J. Math. Kyoto Univ.
3-3 (1964) 319~346.

Quelques propriétés locales des domaines intérieurement ramifiés

Par

Hidekazu ÔNISHI

(Reçu le 20 juin, 1964)

Introduction. En 1938, M. H. Cartan[1] a trouvé et utilisé un fait qui a été une conséquence directe du développement en séries de Laurent, pour démontrer que le premier problème de Cousin peut être résolu affirmativement même pour un certain domaine qui n'est pas un domaine d'holomorphie. En 1951, M. K. Oka[2] a utilisé ce fait comme un lemme pour étudier la propriété (H) d'une fonction holomorphe sur une surface caractéristique dans un domaine univalent de n variables complexes. Le lemme a été énoncé par M. K. Oka sous la forme suivante:

Lemme de H. Cartan (Théorème des trois anneaux). *Soient* Δ_1, Δ_2, Δ_3 *trois domaines annulaires univalents à l'espace de* n $(n \geqq 3)$ *variables complexes* $(x_1, \cdots, x_n)$, *des formes suivantes*:

(Δ_1) $\quad \rho_1 < |x_1| < r_1,\ |x_2| < r_2,\ |x_3| < r_3,\ (x_4, \cdots, x_n) \in \mathfrak{D}$,

(Δ_2) $\quad |x_1| < r_1,\ \rho_2 < |x_2| < r_2,\ |x_3| < r_3,\ (x_4, \cdots, x_n) \in \mathfrak{D}$,

(Δ_3) $\quad |x_1| < r_1,\ |x_2| < r_2,\ \rho_3 < |x_3| < r_3,\ (x_4, \cdots, x_n) \in \mathfrak{D}$,

$\mathfrak{D}$ *étant un domaine univalent quelconque, et* ρ_j *des nombres positifs ou nuls. Étant données trois fonctions* $g_i(x)$ *holomorphes dans* $\delta_i = \Delta_j \cap \Delta_k$, (i, j, k) *étant un échange circulaire quelconque de* $(1, 2, 3)$, *telles que l'on ait identiquement dans* $\delta = \Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3$

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0,$$

---

1) H. Cartan, Sur le premier problème de Cousin, C. R. 207 (1938).

2) K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VIII-Lemme fondamental, Journ. Math. Soc. Japan 3 (1951), n°6.

on peut trouver trois fonctions $h_j(x)$ holomorphes dans Δ_j, de façon qu'on ait identiquement dans δ_i

$$g_i = h_j - h_k.$$

Alors, se pose le problème (A): *ce théorème peut-il se généraliser au cas de domaines intérieurement ramifiés sur l'espace (x)?* Dans ce mémoire, nous étudierons ce problème (A), et nous traiterons aussi, du côté de ce problème, quelques problèmes relatifs à un domaine Δ intérieurement ramifié sur un polycylindre $\underline{\Delta}$ à l'espace (x). On obtiendra en particulier, du théorème 2 du n°8, le résultat suivant:

Pour que le premier problème de Cousin soit résoluble dans le domaine $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ (ou pour que toute distribution des pôles donnée dans $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ soit prolongeable dans Δ[3]), il faut et il suffit que le problème (A) soit résoluble affirmativement pour la triade des domaines Δ_1, Δ_2, Δ_3[4].

Dans le dernier n°, nous pouvons, en vertu d'un critère que nous expliquerons au n°12, donner un exemple de domaine intérieurement ramifié Δ dans lequel le théorème des trois anneaux n'est plus vrai pour la triade des domaines Δ_1, Δ_2, Δ_3. Cet exemple montre que le premier problème de Cousin n'est pas toujours résolu affirmativement dans le domaine $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$, ainsi que le théorème de M. W. Rothstein[3] ne s'applique plus au cas de domaines intérieurement ramifiés.

§1. Problèmes

1. Problème (A). Soit $\underline{\Delta}$ un polycylindre à l'espace de n $(n \geqq 3)$ variables complexes $(x_1, \cdots, x_n)$, de la forme:

$$(\underline{\Delta}) \qquad |x_1| < r_1, \cdots, |x_n| < r_n,$$

et considérons un revêtement analytique ramifié (analytische Überlage-

3) Lorsque Δ est un domaine univalent, toute distribution des pôles donnée dans $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ peut se prolonger dans Δ tout entier. Voir W. Rothstein, Über die Fortsetzung von Verteilungen meromorpher Ortsfunktionen im R_6, Math. Annalen 124 (1952).

4) On sait bien que le premier problème de Cousin pour un espace analytique X est résoluble affirmativement pourvu qu'on ait $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$. Inversement, le théorème montre que la réciproque est vraie pour $X = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$.

rung) $\varDelta$ de $\underline{\varDelta}$ à ν feuillets; $\varDelta$ sera appelé dans ce qui suit, simplement un *domaine (intérieurement) ramifié sur* $\underline{\varDelta}$. Nous supposerons toujours que $\varDelta$ *soit contenu complètement intérieure à un domaine* $\varDelta'$ *à* ν' *feuillets, ramifié sur un polycylindre* $\underline{\varDelta}'$ *tel que* $\underline{\varDelta} \Subset \underline{\varDelta}'$.

L'ensemble $\underline{E}$ des traces (Grundpunkte) $\underline{P}$ sur l'espace (x) des points P d'un ensemble E dans $\varDelta$ sera appelé la *projection* de E, et sera noté $\pi(E)$; l'image réciproque $\pi^{-1}(\underline{E})$ est l'ensemble des points P de $\varDelta$ dont les projections $\underline{P}$ appartiennent à $\underline{E}$. Soit par exemple σ la surface critique de $\varDelta$ et $\underline{P}$ un point quelconque de $\underline{\varDelta}-\underline{\sigma}$. Par définition, $\pi^{-1}(\underline{P})$ se compose ν points distincts $P_1, \cdots, P_\nu$ de $\varDelta$ et nous dirons que *les points* P_j *se situent sur le point* $\underline{P}$.

Soient maintenant $\underline{\varDelta}_j$ trois domaines annulaires univalents des formes:

$$(\underline{\varDelta}_1) \qquad \rho_1<|x_1|<r_1, \ |x_2|<r_2, \ |x_3|<r_3, \ |x_k|<r_k \ (k=4, \cdots, n),$$
$$(\underline{\varDelta}_2) \qquad |x_1|<r_1, \ \rho_2<|x_2|<r_2, \ |x_3|<r_3, \ |x_k|<r_k \ (k=4, \cdots, n),$$
$$(\underline{\varDelta}_3) \qquad |x_1|<r_1, \ |x_2|<r_2, \ \rho_3<|x_3|<r_3, \ |x_k|<r_k \ (k=4, \cdots, n),$$

ρ_j étant des nombres positifs ou nuls. Considérons les trois domaines (connexes ou non) $\varDelta_j=\pi^{-1}(\underline{\varDelta}_j)$, et posons $\varDelta_0=\varDelta_1\cup\varDelta_2\cup\varDelta_3$, $\delta=\varDelta_1\cap\varDelta_2\cap\varDelta_3$ et $\delta_i=\varDelta_j\cap\varDelta_k$, (i, j, k) étant des échanges circulaires de $(1, 2, 3)$.

Dans ces conditions, le problème (A) s'énonce comme il suit:

Problème (A). *Étant données trois fonctions* $g_i(P)$ *holomorphes dans* δ_i *telles que l'on ait identiquement dans* δ

$$g_1+g_2+g_3=0,$$

trouver trois fonctions $h_j(P)$ *holomorphes dans* $\varDelta_j$, *de façon que l'on ait dans* δ_i $(i=1, 2, 3)$,

$$g_i=h_j-h_k.$$

Lorsque le domaine $\varDelta$ est univalent, le problème (A) se réduit au théorème des trois anneaux, et est résoluble affirmativement.

2. Premier problème de Cousin dans $\varDelta_0$. Puisque le premier problème de Cousin pour chacun des domaines Δ_j est résoluble affirmativement, on peut énoncer *le premier problème de Cousin pour* $\Delta_0=\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3$ comme suit:

Étant données trois fonctions $\psi_j(P)$ *méromorphes dans* Δ_j *telles que leurs différences* $g_i=\psi_j-\psi_k$ *soient holomorphes dans* δ_i $(i=1, 2, 3)$, *trouver une fonction* $\Psi(P)$ *méromorphe dans* Δ_0 *(donc méromorphe dans* Δ*), de façon que les différences* $\Psi-\psi_j$ *soient holomorphes dans* Δ_j $(j=1, 2, 3)$.

Dans le cas où Δ est univalent, le premier problème de Cousin dans Δ_0 a été découvert et résolu affirmativement par M. H. Cartan.[5]

On voit aisément, d'après le raisonnement habituel, que *le premier problème de Cousin pour* Δ_0 *peut être résolu affirmativement, si le problème* (A) *est résoluble affirmativement.*

3. Problème (*H*). Considérons le problème suivant:

Soit S *une surface caractéristique (connexe ou non) à* $n-1$ *dimensions dans* Δ, *définie comme les zéros d'une seule fonction* $\varphi(P)$ *holomorphe dans* Δ, *qui n'admet que les zéros du premier ordre. Étant donnée une fonction* $f(Q)$ *holomorphe sur* S (où S est regardée comme un espace analytique connexe ou non), *telle qu'il existe trois fonctions* $F_j(P)$ *holomorphes dans* Δ_j, *et que* $f(Q)$ *soit la restriction de* $F_j(P)$ *sur* $S\cap\Delta_j$:

$$f(Q)=F_j(Q) \quad (Q\in S\cap\Delta_j),$$

trouver une fonction $F(P)$ *holomorphe dans* Δ *de façon que* $f(Q)$ *soit la restriction de* $F(P)$ *sur* S:

$$f(Q)=F(Q) \quad (Q\in S).$$

Si ce problème peut être résolu pour toute S et toute f, nous dirons que *le problème* (H) est résoluble.

Dans le cas où Δ est univalent, le problème (H) a été résolu affirmativement par M. K. Oka.[6]

---

5) H. Cartan, loc. cit. (au cas où $\rho_1=\rho_2=\rho_3=0$).

6) Le problème (H) correspond au lemme de K. Oka concernant la propriété (H) d'une surface. Voir K. Oka, loc. cit., n°6, Lemme 1.

On voit aisément que *le problème (H) peut être résolu, si le premier problème de Cousin pour Δ_0 est résoluble affirmativement.*[7]

4. Surface $\sum$. Soit $\eta(P)$ une fonction holomorphe dans Δ, dont les éléments de fonction aux points distincts de Δ situés sur un même point de $\underline{\Delta}$ soient toujours différents.[8] Considérons dans l'espace $((x), y)$ une surface caractéristique $\sum$:

$$(\textstyle\sum) \qquad y=\eta(P) \quad (P\in\Delta);$$

tout point P de Δ correspond biunivoquement au point $(\underline{P}, \eta(P))$ de $\sum$, sauf les points P appartenant à une surface τ à $n-1$ dimensions dans Δ.[9] La surface critique de Δ sera désignée par σ.

Or, on peut toujours choisir la fonction $\eta(P)$ de façon que $\sum$ satisfasse aux deux conditions suivantes:

1° *l'image sur $\sum$ d'un voisinage convenable d'un point critique Q de Δ est une surface régulière, sauf peut-être pour Q appartenant à une sous-variété de dimension n-2 sur σ;*

2° *$\underline{\tau}$ ne possède aucune composante en commun avec $\underline{\sigma}$.*

Nous dirons dans ce cas que la fonction $\eta(P)$ possède la *propriété* (J) dans le domaine Δ.

Soit en effet Q un point régulier de σ, et $\mu-1$ l'ordre de ramification de Δ au point Q. En appliquant au voisinage de $\underline{Q}$ une transformation biunivoque et pseudoconforme $(x)=T(u)$, on peut trouver un voisinage V de Q, à μ feuillets, tel que sa projection $\underline{V}$ soit un polycylindre de la forme:

$$(\underline{V}) \qquad |u_i|<\delta \;\; (i=1,\cdots,n-1), \;\; |u_n|<\delta',$$

de façon que la projection $\pi(\sigma\cap V)$ soit exprimée dans $\underline{V}$ comme $u_n=0$. On peut alors définir dans V une fonction holomorphe $f(P)$ par la formule:

---

7) En effet, en résolvant le premier problème de Cousin pour la donné des pôles $\psi_j=F_j/\varphi$, soit Ψ une solution, et posons $F=\varphi\Psi$. On aura sur S, $F=F_i$; d'où aussitôt l'énoncé.

8) H. Grauert-R. Remmert, Komplexe Räume, Math. Annalen 136 (1958).

9) K. Oka, loc. cit., n°7.

$$f(P) = u_n^{1/\mu}.$$

Soit $\underline{V}^0$ un polycylindre à l'espace (x) tel que $\underline{Q} \in \underline{V}^0 \Subset \underline{V}$, et posons $V^0 = \pi^{-1}(\underline{V}^0) \cap V$. D'après le théorème de M. K. Oka,[10] on peut trouver, pour tout nombre positif ε, une fonction $\varphi(P)$ holomorphe dans Δ telle que l'on ait dans V^0

$$|f(P) - \varphi(P)| < \varepsilon.$$

Le développement de la fonction $\varphi(P)$ en séries de Puiseux au point Q s'écrit

$$\varphi(P) = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots, \quad f = u_n^{1/\mu},$$

où les coefficients $a_k(u_1, \cdots, u_{n-1})$ $(k=0, 1, \cdots)$ sont holomorphes dans un polycylindre U de la forme: $|u_i| < \delta$ $(i=1, \cdots, n-1)$. Par suite, si l'on choisit ε suffisamment petit, le coefficient $a_1(u_1, \cdots, u_{n-1})$ du terme du premier degré en f ne s'annule pas dans U; donc la fonction $\varphi(P)$ satisfait à la condition 1° de la propriété (J) au voisinage du point critique Q.

Considérons maintenant toutes les composantes $\sigma_1, \cdots, \sigma_p$ de σ, et prenons sur chaque σ_i un point Q_i qui est un point régulier de σ; et soit $\varphi_i(P)$ une fonction qui possède au point Q_i le même caractère que la fonction $\varphi(P)$ ci-dessus mentionnée. En choisissant p nombres complexes c_i convenablement, on obtient une fonction holomorphe dans Δ,

$$\varphi^*(P) = c_1 \varphi_1(P) + \cdots + c_p \varphi_p(P),$$

dont le développement en séries de Puiseux au point Q_i possède le même caractère que celui de $\varphi_i(P)$ au point Q_i $(i=1, \cdots, p)$.

En d'autre côté, en désignant par $\underline{\sigma}_1, \cdots, \underline{\sigma}_q$ les composantes de $\underline{\sigma}$, prenons sur chaque $\underline{\sigma}_i$ un point $\underline{Q}_i$ qui est un point régulier de $\underline{\sigma}$, et soient $Q_i^{(1)}, \cdots, Q_i^{(\nu_i)}$ les points de Δ situés sur $\underline{Q}_i$ $(i=1, \cdots, q)$. On peut alors trouver[11] une fonction $\psi(P)$ holomorphe dans Δ et possédant les diffé-

10) K. Oka, loc. cit. n°12. Développement des fonctions holomorphes.

11) Prenons, par exemple, un point $\underline{P}_0$ de $\underline{\Delta} - \underline{\sigma}$ et soient $P_0^{(1)}, \cdots, P_0^{(\nu_0)}$ $(\nu_0 = \nu)$ les points situés sur $\underline{P}_0$. Soient $V_i^{(j)}$ $(j=1, \cdots, \nu_i;\ i=0, 1, \cdots, q)$ les voisinages polycylindriques convenables des point $P_i^{(j)}$, et posons $g(P) = c_i^{(j)}$ dans $V_i^{(j)}$, $c_i^{(j)}$ étant des constantes complexes telles que $|c_i^{(j)} - c_i^{(k)}| > 1$ pour $j \neq k$. Alors, on peut construire une fonction voulue $\psi(P)$, en appliquant à la fonction $g(P)$ encore le théorème de K. Oka ci-dessus utilisé.

rents éléments de fonction aux points distincts situés sur un même point de $\underline{\Delta}$, telle que l'on ait pour $i=1, \cdots, q$ et pour toutes couples (j, k), $j \neq k$ $(j, k=1, \cdots, \nu_i)$,

$$|\psi(Q_i^{(j)}) - \psi(Q_i^{(k)})| > 1.$$

Posons enfin

$$\eta(P) = \psi(P) + c\varphi^*(P),$$

c étant un nombre suffisamment petit en module; la fonction $\eta(P)$ possède alors évidemment la propriété (J); ce qui achève la démonstration.

5. Problème $(H_{\hat{\tau}})$. Prenons une fonction $\eta(P)$ holomorphe dans Δ, ayant la propriété (J) dans Δ, et soit $\sum$ la surface caractéristique $y=\eta(P)$ à l'espace $((x), y)$. Tout point de Δ, sauf ceux appartenant à une surface τ à $n-1$ dimensions dans Δ, correspond biunivoquement au point de $\sum$. Posons $\hat{\tau} = \pi^{-1}(\underline{\tau})$; $\hat{\tau}$ est une surface (connexe ou non) à $n-1$ dimensions dans Δ, qui dépend du choix de la fonction $\eta(P)$.

Supposons $\eta(P)$ et donc $\hat{\tau}$ fixées une fois pour toutes. Le problème $(H_{\hat{\tau}})$ s'énonce alors comme il suit:

Problème $(H_{\hat{\tau}})$. *Étant donnée une fonction $f(Q)$ holomorphe sur $\hat{\tau}$, telle qu'elle soit la restriction sur $\hat{\tau} \cap \Delta_j$ d'une fonction $F_j(P)$ holomorphe dans Δ_j $(j=1, 2, 3)$, trouver une fonction $F(P)$ holomorphe dans Δ, de façon que $f(Q)$ soit la restriction de F sur $\hat{\tau}$.*

Le problème $(H_{\hat{\tau}})$ concerne seulement la surface $\hat{\tau}$ une fois fixée, et *est un cas particulier énoncé dans le problème* (H). En effet, d'après le deuxième théorème de Cousin pour le polycylindre $\underline{\Delta}$, la projection $\underline{\tau}$ peut s'exprimer comme les zéros d'une seule fonction $\underline{\lambda}(x)$ holomorphe dans $\underline{\Delta}$ qui n'admet que les zéros du premier ordre. En considérant $\underline{\lambda}(x)$ comme une fonction sur Δ, désignons-la par $\lambda(P)$; $\hat{\tau}$ s'exprime alors comme les zéros de $\lambda(P)$.

De plus, d'après la deuxième condition de la propriété (J), $\hat{\tau}$ n'a aucune composante en commun avec la surface critique σ; donc, la fonction $\lambda(P)$ admet la surface $\hat{\tau}$ pour zéros du premier ordre. Ainsi,

$\hat{\tau}$ n'est que l'une particulière des surfaces S énoncées dans le problème (H).

Nous allons montrer dans le paragraphe suivant que ces quatre problèmes expliqués jusqu'ici sont équivalents mutuellement. Il ne reste pour cela que de résoudre le problème (A) à condition que le problème $(H_{\hat{\tau}})$ soit affirmatif.

§2. Équivalence des problèmes

6. Fonctions sur une surface. Nous allons établir dans ce n°, quelques lemmes dont nous aurons besoin dans ce qui suit.

Considérons dans l'espace $(x_1, \cdots, x_n)$ un domaine univalent $\mathfrak{D}$, et supposons que le premier problème de Cousin soit toujours résoluble dans $\mathfrak{D}$. Soit S une surface caractéristique dans $\mathfrak{D}$, définie par une équation

$$\lambda(x_1, \cdots, x_n) = 0,$$

où λ est une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$, qui n'admet que les zéros du premier ordre.

Dans ces conditions, on obtient aisément le lemme suivant:

Lemme 1. *Étant donnée une fonction f holomorphe sur S telle qu'elle soit, au voisinage V_M de tout point M de S, la restriction sur $S \cap V_M$ d'une fonction $F_M(x)$ holomorphe dans V_M, la fonction f est la restriction sur S d'une fonction $F(x)$ holomorphe dans $\mathfrak{D}$.*

En effet, la différence $F_M - F_{M'}$ étant divisible par λ dans $V_M \cap V_{M'}$, les fonctions F_M/λ méromorphes dans V_M définissent une donné des pôles $(\mathfrak{P})$ dans $\mathfrak{D}$. Soit Ψ une solution pour $(\mathfrak{P})$ et posons $F = \lambda\Psi$; F est bien la fonction voulue.

Dans les mêmes conditions que le lemme précédent, on a le lemme suivant:

Lemme 2. *Il existe dans $\mathfrak{D}$ une fonction holomorphe $W(x)$ non identiquement nulle sur aucune des composantes de S, telle que pour toute fonction f holomorphe sur S, le produit Wf soit la restriction sur S d'une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$.*

En effet, on peut trouver une direction L telle que S ne contienne aucune droite (de dimension complexe un) parallèle à L.[12] Choisissons une fois pour toutes un nouveau système de coordonnées (u) ayant L pour l'axe de u_n.

En différentiant λ par u_n, posons

$$W=\frac{\partial\lambda}{\partial u_n};$$

W est naturellement une fonction holomorphe dans $\mathcal{D}$.

Soit M un point quelconque de S. Grâce à Weierstrass, la fonction λ peut s'exprimer au voisinage V de M comme un produit des deux fonctions Ω et Λ holomorphes dans V:

$$\lambda=\Omega\Lambda,$$

où Ω ne s'annule pas dans V, et que Λ est un pseudo-polynôme en u_n, sans facteur multiple, de la forme:

$$\Lambda=u_n^\nu+a_1(u_1,\cdots,u_{n-1})u_n^{\nu-1}+\cdots+a_\nu(u_1,\cdots,u_{n-1}).$$

En différentiant la relation ci-dessus par u_n, on a dans V

$$W=\frac{\partial\Omega}{\partial u_n}\Lambda+\Omega\frac{\partial\Lambda}{\partial u_n},$$

donc on a sur $S\cap V$

$$W=\Omega\frac{\partial\Lambda}{\partial u_n};$$

comme $\partial\Lambda/\partial u_n$ ne s'annule identiquement sur aucune des composantes de $S\cap V$, il en est de même de W.

Or, on sait bien que $(\partial\Lambda/\partial u_n)f$ est la restriction sur $S\cap V$ d'une fonction, $F_M(x)$, holomorphe dans V, et l'on obtient sur $S\cap V$

$$Wf=\Omega F_M.$$

Le point M étant quelconque de S, Wf est la restriction d'une fonction $F(x)$ holomorphe dans $\mathcal{D}$, d'après le lemme 1. c.q.f.d.

7. Prolongement analytique sur une surface. Considérons en-

---

12) H. Grauert, Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume. Math. Annalen 129 (1955), T. Nishino, Les ensembles analytiques et les domaines, Journ. Math. Kyoto University, 1 (1962).

core dans l'espace de $(x_1, \cdots, x_n)$ $(n \geqq 3)$ les domaines univalents $\underline{\Delta}$, $\underline{\Delta}_1$, $\underline{\Delta}_2$ et $\underline{\Delta}_3$ expliqués au n°1, et posons $\underline{\Delta}_0 = \underline{\Delta}_1 \cup \underline{\Delta}_2 \cup \underline{\Delta}_3$. On a le lemme suivant:

Lemme 3. *Soit $\underline{S}$ une surface caractéristique dans le polycylindre $\underline{\Delta}$. Étant donnée une fonction f holomorphe sur $\underline{S} \cap \underline{\Delta}_0$, f peut se prolonger en une fonction uniforme et holomorphe sur $\underline{S}$ tout entier.*

En effet, la surface $\underline{S}$ peut s'exprimer, grâce à Cousin, par une équation $\lambda(x) = 0$, où λ est une fonction holomorphe dans $\underline{\Delta}$, qui n'admet que les zéros du premier ordre. Puisque le premier problème de Cousin est toujours résoluble dans le domaine $\underline{\Delta}_0$,[13] il existe, d'après le lemme 2, une fonction $W(x)$ holomorphe dans $\underline{\Delta}_0$ (et donc holomorphe dans $\underline{\Delta}$) telle que pour toute fonction f donnée et holomorphe sur $\underline{S} \cap \underline{\Delta}_0$, Wf soit la restriction sur $\underline{S}$ d'une fonction $F(x)$ holomorphe dans $\underline{\Delta}_0$:

$$Wf = F.$$

Or, comme la fonction F est prolongeable analytiquement dans $\underline{\Delta}$, f peut se prolonger en une fonction F/W méromorphe sur $\underline{S}$. Mais, la fonction f étant holomorphe sur $\underline{S} \cap \underline{\Delta}_0$, elle doit aussi être holomorphe sur $\underline{S}$ tout entier, d'après le théorème de la continuité pour les pôles sur la surface $\underline{S}$, la dimension de $\underline{S}$ étant $n-1 \geqq 2$.

c.q.f.d.

Considérons maintenant le domaine ramifié Δ et les domaines annulaires Δ_1, Δ_2 et Δ_3 expliqués au n°1, et posons $\Delta_0 = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$. Soit S une surface caractéristique quelconque à $n-1$ dimensions dans Δ. On a le résultat suivant:

Théorème 1.[14] *Étant donnée sur $S \cap \Delta_0$ une fonction holomorphe $f(Q)$, elle peut se prolonger en une fonction holomorphe sur S tout entier.*

---

13) C'est une conséquence directe du théorème des trois anneaux. Voir H. Cartan, loc. cit.

14) Lorsque $n=3$, le théorème sera un cas particulier du théorème de Hartogs-Osgood pour l'espace analytique.

En effet, il suffit de vérifier le théorème pour chacune des composantes de S. Supposons donc que S est elle-même irréductible dans Δ. La surface S est considérée comme un revêtement analytique ramifié de $\underline{S}$, à μ feuillets $(1 \leqq \mu \leqq \nu)$, $\underline{S}$ étant considérée elle-même un espace analytique.

Par le même procédé que celui appliqué à la fin du n°4,[15] on peut trouver une fonction $\eta(P)$ holomorphe dans Δ et possédant la propriété (J), telle que la fonction $\eta(P)$ prenne μ valeurs distinctes aux μ points $Q_1, \cdots, Q_\mu$ de S situés sur un même point $\underline{Q}$ de $\underline{S}$, sauf peut-être pour les points $\underline{Q}$ appartenant à une sous-variété de codimension un sur $\underline{S}$.

Soit $\sum$ la surface $y = \eta(P)$ $(P \in \Delta)$ à l'espace $((x), y)$, et notons S^* l'image de S sur $\sum$; tout point Q de S, sauf peut-être Q appartenant à une sous-variété S_1 de codimension un sur S, correspond biunivoquement au point de S^*.

Formont maintenant le produit

$$U(\underline{Q}, y) = \prod_{j=1}^{\mu} [y - \eta(Q_j)] ;$$

la surface S^* est alors exprimée sur $\underline{S}$ par une équation

$$U(\underline{Q}, y) = y^\mu + \alpha_1(\underline{Q}) y^{\mu-1} + \cdots + \alpha_\mu(\underline{Q}) = 0,$$

où $\alpha_j(\underline{Q})$ sont des fonctions holomorphes sur $\underline{S}$,[16] car elles sont holomorphes et bornées sur $\underline{S} - \underline{S}_1$.

Enfin, soit S_0^* l'image sur $\sum$, de $S \cap \Delta_0$; la fonction $f(Q)$ donnée sur $S \cap \Delta_0$ est considérée comme une fonction holomorphe sur S_0^*. Comme on constate aisément par le raisonnement habituel,[17] le théorème de W. F. Osgood s'applique pour la fonction f holomorphe sur S_0^*, et on peut trouver, de façon unique, μ fonctions $\beta_j(\underline{Q})$ holomorphes sur $\underline{S} \cap \underline{\Delta}_0$, telles que l'on ait sur S_0^*

---

15) Voir la note 11) de bas de page.

16) Elles sont, au signe près, égales aux fonctions symétriques élémentaires de $\eta(Q_1), \cdots, \eta(Q_\mu)$, et donc holomorphes et bornées sur $\underline{S} - \underline{S}_1$.

17) Voir W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II_1 (1929), pp. 116, 117.

$$f=\frac{\beta_1 y^{\mu-1}+\beta_2 y^{\mu-2}+\cdots+\beta_\mu}{\partial U/\partial y}.$$

Puisque chaque coefficient $\beta_j(\underline{Q})$ peut, d'après le lemme 3, se prolonger en une fonction holomorphe sur $\underline{S}$, la fonction f se prolonge sur S^* en une fonction méromorphe. Mais, f étant holomorphe sur S_0^*, f doit être holomorphe sur S^* tout entier, d'après le théorème de la continuité; ce qui vérifie le théorème.

8. Équivalence des problèmes. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant:

Théorème 2. *Les problèmes* (A), (H), (H_τ) *et le premier problème de Cousin dans* $\Delta_0=\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3$ *sont équivalents mutuellement.*

En effet, d'après ce que nous avons vu dans le §1, il suffit de résoudre le problème (A), à condition que le problème (H_τ) correspondant à la fonction fixée $\eta(P)$ ayant la propriété (J) soit résoluble affirmativement.

Soient $P_1, \cdots, P_\nu$ les points de Δ situés sur un même point $\underline{P}$ de $\underline{\Delta}$, $\underline{P}$ n'appartenant pas à la projection $\underline{\sigma}$ de la surface critique σ de Δ. En formant, pour tels points $\underline{P}$ de $\underline{\Delta}$, le produit $\prod_{j=1}^{\nu}[y-\eta(P_j)]$, on arrive, d'après habituel, à l'équation algébroïde de degré ν en y, à coefficients holomorphes dans $\underline{\Delta}$:

$$\Phi((x), y)=0,$$

qui définit la surface $\sum: y=\eta(P)$. La surface $\sum$ est contenue dans un polycylindre $(\underline{\Delta}, C)$ à l'espace $((x), y)$, C étant un cercle de centre à l'origine et de rayon plus grand que la borne supérieure de $|\eta(P)|$ dans Δ.

Étant données trois fonctions $g_i(P)$ holomorphes dans $\delta_i=\Delta_j\cap\Delta_k$, telles qu'on ait $g_1(P)+g_2(P)+g_3(P)=0$ dans $\delta=\Delta_1\cap\Delta_2\cap\Delta_3$, rappelons la fonction $\lambda(P)$ qui admet τ pour zéros du premier ordre (n°5). D'après le résultat de M. K. Oka[18] et le lemme 1 pour les domaines $(\underline{\delta}_i, C)$ et pour la surface $\sum: \Phi=0$, on peut trouver un entier m positif ou nul tel qu'il existe trois fonctions $G_i((x), y)$ holomorphe dans $(\underline{\delta}_i,$

18) K. Oka, loc. cit., n°8, Lemme 2.

C), de façon que l'on ait identiquement dans δ_i

$$\lambda^m g_i = G_i\,.$$

D'après le théorème du reste[19] par rapport à Φ, on peut choisir comme G_i trois pseudo-polynômes de degré au plus $\nu-1$ en y, et par suite, on a identiquement dans $(\underline{\delta}, C)$

$$G_1+G_2+G_3=0.$$

En appliquant le théorème des trois anneaux pour les fonctions G_i, on peut trouver trois fonctions $F_j((x), y)$ holomorphes dans $(\underline{\Delta}_j, C)$, telles que l'on ait identiquement dans $(\underline{\delta}_i, C)$

$$G_i = F_j - F_k\,.$$

Par conséquent, on a sur δ_i

$$\lambda^m g_i = F_j - F_k\,.$$

Or, si l'on a $m>0$, la fonction λ s'annulant sur $\hat{\tau}$, on a sur $\hat{\tau}\cap\delta_i$

$$F_j = F_k\,;$$

cettes fonctions F_j définissent alors sur $\hat{\tau}\cap\Delta_0$ une fonction holomorphe $f(Q)$ telle que l'on ait sur $\hat{\tau}\cap\Delta_j$

$$f = F_j \quad (j=1, 2, 3).$$

La fonction $f(Q)$ étant, d'après le théorème 1, prolongeable analytiquement sur $\hat{\tau}$ tout entier, elle remplit les hypothèses du problème $(H_{\hat{\tau}})$. Soit alors $F(P)$ une solution du problème $(H_{\hat{\tau}})$ pour la fonction $f(Q)$, et posons dans Δ_j

$$F_j^{(1)} = F_j - F.$$

Comme les fonctions $F_j^{(1)}(P)$ s'annulent sur $\hat{\tau}\cap\Delta_j$, elles sont divisibles par $\lambda(P)$, et l'on a dans Δ_j

$$F_j^{(1)} = \lambda h_j^{(1)} \quad (j=1, 2, 3),$$

$h_j^{(1)}(P)$ étant des fonctions holomorphes dans Δ_j. Par suite, on a dans δ_i

19) K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VII–Sur quelques notions arithmétiques, n°5.

$$\lambda^{m-1}g_i = h_j^{(1)} - h_k^{(1)}.$$

Si l'on a $m-1>0$, les fonctions $h_j^{(1)}(P)$ définissent une fonction $f^{(1)}(Q)$ holomorphe sur $\hat{\tau}\cap\Delta_0$, donc holomorphe sur $\hat{\tau}$, qui remplit les hypothèses du problème $(H_{\hat{\tau}})$; et l'on peut trouver, par le même raisonnement que ci-dessus, trois fonctions $h_j^{(2)}(P)$ holomorphes dans Δ_j telles que l'on ait dans δ_i

$$\lambda^{m-2}g_i = h_j^{(2)} - h_k^{(2)}.$$

En répétant m fois le même procédé, on a finalement

$$g_i = h_j^{(m)} - h_k^{(m)},$$

$h_j^{(m)}(P)$ $(j=1, 2, 3)$ étant des fonctions holomorphes dans Δ_j. Le problème (A) est ainsi résolu affirmativement, et le théorème est complètement démontré.

§3. Critères pour les problèmes

9. Propriété (K). Soit Δ un domaine à ν feuillets, ramifié sur un polycylindre $\underline{\Delta}$ à l'espace (x), comme expliqué au n°1, et $\eta(P)$ une fonction holomorphe dans Δ et ayant la propriété (J); tout point de Δ, sauf peut-être ceux appartenant à une surface τ dans Δ, correspond biunivoquement au point de la surface $\sum: y=\eta(P)$ à l'espace $((x), y)$.

Montrons dans ce numéro qu'on peut choisir $\eta(P)$ de façon qu'elle possède la propriété (J) et même satisfasse aux conditions 3° et 4° suivantes:

3° *parmi les ν points $Q_1, \cdots, Q_\nu$ de Δ situés sur un même point $\underline{Q}$ de $\underline{\tau}$, deux points ont la même image sur $\sum$, et deux seulement, sauf peut-être pour $\underline{Q}$ appartenant à une sous-variété de dimension n-2 sur $\underline{\tau}$;*

4° *au point M de l'image T (sur $\sum$) de τ, les deux branches de $\sum$ passant par M ont leurs plans tangents (à n dimensions) distincts, sauf peut-être pour M appartenant à une sous-variété de dimension n-2 sur T.*

Nous dirons dans ce cas que la fonction $\eta(P)$ possède la *propriété* (K) dans Δ.

Théorème 3. *Il existe dans Δ une fonction holomorphe qui possède la propriété (K) dans Δ.*

En effet, le domaine donné Δ étant, comme expliqué au n° 1, supposé d'être complètement intérieur à un domaine ramifié Δ' (à ν' feuillets) sur un polycylindre $\underline{\Delta}'$ tel que $\underline{\Delta} \Subset \underline{\Delta}'$, il suffit de démontrer le théorème pour le domaine $\pi^{-1}(\underline{\Delta})$ qui contient Δ, où π désigne l'opération de projection d'un ensemble de Δ' sur l'espace (x), et π^{-1} l'opération réciproque de π. Remplaçons donc, pour simplicité, les lettres $\underline{\Delta}$ et $\underline{\Delta}'$ par $\underline{\Delta}_0$ et $\underline{\Delta}$ respectivement, et supposons donnés deux polycylindres $\underline{\Delta}_0$ et $\underline{\Delta}$ à l'espace (x), et un domaine ramifié Δ à ν feuillets sur $\underline{\Delta}$, et posons $\Delta_0 = \pi^{-1}(\underline{\Delta}_0)$; Δ_0 est un domaine ramifié à ν feuillets. Avec ces nouvelles notations, nous allons démontrer qu'il existe dans Δ_0 une fonction holomorphe qui possède la propriété (K).

En choisissant éventuellement Δ un peu plus petit, prenons d'abord une fonction holomorphe $\eta(P)$ qui possède la propriété (J) dans Δ. Rappelons la surface $\sum$ représentée à l'espace $((x), y)$ par $y = \eta(P)$ $(P \in \Delta)$, qui est contenue dans un polycylindre $(\underline{\Delta}, C)$. Tout point P de Δ, sauf peut-être P appartenant à une surface τ dans Δ, correspond biunivoquement au point M de $\sum$. La surface τ et la surface critique σ de Δ satisfont aux conditions 1° et 2° de la propriété (J).

Prenons à l'espace (x) un polycylindre *fermé* $\underline{\Delta}^*$ tel que

$$\underline{\Delta}_0 \Subset \underline{\Delta}^* \Subset \underline{\Delta},$$

et soit $\underline{\Delta}_1$ un polycylindre tel que

$$\underline{\Delta}^* \Subset \underline{\Delta}_1 \Subset \underline{\Delta}.$$

Posons $\Delta^* = \pi^{-1}(\underline{\Delta}^*)$ et $\Delta_1 = \pi^{-1}(\underline{\Delta}_1)$.

Soit maintenant $\underline{Q}$ un point de $\underline{\tau} \cap \underline{\Delta}^*$, qui est un point régulier de $\underline{\tau}$ et qui n'appartient pas à $\underline{\sigma}$. On peut trouver dans l'espace (x) un nouveau système de coordonnées (u), ayant l'origine au point $\underline{Q}$, et un voisinage *fermé* $\underline{V}^*$ de $\underline{Q}$ tel que $\underline{V}^* \Subset \underline{\Delta}_1$, de la forme suivante:

$$(\underline{V}^*) \qquad |u_i| \leqq \delta \ (i = 1, \cdots, n-1), \quad |u_n| \leqq \delta',$$

de telle manière qu'un voisinage convenable de $\underline{V}^*$ ne contienne aucun point de $\underline{\sigma}$, et que $\underline{\tau}$ soit exprimée au voisinage de $\underline{V}^*$ par une équation de la forme:

$$u_n - \lambda(u_1, \cdots, u_{n-1}) = 0,$$

où λ est une fonction holomorphe au voisinage du polycylindre fermé $|u_i| \leqq \delta$ $(i=1, \cdots, n-1)$, et qui est majorée en module par un nombre positif plus petit que δ'.

Désignons par $\underline{B}^*$ le sous-ensemble fermé de la frontière de $\underline{V}^*$, de la forme:

$$(\underline{B}^*) \qquad |u_i| \leqq \delta \ (i=1, \cdots, n-1), \quad |u_n| = \delta',$$

et soient $\eta_j(u)$ les ν branches, uniformes et holomorphes au voisinage de $\underline{V}^*$, de la fonction $\eta(P)$. Puisque $\underline{\tau}$ ne rencontre jamais $\underline{B}^*$, on peut trouver un nombre positif ε tel qu'on ait, pour toutes couples (j, k), $j \neq k$ $(j, k=1, \cdots, \nu)$, sur $\underline{B}^*$ les inégalités

$$|\eta_j(u) - \eta_k(u)| > 9\varepsilon.$$

Posons maintenant $V^* = \pi^{-1}(\underline{V}^*)$; V^* se compose en ν composantes univalentes $V^{*(j)}$ qui se situent sur $\underline{V}^*$. Définissons au voisinage de V^* une fonction holomorphe $f(P)$, en posant au voisinage de chaque composante $V^{*(j)}$

$$f(P) = c_j \ (j=1, \cdots, \nu),$$

c_j étant des constantes complexes; et posons au voisinage de V^*

$$F(P) = \eta(P) + f(P).$$

Dans ces circonstances, on peut facilement trouver ν nombres c_j tels que $|c_j| < \varepsilon$ $(j=1, \cdots, \nu)$, et que la fonction $F(P)$ possède la propriété (K) au voisinage de V^*.[20]

20) Posons par exemple $c_1 = 0$. Supposons qu'on détermine les j nombres $c_1, \cdots, c_j$, de façon que la fonction $F_j(P)$ définie comme $F_j(P) = \eta_k(u) + c_k$ au voisinage de $V^{*(k)}$ $(k=1, \cdots, j)$, possède la propriété (K) au voisinage de $V^{*(1)} \cup \cdots \cup V^{*(j)}$; et posons $\zeta_k(u) = (\eta_k + c_k) - \eta_{j+1}$. Soient Σ_k les surfaces $y = \zeta_k(u)$, à l'espace $((u), y)$, et notons Z_k $(k=1, \cdots, j)$ l'ensemble des points de Σ_k tel qu'on ait $\partial\zeta_k/\partial u_1 = \cdots = \partial\zeta_k/\partial u_n = 0$, et T_j l'ensemble des points singuliers de la surface $\Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_j$; $Z_1, \cdots, Z_j$ et T_j sont des ensembles analytiques de dimension au plus $n-1$. On peut alors trouver un nombre c_{j+1} dans le domaine $|c_{j+1}| < \varepsilon$ tel que la surface $y = c_{j+1}$ ne contienne aucune composante (à $n-1$ dimensions) de $Z_1, \cdots, Z_j$ et T_j; d'où aussitôt l'énoncé par récurrence sur j $(1 \leqq j \leqq \nu - 1)$.

D'après le théorème de M. K. Oka,[21] on peut trouver, pour tout nombre positif ε', une fonction $\varphi(P)$ holomorphe dans Δ_1, telle que l'on ait au voisinage de V^*

$$|f(P)-\varphi(P)|<\varepsilon'.$$

Posons dans Δ_1

$$\Phi(P)=\eta(P)+\varphi(P)\,;$$

$\Phi(P)$ est une fonction holomorphe dans Δ_1.

Comme on a au voisinage de V^*

$$|F(P)-\Phi(P)|<\varepsilon',$$

et comme la fonction $F(P)$ possède la propriété (K) au voisinage de V^*, $\Phi(P)$ possède aussi la propriété (K) dans un voisinage V' de V^* pourvu qu'on choisisse ε' $(<\varepsilon)$ suffisamment petit.

Maintenant, soit t une nouvelle variable complexe, et D l'intérieur du cercle $|t|<2$, et considérons un domaine ramifié (Δ_1, D) sur l'espace $((x), t)$, qui est obtenu comme le produit de Δ_1 et D; et posons dans (Δ_1, D)

$$\tilde{\Phi}(P, t)=\eta(P)+t\varphi(P)\,;$$

$\tilde{\Phi}$ est une fonction holomorphe dans le domaine (Δ_1, D). Nous allons montrer que la fonction $\tilde{\Phi}$ possède la propriété (K) au voisinage de (V^*, D^*), D^* étant le cercle $|t|\leqq 1$.

D'une part, en effet, comme on a pour $t=1$,

$$\tilde{\Phi}(P, 1)=\Phi(P),$$

et comme $\Phi(P)$ possède la propriété (K) au voisinage de V^*, $\tilde{\Phi}(P, t)$ possède aussi la propriété (K) au voisinage de $(V^*, 1)$.

D'autre part, rappelons l'ensemble $\underline{B}^*$: $|u_i|\leqq\delta$ $(i=1, \cdots, n-1)$, $|u_n|=\delta'$, sur lequel on a $|\eta_j(u)-\eta_k(u)|>9\varepsilon$ $(j\neq k)$, et soient $\varphi_j(u)$ et $\tilde{\Phi}_j(u, t)$ $(j=1, \cdots, \nu)$ les branches des fonctions $\varphi(P)$ et $\tilde{\Phi}(P, t)$ respectivement dans V' et (V', D). On a sur $(\underline{B}^*, D)$

21) Voir la note 10) de bas de page.

$$|\tilde{\Phi}_j(u,t)-\tilde{\Phi}_k(u,t)|\geqq|\eta_j(u)-\eta_k(u)|$$
$$-|t|\{|\varphi_j-c_j|+|\varphi_k-c_k|+|c_j-c_k|\}>\varepsilon.$$

Donc, la projection sur l'espace $((x),t)$ de la variété singulière de la surface $y=\tilde{\Phi}(P,t)$ (à l'espace $((x),t,y)$) ne peut pas rencontrer l'hypersurface $(\underline{B}^*, D)$.

De ces deux faits, on conclut aisément, en vertu du théorème de la continuité, que $\tilde{\Phi}(P,t)$ possède la propriété (K) au voisinage de (V^*, D^*).

Or, soit S l'ensemble des points de $\underline{\sigma}\cap\underline{\tau}$, plus des points singuliers de $\underline{\sigma}$ et de $\underline{\tau}$; S est une variété de dimension au plus $n-2$ dans $\underline{\Delta}$, d'après la deuxième condition de la propriété (J). Soit V_S un voisinage de $S\cap\underline{\Delta}_1$ assez voisin de $S\cap\underline{\Delta}_1$, pour qu'il ne contienne pas $\underline{\Delta}^*$ et que toute surface caractéristique (à $n-1$ dimensions) définie au voisinage de $\underline{\Delta}^*$ et qui passe par un point de $V_S\cap\underline{\Delta}_0$, doive se prolonger à l'intérieur de $\underline{\Delta}^*-V_S$.

Posons $\underline{E}^*=\underline{\Delta}^*-V_S$, et $\underline{\tau}^*=\underline{\tau}\cap\underline{E}^*$; $\underline{\tau}^*$ est un ensemble compact dans $\underline{\Delta}_1$, et ne contient ni point de $\underline{\sigma}$, ni point singulier de $\underline{\tau}$.

D'après ce que nous venons de voir, tout point $\underline{Q}$ de $\underline{\tau}^*$ est recouvert par l'intérieur $\underline{V}$ d'un voisinage fermé $\underline{V}^*$ de $\underline{Q}$ $(\underline{V}\Subset\underline{\Delta}_1)$ ci-dessus mentionné. On peut trouver un nombre fini de tels voisinages ouverts $\underline{V}$, soient $\underline{V}_1,\cdots,\underline{V}_q$, tels que leur réunion recouvre $\underline{\tau}^*$. Posons pour $j=1,\cdots,q$, $V_j^*=\pi^{-1}(\underline{V}_j^*)$, $\underline{V}_j^*$ étant la fermeture de $\underline{V}_j$, et désignons par $\varphi^{(j)}(P)$ la fonction $\varphi(P)$ ci-dessus mentionnée qui correspond à V_j^*.

Enfin, soient t_j $(j=1,\cdots,q)$ q variables complexes indépendantes, dont chacune parcourt au voisinage D_j du cercle $D_j^*: |t_j|\leqq 1$ sur le plan de t_j.

Considérons sur l'espace $((x),(t))$ un domaine $(\Delta_1,(D))$ qui est obtenu comme le produit des domaines Δ_1, $D_1,\cdots,D_q$, et posons

$$\tilde{\Phi}^*(P,(t))=\eta(P)+t_1\varphi^{(1)}(P)+\cdots+t_q\varphi^{(q)}(P)\,;$$

$\tilde{\Phi}^*$ est une fonction holomorphe dans $(\Delta_1,(D))$.

Comme on a

$$\tilde{\Phi}^*(P;0,\cdots,0,t_j,0,\cdots,0)=\tilde{\Phi}^{(j)}(P,t_j),$$

$\tilde{\Phi}^{(j)}$ désignant la fonction $\tilde{\Phi}(P, t)$ ci-dessus mentionnée qui correspond à V_j^*, et comme $\tilde{\Phi}^{(j)}$ possède la propriété (K) au voisinage de (V_j^*, D_j^*), la fonction $\tilde{\Phi}^*(P, (t))$ possède aussi la propriété (K) au voisinage de $(V_j^*, 0, \cdots, 0, D_j^*, 0, \cdots, 0)$. Donc, la fonction $\tilde{\Phi}^*(P, (t))$ possède la propriété (K) au voisinage de $(V_1^* \cup \cdots \cup V_q^*, (0))$.

D'autre part, posons $E^* = \pi^{-1}(\underline{E}^*)(= \Delta^* - \pi^{-1}(V_S))$. Comme on a pour $(t) = (0)$

$$\tilde{\Phi}^*(P, (0)) = \eta(P),$$

et comme $\eta(P)$ possède trivialement la propriété (K) au voisinage du compact $E^* - \bigcup_{j=1}^{q} V_j$, V_j désignant l'intérieur de V_j^*, la fonction $\tilde{\Phi}^*(P, (t))$ possède la propriété (K) au voisinage de $(E^* - \bigcup_{j=1}^{q} V_j, (0))$.

Ainsi, $\tilde{\Phi}^*(P, (t))$ possède bien la propriété (K) au voisinage de $(E^*, (0))$. On peut alors trouver les valeurs t_j^0 de t_j $(j = 1, \cdots, q)$ telles que la fonction

$$\eta_0(P) = \tilde{\Phi}^*(P, (t^0)),$$

qui est holomorphe dans Δ_1, possède la propriété (K) au voisinage de E^*. Et de plus, $\eta_0(P)$ possède la propriété (K) dans le domaine donné Δ_0, d'après la définition de V_S; ce qui démontre le théorème.

10. Fonctions sur Σ. Soit $\eta(P)$ une fonction holomorphe et *ayant la propriété* (K) dans le domaine donné Δ à ν feuillets et soit τ la surface dans Δ sur laquelle la correspondance des points entre Δ et la surface $\Sigma : y = \eta(P)$ cesse d'être biunivoque. Σ est supposée d'être contenue dans un polycylindre $(\underline{\Delta}, C)$.

Considérons un domaine univalent d'holomorphie $\underline{\mathfrak{D}}$ dans $\underline{\Delta}$, et posons $\mathfrak{D} = \pi^{-1}(\underline{\mathfrak{D}})$; l'image de $\mathfrak{D}$ sur Σ sera désignée par $\Sigma_{\mathfrak{D}}$. Dans ces conditions, on obtient aisément le lemme suivant:

Lemme 4. *Pour qu'une fonction $F(P)$ holomorphe dans $\mathfrak{D}$ puisse s'exprimer comme la restriction sur $\Sigma_{\mathfrak{D}}$ d'une fonction $H((x), y)$ holomorphe dans $(\underline{\mathfrak{D}}, C)$, il faut et il suffit que la fonction $F(P)$ prenne, pour toute couple des points Q_1 et Q_2 de $\tau \cap \mathfrak{D}$ tels que $\pi(Q_1) = \pi(Q_2)$, la même valeur en Q_1 et Q_2:*

$$F(Q_1)=F(Q_2).$$

En outre, on peut choisir comme $H((x), y)$ *un pseudo-polynôme de degré* $\nu-1$ *en* y, *à coefficients holomorphes dans* $\underline{\mathfrak{D}}$.

En effet, il est évident qu'il est nécessaire. Montrons qu'il est suffisant.

Soit T l'image de τ sur $\sum\mathfrak{D}$. Par hypothèse, la fonction F considérée comme une fonction holomorphe sur $\sum\mathfrak{D}$, définit une fonction $f(M)$ uniforme et holomorphe sur T.

Soit M_0 un point régulier de T qui n'est pas l'image d'un point critique de Δ; et soit V un voisinage de M_0 assez petit pour que:

1° $f(M)$ soit la restriction sur $T\cap V$ d'une fonction $H_1((x), y)$ holomorphe dans V;

2° $\sum\cap V$ soit exprimée, en vertu de la propriété (K) de $\eta(P)$, par une équation de la forme

$$\varphi=(y-\eta_1(x))(y-\eta_2(x))=0,$$

où η_1 et η_2 sont deux branches, uniformes et holomorphes au voisinage de $\underline{M}_0$, de la fonction $\eta(P)$, telles qu'il existe au moins un indice k $(1\leqq k\leqq n)$ pour lequel on a au point $\underline{M}_0$, $\partial\eta_1/\partial x_k\neq\partial\eta_2/\partial x_k$.

La restriction sur $\sum\cap V$ de la fonction $\partial\varphi/\partial y=2y-(\eta_1+\eta_2)$ admet $T\cap V$ pour zéros du premier ordre et ne s'annule pas d'ailleurs.[22] Comme la différence $F-H_1$, qui est holomorphe sur $\sum\cap V$, s'annule sur $T\cap V$, elle est divisible sur $\sum\cap V$ par $\partial\varphi/\partial y$:

$$F-H_1=\frac{\partial\varphi}{\partial y}G,$$

G étant une fonction holomorphe sur $\sum\cap V$. D'autre part, $(\partial\varphi/\partial y)G$ est la restriction sur $\sum\cap V$ d'une fonction $H_2((x), y)$ holomorphe dans V. Donc, la fonction F est la restriction de la fonction H_1+H_2 sur $\sum\cap V$.

Or, M_0 étant un point quelconque de T, sauf à une sous-variété

22) On a $\partial\varphi/\partial y=\eta_1-\eta_2$ sur $y=\eta_1$, et $\partial\varphi/\partial y=\eta_2-\eta_1$ sur $y=\eta_2$; et, on a au point M_0, $(\partial/\partial x_k)(\partial\varphi/\partial y)\neq 0$.

S à $n-2$ dimensions sur T, la fonction F est exprimée, pour tout point M de $\sum\mathfrak{D}-S$, comme la restriction d'une fonction $H_M((x), y)$ holomorphe au voisinage de M. Donc, d'après le lemme de M. K. Oka,[23] F est la restriction d'une fonction $H_M((x), y)$ holomorphe au voisinage du point M, M étant un point quelconque de $\sum\mathfrak{D}$ tout entier. D'après le lemme 1, on peut trouver une fonction $H((x), y)$ holomorphe dans $(\underline{\mathfrak{D}}, C)$ telle que l'on ait sur $\sum\mathfrak{D}$

$$F(P) = H((x), \eta(P)).$$

Rappelons, en outre, l'équation algébroïde de degré ν en $y: \Phi = 0$, qui définit $\sum$ dans $(\underline{\Delta}, C)$; on peut choisir comme H un pseudo-polynôme de degré $\nu-1$ en y, d'après le théorème du reste[24] par rapport à Φ. c.q.f.d.

11. Fonctions sur $\hat{T}$. Reprenons la fonction holomorphe $\eta(P)$ ayant la propriété (K) dans Δ. Posons $\hat{\tau} = \pi^{-1}(\underline{\tau})$, et soit $\hat{T}$ l'image de $\hat{\tau}$ sur $\sum$. D'après la condition 3° de la propriété (K), il existe, sur un même point $\underline{M}$ de $\underline{\tau}$, $\nu-1$ points distincts $M_1, \cdots, M_{\nu-1}$ de $\hat{T}$, sauf pour $\underline{M}$ appartenant à une sous-variété $\underline{S}$ de dimension $n-2$ sur $\underline{\tau}$.

Soient $(\underline{M}, \eta_j(\underline{M}))$ les coordonnées de M_j $(j=1, \cdots, \nu-1)$,[25] et formont le produit

$$U(\underline{M}, y) = \prod_{j=1}^{\nu-1}[y - \eta_j(\underline{M})] ;$$

il peut s'écrire

$$U(\underline{M}, y) = y^{\nu-1} + \alpha_1(\underline{M})y^{\nu-2} + \cdots + \alpha_{\nu-1}(\underline{M}),$$

où $\alpha_j(\underline{M})$ sont des fonctions holomorphes sur $\underline{\tau}$, car elles sont holomorphes et bornées sur $\underline{\tau}-\underline{S}$. Alors, la surface $\hat{T}$ s'exprime sur $\underline{\tau}$ par une équation

$$(\hat{T}) \qquad U(\underline{M}, y) = 0 \quad (\underline{M} \in \underline{\tau}).$$

On a le théorème suivant:

23) K. Oka, loc. cit., VIII, n°6, Lemme 1.
24) Voir la note 19) de bas de page.
25) $\eta_1(\underline{M}), \cdots, \eta_{\nu-1}(\underline{M})$ sont des valeurs distinctes prises par $\eta(P)$ en $\underline{M}$.

Théorème 4. *Pour qu'une fonction holomorphe $f(M)$ donnée sur $\hat{T}$ soit la restriction d'une fonction holomorphe sur $\sum$, il faut et il suffit qu'il existe ν fonctions $b_j(x)$ $(j=0, 1, \cdots, \nu-1)$ holomorphes dans $\underline{\Delta}$, et que $f(M)$ soit la restriction sur $\hat{T}$ d'un pseudo-polynôme de degré $\nu-2$ en y, à coefficients holomorphes sur $\underline{\tau}$:*

$$f=\beta_1(\underline{M})y^{\nu-2}+\cdots+\beta_{\nu-1}(\underline{M}),$$

dont les coefficients $\beta_j(\underline{M})$ se déterminent par les formules

$$\beta_j(\underline{M})=b_j(x)-b_0(x)\alpha_j(\underline{M}) \quad (j=1, \cdots, \nu-1).$$

En outre, l'expression ci-dessus de f est unique.

D'abord, montrons qu'il est nécessaire. Supposons en effet que $f(M)$ soit la restriction sur $\hat{T}$ d'une fonction F holomorphe sur $\sum$. D'après le lemme 4, F peut être considérée comme un pseudo-polynôme de degré $\nu-1$ en y, et qui s'écrit

$$F((x), y)=b_0(x)y^{\nu-1}+b_1(x)y^{\nu-2}+\cdots+b_{\nu-1}(x).$$

En divisant $F((x), y)$ par $U(\underline{M}, y)$, on a sur $\underline{\tau}$

$$F(\underline{M}, y)=b_0(x)U(\underline{M}, y)+(\beta_1(\underline{M})y^{\nu-2}+\cdots+\beta_{\nu-1}(\underline{M})),$$

où les coefficients $\beta_j(\underline{M})$ désignent respectivement les fonctions

$$\beta_j(\underline{M})=b_j(x)-b_0(x)\alpha_j(\underline{M}) \quad (j=1, \cdots, \nu-1);$$

et on a sur $\hat{T}: U=0$,

$$f=\beta_1(\underline{M})y^{\nu-2}+\cdots+\beta_{\nu-1}(\underline{M}).$$

L'unicité de cette expression est immédiate.

Inversement, il est suffisant. En effet, les relations

$$\beta_j(\underline{M})=b_j(x)-b_0(x)\alpha_j(\underline{M})$$

entraînent sur $\underline{\tau}$, l'identité suivante:

$$\beta_1(\underline{M})y^{\nu-2}+\cdots+\beta_{\nu-1}(\underline{M})=(b_0(x)y^{\nu-1}+\cdots+b_{\nu-1}(x))-b_0(x)U(\underline{M}, y).$$

La fonction $f(M)$ étant, par hypothèse, la restriction sur $\hat{T}$ de $\beta_1 y^{\nu-2}+\cdots+\beta_{\nu-1}$, $f(M)$ est aussi la restriction sur $\hat{T}: U=0$, du pseudo-polynôme $b_0(x)y^{\nu-1}+\cdots+b_{\nu-1}(x)$; ce qui vérifie le théorème.

12. Problème ($\boldsymbol{H_{\hat{T}}}$). Considérons les domaines $\varDelta$ et $\varDelta_i$ $(i=1, 2, 3)$ comme expliqués au n° 1. Soit $\sum$ la surface $y=\eta(P)$ contenue dans le polycylindre $(\underline{\varDelta}, C)$, et correspondant à $\varDelta$ par la fonction $\eta(P)$ qui possède la propriété (K) dans $\varDelta$, et soient $\sum_i$ l'images de $\varDelta_i$ sur $\sum$. Désignons par $\hat{T}$, comme expliquée au n° précédent, l'image de $\hat{\tau}$ sur $\sum$, et considérons le problème suivant:

Problème $(H_{\hat{T}})$. *Étant donnée une fonction $f(M)$ holomorphe sur $\hat{T}$ telle qu'elle soit la restriction sur $\hat{T}\cap\sum_i$ d'une fonction $F_i((x), y)$ holomorphe dans $(\underline{\varDelta}_i, C)$, trouver une fonction $F((x), y)$ holomorphe dans $(\underline{\varDelta}, C)$ de façon qu'on ait sur $\hat{T}$*

$$f=F.$$

Ce problème est évidemment un cas particulier du problème $(H_{\hat{\tau}})$, d'après le lemme 4. Inversement, si le problème $(H_{\hat{T}})$ est résoluble, il en est de même du problème (A).

En effet, dans la démonstration du théorème 2, on peut prendre dans ce cas, $m=1$, d'après le lemme 4. Donc la première étape de la démonstration montre que le problème (A) est résolu affirmativement pourvu que le problème $(H_{\hat{T}})$ soit affirmatif. En résumant, on a le théorème suivant:

Théorème 2 bis. *Le problème $(H_{\hat{T}})$ équivaut aux problèmes (A), (H), $(H_{\hat{\tau}})$ et au premier problème de Cousin dans $\varDelta_0=\varDelta_1\cup\varDelta_2\cup\varDelta_3$.*

Maintenant, rappelons l'équation

$$U(\underline{M}, y)=y^{\nu-1}+\alpha_1(\underline{M})y^{\nu-2}+\cdots+\alpha_{\nu-1}(\underline{M})=0,$$

qui définit sur $\underline{\tau}$ la surface $\hat{T}$; et considérons un système de $\nu-1$ fonctions $\beta_j(\underline{M})$ $(j=1, \cdots, \nu-1)$ holomorphes sur $\underline{\tau}$, telles qu'il existe, pour $i=1, 2, 3$, ν fonctions $b_0^{(i)}(x), \cdots, b_{\nu-1}^{(i)}(x)$ holomorphes dans $\underline{\varDelta_i}$ de façon que l'on ait sur $\underline{\tau}\cap\underline{\varDelta}_i$,

$$\beta_j(\underline{M})=b_j^{(i)}(x)-b_0^{(i)}(x)\alpha_j(\underline{M}) \quad (j=1, \cdots, \nu-1;\ i=1, 2, 3).$$

On a un critère pour le problème $(H_{\hat{T}})$ comme suit:

Théorème 5. *Pour que le problème* $(H_{\hat{T}})$ *soit résoluble affirmativement, il faut et il suffit que, pour tout système de* $\nu-1$ *fonctions* $\beta_j(\underline{M})$ *de caractère ci-dessus, il existe* ν *fonctions* $b_0(x)$, $\cdots, b_{\nu-1}(x)$ *holomorphes dans* $\underline{\Delta}$, *telles que l'on ait sur* $\underline{\tau}$,

$$\beta_j(\underline{M})=b_j(x)-b_0(x)\alpha_j(\underline{M}) \quad (j=1, \cdots, \nu-1).$$

D'abord, il est nécessaire. En effet, étant donné un système de $\beta_j(\underline{M})$ de caractère ci-dessus, posons sur $\hat{T}$

$$f(M)=\beta_1(\underline{M})y^{\nu-2}+\cdots+\beta_{\nu-1}(\underline{M})\,;$$

$f(M)$ est alors une fonction holomorphe sur $\hat{T}$. Si on pose

$$F_i((x), y)=b_0^{(i)}(x)y^{\nu-1}+\cdots+b_{\nu-1}^{(i)}(x),$$

on obtient aisément sur $\underline{\tau}\cap\underline{\Delta}_i$,

$$\beta_1(\underline{M})y^{\nu-2}+\cdots+\beta_{\nu-1}(\underline{M})=F_i(\underline{M}, y)-b_0^{(i)}(\underline{M})\,U(\underline{M}, y).$$

Donc, on a sur $\hat{T}: U=0$,

$$f=F_i\,.$$

Le problème $(H_{\hat{T}})$ étant, par hypothèse, résoluble affirmativement, $f(M)$ peut s'exprimer comme la restriction sur $\hat{T}$ d'une fonction $F((x), y)$ holomorphe dans $(\underline{\Delta}, C)$; et, d'après le théorème 4, on peut trouver ν fonctions $b_0(x), \cdots, b_{\nu-1}(x)$ telles que l'on ait sur $\underline{\tau}$, en vertu de l'unicité de l'expression de f,

$$\beta_j(\underline{M})=b_j(x)-b_0(x)\alpha_j(\underline{M}) \quad (j=1, \cdots, \nu-1).$$

Inversement, supposons donnée une fonction $f(M)$ holomorphe sur $\hat{T}$ et remplissant l'hypothèse du problème $(H_{\hat{T}})$. Puisque la démonstration du théorème 4 s'applique au cas de la surface $\sum_i$, il existe ν fonctions $b_j^{(i)}(x)$ $(j=0, 1, \cdots, \nu-1)$ holomorphes dans $\underline{\Delta}_i$, telles que $f(M)$ soit la restriction sur $\hat{T}\cap\sum_i$ d'un pseudo-polynôme de degré $\nu-2$ en y, à coefficients holomorphes sur $\underline{\tau}\cap\underline{\Delta}_i$:

$$f=\beta_1^{(i)}(\underline{M})y^{\nu-2}+\cdots+\beta_{\nu-1}^{(i)}(\underline{M}),$$

dont les coefficients $\beta_j^{(i)}(\underline{M})$ se déterminent par les formules

$$\beta_j^{(i)}(\underline{M}) = b_j^{(i)}(x) - b_0^{(i)}(x)\alpha_j(\underline{M}).$$

Or, comme l'expression de f est unique, les trois fonctions $\beta_j^{(i)}(\underline{M})$ $(i=1,2,3)$ définissent une fonction $\beta_j(\underline{M})$ holomorphe sur $\underline{\tau}\cap\underline{\Delta}_0$, donc holomorphe sur $\underline{\tau}$ tout entier, d'après le lemme 3. Par hypothèse, on peut alors trouver ν fonctions $b_0(x), \cdots, b_{\nu-1}(x)$ holomorphes dans $\underline{\Delta}$ telles que l'on ait sur $\underline{\tau}$

$$\beta_j(\underline{M}) = b_j(x) - b_0(x)\alpha_j(\underline{M}).$$

Donc, d'après le théorème 4, $f(M)$ est la restriction d'une fonction holomorphe sur $\sum$, et donc d'une fonction holomorphe dans $(\underline{\Delta}, C)$, d'après le lemme 4; ce qui achève la démonstration.

13. Un exemple. Nous nous proposons dans ce numéro, de donner un exemple de domaine Δ dans lequel le problème (A) n'est pas affirmatif. Pour cela, il suffit de donner un exemple de surface $\sum$ sur laquelle le problème $(H_{\bar{r}})$ n'est pas affirmatif.

Considérons une fonction algébrique $w=\omega(x, y, z)$, de trois variables complexes (x, y, z), définie par une équation algébrique du quatrième degré en w:

$$\Phi = (w^2-x^2)^2 - (yw-xz)^2 + (z^2-y^2)^2 = 0.$$

Soit $\underline{\Delta}$ un polycylindre à l'espace de (x, y, z), de la forme:

$$(\underline{\Delta}) \qquad |x|<r, \quad |y|<r, \quad |z|<r,$$

et $\sum$ la surface: $w=\omega(x, y, z)$ $((x, y, z)\in\underline{\Delta})$. $\sum$ étant considérée naturellement comme un domaine ramifié sur $\underline{\Delta}$, désignons-la par Δ.

Pour chercher les variétés singulières de $\sum$, envisageons les équations suivantes:

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial w} = 2w(w^2-x^2) - y(yw-xz) = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -2x(w^2-x^2) + z(yw-xz) = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -w(yw-xz) - 2y(z^2-y^2) = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial z} = x(yw-xz) + 2z(z^2-y^2) = 0.$$

En formant (1)$\times w+$(2)$\times x$ et (3)$\times y+$(4)$\times z$, on a

$$(yw-xz)^2=2(w^2-x^2)^2=2(z^2-y^2)^2. \tag{5}$$

D'autre part, on a, de la relation (1),

$$4w^2(w^2-x^2)^2=y^2(yw-xz)^2,$$

et, en vertu de (5), on a

$$(2w^2-y^2)(yw-xz)^2=0.$$

De même, on a

$$(2x^2-z^2)\ (yw-xz)^2=0,$$
$$(2y^2-w^2)(yw-xz)^2=0,$$
$$(2z^2-x^2)\ (yw-xz)^2=0.$$

De ces quatre relations, on a

$$yw-xz=0, \tag{6}$$

et par suite, on a, en vertu de (5),

$$z^2-y^2=0,\ w^2-x^2=0.$$

De là, on a enfin, en tenant compte de (6),

$$z=y,\ w=x, \tag{7}$$

ou

$$z=-y,\ w=-x. \tag{8}$$

Inversement, (7) et (8) remplissent évidemment les équations (1), (2), (3), (4) et $\Phi=0$.

Donc, la surface $\sum$ a pour ses singularités, deux variétés T_1 et T_2:

$$(T_1)\qquad z=y,\ w=x,$$
$$(T_2)\qquad z=-y,\ w=-x.$$

Nous allons montrer que la fonction ω possède la propriété (K) dans Δ.

Pour cela, prenons un point M_0 de T_1, et soit (x_0, y_0, y_0, x_0) ses coordonnées. Si on pose

$$x=x_0+x',\ y=y_0+y',\ z=z_0+z',\ w=w_0+w',$$

x', y', z', w' étant les nouvelles variables, l'équation $\Phi=0$ s'écrit

$$(w'-x')^2(2x_0+\cdots)^2-[y_0(w'-x')-x_0(z'-y')+\cdots]^2$$
$$+(z'-y')^2(2y_0+\cdots)^2=0.$$

La partie homogène du plus petit degré de cette équation est une forme quadratique

$$(4x_0^2-y_0^2)(w'-x')^2+2x_0y_0(w'-x')(z'-y')+(4y_0^2-x_0^2)(z'-y')^2,$$

qui est décomposée en deux facteurs linéaires, distincts et renfermant la variable w, pourvu qu'on ait pour (x_0, y_0)

$$4x_0^2-y_0^2\neq 0 \text{ et } (4x_0^2-y_0^2)(4y_0^2-x_0^2)-x_0^2y_0^2\neq 0.$$

De là, on conclut que tout point M_0 de T_1, sauf ceux appartenant à une sous-variété de dimension un de T_1, n'est pas l'image d'un point critique de Δ, et que par M_0 passent deux branches de $\sum$, à plans tangents distincts, et deux seulement. Il en est de même de T_2. Ainsi, la fonction ω satisfait aux conditions 1° et 4° de la propriété (K).

De plus, on a sur $\underline{T}_1$: $z=y$,

$$\Phi=(w-x)^2(w+x-y)(w+x+y),$$

et sur $\underline{T}_2$: $z=-y$,

$$\Phi=(w+x)^2(w-x-y)(w-x+y);$$

ce qui montre que la fonction ω satisfait aux conditions 2° et 3° de la propriété (K). Ainsi, la fonction ω possède la propriété (K) dans Δ.

Posons maintenant

$$s(\underline{M})=\begin{cases} 1 \text{ sur } \underline{T}_1, \\ -1 \text{ sur } \underline{T}_2\,; \end{cases}$$

$s(\underline{M})$ est une fonction holomorphe sur $\underline{T}=\underline{T}_1\cup\underline{T}_2$. Alors, on peut écrire sur $\underline{T}$

$$\Phi=(w-s(\underline{M})x)^2(w+s(\underline{M})x-y)(w+s(\underline{M})x+y),$$

et on a sur $\underline{T}$

$$U(\underline{M}, y) = (w - s(\underline{M})x)(w + s(\underline{M})x - y)(w + s(\underline{M})x + y)$$
$$= w^3 + s(\underline{M})xw^2 - (x^2 + y^2)w + s(\underline{M})x(y^2 - x^2).$$

La surface $\hat{T} = \hat{T}_1 \cup \hat{T}_2$ s'exprime sur $\underline{T}$ par l'équation

$$U(\underline{M}, y) = 0,$$

et donc on a sur $\hat{T}$

$$s(\underline{M})x[w^2 + (y^2 - x^2)] = -[w^3 - (x^2 + y^2)w].$$

Considérons enfin sur $\hat{T}$ une fonction holomorphe $f(M)$:

$$f(M) = s(\underline{M})[w^2 + (y^2 - x^2)]; \tag{9}$$

cette fonction $f(M)$ remplit l'hypothèse du problème $(H_{\hat{T}})$, car $f(M)$ peut être exprimée sur $\underline{T}$ comme suit:

$$f(M) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}[w^3 - (x^2 + y^2)w] & \text{pour } 0 < |x| < r, \\ \dfrac{z}{y}[w^2 + (y^2 - x^2)] & \text{pour } 0 < |y| < r, \\ \dfrac{y}{z}[w^2 + (y^2 - x^2)] & \text{pour } 0 < |z| < r. \end{cases}$$

Si $f(M)$ était exprimée comme la restriction d'une fonction $F((x), y)$ holomorphe dans $(\underline{\Delta}, C)$, il existerait, d'après le théorème 4, deux fonctions $b_0(x, y, z)$ et $b_1(x, y, z)$ holomorphes dans $\underline{\Delta}$ telles que l'on ait sur $\underline{T}$, pour le coefficient $\beta_1(\underline{M}) = s(\underline{M})$ du terme w^2 à l'expression (9),

$$s(\underline{M}) = b_1(x, y, z) - b_0(x, y, z) \cdot s(\underline{M})x;$$

mais ceci est évidemment absurd au point $(0, 0, 0) \in \underline{T}$. Ainsi, le problème $(H_{\hat{T}})$ n'est pas résoluble affirmativement pour la surface Σ.