Sciences, New York University) pendant l'année scolaire 1959-60. Notre méthode n'est autre que celle de Malgrange [2]. Mais nous devrions signaler que, si l'on calcule le commutateur $[c(x)\gamma_s*-\gamma_s*c(x)]\varphi$ explicitement, (voir la proposition 1.1 ci-dessous), quelques propositions de [2] deviennent assez claires (Voir, par exemple, Proposition II, 2.4). La section 1 a été rédigée pour élucider notre méthode. La démonstration pour les opérateurs partiellement hypoelliptiques s'expose dans la section 2.

Or, $\quad (x^{\nu}\gamma_s)*\varphi(x) = \int_{|\xi|\leq R} \exp(2\pi i x\xi) p_{\nu}(\xi)\hat{\gamma}_s(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi + \int_{|\xi|\geq R} \cdots .$

Si R est assez grand, $|p_{\nu}(\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $|\xi|>R$. D'où, le deuxième terme se majore en L^2-norme par $\frac{\delta}{2}\|\gamma_s*\varphi\|_{L^2}$, ε étant donné à l'avance. R étant ainsi fixé, on voit que la première fonction se majore en L^2-norme par

$$(1.2) \qquad \max_{|\xi|\leqslant R} |p_{\nu}(\xi)\hat{\gamma}_s(\xi)| \sqrt{\int_{|\xi|\leq R} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi}\,.$$

Or, $\quad |\hat{\varphi}(\xi)| \leqslant \int |\varphi(x)|dx \leqslant \sqrt{\text{volume}\,(\text{supp}\,(\varphi))}\cdot\|\varphi\|_{L^2}.$

D'où, (1. 2) se majore encore par

$$\max_{|\xi|\leqslant R} |p_{\nu}(\xi)\hat{\gamma}_s(\xi)| \sqrt{\text{volume}\,[\text{supp}\,(\varphi)]}\, \|\varphi\|_{L^2} \sqrt{\text{volume}\,(B_R)}\,,$$

où B_R est la boule du rayon R. Evidemment $\|\varphi\|_{L^2} \leqslant \|\varphi\|_s$ pour $s>0$. D'où le lemme.

Remarque 1. $\gamma_s(x)=(1-\Delta)^{s/2}\delta$ n'est pas fonction, mais elle est toujours dans $\mathfrak{D}_{L^2}^{\infty}(\complement 0)$. On voit que $x^{\nu}\gamma_s(x)\in L^2$, si $s-|\nu|<-n/2$. En effet, on a $\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\nu}\hat{\gamma}_s(\xi)=0(|\xi|^{-(n/2)-\varepsilon})$, où $\varepsilon=|\nu|-s-n/2$.

Remarque 2. Si $\varphi\in H^s$, c'est-à-dire que si $\gamma_s*\varphi\in L^2$, en prenant une suite régularisante de φ, on voit que le lemme est encore vrai pour $\varphi\in H^s$.

Proposition 1.1. Soit s réel >0 ; $c(x)\in\mathcal{B}$.

$$(1.3) \qquad \|c(x)\gamma_s*\varphi-\gamma_s*c(x)\varphi\|_{L^2} \leqslant \varepsilon(d,s)\|\gamma_s*\varphi\|_{L^2} \equiv \varepsilon(d,s)\|\varphi\|_s\,,$$

où $\varphi\in H^s \cap \mathcal{E}'$. $\varepsilon(d, s)$ est une constante qu'on peut prendre aussi petit qu'on le veut selon que d (=diamètre du support de φ) devient petit.

Preuve. Il suffit de prouver l'inégalité (1. 3) pour $\varphi\in\mathfrak{D}$. (cf. Remarque 2).

$$(1.4) \qquad c(x)\gamma_s*\varphi-\gamma_s*c(x)\varphi = \int [c(x)-c(y)]\gamma_s(x-y)\varphi(y)dy\,.$$

En développant $c(y)$ autour de x:

$$c(y)-c(x)=\sum_{1\leqslant|\nu|\leqslant m-1}\frac{(y-x)^{\nu}}{\nu!}D^{\nu}c(x)+\sum_{|\nu|=m}(-1)^{|\nu|}c_{\nu}(x,y)(y-x)^{\nu},$$
$$c_{\nu}(x,y)\in\mathcal{B},$$

(1.4) s'écrit

$$(1.5)\quad \sum_{1\leqslant|\nu|\leqslant m-1}(-1)^{|\nu|}\frac{D^{\nu}c(x)}{\nu!}(x^{\nu}\gamma_s)*\varphi+\sum_{|\nu|=m}\int c_{\nu}(x,y)(x-y)^{\nu}\gamma_s(x-y)\varphi(y)dy.$$

Or, le lemme 1.1 affirme que les premiers termes de (1.5) ont les propriétés de (1.3). Envisageons donc les termes sous le signe de l'intégrale. Ici, on prend s de manière que $x^{\nu}\gamma_s(x)\in L^2$. (cf. Remarque 1). Prenons un de ces termes. Il se majore par $\sup|c_{\nu}(x,y)|\int|(x-y)^{\nu}\gamma_s(x-y)|\,|\varphi(y)|dy=\sup|c_{\nu}(x,y)|(|x^{\nu}\gamma_s|*|\varphi|)$. D'après Remarque 1, $|x^{\nu}\gamma_s|*|\varphi(x)|$ se majore en L^2-norme par (Hausdorff-Young)

$$\|x^{\nu}\gamma_s\|_{L^2}\|\varphi(x)\|_{L^1}.$$

Compte tenu de $\|\varphi(x)\|_{L^1}\leqslant\sqrt{\text{volume Supp}(\varphi)}\|\varphi(x)\|_{L^2}$,

on a (1.3).

Corollaire 1. Soient $c(x)\in\mathcal{B}$, $\varphi\in H^s\cap\mathcal{E}'$, où s est réel positif, 0, ou négatif. On a $c(x)\varphi\in H^s$. De plus, l'application: $(c(x),\varphi)\to c(x)\varphi$ de $(\mathcal{B})\times(H^s\cap\mathcal{E}'(K))$[3] dans H^s est continue, où K est un compact fixé.

Preuve. Supposons $s<0$. La première partie découle immédiatement de (1.3), car $c(x)\gamma_s*\varphi\in L^2$. D'autre part, compte tenu de (1.4) et (1.5) et que les $c_{\nu}(x,y)$ sont majorées par les dérivées de $c(x)$ d'ordre $\leqslant m$, (1.3) s'écrit

$$\|c(x)\varphi\|_s\leqslant\max_{x\in K}|c(x)|\,\|\varphi\|_s+c(K;s)|c(x)|_m\|\varphi\|_s,$$

où $|c(x)|_m=\sum_{|\nu|\leqslant m}\sup|D^{\nu}c(x)|$, où $m=\left[s+\frac{n}{2}\right]+1$; ou plus grossièrement $\|c(x)\varphi\|\leqslant C|c(x)|_m\|\varphi\|_s$, C dépendant de K et de s.

Le cas $s=0$ est trivial. Les cas $s<0$ se traite par la dualité: $(H^s)'=H^{-s}$.

3) Cet espace, sous-espace de H^s, est muni de la topologie induite par H^s.

Corollaire 2. Soit $c(x)\in\mathcal{E}$, $c(x_0)=0$, alors

$$\|c(x)\varphi\|_s\leqslant\varepsilon\|\varphi\|_s,$$

où $\varepsilon\to 0$ si le support de $\varphi\in H^s$ converge vers x_0. Plus précisément, soit d la plus grande distance du support de φ à x_0, alors ε peut être choisi aussi petit qu'on le veut si on prend d petit.

Preuve. (1. 3) s'écrit

$\|c(x)\varphi\|_s\leqslant\|c(x)\gamma_s*\varphi\|_{L^2}+\varepsilon(d, s)\|\varphi\|_s$ ou encore

$\leqslant\{\sup|c(x)|+\varepsilon(d, s)\}\|\varphi\|_s$ où $\sup|c(x)|$ signifie celui de $c(x)$ au voisinage du support de φ. Par la dualité, ceci est encore vrai pour $s<0$.

2. Dans cette section, nous voulons exposer les extensions du lemme 1. 1, et de la proposition 1. 1 au cas des distributions dans l'espace $(x, y)\in R^n\times R^m$. Avant tout, une

Définition de l'espace $H^{s,t}$. $f\in H^{s,t}$ si $f\in\mathcal{S}'_{x,y}$ et $\hat{f}(\xi,\eta)(1+|\xi|)^s(1+|\eta|)^t\in L^2_{\xi,\eta}$ où $\hat{f}(\xi,\eta)$ est la transformée de Fourier de f, et s, t sont des nombres réels. On le munit du produit scalaire $(f, g)_{s,t}=((1+4\pi^2|\xi|^2)^s(1+4\pi^2|\eta|^2)^t\hat{f}(\xi,\eta), \hat{g}(\xi,\eta))$,

ou bien $=((1-\Delta_x)^s(1-\Delta_y)^t f, g)$. On a $(H^{s,t})'=H^{-s,-t}$.

Remarque 3. $\rho(x)\geqslant 0$, $\rho\in\mathcal{D}$; $\int\rho(x)dx=1$; $\rho_\varepsilon(x)=\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$; $\rho_\varepsilon(y)=\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m\rho\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$, alors pour toute $T\in H^{s,t}$, $\rho_\varepsilon(x, y)*T\equiv(\rho_\varepsilon(x)\rho_\varepsilon(y))*T\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}T$ dans $H^{s,t}$. Ceci signifie que, si $T\in H^{s,t}\cap\mathcal{E}'$, alors on peut approcher T d'une suite $\varphi_j(x, y)\in\mathcal{D}$ dont les supports convergent vers celui de T. Evidemment $\mathcal{D}_{x,y}$ est dense dans $H^{s,t}$.

Maintenant on va étendre la proposition 1. 1 :

Proposition 2. 1. Soit $s>0$; $c(x, y)\in\mathcal{B}_{x,y}$, on a

$$\|(\gamma_{s^*_{(x)}}c(x, y)-c(x, y)\gamma_{s^*_{(x)}})\varphi(x, y)\|_{0,-N}\leqslant\varepsilon\|\gamma_{s^*_{(x)}}\varphi(x, y)\|_{0,-N}\equiv\varepsilon\|\varphi(x, y)\|_{s,-N}\tag{2. 1}$$

pour toute $\varphi(x, y) \in H^{s,-N} \cap \mathcal{E}'$, ($N$ étant un entier)[4], ε étant une constante qu'on peut choisir aussi petit qu'on le veut si $d_x = \text{diamètre}_x$ $(\text{Supp}[\varphi]) \to 0$; $\gamma_s = (1-\Delta_x)^{s/2}\delta_{x,y}$.

Démonstration. Il suffit de montrer (2.1) pour $\varphi \in \mathfrak{D}$, compte tenu de la remarque 3. Compte tenu de

$$c(\xi, y) - c(x, y) = \sum_{1 \leqslant |\nu| < m} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} D_x^\nu c(x, y)(x-\xi)^\nu + \sum_{|\nu| = m} c_\nu(x, \xi, y)(x-\xi)^\nu,$$

on aura

$$(2.2) \qquad (\gamma_s \underset{(x)}{*} c(x, y) - c(x, y)\gamma_s \underset{(x)}{*})\varphi(x, y)$$
$$= \int \gamma_s(x-\xi)\{c(\xi, y) - c(x, y)\}\varphi(\xi, y)d\xi$$
$$= \sum_\nu \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} D_x^\nu c(x, y)[(x^\nu \gamma_s) \underset{(x)}{*} \varphi(x, y)]$$
$$+ \sum_{|\nu| = m} \int c_\nu(x, \xi, y)(x-\xi)^\nu \gamma_s(x-\xi)\varphi(\xi, y)d\xi.$$

Pour les premiers termes la vérification de (2.1) est immédiate d'après le lemme 1.1. En effet, soit $\psi(x, y) = \gamma_{-N} \underset{(y)}{*} \varphi(x, y)$, on aura

$$(2.3) \qquad \|(x^\nu \gamma_s) \underset{(x)}{*} \varphi(x, y)\|_{0-N}^2 = \|(x^\nu \gamma_s) \underset{(x)}{*} \psi(x, y)\|_{L^2}^2$$
$$= \int dy \int |(x^\nu \gamma_s) \underset{(x)}{*} \psi(x, y)|^2 dx \leqslant \varepsilon(d_x) \int dy \int |\gamma_s \underset{(x)}{*} \psi(x, y)|^2 dx$$
$$= \varepsilon(d_x) \|\gamma_s \underset{(x)}{*} \psi(x, y)\|_{L^2}^2 = \varepsilon(d_x) \|\gamma_s \underset{(x)}{*} \varphi(x, y)\|_{0,-N}^2.$$

Envisageons les fonctions sous le signe de l'intégration. Ici on prend m de manière que $x^\nu \gamma_s(x) \in L^2$ (Voir Remarque 1 de la section 1). Prenons une d'elles. Soit $\psi(x, y) \in \mathfrak{D}$, alors

$$I = \langle \psi(x, y), \int \cdots d\xi \rangle_{x,y} = \iiint c_\nu(x, \xi, y)(x-\xi)^\nu \gamma_s(x-\xi)\varphi(\xi, y)\psi(x, y)$$
$$\times dx d\xi dy = \iint (x-\xi)^\nu \gamma_s(x-\xi) dx d\xi \int c_\nu(x, \xi, y)\varphi(\xi, y)\psi(x, y)dy.$$

Ce changement de l'ordre de l'intégration est permise. En effet,

---

4) Nous avons démontré la proposition dans le cas où $N > 0$. Le cas où $N \leqslant 0$ est beaucoup plus simple. Pour l'énoncé de la proposition, il serait mieux de noter $H^{s,N}$ au lieu de $H^{s,-N}$. Mais pour notre but actuel, il suffit de considérer l'espace $H^{s,N}$ où N est négatif. En ce sens, nous avons noté $H^{s,-N}$ au lieu de $H^{s,N}$.

$c(x, \xi, y)$ est bornée,

et $\displaystyle\int |(x-\xi)^\nu \gamma_s(x-\xi)||\varphi(\xi, y)|d\xi \leqslant \sqrt{\int |x^\nu \gamma_s(x)|^2 dx} \cdot \sqrt{\int |\varphi(\xi, y)|^2 d\xi}$
$\leqslant M < +\infty$.

Or, $F(x, \xi) = \int c_\nu(x, \xi, y)\varphi(\xi, y)\psi(x, y)dy$ se majore par

$$\|c_\nu(x, \xi, y)\psi(x, y)\|_{N(y)}\|\varphi(\xi, y)\|_{-N(y)} \leqslant C\, \|\psi(x, y)\|_{N(y)}\|\varphi(\xi, y)\|_{-N(y)} \underset{\text{déf}}{=} C\Psi(x)\Phi(\xi)\,.$$

Ici, $\|f(x, y)\|_{N(y)}(\|\cdots\|_{-N(y)})$ signifie la H^N-norme (H^{-N}-norme) de f prise dans l'espace des y, x étant considéré comme paramètre. D'où

$$|I| \leqslant C\iint |(x-\xi)^\nu \gamma_s(x-\xi)|\Psi(x)\Phi(\xi)dxd\xi$$
$$= C\int \Phi(\xi)d\xi \int |(x-\xi)^\nu \gamma_s(x-\xi)|\Psi(x)dx\,.$$

Or, $\displaystyle\int |(x-\xi)^\nu \gamma_s(x-\xi)|\Psi(x)dx \leqslant \sqrt{\int |(x-\xi)^\nu \gamma_s(x-\xi)|^2 dx}\ \sqrt{\int \Psi(x)^2 dx}$

$$= \sqrt{\int |x^\nu \gamma_s(x)|^2 dx}\, \|\psi(x, y)\|_{0,N}\,.$$

Comme $\Phi(\xi)$ est à support compact, on a

$$\int \Phi(\xi)d\xi \leqslant \sqrt{\text{volume (Supp }\Phi(\xi))}\, \|\Phi(\xi)\|_{L^2}$$
$$= \sqrt{\text{volume}_x\text{ (Supp }[\varphi])}\, \|\varphi(x, y)\|_{0,-N}\,.$$

où volume$_x$ (Supp $[\varphi]$) signifie la mesure de *la projection* dans l'espace x du support de $\varphi(x, y)$.

On a finalement

$$|I| \leqslant \varepsilon \|\psi(x, y)\|_{0,N}\|\varphi(x, y)\|_{0,-N}$$

où ε tend vers 0 avec diamètre$_x$ (Supp $[\varphi]$).

En posant $\varphi_\nu(x, y) = \int c_\nu(x, \xi, y)(x-\xi)^\nu \gamma_s(x-\xi)\varphi(\xi, y)d\xi$,

on a

$$\|\varphi_\nu(x, y)\|_{0,-N} \leqslant \varepsilon \|\varphi(x, y)\|_{0,-N},\ \text{à fortiori},\ \leqslant \varepsilon \|\varphi\|_{s,-N}\,.$$

c.q.f.d.

Comme dans la section 1, on a le

Corollaire 1. Soient $c(x, y)\in\mathscr{B}$, $T\in H^{s,-N}\bigcap\mathscr{E}'$ (s réel positif, 0, où négatif ; N entier), alors $c(x, y)T\in H^{s,-N}$; l'application $(c(x, y), T)\to c(x, y)T$ de $(\mathscr{B})\times(H^{s,-N}\bigcap\mathscr{E}'(K))\to H^{s,-N}$ est continue, où K est un compact fixé.

Preuve. Supposons $s>0$. La première partie découle immédiatement de (2. 1), car $c(x, y)(\gamma_{s^*_{(x)}}T)\in H^{0,-N}$. Quant à la seconde, compte tenu de (2. 1), (2, 2) et (2. 3), on a

$$||c(x, y)T||_{s,-N}\leqslant||c(x, y)(\gamma_{s^*_{(x)}}T)||_{0,-N}+c(K; s, N)\,|c(x, y)|_{m+|N|}||T||_{s,-N},$$

où $|c(x, y)|_{m+|N|}=\sum_{|\alpha|\leqslant m+|N|}\sup|D^{\alpha}_{x,y}c(x, y)|$, $m=\left[s+\frac{n}{2}\right]+1$.

Or, le premier terme du second membre se majore par $C_N|c(x, y)|_{|N|}\times||\gamma_{s^*_{(x)}}T||_{0,-N}$. En somme,

$$||c(x, y)T||_{s,-N}\leqslant C(K;\ s,\ N)\,|c(x, y)|_{m+|N|}||T||_{s,-N}.$$

Le cas $s=0$ est trivial. Le cas $s<0$ se traite par la dualité.

Corollaire 2. Soit $c(x, y)\in\mathscr{E}$, $c(x_0, y_0)=0$, alors (s et N vérifiant les mêmes conditions que le précédent),

$$||c(x, y)T||_{s,-N}\leqslant\varepsilon||T||_{s,-N}$$

où ε peut être choisi aussi petit qu'on le veut si le support de $T\in H^{s,-N}$ converge vers (x_0, y_0).
Pour démontrer ce corollaire, on a besoin du

Lemme 2. 1. Soit $c(x, y)\in\mathscr{B}$; N entier $\gtreqless 0$; $T\in H^{0,-N}$, nous avons

$$||c(x, y)T||_{0,-N}\leqslant\{|\sup c(x, y)|+\varepsilon\}||T||_{0,-N},$$

où ε peut être choisi aussi petit qu'on le veut selon diamètre ${}_y\{\mathrm{Supp}\,(T)\}\to 0$.

Preuve. Pour $N<0$, c'est une relation bien connue. Démontrons donc en supposant $N>0$.

$$||c(x, y)T||_{0,-N}=\sup_{\varphi}\frac{|\langle\varphi, cT\rangle|}{||\varphi(x, y)||_{0,N}}=\sup_{\varphi}\frac{|\langle c\varphi, T\rangle|}{||\varphi||_{0,N}}$$
$$\leqslant\sup_{\varphi}\frac{||c\varphi||_{0,N}}{||\varphi||_{0,N}}||T||_{0,N}.$$

Comme le support de T est borné par rapport à y, on peut supposer que les φ parcourent en gardant leurs supports dans un petit voisinage de celui de T. D'après le lemme de Poincaré, on a $\|D_y^l\varphi(x, y)\|_{L^2}\leqslant d_y\|D_y^{l-1}\varphi(x, y)\|_{L^2}$. où d_y désigne le maximum des diamètres par rapport à y du support de φ. D'où

$\|c\varphi\|_{0,N}\leqslant \{\sup|c(x, y)|+\mathcal{E}(d_y)\}\|\varphi\|_{0,N}$, $\mathcal{E}(d_y)$ tendant vers 0 avec d_y.

Preuve du corollaire 2. Il suffit de démontrer en supposant $s\geqq 0$. Le cas $s<0$ se démontre par dualité. $\varepsilon>0$ étant donné, on peut choisir $\delta>0$ de telle manière que $\max|c(x, y)|$ dans la boule $B_\delta(x_0, y_0)$ soit plus petit que $\frac{\varepsilon}{3}$. Alors, en modifiant $c(x, y)$ en dehors de $B_\delta(x_0, y_0)$, on a une fonction $\tilde{c}(x, y)$ telle que $|\tilde{c}(x, y)|\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon$ pour tout (x, y). En supposant que le support de T soit dans $B_\delta(x_0, y_0)$, on a

$$\begin{aligned}\|c(x, y)T\|_{s,-N} &= \|\tilde{c}(x, y)T\|_{s,-N} = \|\gamma_s(x)\underset{(x)}{*}\tilde{c}T\|_{0,-N}\\ &\leqslant \|\tilde{c}(\gamma_s\underset{(x)}{*}T)\|_{0,-N}+\|(\gamma_s\underset{(x)}{*}\tilde{c}-\tilde{c}\gamma_s\underset{(x)}{*})T\|_{0,-N}.\end{aligned}$$

En appliquant au premier terme le lemme 2.1, et au deuxième terme la proposition 2.1, on voit que le dernier membre se majore par

$$\left(\frac{2}{3}\varepsilon+\mathcal{E}'\right)\|\gamma_s\underset{(x)}{*}T\|_{0,-N},\ \text{où } \mathcal{E}'\to 0 \text{ avec le support de } T.$$

c.q.f.d.

Dans la suite, nous aurons besoin d'une propriété des opérateurs hypoelliptiques. Nous allons commencer par un lemme assez élémentaire.

Lemme 2.2. Soit $T\in\mathcal{E}'_{x,y}$; $M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ est un opérateur hypoelliptique à coefficients constants dans l'espace R^n_x. Pour que $MT\in H^{s,-N}$ (s réel, N entier $\geqslant 0$) il faut et il suffit qu'on ait

$$(1+|M(2\pi i\xi)|)\hat{T}(\xi, \eta)\in\hat{H}^{s,-N},$$

où $\hat{H}^{s,-N}$ est l'espace dual de Fourier de $H^{s,-N}$.

Preuve. La suffisance est évidente. Montrons la nécessité.

Remarquons d'abord : Soit $\varphi(x)\in \mathcal{E}'(K)$, ($K$: compact) ; $M\varphi\in H^s$. Alors il existe une constante $c>0$ (dépendant éventuellement de K) telle que

(2.4) $\|M\varphi\|_s \geqslant c\|\varphi\|_{M,s}$ pour toute φ vérifiant la condition ci-dessus,

où $\|\varphi\|_{M,s}^2 = \int (1+|\xi|)^{2s}(1+|M(2\pi i\xi)|)^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi$, (cf. Malgrange, [2], Lemme I. 2. 4). Appliquons ce fait à notre cas. Supposons $M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)T\in H^{s,-N}$, $T\in \mathcal{E}'$. Alors

$$\gamma_{-N}(y)\underset{(y)}{*}M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)T = M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)[\gamma_{-N}(y)\underset{(y)}{*}T] = M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x, y)\in H^{s,0}.$$

où $\varphi(x, y)=\gamma_{-N}(y)\underset{(y)}{*}T$.

Cela entraîne à fortiori que pour presque toutes les y, $M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x, y)$ appartient à H_x^s. Comme les supports en x de $\varphi(x, y)$ sont uniformément bornés par rapport à y, compte tenu de (2. 4),

$(1+|M(2\pi i\xi)|)\hat{\varphi}(\xi, y)\in \hat{H}_\xi^s$ pour presque toutes les y. De plus

$$\|M\varphi(x, y)\|_{s,0}^2 \geqslant C\int \|(1+|M(2\pi i\xi)|)\hat{\varphi}(\xi, y)\|_{\hat{H}_\xi^s}^2 dy < +\infty .$$

D'où, par Plancherel

$$(1+|M(2\pi i\xi)|)\hat{\varphi}(\xi, \eta)\in \hat{H}^{s,0}.$$

D'après la définition de $\varphi(x, y)$, on a le lemme.

De là, il résulte

Corollaire. Soit $M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur hypoelliptique ; soit $N\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur plus faible que M. Plus précisément, il existe un $\sigma\geqslant 0$ tel que

(2.5) $$\frac{N(i\xi)|\xi|^\sigma}{1+|M(i\xi)|} \text{ est borné pour } \xi\in R^n.$$

Alors $Mf\in H^{s,-N}$ (s réel), $f\in \mathcal{E}'$, entraînent $Nf\in H^{s+\sigma,-N}$. Plus précisément, il existe une constante c positive telle que

(2.6) $\|Nf\|_{s+\sigma,-N} \leqslant c(K)\|Mf\|_{s,-N}$ pour toute $f\in \mathcal{E}'(K)$, Nous voulons exposer ce corollaire sous une forme plus maniable.

Définition $H^{s,t}_{\mathrm{loc}}$. Une distribution f en (x, y) appartient à $H^{s,t}_{\mathrm{loc}}$, si, pour toute $\alpha(x, y) \in \mathfrak{D}$, $\alpha(x, y)f \in H^{s,t}$.
D'après le corollaire 1 de la proposition 2.1, si $f(x, y) \in H^{s,-N}$, elle appartient à $H^{s,-N}_{\mathrm{loc}}$.

Proposition 2.2. Soit $M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur hypoelliptique; Soit $N\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur strictement plus faible que M: il existe un $\sigma > 0$ tel que, pour tout $\nu \geqslant 0$, $N^{(\nu)}(i\xi)|\xi|^{\sigma}/M(i\xi)$ est borné pour $|\xi| \to +\infty$. Alors,

$$Mf \in H^{s,-N}_{\mathrm{loc}},\ f \in H^{s',-N}_{\mathrm{loc}}\ (s' \text{ arbitraire}),\ \text{entraînent } Nf \in H^{s+\sigma,-N}_{\mathrm{loc}}.$$

Démonstration. Montrons, par le raisonnement habituel, que

$$M(\psi f) \in H^{s,-N} \quad \text{pour toute } \psi \in \mathfrak{D}. \tag{2.7}$$

$$M(\psi f) = \psi Mf + \sum_{|\nu| \geqslant 1} \frac{D_x^{\nu}\psi}{\nu!} M^{(\nu)} f. \tag{2.8}$$

D'après l'hypothèse sur f, il existe un s'' tel que

$$M^{(\nu)}f \in H^{s'',-N}_{\mathrm{loc}} \quad \text{pour tout} \quad \nu > 0.$$

Alors, d'après (2.8), $M(\psi f) \in H^{\min(s,s''),-N}$ pour toute $\psi \in \mathfrak{D}$. Supposons $s'' < s$. Compte tenu d'une propriété de l'opérateur hypoelliptique: il existe un $b > 0$ tel que $|\xi|^b M^{(\nu)}(i\xi)/M(i\xi)$ est borné pour $|\xi| \to +\infty$, et d'après le corollaire précédent, on a $M^{(\nu)}(\psi f) \in H^{s''+b,-N}$. Ceci équivaut à $M^{(\nu)}f \in H^{s''+b,-N}_{\mathrm{loc}}$. En répétant ce procédé, on a (2.7).

Or, d'après le corollaire précédent, on a

$$N^{(\nu)}(\psi f) \in H^{s+\sigma,-N} \quad \text{pour toute } \psi \in \mathfrak{D},\ (\nu \geqslant 0).$$

c.q.f.d.

Maintenant considérons un opérateur $P\left(x, y; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *formellement* hypoelliptique à coefficients variables. Plus précisément, au voisinage de (x_0, y_0), P s'exprime

$$P\left(x, y ; \frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{j: \text{fini}} a_j(x, y) M_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), \tag{2.9}$$

où 1° $a_j \in \mathcal{E}$; 2° $M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_j a_j(x_0, y_0) M_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ est hypoelliptique ; 3° les M_j sont hypoelliptiques, et équivalents à M.

Proposition 2.3. Soit P un opérateur vérifiant les conditions ci-dessus, il existe alors un voisinage compact K de (x_0, y_0) et une constante $c>0$ tels que

$$\|P\varphi\|_{s,-N} \geqslant c\|M\varphi\|_{s,-N} \tag{2.10}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{E}'(K)$ telle que $M\varphi \in H^{s,-N}$; c et K dépendent de P et de (s, N).

Démonstration.

$$P=M+\sum_j\left[a_j(x, y)-a_j(x_0, y_0)\right] M_j .$$

D'après le corollaire du lemme 2.2, $M_j\varphi \in H^{s,-N}$. D'après le corollaire 2 de la proposition 2.1, $\|[a_j(x, y)-a_j(x_0, y_0)] M_j\varphi\|_{s,-N} \leqslant \varepsilon_j\|M_j\varphi\|_{s,-N}$, où $\varepsilon_j \rightarrow 0$ avec le support de φ. Encore d'après (2.6), $\|M_j\varphi\|_{s,-N} \leqslant c\|M\varphi\|_{s,-N}$ $j=1, 2, \cdots$. Ces deux inégalités donnent (2.10).

Proposition 2.4. P étant un opérateur vérifiant les conditions de (2.9), alors $Pf \in H_{\text{loc}}^{s,-N}$, $f \in H_{\text{loc}}^{s'',-N}$ (N entier $\geqslant 0$; s'' arbitraire) entraînent $Mf \in H_{\text{loc}}^{s,-N}$.

Démonstration. D'après l'hypothèse sur f, il existe un s' tel que

$$Mf \in H_{\text{loc}}^{s',-N} .$$

Soit $\psi(x, y) \in \mathcal{D}$, dont le support soit contenu dans le voisinage K de la proposition 2.3.

$$P(\psi f)=\psi P f+\sum_{|\nu| \geqslant 1} \frac{D_x^\nu \psi}{\nu !} P^{(\nu)} f . \tag{2.11}$$

Utilisons l'expression (2.9). Comme M_j sont équivalents à M, de sorte que les $M_j^{(\nu)}$, $\nu>0$, sont strictement plus faibles, alors d'après la proposition 2.2, il existe un σ $(1 \geqq \sigma>0)$ tel que

(2.12) $\qquad M_j^{(\nu)} f \in H_{\text{loc}}^{s'+\sigma, -N} \qquad j = 1, 2, \cdots; \ \nu > 0.$

D'où, d'après (2.11),

$$P(\psi f) \in H^{\min(s, s'+\sigma), -N}.$$

Supposons $s'+\sigma < s$.
Considérons

(2.13) $\qquad \Delta_{i,h}[P(\psi f)] \equiv P(\Delta_{i,h}(\psi f)) + (\Delta_{i,h} P)(\tau_{i,h}(\psi f)),$

où $\tau_{i,h}$ est l'opérateur de la translation de h par rapport à l'i-ième coordonnées des x ; $\Delta_{i,h} = \dfrac{\tau_{i,h}-1}{h}$; $\Delta_{i,h} P = \sum\limits_j \dfrac{\tau_{i,h} a_j(x, y) - a_j(x, y)}{h} M_j$. La transformation de Fourier montre que le premier membre de (2.13), pour $h \to 0$, tend vers $D_i[P(\psi f)]$ dans $H^{s'+\sigma-1, -N}$. Le corollaire 1 de la proposition 2.1 montre que le dernier terme de (2.13) est convergeant, pour $h \to 0$, dans $H^{s', -N}$, d'où, $P[\Delta_{i,h}(\psi f)]$ converge dans $H^{s'+\sigma-1, -N}$. Or, d'après la proposition 2.3, $M(\Delta_{i,h}(\psi f))$ est convergeant dans $H^{s'+\sigma-1, -N}$, dont la limite est manifestement $MD_i(\psi f) = D_i M(\psi f) \in H^{s'+\sigma-1, -N}$. D'où

$$M(\psi f) \in H^{s'+\sigma, -N}. \quad \text{De (2.12), on a}$$
$$Mf \in H_{\text{loc}}^{s'+\sigma, -N}.$$

En répétant ce procédé, on arrive enfin $Mf \in H_{\text{loc}}^{s, -N}$.

Maintenant, on va envisager un opérateur différentiel linéaire $L\left(x, y ; \dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ à coefficients indéfiniment différentiables. On suppose que :

(2.14) $\qquad L = P\left(x, y ; \dfrac{\partial}{\partial x}\right) + \sum P_j\left(x, y ; \dfrac{\partial}{\partial x}\right) Q_j\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$

vérifie les conditions suivantes :

1°. P satisfait à (2.9),

2°. Chaque P_j est strictement plus faible que M. Cela signifie que P_j s'exprime par une combinaison linéaire des opérateurs strictement plus faibles que M (cf. Proposition 2.2), $N_1\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$, $N_2\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$, $\cdots$, avec des coefficients indéfiniment dérivables,

3°. Q_j sont des opérateurs à coefficients constants.

Notre but est de démontrer que L est hypoelliptique en x. Nous allons préciser ce que nous entendons par là.

Définition. Une distribution $T_{x,y}$ est dite régulière en x dans un ouvert Ω $(\subset R_x^n \times R_y^m)$, si pour tout $\Omega_x \times \Omega_y \subset \Omega$ (Ω_x et Ω_y sont ouverts), la distribution $\langle T_{x,y}, \alpha(y)\rangle_y \in \mathcal{E}_x(\Omega_x)$, pour toue $\alpha(y) \in \mathcal{D}(\Omega_y)$.

Définition. Un opérateur $L\left(x, y\,;\, \dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ est dit hypoelliptique en x, si toute distribution $u_{x,y}$, solution de $L(u)=f$, est régulière en x où f l'est.

Théorème. Si L vérifie les conditions de (2.14), L est hypoelliptique en x.

Démonstration. Il suffit de montrer que :

$$Lu = f\,, \quad f \in H_{\text{loc}}^{s,-N}\,, \quad u \in H_{\text{loc}}^{s',-N} \quad \text{entraînent} \quad Mu \in H_{\text{loc}}^{s,-N'}\,,$$

où s' est arbitraire, N' est un entier convenablement choisi.

$$Pu = f - \sum_j P_j Q_j u\,.$$

De $u \in H_{\text{loc}}^{s',-N}$, il existe un s'' tel que $Mu \in H_{\text{loc}}^{s'',-N}$. Alors $\sum P_j Q_j u \in H_{\text{loc}}^{s''+\sigma,-N-m}$, $\sigma > 0$, d'après la proposition 2. 2. (m étant le maximum des ordres de Q_j). Supposons $s > s''+\sigma$. D'après la proposition 2. 4, $Mu \in H_{\text{loc}}^{s''+\sigma,-N-m}$. En répétant ce procédé, on aura finalement : $Mu \in H_{\text{loc}}^{s,-N-km}$. c.q.f.d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Gårding et B. Malgrange: Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques, C.R. 247 (1958), 2083–2085 ; Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques et partiellement elliptiques, Math. Scand. 9 (1961) 5–21.

[2] B. Malgrange : Une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques, Bull. Soc. Math. France, 85 (1957) 283–306.

[3] S. Matsuura : Partially hypoelliptic and partially elliptic systems of differential operators with constant coefficients, J. Math. Kyoto Univ. 1 (1962) 147–160.