J. Math. Kyoto Univ.
4-3 (1965) 641-673.

Quelques propriétés locales des domaines intérieurement ramifiés. III

Par

Hidekazu ONISHI

(Reçu le 15 Mai, 1965)

Introduction

Dans le mémoire précédent [4], nous avons obtenu quelques critères du problème (A)[1] posé sur un domaine $\varDelta$ intérieurement ramifié sur un polycylindre $\underline{\varDelta}$, qui se représente comme une surface analytique Σ de type (K)[1]; surtout, un critère ([4], Théorème 5) qui depend de la variété double ordinaire T de Σ, ainsi que du nombre ν de feuillets de $\varDelta$. D'autre part, le théorème 6, [4], montre que la réponse au problème (A) dépend seulement de la variété double ordinaire T de Σ, mais non pas du nombre ν de feuillets de $\varDelta$.

Dans ces circonstances, il sera naturel de chercher un critère du problème (A) qui ne depend que de la variété double ordinaire T de Σ. Et pour cela, il nous faut étudier en détaile la condition[2] introduite dans [4], Théorème 5:

$$\mathscr{B}^*(\underline{\varDelta}_1)\cap\cdots\cap\mathscr{B}^*(\underline{\varDelta}_m)=\mathscr{B}^*(\underline{\varDelta}),$$

qui est nécessaire et suffisante pour que le problème (A) soit affirmatif.

Le §2 set consacré à l'étude de cette condition. Les critères du problème (A) sont recoltés dans le §3, n° 11.

Enfin, dans les n^{os} 12, 13 est donné un exemple de domaine

1) Pour la définition, voir n° 10 du présent mémoire; voir aussi [4], n° 2.
2) Voir n° 4, n° 10, e) et le théorème 1.

dans lequel le problème (A) n'est pas affirmatif. Pour la signification de cet exemple, voir les théorèmes 1, 5 et 5 bis.

§1. Propriété $(\boldsymbol{H})$.

1. Multiplicité d'un point sur une surface. 1°. Soit $\mathfrak{D}$ un domaine univalent quelconque (fini ou non) dans l'espace de n variables complexes $(x_1, \cdots, x_n)$, et Σ une surface analytique de dimension $n-1$ dans $\mathfrak{D}$.

Σ est donnèe, par définition, comme suit:

il existe un recouvrement $\mathcal{U}=\{U\}$ de $\mathfrak{D}$ par des ouverts U, et un système $\{\varphi_U\}$ de fonctions $\varphi_U(x)$ holomorphes respectivement dans U, et qui n'admettent pas de facteur multiple en aucun point de U, tels que, pour toute intersection non vide V de U, $U'(\in\mathcal{U})$, $\varphi_U/\varphi_{U'}=\Omega_V$ soit une fonction holomophe dans V et qui ne s'annule jamais dans V, et tels que, pour tout ouvert $U\in\mathcal{U}$, $\Sigma\cap U$ s'exprime par l'equation $\varphi_U(x)=0$.

Soit μ un entier positif quelconque. Considérons dans U l'ensemble analytique $S_U^{(\mu)}$ définie par les équations

$$(S_U^{(\mu)}) \qquad \frac{\partial^k \varphi_U}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}=0$$

$$(k_1, \cdots, k_n\geqq 0,\ k_1+\cdots+k_n=k;\ k=0, 1, \cdots, \mu-1),$$

et notons $S^{(\mu)}$ la réunion des $S_U^{(\mu)}$ $(U\in\mathcal{U}): S^{(\mu)}=\bigcup_{U\in\mathcal{U}} S_U^{(\mu)}$. On a évidemment

$$S^{(1)}=\Sigma, \text{ et } S^{(\mu)}\supset S^{(\mu+1)} \qquad (\mu=1, 2, \cdots)^{3)}.$$

Soit V l'intersection non vide de U et U' $(U, U'\in\mathcal{U})$; on a dans V

$$\varphi_U=\Omega_V\varphi_{U'},$$

Ω_V étant une fonction holomorphe dans V et qui ne s'annule jamais dans V. Différentiations successives de cette relation montre évidemment que, pour tout entier positif k, toute dérivée partielle de φ_U

3) Pour $\mu=2$, $S^{(2)}$ n'est l'autre que la variété singulière de Σ.

[resp. $\varphi_{U'}$] d'ordre k est engendrée dans V par les dérivées partielles de $\varphi_{U'}$ [resp. φ_U] d'ordres au plus égales à k, avec des coefficients holomorphes dans V. Donc, on a dans V

$$S_U^{(\mu)} \cap V = S_{U'}^{(\mu)} \cap V;$$

ce qui montre que:

a) la définition de $S^{(\mu)}$ est indépendant du choix du recouvrement $\mathcal{U}$ et du choix des fonctions φ_U qui définissent Σ, et que

b) chaque $S^{(\mu)}$ est un ensemble analytique, bien définie dans $\mathfrak{D}$.

2°. Pour tout entier positif μ, notons $S_*^{(\mu)}$ l'ensemble des points de $S^{(\mu)}$ qui n'appartiennent pas à $S^{(\mu+1)}$:

$$S_*^{(\mu)} = S^{(\mu)} - S^{(\mu+1)} \quad (\mu = 1, 2, \cdots)^{4)};$$

on a

$$S_*^{(\mu)} \cap S_*^{(\mu')} = \emptyset \quad (\mu \neq \mu'), \quad \text{et} \quad \Sigma = \bigcup_{\mu=1}^{\infty} S_*^{(\mu)},$$

et plus généralement, on a

$$\Sigma - S^{(\mu+1)} = S_*^{(1)} \cup \cdots \cup S_*^{(\mu)}.$$

Prenons un point quelconque $Q = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ de $S_*^{(\mu)}$. Soit U un ouvert de $\mathcal{U}$ qui contient Q. D'après la définition de $S_*^{(\mu)}$, le développement de Taylor de la fonction $\varphi_U(x)$ au point Q s'écrit

$$\varphi_U(x) = \sum_{k=\mu}^{\infty} H^{(k)}(x_1 - \xi_1, \cdots, x_n - \xi_n),$$

où $H^{(k)}$ $(k \geqq \mu)$ sont des polynômes homogènes en $x_1 - \xi_1, \cdots, x_n - \xi_n$ respectivement de degré k, dont $H^{(\mu)}$ ne s'annale pas identiquement.

Au moyen d'un changement L de coordonnées (x) en $(u_1, \cdots, u_{n-1}, v)$ défini par des formules linéaires:

$$x_i - \xi_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} u_j \quad (u_n = v;\ i = 1, \cdots, n),$$

le polynôme homogène $H^{(\mu)}(x_1 - \xi_1, \cdots, x_n - \xi_n)$ se transforme en un polynôme homogène $H_L((u), v)$ de même degré μ.

---

4) Pour $\mu = 1$, $S_*^{(1)}$ est identique à l'ensemble des points réguliers (points simples) de Σ.

Le théorème de préparation de Weierstrass montre alors que:

Pour qu'un point Q de Σ *appartienne à* $S_*^{(\mu)}$, *il faut et il suffit que, au moyen d'un tout changement de coordonnées L tel que* $H_L((0), v)$ *ne s'annule pas identiquement*,[5] Σ *s'exprime au voisinage de Q par l'équation algébroïde en v de degré* μ:

$$\Phi_L((u), v) = v^{\mu} + A_1(u)v^{\mu-1} + \cdots + A_{\mu}(u) = 0\,,$$

où les coefficients $A_j(u_1, \cdots, u_{n-1})$ *sont des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine* $(u) = (0)$, *et s'annulant à l'origine, et que le pseudo-polynôme* $\Phi((u), v)$ *n'admet aucun facteur multiple au voisinage de l'origine* $((0), 0)$.

De ce fait, on appelle tout point Q de $S_*^{(\mu)}$ *point de multiplicité* μ *sur* Σ[6]; tout point Q de $\Sigma = \bigcup_{\mu=1}^{\infty} S_*^{(\mu)}$ a une multiplicité sur Σ que nons désignerons par $\mu(Q)$.

3°. Soit ω une fonction holomorphe sur Σ. Comme Σ s'exprime au voisinage de Q par l'équation algébroïde en v de degré $\mu = \mu(Q)$:

$$\Phi_L((u), v) = v^{\mu} + A_1(u)v^{\mu-1} + \cdots + A_{\mu}(u) = 0\,,$$

la fonction ω satisfait, au voisinage (sur Σ) de Q, à l'équation algébroïde de degré $\mu = \mu(Q)$:

$$\omega^{\mu} + B_1(u)\omega^{\mu-1} + \cdots + B_{\mu}(u) = 0\,,$$

$B_j(u_1, \cdots, u_{n-1})$ étant des fonctions holomorphes au voisinage de $(u) = (0)$.

Donc, le changement réciproque L^{-1} de coordonnées $((u), v)$ en (x) montre que:

la fonction ω^{μ}, *et donc toute fonction* ω^h $(h \geqq \mu)$, *peut être engendrée, au voisinage (sur* Σ*) de Q, par les* $\mu(Q) - 1$ *fonctions* ω^p $(p = 0, 1, \cdots, \mu - 1)$, *avec des coefficients* $C_p^{(h)}(x_1, \cdots, x_n)$ $(p = 0, 1, \cdots, \mu - 1)$ *holomorphes au voissinage de Q, comme*:

---

5) En d'autre terme: l'axe de v ne soit pas contenu dans le cône des tangentes à Σ en Q: $H^{(\mu)}(x - \xi) = 0$.

6) La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point Q soit un point simple de Σ est que sa multiplicité sur Σ soit égale à un.

$$\omega^h = \sum_{p=0}^{\mu-1} C_p^{(h)} \omega^p.$$

4°. La définition de multiplicité d'un point Q sur Σ peut se généraliser au cas d'une sous-variété sur Σ.

Soit σ un ensemble analytique *connexe*[7] contenu dans Σ, et r $(0 \leqq r \leqq n-2)$ sa dimension. Les formules

$$\sigma \subset S^{(1)} (=\Sigma), \text{ et } \bigcap_{\mu=1}^{\infty} S^{(\mu)} = \emptyset$$

montrent qu'on peut trouver un entier $\mu(\mu \geqq 1)$ tel que σ soit contenu dans $S^{(\mu)}$, mais ne soit pas contenu dans $S^{(\mu+1)}$ (c'est-à-dire, μ est le plus petit des entiers positifs μ tels que l'intersection $\sigma \cap S^{(\mu+1)}$ de σ et de $S^{(\mu+1)}$ ait une dimension au plus égale à $r-1$).

Tout point Q de σ, excepté les points Q appartenant à l'ensemble analytique $\sigma \cap S^{(\mu+1)}$ de dimension au plus égale à $r-1$, a la même multiplicité μ.

De ce fait, cet entier μ est appelé *multiplicité de σ sur Σ*, et est noté $\mu(\sigma)$. Lorsque $r=0$, σ se compose d'un seule point Q, et $\mu(\sigma)$ coïncide avec la multiplicité $\mu(Q)$ de ce point Q, définie plus haut.

5°. Maintenant, soit T une variété analytique sur Σ, qui se compose des composantes connexes τ_i $(i=1, 2, \cdots)$ de dimension $n-2$. Dans ce qui suit, nous appellerons *multiplicité de T sur Σ*, la borne supérieure des multiplicités $\mu(\tau_i)$ des composantes τ_i de T, et nous la noterons $\mu(T)$:

$$\mu(T) = \sup_{i \geqq 1}. \mu(\tau_i);$$

on a

$$1 \leqq \mu(T) \leqq +\infty.$$

Si $\mu_0 = \mu(T)$ est finie, tout point Q de T, excepté les points Q appartenant à une sous-ensemble analytique E de dimension au plus égale à $n-3$, a une multiplicité $\mu(Q)$ au plus égale à $\mu(T)$.

7) Nous dirons que σ est connexe, si tout germe de σ est obtenu par prolongement analytique partant d'un germe irréductible de σ.

D'après ce qui précède, on voit que, pour une fonction ω holomorphe sur Σ, toute fonction $\omega^h(h \geqq \mu_0)$ peut être engendrée, au voisinage (sur Σ) d'un tout point Q de $T-E$, par les μ_0 fonctions $\omega^p(0 \leqq p \leqq \mu_0 - 1)$, avec les coefficients holomorphes au voisinage (dans $\mathfrak{D}$) de Q.

2. Propriété (*H*). Soit $\mathfrak{D}$ un domaine univalent quelconque dans l'espace de n variables complexes $(x_1, \cdots, x_n)$, et soit Σ un ensemble analytique de dimension quelconque $r(1 \leqq r \leqq n-1)$ défini dans $\mathfrak{D}$. Etant donnée une fonction ω holomorphe sur Σ, nous dirons, d'après Oka, que *ω possède la propriété (H) en un point Q de Σ*, s'il existe un voisinage V de Q et une fonction $F(x)$ holomorphe dans V tels que ω soit sur $\Sigma \cap V$ la restriction de $F(x)$.

Soit $\mathfrak{D}'$ un sous-domaine univalent de $\mathfrak{D}$. S'il existe une fonction $F(x)$ holomorphe dans $\mathfrak{D}'$ telle que ω soit sur $\Sigma \cap \mathfrak{D}'$ la restriction de $F(x)$, nous dirons que *ω possède sur $\Sigma \cap \mathfrak{D}'$ la propriété (H) par rapport à $\mathfrak{D}'$*.

Maintenant, soit Σ une surface analytique de dimension $n-1$ définie dans $\mathfrak{D}$, et soit S la variété singulière de Σ[8].

Considérons, une fois pour toutes, une fonction ω holomorphe sur Σ.

Soit σ une composante de dimension $n-2$ de la variété singulière S de Σ. On voit aisément qu'il y a deux cas suivants[9]:

1° en tout point M de σ, excepté les points appartenant à une sous-variété de dimension au plus égale à $n-3$, la fonction ω possède la propriété (H); ou bien

2° la fonction ω ne jouit pas de la propriété (H) en aucun point de σ.

Dans ce qui suit, nous appellerons *variété d'espèce $(\overline{H})$ par rapport à ω* la réunion des composantes (de dimension $n-2$) σ de seconde espèce de S, et nous la désignerons par S_ω.

8) Voir la note 3) du bas de la page.
9) Voir W. Rothstein [6], page 304.

On voit aisément que:

Si le produit $H\omega$ d'une fonction $H(x)$ holomorphe dans $\mathfrak{D}$ et de la fonction ω possède sur Σ la propriété (H) par rapport à $\mathfrak{D}$, $H(x)$ s'annule sur S_ω.

On aura besoin du lemme suivant:

Lemme 1. *Soit $\mathfrak{D}$ un domaine univalent d'holomorphie, et Σ une surface analytique (de dimension $n-1$) définie dans $\mathfrak{D}$ par l'équation*

$$\Phi(x)=0,$$

$\Phi(x)$ étant une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$, admettant Σ pour zéros du premier ordre, sans s'annulant d'ailleurs. Soit ω une fonction holomorphe sur Σ, dont on suppose que la multiplicté $\mu_0 =\mu(S_\omega)$ de la sous-variété S_ω de Σ, d'espèce $(\overline{H})$ par rapport à ω, soit finie.

Soit $B(x)$ une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$. Si les μ_0-1 fonctions $B\omega^h(1\leqq h\leqq\mu_0-1)$ possèdent sur Σ la propriété (H) par rapport à $\mathfrak{D}$, il en est de même de toutes les fonctions $B\omega^h(h\geqq\mu_0)$.

En effet, supposons que l'on ait sur Σ

$$B\omega^p=C^{(p)} \quad (0\leqq p\leqq\mu_0-1),$$

$C^{(p)}(x)$ étant des fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$. Comme nous avons vu au n° 1, 5°, toute fonction $\omega^h(h\geqq\mu_0)$ peut, au voisinage (sur Σ) d'un tout point Q de S_ω, excepté les points Q appartenant à une sous-variété E de dimension au plus égale à $n-3$, s'exprime comme

$$\omega^h=\sum_{p=0}^{\mu_0-1} A_p^{(h)}\omega^p,$$

$A_p^{(h)}(x)\,(0\leqq p\leqq\mu_0-1)$ étant des fonctions holomorphes au voisinage V (dans $\mathfrak{D}$) de Q.

On a alors sur $\Sigma\cap V$

$$B\omega^h=\sum_{p=0}^{\mu_0-1} A_p^{(h)}C^{(p)};$$

ceci montre que $B\omega^h$ possède la propriété (H) en tout point Q de $\Sigma - E$, et donc aussi en tout point de Σ, d'après le lemme 1 de K. Oka [1], n° 6.

Alors, en appliquant le théorème VII de K. Oka, [2], n° 35, on voit aisément que $B\omega^h$ possède sur Σ la propriété (H) par rapport à $\mathfrak{D}$; ce qui vérifie le lemme.

3. Condition (*D*). Soit Σ une surface analytique (de dimension $n-1$) dans un domaine univalent quelconque $\mathfrak{D}$, et ω une fonction holomorphe sur Σ.

Si tout point de la sous-variété S_ω de Σ, d'esèpce $(\overline{H})$ par rapport à ω, excepté les points appartenant à une sous-variété de dimension au plus égale à $n-3$, est un point double ordinaire de Σ, nous dirons que la fonction ω satisfait à *la condition* (D) sur Σ.

En appliquant le lemme 4 du [3], n° 10, et la lemme 1 de K. Oka [1], n° 6, et puis le théorème VII de K. Oka [2], n° 35, on obtient le lemme suivant:

Lemme 2. *Soit $\mathfrak{D}$ un domaine univalent d'holomorphie dans l'espace de n variables complexes $(x_1, \cdots, x_n)$, et Σ une surface analytique définie dans $\mathfrak{D}$ par l'équation $\Phi(x)=0$, où Φ est une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$, et qui admet Σ pour zèros du premier ordre, sans s'annulant d'ailleurs. Soit ω une fonction holomorphe sur Σ et satisfaisant à la condition (D).*

Pour que le produit $B\omega$ d'une fonction $B(x)$ holomorphe dans $\mathfrak{D}$ et de la fonction ω possède la propriété (H) sur Σ par rapport à $\mathfrak{D}$, il faut et il suffit que $B(x)$ s'annule sur la variété S_ω d'espèce $(\overline{H})$ par rapport à ω.

§2. Propriétés $(\boldsymbol{\Omega}_\mu^*)$ et $(\boldsymbol{\Omega}_\mu)$.

4. Module $\mathfrak{B}^{(\mu)}(\mathfrak{D})$. Soit Δ un polycylindre dans l'espace de n variables complexes $(x_1, \cdots, x_n)$:

$$(\Delta) \qquad |x_i| < r_i \quad (i=1, \cdots, n),$$

et Σ une surface analytique de dimension $n-1$ définie dans Δ.

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des fonctions holomorphes dans Δ. L'ensemble $\mathcal{A}$ des fonctions β holomorphes sur Σ est un module sur l'anneau $\mathcal{O}_\Sigma$, $\mathcal{O}_\Sigma$ désignant le module induit sur Σ par $\mathcal{O}$.

Pour un entier positif μ, considérons un système $(\beta)=(\beta_1, \cdots, \beta_\mu)$ de μ fonctions β_h *de* $\mathcal{A}$. L'ensemble de tels systèmes (β) est un module sur l'anneau $\mathcal{O}_\Sigma$, que nous désignerons par $\mathcal{A}^\mu$.

Supposons donnée, une fois pour toutes, une fonction ω holomorphe sur Σ.

Etant donné un domaine univalent quelconque $\mathcal{D}$ contenu dans Δ, nous dirons qu'un élément (β) de $\mathcal{A}^\mu$ est *de type* (χ_ω)[10] *par rapport à* $\mathcal{D}$, s'il existe une fonctions $B(x)$ holomorphe dans $\mathcal{D}$ telle que les fonctions $\beta_h - B\omega^h (h=1, \cdots, \mu)$ possèdent sur $\Sigma \cup \mathcal{D}$ la propriété (H) par rapport à $\mathcal{D}$:

$$\beta_h - B\omega^h = -B^{(h)},$$

$B^{(h)}(x)$ étant des fonctions holomorphes dans $\mathcal{D}$.

L'ensemble des éléments $(\beta) \in \mathcal{A}^\mu$ de type (χ_ω) par rapport à $\mathcal{D}$ est évidemment un sous-module de $\mathcal{A}^\mu$, que nous désignerons par $\mathcal{B}_\omega^{(\mu)}(\mathcal{D})$.

Pour un domaine $\mathcal{D}'$ contenu dans $\mathcal{D}$, on a évidemment

$$\mathcal{B}_\omega^{(\mu)}(\mathcal{D}') \supset \mathcal{B}_\omega^{(\mu)}(\mathcal{D}).$$

Si on considère $m (3 \leqq m \leqq n)$ sous-domaines cylindriques $\Delta_j (j = 1, \cdots, m)$ de Δ:

$$(\Delta_j) \qquad \rho_j < |x_j| < r_j, \quad |x_i| < r_i \ (i=1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n),$$

on a

$$\mathcal{B}_\omega^{(\mu)}(\Delta_1) \cap \cdots \cap \mathcal{B}_\omega^{(\mu)}(\Delta_m) \supset \mathcal{B}_\omega^{(\mu)}(\Delta).$$

Comme nous avons remarqué dans l'introduction, nous étudirons, dans le n° suivant, la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait l'égalité

---

10) Dans [4], n° 6, cet élément (β) a été appelé l'élément de type (χ^*), et le module $\mathcal{B}_\omega^{(\mu)}(\mathcal{D})$ a été noté $\mathcal{B}^*(\mathcal{D})$.

$$\mathscr{B}^{(\mu)}_{\omega}(\varDelta_1)\cap\cdots\cap\mathscr{B}^{(\mu)}_{\omega}(\varDelta_m)=\mathscr{B}^{(\mu)}_{\omega}(\varDelta).$$

5. Propriété ($\boldsymbol{\Omega}^*_\mu$). Soient $\varDelta$ un polycylindre, $\varDelta_j(j=1,\cdots,m;\ 3\leqq m\leqq n)$ m domaines cylindriques tout expliqués au n° précédent. Nous posons toujours

$$\varDelta_i\cap\varDelta_j=\varDelta_{ij},\quad \varDelta_i\cap\varDelta_j\cap\varDelta_k=\varDelta_{ijk},\quad \text{etc.}$$

Soit Σ une surface analytique (de dimension $n-1$) définie dans $\varDelta$, et ω une fonction holomorphe sur Σ.

Avant de définir une propriété (Ω_μ) au n° 7, nous posons la définition de la propriété (Ω^*_μ) comme suit:

Nous dirons que la fonction ω jouit de *la propriété* (Ω^*_μ), si ω satisfait à la condition suivante:

Etant données m fonctions $B_j(x)$ $(j=1,\cdots,m)$ holomorphes dans $\varDelta_j$, telles que, pour tout indice $h(1\leqq h\leqq\mu)$,

1° les fonctions $(B_i-B_j)\omega^h$ possèdent sur $\Sigma\cap\varDelta_{ij}$ la propriété (H) par rapport à $\varDelta_{ij}$:

$$(B_i-B_j)\omega^h=B^{(h)}_{ij},$$

$B^{(h)}_{ij}(x)(h=1,\cdots,\mu)$ étant des fonctions holomorphes dans $\varDelta_{ij}$, et que

2° on ait identiquement dans $\varDelta_{ijk}$

$$B^{(h)}_{ij}+B^{(h)}_{jk}+B^{(h)}_{ki}=0^{11)},$$

on peut trouver une fonction $B(x)$ holomorphe dans $\varDelta$ telle que, pour tout indice $h(1\leqq h\leqq\mu)$, les fonctions $(B_j-B)\omega^h(j=1,\cdots,m)$ aient la propriété (H) par rapport respectivement à $\varDelta_j$.

Soit S_ω la variété (de dimension $n-2$) d'espèce $(\overline{H})$ par rapport à ω.

Si S_ω est vide (c'est-à-dire, si ω possède sur Σ la propriété (H) par rapport à $\varDelta$), ω jouit évidemment de la propriété (Ω^*_μ) pour

---

11) C'est équivalent à dire qu'il existe m fonctions $B^{(h)}_j(x)$ holomorphes dans $\varDelta_j$ telles que l'on ait sur $\Sigma\cap\varDelta_{ij}$

$$(B_i-B_j)\omega^h=B^{(h)}_i-B^{(h)}_j\quad(i,j=1,\cdots,m;\ 1\leqq h\leqq\mu).$$

tout entier positif μ.

Si S_ω n'est pas vide, la propriété (Ω_μ^*) peut encore s'énoncer comme suit:

Si une fonction g holomorphe sur $S_\omega^0 = S_\omega \cap [\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m]$ possède la propriété (H) en tout point de S_ω^0, de façon que l'on ait sur chaque $S_\omega \cap \Delta_j$

$$g = B_j \ ,$$

$B_j(x)$ étant des fonctions holomorphes dans Δ_j, et que $B_j(x)$ satisfassent aux deux conditions 1° et 2° énoncées plus haut, la fonction g peut se prolonger analytiquement en une fonction g^* holomorphe sur S_ω telle que l'on ait sur S_ω

$$g^* = B \ ,$$

$B(x)$ étant une fonction holomorphe dans Δ, et telle que les fonctions $(B_j - B)\omega^h$ $(1 \leqq h \leqq \mu)$ possèdent sur $\Sigma \cap \Delta_j$ la propriété (H) par rapport à Δ_j.

On obtient la proposition suivante[12]:

Proposition 1. *Pour qu'une fonction ω holomorphe sur Σ satisfasse à la condition*

$$\mathscr{B}_\omega^{(\mu)}(\Delta_1) \cap \cdots \cap \mathscr{B}_\omega^{(\mu)}(\Delta_m) = \mathscr{B}_\omega^{(\mu)}(\Delta),$$

il faut et il suffit que la fonction ω jouisse de la propriété (Ω_μ^*).

En effet, il est nécessaire: Supposons données m fonctions $B_j(x)$ holomorphes respectivement dans Δ_j telles que l'on ait identiquement sur $\Sigma \cap \Delta_{ij}$,

$$(B_i - B_j)\omega^h = B_i^{(h)} - B_j^{(h)} \quad (i, j = 1, \cdots, m;\ h = 1, \cdots, \mu),$$

$B_j^{(h)}(x)$ $(h = 1, \cdots, \mu)$ étant holomorphes dans Δ_j. On obtient, pour tout indice $h (1 \leqq h \leqq \mu)$, identiquement sur $\Sigma \cap \Delta_{ij}$

$$B_i\omega^h - B_i^{(h)} = B_j\omega^h - B_j^{(h)} \quad (i, j = 1, \cdots, m);$$

ce qui mortre que les m fonctions $B_j\omega^h - B_j^{(h)} (j = 1, \cdots, m)$ définissent

12) Pour le cas où $m \geqq 4$, voir aussi n° 7, Proposition 2.

une fonction β_h holomorphe sur $\Sigma\cap(\varDelta_1\cup\cdots\cup\varDelta_m)$:

$$\beta_h=B_j\omega^h-B_j^{(h)} \quad (\text{sur } \Sigma\cap\varDelta_j;\ j=1,\cdots,m).$$

Mais, comme $m\geqq 3$, la fonction β_h peut se prolonger analytiquement en une fonction holomorphe sur Σ tout entier d'après le lemme 3 du mémoire [3], n° 7. Par suite, le système $(\beta)=(\beta_1,\cdots,\beta_\mu)$ est un élément de $\mathscr{B}_\omega^{(\mu)}(\varDelta_1)\cap\cdots\cap\mathscr{B}_\omega^{(\mu)}(\varDelta_m)$.

Or, $\mathscr{B}_\omega^{(\mu)}(\varDelta_1)\cap\cdots\cap\mathscr{B}_\omega^{(\mu)}(\varDelta_m)$ étant, par hypothèse, identique à $\mathscr{B}_\omega^{(n)}(\varDelta)$, (β) appartient à $\mathscr{B}_\omega^{(\mu)}(\varDelta)$; ce qui entraîne qu'il existe $\mu+1$ fonctions $B(x)$, $B^{(1)}(x)$, $\cdots$, $B^{(\mu)}(x)$ holomorphes dans $\varDelta$ telles que l'on ait sur Σ

$$\beta_h=B\omega^h-B^{(h)} \quad (h=1,\cdots,\mu).$$

On a alors sur $\Sigma\cap\varDelta_j$

$$(B_j-B)\omega^h=B_j^{(h)}-B^{(h)};$$

et ceci montre que les fonctions $(B_j-B)\omega^h$ possèdent sur $\Sigma\cap\varDelta_j$ la propriété (H) par rapport à $\varDelta_j$; ce qui vérifie que ω jouit de la propriété (Ω_μ^*).

Inversement, il est suffisant: Prenons en effet un élément $(\beta_1,\cdots,\beta_\mu)$ de $\mathscr{B}_\omega^{(\mu)}(\varDelta_1)\cap\cdots\cap\mathscr{B}_\omega^{(\mu)}(\varDelta_m)$. On a sur $\Sigma\cap\varDelta_j$

$$\beta_h=B_j\omega^h-B_j^{(h)} \quad (j=1,\cdots,m;\ h=1,\cdots,\mu),$$

$B_j(x)$ et $B_j^{(h)}(x)$ $(h=1,\cdots,\mu)$ étant holomorphes dans $\varDelta_j$; d'où on a sur $\Sigma\cap\varDelta_{ij}$

$$(B_i-B_j)\omega^h=B_i^{(h)}-B_j^{(h)} \quad (i,j=1,\cdots,m;\ h=1,\cdots,\mu).$$

Comme la fonction ω jouit, par hypothèse, de la propriété (Ω_μ^*), on peut trouver une fonction $B(x)$ holomorphe dans $\varDelta$ telle que l'on ait sur $\Sigma\cap\varDelta_j$

$$(B_j-B)\omega^h=C_j^{(h)} \quad (j=1,\cdots,m;\ h=1,\cdots,\mu),$$

$C_j^{(h)}(x)$ $(h=1,\cdots,\mu)$ étant des fonctions holomorphes dans $\varDelta_j$. On a donc sur $\Sigma\cap\varDelta_j$

$$\beta_h-B\omega^h=C_j^{(h)}-B_j^{(h)};$$

ce qui montre que les fonctions $\beta_h - B\omega^h$, qui sont holomorphes sur Σ, possèdent sur $\Sigma \cap \Delta_j$ la propriété (H) par rapport à Δ_j $(j=1, \cdots, \mu)$.

Comme Σ s'exprime dans le polycylindre Δ par l'équation $\Phi(x) = 0$, où Φ admet Σ pour les zéros du premier ordre, et comme le problème (H) [ou le problème (A)][13] est affirmatif pour le polycylindre Δ, les fonctions $\beta_h - B\omega^h$ possèdent sur Σ la propriété (H) par rapport à Δ; ce qui montre que $(\beta_1, \cdots, \beta_\mu)$ appartient à $\mathscr{B}_\omega^{(\mu)}(\Delta)$, et donc que l'on a

$$\mathscr{B}_\omega^{(\mu)}(\Delta_1) \cap \cdots \cap \mathscr{B}_\omega^{(\mu)}(\Delta_m) = \mathscr{B}_\omega^{(\mu)}(\Delta).$$

c. q. f. d.

6. Un lemme. Dans le n° suivant, nous remarquerons que, si $m \geqq 4$, la propriété (Ω_μ^*) peut se remplacer par une autre propriété équivalente et plus maniable que la propriété (Ω_μ^*). Pour cela, on aura besoin du lemme suivant:

Lemme 3.[14] *Supposons que $m \geqq 4$. Soient f une fonction holomorphe sur Σ, et $B_j(x)$ $(j=1, \cdots, m)$ m fonctions holomorphes respectivement dans Δ_j.*

Si les produits $(B_i - B_j)f$ possèdent la propriété (H) par rapport respectivement à Δ_{ij}, on peut trouver m fonctions $C_j(x)$ holo-

---

13) Pour la définition du problème (H) [où (A)], voir n° 10. Voir aussi [4], n^{os} 1, 2.

14) Plus généralement, on obtient la proposition suivante:

Soit Σ une surface analytique définie dans un domaine univalent $\mathscr{D}$, par l'équation $\Phi(x)=0$, $\Phi(x)$ étant holomorphe dans $\mathscr{D}$, et admettant Σ pour zéros du premier ordre.

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recouvrement de $\mathscr{D}$ par les ouverts U_i, et $\mathcal{U}' = \{\Sigma \cap U_i\}$ le recouvrement de Σ induit par $\mathcal{U}$. Supposons que $H^p(\mathscr{D}, \mathcal{O}) = 0$ pour un entier positif p, $\mathcal{O}$ désignant le faisceau des germes de fonctions holomorphes, défini dans $\mathscr{D}$. Alors, pour tout p-cocycle $\beta = \{\beta_{i_0 \cdots i_p}\}$ défini sur Σ tel que l'on ait sur $\Sigma \cap U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}$

$$\beta_{i_0 \cdots i_p} = B_{i_0 \cdots i_p} ,$$

$B_{i_0 \cdots i_p}(x)$ étant des fonctions holomorphes dans $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}$, on peut trouver un $(p-1)$-cocycle $C = \{C_{i_0 \cdots i_p}(x)\}$ défini dans $\mathscr{D}$ tel que l'on ait sur Σ

$$\beta = \partial C ,$$

∂ désignant l'opération de cobord.

morphes dans $\varDelta_j$ *telles que l'on ait sur* $\Sigma\cap\varDelta_{ij}$

$$(B_i-B_j)f=C_i-C_j \quad (i, j=1, \cdots, m).$$

En effet, $(B_i-B_j)f$ possédant la propriété (H) par rapport à $\varDelta_{ij}$, on peut supposer que l'on ait sur $\Sigma\cap\varDelta_{ij}$

$$(B_i-B_j)f=B_{ij} \quad (i, j=1, \cdots, m),$$

$B_{ij}(x)$ étant des fonctions holomorphes dans $\varDelta_{ij}$ telles que l'on ait identiquement $B_{ji}=-B_{ij}$ (et donc $B_{ii}=0$) ; on a sur $\Sigma\cap\varDelta_{ijk}$

$$B_{jk}-B_{ik}+B_{ij}=0 \ .$$

Comme Σ s'exprime dans le polycylindre $\varDelta$ par l'équation

$$\Phi(x)=0 \ ,$$

où $\Phi(x)$ est une fonction holomorphe dans $\varDelta$ et qui admet Σ pour zéros du premier ordre, on a identiquement dans $\varDelta_{ijk}$

$$B_{jk}-B_{ik}+B_{ij}=\Phi B_{ijk} \quad (i, j, k=1, \cdots, m),$$

$B_{ijk}(x)$ étant holomorphes dans $\varDelta_{ijk}$; d'où l'on a d'abord dans $\varDelta_{ijk}$

$$B_{ijk}=B_{jki}=B_{kij}=-B_{jik}=-B_{kji}=-B_{ikj} \quad (i, j, k=1, \cdots, m)$$

(et par suite, $B_{iij}=B_{iji}=B_{jii}=0$, $B_{iii}=0$).

De plus, on a, pour quatre indices i, j, k, l mutuellement distincts $[i, j, k, l=1, \cdots, m \ (m\geqq 4)]$, identiquement dans $\varDelta_{ijkl}=\varDelta_i\cap\varDelta_j \cap\varDelta_k\cap\varDelta_l$

$$B_{jkl}-B_{ikl}+B_{ijl}-B_{ijk}=0 \quad (i, j, k, l=1, \cdots, m).$$

Par le développement de Laurent, on voit aisément qu'il existe $m(m-1)$ fonctions $E_{ij}(x)$ $(i, j=1, \cdots, m;\ i\neq j)$ holomorphes respectivement dans $\varDelta_{ij}$ telles que $E_{ji}=-E_{ij}$, et telles que l'on ait identiquement dans $\varDelta_{ijk}$ $(i, j, k=1, \cdots, m$; où i, j, k sont différents),

$$B_{ijk}=E_{jk}-E_{ik}+E_{ij} \ .$$

Par suite, si on pose $E_{ii}=0$ $(i=1, \cdots, m)$, on a toujours dans $\varDelta_{ijk}$

$$B_{ijk}=E_{jk}-E_{ik}+E_{ij} \quad (i, j, k=1, \cdots, m).$$ [15]

Maintenant, on a identiquement dans Δ_{ijk}

$$B_{jk}-B_{ik}+B_{ij}=\Phi(E_{jk}-E_{ik}+E_{ij})\,;$$

donc, si on pose dans Δ_{ij}

$$B_{ij}-\Phi E_{ij}=C_{ij}\ ,$$

on a dans Δ_{ijk}

$$C_{jk}-C_{ik}+C_{ij}=0\,.$$

On peut trouver alors m fonctions $C_j(x)$ holomorphes respectivement dans Δ_j telles que l'on ait dans Δ_{ij}

$$C_{ij}=C_i-C_j \quad (i, j=1, \cdots, m)\,;$$

et donc, on a sur $\Sigma\cap\Delta_{ij}$

$$B_{ij}=C_i-C_j\ ,$$

d'où

$$(B_i-B_j)f=C_i-C_j$$

sur $\Sigma\cap\Delta_{ij}$; ce qui vérifie le lemme.

7. Propriété ($\boldsymbol{\Omega}_\mu$). Nous allons montrer dans ce n° que, si $m\geqq 4$, la propriété (Ω_μ^*) peut se remplacer par une autre propriété plus maniable que la propriété (Ω_μ^*).

Nous dirons qu'une fonction ω holomorphe sur $\Sigma(\subset\Delta)$ jouit de *la propriété* (Ω_μ), si ω satisfait à la condition suivante:

Etant données m fonctions $B_j(x)$ holomorphes respectivement dans Δ_j $(j=1, \cdots, m)$, telles que, pour tout indice h $(h=1, \cdots, \mu)$, les fonctions $(B_i-B_j)\omega^h$ $(i, j=1, \cdots, m)$ aient la propriété (H) par rapport respectivement à Δ_{ij}, on peut trouver une fonction $B(x)$ holomorphe dans Δ telle que, pour tout indice h $(h=1, \cdots, \mu)$, les

15) Ceci montre que l'on a $H^2(\Delta_1\cup\cdots\cup\Delta_m, \mathcal{O})=0$ pour $m\geqq 4$, $\mathcal{O}$ désignant le faisceau des germes de fonctions holomorphes, défini dans $\Delta_1\cup\cdots\cup\Delta_m$. Plus généralement, on obtient, pour $p=1, \cdots, m-2$,

$$H^p(\Delta_1\cup\cdots\cup\Delta_m, \mathcal{O})=0\ .$$

fonctions $(B_j - B)\omega^h$ $(j=1, \cdots, m)$ aient la propriété (H) par rapport à Δ_j $(j=1, \cdots, m)$.

Soit S_ω la sous-variété de Σ, d'espèce $(\overline{H})$ par rapport à ω. Si S_ω n'est pas vide, la propriété (Ω_μ) peut encore s'énoncer comme suit:

Toute fonction g holomorphe sur $S_\omega^0 = S_\omega \cap [\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m]$ et possédant la propriété (H) en tout point de S_ω^0, de façon que l'on ait sur chaque $S_\omega \cap \Delta_j$

$$g = B_j ,$$

$B_j(x)$ étant des fonctions holomorphes dans Δ_j telles que $(B_i - B_j)\omega^h$ $(1 \leqq h \leqq \mu)$ possèdent la propriété (H) en tout point de $\Sigma \cap \Delta_{ij}$, peut se prolonger en une fonction g^* holomorphe sur S_ω telle que l'on ait sur S_ω

$$g^* = B ,$$

où $B(x)$ est une fonction holomorphe dans Δ telle que $(B_j - B)\omega^h$ $(1 \leqq h \leqq \mu)$ possèdent la propriété (H) en tout point de $\Sigma \cap \Delta_j$.

D'après le lemme 3, on a immédiatement le lemme suivant:

Lemme 4. *Si $m \geqq 4$, les deux propriétés (Ω_μ^*) et (Ω_μ) sont équivalentes pour une fonction ω holomorphe sur Σ. Lorsque $m=3$, la propriété (Ω_μ) entraîne la propriété (Ω_μ^*), mais la réciproque n'est pas vraie.*[16)]

16) Pour $m=3$, on peut construire l'exemple suivant:

Dans l'espace de trois variables complexes (x_1, x_2, x_3), considérons le polycylindre Δ: $|x_i| < 1$ $(i=1, 2, 3)$, et trois domaines cylindriques Δ_j $(j=1, 2, 3)$: $0 < |x_j| < 1$, $|x_i| < 1$ $(i \neq j)$.

Soit Σ la surface définie dans Δ par l'équation $x_3^2 - x_1^2 x_2^2 = 0$, et soit ω la fonction holomorphe sur Σ définie comme

$$\omega = \begin{cases} x_1 & \text{sur } \Sigma_1 : \quad x_3 - x_1 x_2 = 0 , \\ -x_1 & \text{sur } \Sigma_2 : \quad x_3 + x_1 x_2 = 0 ; \end{cases}$$

on voit aisément que S_ω coïncide avec l'axe de $x_1 (x_2 = x_3 = 0)$.

D'une part, ω jouit de la propriété (Ω_1^*). En effet, soit β une fonction holomorphe sur Σ; β peut être donnée comme

$$\beta = \begin{cases} b_1(x_1, x_2) & \text{sur } \Sigma_1 , \\ b_2(x_1, x_2) & \text{sur } \Sigma_2 , \end{cases}$$

Pour vérifier le lemme, il suffit de montrer l'équivalence des hypothèses posées sur les fonctions $B_j(x)$ $(j=1, \cdots, m)$ dans les définitions des deux propriétés (Ω_μ^*) et (Ω_μ).

Si les $m(m\geqq 3)$ fonctions $B_j(x)$ remplissent l'hypothèse de la propriété (Ω_μ^*), il est triviale que B_j remplissent celle de la propriété (Ω_μ).

Inversement, si B_j remplissent l'hypothèse de la propriété (Ω_μ), on peut trouver, d'après le lemme 3, des fonctions $C_j^{(h)}(x)$ holomorphes respectivement dans Δ_j telles que l'on ait sur $\Sigma\cap\Delta_{ij}$

$$(B_i-B_j)\omega^h=C_i^{(h)}-C_j^{(h)} \quad (i, j=1, \cdots, m\ (m\geqq 4)\ ;\ h=1, \cdots, \mu)\ ;$$

$b_1(x_1, x_2)$ et $b_2(x_1, x_2)$ étant holomorphes dans le polycylindre $|x_1|<1$, $|x_2|<1$.

Si β appartient à $\mathcal{B}_\omega^{(1)}(\Delta_1)\cap\mathcal{B}_\omega^{(1)}(\Delta_2)\cap\mathcal{B}_\omega^{(1)}(\Delta_3)$, β s'exprime sur $\Sigma\cap\Delta_2$ comme

$$\beta=B_2'-B_2\omega\ ,$$

$B_2(x)$, $B_2'(x)$ étant holomorphes dans Δ_2. Comme les deux branches de ω s'annulent sur laxe de $x_2(x_1=x_3=0)$, on voit que les restrictions à l'axe de x_2 des deux branches de β sont identiques:

$$b_1(0, x_2)=b_2(0, x_2)=B_2'(0, x_2, 0)\ ;$$

et ceci montre que la différence $b(x_1, x_2)=b_1(x_1, x_2)-b_2(x_1, x_2)$ s'annule pour $x_1=0$, et donc que $b(x_1, x_2)$ est divisible par x_1.

Alors, la fonction β s'exprime sur Σ comme

$$\beta=\frac{1}{2}(b_1+b_2)+\frac{b_1-b_2}{2x_1}\omega;$$

ce qui montre que β appartient à $\mathcal{B}_\omega^{(1)}(\Delta)$. Ainsi, la fonction ω satisfait à la condition:

$$\mathcal{B}_\omega^{(1)}(\Delta_1)\cap\mathcal{B}_\omega^{(1)}(\Delta_2)\cap\mathcal{B}_\omega^{(1)}(\Delta_3)=\mathcal{B}_\omega^{(1)}(\Delta),$$

et donc ω jouit de la propriété (Ω_1^*).

D'autre part, ω ne jouit pas de la propriété (Ω_1). En effet, si on considère la fonction $g=1/x_1$ qui est holomorphe sur $S_\omega^0=S_\omega-\{(0,0,0)\}$: $x_2=x_3=0$, $x_1\neq 0$, on peut poser

$$B_1=\frac{1}{x_1}\ ,\quad B_2=0\ ,\quad B_3=0;$$

et $(B_i-B_j)\omega$ possèdent sur $\Sigma\cap\Delta_{ij}$ la propriété (H) par rapport à Δ_{ij}:

$$(B_1-B_2)\omega=\frac{x_3}{x_1x_2}\ ,\quad (B_2-B_3)\omega=0\ ,\quad (B_3-B_1)\omega=-\frac{x_1x_2}{x_3}.$$

Mais, par définition, la fonction g ne peut pas jouir de la propriété (H) en l'origine; ce qui montre que la fonction ω ne jouit pas de la propriété (Ω_1).

ce qui montre que les $m(m \geqq 4)$ fonctions B_j remplissent l'hypothèse de la propriété (Ω_μ^*).

c. q. f. d.

De ce lemme, on obtient la proposition suivante:

Proposition 2. *Si $m \geqq 4$, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction ω satisfasse à la condition*:

$$\mathcal{B}_\omega^{(\mu)}(\Delta_1) \cap \cdots \cap \mathcal{B}_\omega^{(\mu)}(\Delta_m) = \mathcal{B}_\omega^{(\mu)}(\Delta),$$

est que ω jouisse de la propriété (Ω_μ).

8. Réduction des propriétés $(\boldsymbol{\Omega}_\mu^*)$ et $(\boldsymbol{\Omega}_\mu)$. Soit S_ω la sous-variété de Σ, d'espèce $(\overline{H})$ par rapport à une fonction ω holomorphe sur Σ.

On obtient la proposition suivante:

Proposition 3. *Si S_ω n'est pas vide,*[17] *et si la multiplicité $\mu_0 = \mu(S_\omega)$ $(\geqq 2)$ de S_ω sur Σ est finie, toute la propriété (Ω_μ) est équivalente à la propriété (Ω_{μ_0-1}) pour l'entier μ tel que $\mu \geqq \mu_0$. En outre, la propriété $(\Omega_{\mu_0-1}^*)$ entraîne la propriété $(\Omega_\mu^*)(\mu \geqq \mu_0)$.*

En effet, supposons que ω jouisse de la propriété (Ω_{μ_0-1}). Etant données m fonctions $B_j(x)$ holomorphes dans Δ_j telles que $(B_i - B_j)\omega^h$ $(1 \leqq h \leqq \mu)$ aient la propriété (H) sur $\Sigma \cap \Delta_{ij}$ par rapport à Δ_{ij} [resp. telles que $(B_i - B_j)\omega^h$ remplissent les hypothèses 1° et 2° de la propriété (Ω_μ^*)], on peut trouver une fonction $B(x)$ holomorphe dans Δ telle que $(B_j - B)\omega^p (1 \leqq p \leqq \mu_0 - 1)$ possèdent la propriété (H) sur $\Sigma \cap \Delta_j$ par rapport à Δ_j; alors, il en est de même de toute fonction $(B_j - B)\omega^h (1 \leqq h \leqq \mu)$, d'après le lemme 1; d'où la propriété (Ω_μ) [resp. la propriété (Ω_μ^*)].

Inversement, supposons que ω jouisse de la propriété (Ω_μ) pour un entier μ tel que $\mu \geqq \mu_0$. Etant données m fonctions $B_j(x)$ holomorphes dans Δ_j telles que $(B_i - B_j)\omega^p (1 \leqq p \leqq \mu_0 - 1)$ aient la propriété (H) sur $\Sigma \cap \Delta_{ij}$ par rapport à Δ_{ij}, toute fonction $(B_i - B_j)\omega^h$ $(1 \leqq h \leqq \mu)$ possède la propriété (H) sur $\Sigma \cap \Delta_{ij}$ par rapport à Δ_{ij},

17) Si S_ω est vide (c'est-à-dire, si la fonction ω possède sur Σ la propriété (H) par rapport à Δ), ω jouit évidemment des propriétés (Ω_μ) et (Ω_μ^*) pour tout entier positif μ.

d'après le lemme 1. La fonction ω jouissant de la propriété (Ω_μ), on peut trouver une fonction $B(x)$ holomorphe dans Δ telle que $(B_j-B)\omega^h(1\leqq h\leqq\mu)$ possèdent la propriété (H) sur $\Sigma\cap\Delta_j$ par rapport à Δ_j; d'où la propriété (Ω_{μ_0-1}), parce que $\mu_0-1<\mu$. *c.q.f.d.*

Maintenant, si la fonction ω holomorphe sur $\Sigma(\subset\Delta)$ satisfait sur Σ à l'équation de la forme:

$$\omega^\lambda+A_1(x)\omega^{\lambda-1}+\cdots+A_\lambda(x)=0\ ,$$

$A_h(x)(h=1,\cdots,\lambda)$ étant des fonctions holomorphes dans Δ, nous désignerons par $\lambda(\omega)$ le plus petit de tels degrés λ; $\lambda(\omega)$ est le degré de $\omega(\in\mathcal{A})$ sur l'anneau $\mathcal{O}_\Sigma(\subset\mathcal{A})$ des fonctions holomorphes sur Σ et ayant la propriété (H) par rapport à Δ.

Si ω ne satisfait à aucune équation de cette forme-ci, nous poserons $\lambda(\omega)=+\infty$.

Si le degré $\lambda_0=\lambda(\omega)$ est fini, toute fonction $\omega^h(h\geqq\lambda_0)$ peut s'exprimer sur Σ comme

$$\omega^h=\sum_{p=0}^{\lambda_0-1}A_p^{(h)}\omega^p\ ,$$

$A_p^{(h)}(x)$ étant des fonctions holomorphes dans Δ.

De ce fait, on obtient la proposition suivante:

Proposition 4. *Si le degré $\lambda_0=\lambda(\omega)$ de ω sur $\mathcal{O}_\Sigma$ est fini, et si $\lambda_0\geqq2$,*[18] *toute la propriété (Ω_μ^*) est équivalente à la propriété $(\Omega_{\lambda_0-1}^*)$ pour l'entier μ tel que $\mu\geqq\lambda_0$.*

En effet, on peut vérifier aisément que la propriété $(\Omega_{\lambda_0-1}^*)$ entraîne la propriété (Ω_μ^*) $(\mu\geqq\lambda_0)$, par une démonstration analogue à (et plus simple que) celle de la proposition 3.

Inversement, supposons que ω jouisse de la propriété (Ω_μ^*) pour un entier μ tel que $\mu\geqq\lambda_0$. Soient $B_j(x)$ $(j=1,\cdots,m)$ m fonctions holomorphes dans Δ_j telles que l'on ait sur $\Sigma\cap\Delta_{ij}$

$$(B_i-B_j)\omega^p=B_{ij}^{(p)}\quad(1\leqq p\leqq\lambda_0-1),$$

18) Si $\lambda_0=1$, la fonction ω possède sur Σ la propriété (H) par rapport à Δ. Voir la note 17) du bas de la page précédente.

$B_{ij}^{(p)}$ étant des fonctions holomorphes dans Δ_{ij} telles que l'on ait dans Δ_{ijk}

$$B_{ij}^{(p)}+B_{jk}^{(p)}+B_{ki}^{(p)}=0;$$

on a sur $\Sigma\cap\Delta_{ij}$

$$(B_i-B_j)\omega^h=\sum_{p=0}^{\lambda_0-1}A_p^{(h)}(B_i-B_j)\omega^p=\sum_{p=0}^{\lambda_0-1}A_p^{(h)}B_{ij}^{(p)}.$$

Donc, si on pose dans Δ_{ij}

$$B_{ij}^{(h)}=\sum_{p=0}^{\lambda_0-1}A_p^{(h)}B_{ij}^{(p)}\quad(\lambda_0\leqq h\leqq\mu),$$

on a, pour tout entier $h=1,\cdots,\mu$,

$$(B_i-B_j)\omega^h=B_{ij}^{(h)}\qquad\text{sur } \Sigma\cap\Delta_{ij}\text{, et}$$
$$B_{ij}^{(h)}+B_{jk}^{(h)}+B_{ki}^{(h)}=0\quad\text{dans } \Delta_{ijk}.$$

Comme ω jouit de la propriété (Ω_μ^*), on peut trouver une fonction $B(x)$ holomorphe dans Δ telle que $(B_j-B)\omega^h$ $(1\leqq h\leqq\mu)$ possèdent la propriété (H) sur $\Sigma\cap\Delta_j$ par rapport à Δ_j; d'où la propriété $(\Omega_{\lambda_0-1}^*)$, parce que $\lambda_0-1<\mu$. *c.q.f.d.*

9. Propriété (*N*). Soient Δ_j $[j=1,\cdots,m\ (3\leqq m\leqq n)]$ m sous-domaines cylindriques du polycylindre Δ, tout expliqués au n° 5, et soit T une variété analytique de dimension $n-2$ définie dans Δ.

Nous dirons que T possède *la propriété* (N), si T satisfait à la condition suivante:

Etant donnée sur $T_0=T\cap(\Delta_1\cup\cdots\cup\Delta_m)$ une founction holomorphe g ayant sur chaque $T\cap\Delta_j$ la propriété (H) par rapport à Δ_j $(j=1,\cdots,m)$, on peut trouver une fonction $B(x)$ holomorphe dans Δ telle que l'on ait sur T_0

$$g=B\ .$$

Cette condition-ci est équivalente à dire que:

Toute fonction g holomorphe sur T_0 et possédant la propriété (H) en tout point de T_0 peut se prolonger en une fonction g^* holomorphe sur T et possédant la propriété (H) en tout point de T.

Soit Σ une surface analytique (de dimension $n-1$) définie dans Δ, et soit ω une fonction holomorphe sur Σ.

Si ω satisfait à la condition (D), la multiplicité $\mu_0=\mu(S_\omega)$ de S_ω est égale à 2, et donc toute propriété $(\Omega_\mu)(\mu\geqq 2)$ est équivalente à la propriété (Ω_1), d'après la proposition 3.

Quant à la propriété (Ω_1), on obtient la proposition suivante:

Proposition 5. *Pour qu'une fonction ω satisfaisant à la condition (D) jouisse de la propriété (Ω_1), il faut et il suffit que la sous-variété S_ω de Σ, d'espèce $(\overline{H})$ par rapport à ω, possède la propriété (N).*

En effet, il est nécessaire: Soit g une fonction holomorphe sur $S_\omega^0=S_\omega\cap(\Delta_1\cup\cdots\cup\Delta_m)$ et possédant sur $S_\omega\cap\Delta_j$ la propriété (H) par rapport à Δ_j:

$$g=B_j \quad (j=1, \cdots, m),$$

$B_j(x)$ étant des fonctions holomorphes dans Δ_j. Comme chaque différence B_i-B_j (qui est holomorphe dans Δ_{ij}) s'annule sur $S_\omega\cap\Delta_{ij}$ $(i, j=1, \cdots, m)$, le produit $(B_i-B_j)\omega$ possède sur $\Sigma\cap\Delta_{ij}$ la propriété (H) par rapport à Δ_{ij}, d'après le lemme 2.

La fonction ω jouissant, par hypothèse, de la propriété (Ω_1), on peut alors trouver une fonction $B(x)$ holomorphe dans Δ telle que les produits $(B_j-B)\omega$ aient la propriété (H) sur $\Sigma\cap\Delta_j$ par rapport respectivement à Δ_j $(j=1, \cdots, m)$; ce qui montre, d'après le lemme 2, que B_j-B s'annule sur $S_\omega\cap\Delta_j$, et donc que l'on a $g=B$ sur S_ω^0; d'où la propriété (N) de S_ω.

Inversement, il est suffisant: Etant données m fonctions $B_j(x)$ holomorphes respectivement dans Δ_j telles que $(B_i-B_j)\omega$ aient la propriété (H) sur $\Sigma\cap\Delta_{ij}$ par rapport à Δ_{ij}, on a, d'après le lemme 2, sur $S_\omega\cap\Delta_{ij}$

$$B_i-B_j=0\ ;$$

donc les fonctions $B_j(x)$ définissent sur S_ω^0 une fonction holomorphe g telle que l'on ait sur chaque $S_\omega\cap\Delta_j$

$$g=B_j \quad (j=1, \cdots, m).$$

S_ω possédant, par hypothèse, la propriété (N), on peut trouver une fonction $B(x)$ holomorphe dans Δ telle que l'on ait sur S_ω^0

$$g=B\ .$$

Alors, B_j-B s'annule sur $S_\omega \cap \Delta_j$, donc, $(B_j-B)\omega$ possède la propriété (H) sur $\Sigma \cap \Delta_j$ par rapport à Δ_j, d'après le lemme 2; d'où la propriété (Ω_1) de la fonction ω.

c.q.f.d.

Signalons que la proposition 5 montre que, pour une fonction ω satisfaisant à la condition (D), il ne dépend que de la figure géométrique de S_ω, si ω jouit de la propriété (Ω_1) ou non.

Au cas où $m=3$, on aura besoin d'un critère pour que ω jouisse de la propriété (Ω_1^*).

Pour cela, on obtient immédiatement du lemme 2 la proposition suivante:

Proposition 6.[19] *On suppose que* $m=3$. *Pour qu'une fonction* ω *satisfaisant sur* Σ *à la condition* (D) *jouisse de la propriété* (Ω_1^*), *il faut et il suffit que* S_ω *satisfasse à la condition* (N^*) *suivante*:

Soit g une fonction holomorphe sur $S_\omega^0=S_\omega\cap(\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3)$, *possédant sur* $S_\omega\cap\Delta_j$ *la propriété* (H) *par papport à* Δ_j:

$$g=B_j \quad (\text{sur } S_\omega\cap\Delta_j;\ j=1, 2, 3),$$

$B_j(x)$ *étant des fonctions holomorphes dans* $\Delta_j\,(j=1, 2, 3)$. *Si les produits* $(B_i-B_j)\omega$ *sont des restrictions à* $\Sigma\cap\Delta_{ij}$ *des fonctions* $B_{ij}(x)$ *holomorphes dans* Δ_{ij} *telles que l'on ait identiquement dans* Δ_{ijk}

$$B_{ij}+B_{jk}+B_{ki}=0\ ,$$

alors g est la restriction à S_ω^0 *d'une fonction* $B(x)$ *holomorphe dans* Δ.

19) Si $m=3$, la condition (N) de S_ω est encore suffisante pour que ω jouisse de la propriété (Ω_1^*). Mais, elle n'est pas nécessaire, comme on voit dans l'exemple donné dans la note 16) du bas de page. [Dans cet exemple-ci, ω satisfait à la condition (D) et jouit de la propriété (Ω_1^*), mais S_ω: $x_2=x_3=0$ ne jouit pas de la propriété (N)].

§3. Problèmes et critères.

10. Problèmes. Soit $\underline{\varDelta}$ un polycylindre dans l'espace de n ($n \geqq 3$) variables complexes $(x_1, \cdots, x_n)$:

$$(\underline{\varDelta}) \qquad |x_i| < r_i \quad (i=1, \cdots, n).$$

Considérons un domaine $\varDelta$ intérieurement ramifié sur $\underline{\varDelta}$, à ν feuillets,[20] et supposons toujours qu'il existe un domaine $\varDelta'$ intérieurement ramifié sur un voisinage de la fermeture de $\underline{\varDelta}$, à ν' feuillets, tel que l'on ait

$$\varDelta \Subset \varDelta' .$$

Comme nous avons vu dans [3], n° 9, un tel domaine $\varDelta$ peut se représenter dans l'espace de $n+1$ variables complexes $((x), y)$, par une fonction $\eta(P)$ holomorphe et propre au voisinage de $\varDelta$, comme une surface analytique Σ:

$$(\Sigma) \qquad y = \eta(P) \quad (P \in \varDelta),$$

satisfaisant aux conditions suivantes[21]:

1° la variété singulière de Σ ne contient aucune composante de dimension $n-1$, sauf les composantes de la variété double ordinaire T de Σ.

2° pour toute composante $\underline{T}^{(i)}$ de $\underline{T} = \pi_0(T)$, où π_0 désigne l'opération de projection de Σ sur $\underline{\varDelta}$, $\hat{T}^{(i)} = \pi_0^{-1}(\underline{T}^{(i)})$ est un revêtement intérieurement ramifié de $\underline{T}^{(i)}$, à $\nu-1$ feuillets.

Σ sera appelée dans ce cas surface algébroïde *de type* (K) sur le polycylindre $\underline{\varDelta}$. Σ est contenue dans un polycylindre $(\underline{\varDelta}, C)$:

$$(\underline{\varDelta}, C) \qquad (x) \in \underline{\varDelta}, \quad y \in C,$$

C désignant le cercle $|y| < R$, avec rayon R plus grand que la borne supérieure de $|\eta(P)|$ dans $\varDelta$.

Soit m un entier tel que $3 \leqq m \leqq n$. Soient $\underline{\varDelta}_j$ $(j=1, \cdots, m)$ m

---

20) Analytisch verzweigte Überlagerung; revêtement analytique intérieurement ramifié.

21) Ces deux conditions sont équivalentes aux quatre conditions énoncées dans [3], n° 9, ou [4], n° 2.

domaines cylindriques:

$$(\underline{\Delta}_j) \qquad \rho_j < |x_j| < r_j, \quad |x_i| < r_i \quad (i=1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, m).$$

En désignant par π l'opération de projection de Δ sur $\underline{\Delta}$, considérons dans Δ, m domaines $\Delta_j = \pi^{-1}(\underline{\Delta}_j)$, et posons toujours

$$\Delta_{ij} = \Delta_i \cap \Delta_j, \quad \Delta_{ijk} = \Delta_i \cap \Delta_j \cap \Delta_k \quad (i, j, k=1, \cdots, m).$$

Alors, se posent les problèmes suivants:

a) *Problème* (*A*).[22] Nous dirons que le problème (*A*) est affirmatif, si, pour tout système des fonctions $g_{ij}(P)$ holomorphes dans Δ_{ij} $(i, j=1, \cdots, m)$ telles que l'on ait dans Δ_{ijk}

$$g_{ij} + g_{jk} + g_{ki} = 0 \quad (i, j, k=1, \cdots, m),$$

on peut trouver m fonctions $g_j(P)$ holomorphes dans Δ_j telles que l'on ait dans Δ_{ij}

$$g_{ij} = g_i - g_j \quad (i, j=1, \cdots, m).$$

b) *Premier problème de Cousin dans* $\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m$. Ce problème équivaut au problème de M. W. Rothstein[23] sur le prolongement de donnée des pôles, de $\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m$ à Δ.

c) *Problème* (*H*).[24] Soit S une surface analytique de dimension $n-1$, définie dans Δ comme les zéros d'une fonction holomorphe dans Δ et qui admet S pour les zéros du premier ordre, et soit f une fonction holomorphe sur S et qui est sur chaque $S \cap \Delta_j$ la restriction d'une fonction holomorphe dans Δ_j. Si, pour toute S et toute f, on peut trouver une fonction $F(P)$ holomophe dans Δ telle que f soit la restriction à S de $F(P)$, on dit que le problème (*H*) est affirmatif.

d) Pour résoudre ces problèmes, posons sur la surface algébroïde Σ: $y = \eta(P)$ de type (*K*) qui représente Δ, le problème

22) C'est équivalent à dire que l'on a $H^1(\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m, \mathcal{O}) = 0$, $\mathcal{O}$ désignant le faisceau des germes de fonctions holomorphes, défini sur $\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m$.

23) W. Rothstein, [6].

24) C'est équivalent à dire que, si f possède la propriété (*H*) (relative à Δ) en tout point de $S \cap [\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m]$, f possède encore la propriété (*H*) (relative à Δ) en tout point de S.

suivant:

Problème (H^*).[25] On pose $\hat{T}=\pi_0^{-1}(\pi_0(T))$, T étant la variété double ordinaire de Σ. Si $\hat{T}$ possède dans le polycylindre $(\underline{\Delta}, C)$ la propriété (N) par rapport au système de domaines $\{(\underline{\Delta}_1, C), \cdots, (\underline{\Delta}_m, C)\}$, on dit que le problème (H^*) est affirmatif.

e) Maintenant, posons sur la variété double ordinaire T de Σ le problème suivant:

Problème (χ_μ). Soient (β) un système de μ fonctions β_h $(h=1, \cdots, \mu)$ holomorphes sur T telles que l'on ait sur chaque $T\cap(\underline{\Delta}_j, C)$

$$\beta_h=B_j^{(h)}(x)-B_j(x)y^h \quad (h=1, \cdots, \mu),$$

$B_j(x)$, $B_j^{(h)}(x)$ étant des fonctions holomorphes dans $\underline{\Delta}_j$. Si pour tout système (β), on peut trouver $\mu+1$ fonctions $B(x)$, $B^{(h)}(x)$ $(h=1, \cdots, \mu)$ holomorphes dans Δ telles que l'on ait sur T

$$\beta_h=B^{(h)}(x)-B(x)y^h \quad (h=1, \cdots, \mu),$$

on dit que le problème (χ_μ) est affirmatif pour T.

Comme Σ est une surface de type (K), il est évident, d'une part, que toute fonction β_h holomorphe sur T peut être considérée comme une fonction holomorphe sur $\underline{T}=\pi_0(T)$, et d'autre part, que la variété double ordinaire T de Σ peut s'exprimer sur $\underline{T}$ comme

$$(T) \qquad\qquad y=\omega\ ,$$

où ω est une fonction holomorphe sur $\underline{T}=\pi_0(T)$. Donc, il est clair que:

Dire que le problème (χ_μ) est affirmatif, c'est équivalent à dire que la fonction ω holomorphe sur la surface analytique (de dimension $n-1$) $\underline{T}$ $(\subset\underline{\Delta})$ satisfait à la condition:

$$\mathscr{B}_\omega^{(\mu)}(\underline{\Delta}_1)\cap\cdots\cap\mathscr{B}_\omega^{(\mu)}(\underline{\Delta}_m)=\mathscr{B}_\omega^{(\mu)}(\underline{\Delta}).$$

---

25) Puisque toute fonction holomorphe sur $\hat{T}_0=\hat{T}\cap[(\underline{\Delta}_1, C)\cup\cdots\cup(\underline{\Delta}_m, C)]$ $(m\geqq 3)$ peut se prolonger en une fonction holomorphe sur $\hat{T}$, le problème (H^*) peut s'énoncer comme suit:

Est-ce que toute fonction holomorphe sur $\hat{T}$ qui possède la propriété (H) en tout point de $\hat{T}_0$ possède encore la propriété (H) en tout point de $\hat{T}$?

11. Critères des problèmes. Les résultats du [4], Théorèmes 1 et 5, peuvent s'énoncer comme suit:

Théorème 1. *Les problèmes* (A), (H), (H^*), $(\chi_{\nu-1})$ *et le premier problème de Cousin donné dans* $\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m$ *sont tout équivalents,* ν *étant le nombre de feuillets de* Δ.

De ce fait et de la proposition 1 [resp. de la proposition 2], on a le théorème suivant:

Théorème 2. *Pour que le problème* (A) *soit affirmatif, il faut et il suffit que la fonction* ω *jouisse de la propriété* $(\Omega^*_{\nu-1})$, $\nu(\geqq 2)$[26] *étant le nombre de feuillets de* Δ.

En outre, si $m \geqq 4$, *la propriété* $(\Omega^*_{\nu-1})$ *peut se remplacer par la propriété* $(\Omega_{\nu-1})$.

D'après la proposition 4 [resp. la proposition 3], on a les critères indépendants du nombre ν de feuillets de Δ:

Théorème 3. *On suppose que le degré* $\lambda_0 = \lambda(\omega)$ *de* ω *sur* $\mathcal{O}_{\underline{T}}$ *soit fini et que* $\lambda_0 \geqq 2$.[27] *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *le problème* (A) *est affirmatif;*

b) *le problème* (χ_{λ_0-1}) *est affirmatif pour* T; *autrement dit,* ω *satisfait à la condition:*

$$\mathcal{B}_\omega^{(\lambda_0-1)}(\underline{\Delta}_1) \cap \cdots \cap \mathcal{B}_\omega^{(\lambda_0-1)}(\underline{\Delta}_m) = \mathcal{B}_\omega^{(\lambda_0-1)}(\underline{\Delta})\,;$$

c) ω *jouit de la propriété* $(\Omega^*_{\lambda_0-1})$.

En outre, si $m \geqq 4$, *la condition c) peut se remplacer par la condition:*

c′) ω *jouit de la propriété* (Ω_{λ_0-1}).

Théorème 4. *On suppose que* $m \geqq 4$ *et que la multiplicté* $\mu_0 = \mu(S_\omega)\,(\geqq 2)$ *de la sous-variété* S_ω *de* $\underline{T}$, *d'espèce* $(\overline{H})$ *par rapport à* ω *soit finie. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *le problème* (A) *est affirmatif;*

b) *le problème* (χ_{μ_0-1}) *est affirmatif pour* T; *autrement dit,*

26) *Si* $\nu=1$, le problème (A) est affirmatif.

27) Si $\lambda_0=1$, S_ω est vide, et le problème (A) est affirmatif. (Voir la note 17) du bas de la page 658.)

ω *satisfait à la condition*:

$$\mathcal{B}_\omega^{(\mu_0-1)}(\underline{\Delta}_1)\cap\cdots\cap\mathcal{B}_\omega^{(\mu_0-1)}(\underline{\Delta}_m)=\mathcal{B}_\omega^{(\mu_0-1)}(\underline{\Delta})\,;$$

c) ω *jouit de la propriété* (Ω_{μ_0-1}).

Dans ce qui suit, nous dirons que Σ (qui représente Δ) est une *surface de type* (D), si la fonction ω (holomorphe sur $\underline{T}$) satisfait à la condition (D). Dans ce cas, la multiplicité $\mu_0=\mu(S_\omega)$ de la sous-variété S_ω de $\underline{T}$, d'espèce $(\overline{H})$ par rapport à ω, est égale à 2.

D'après le théorème 2 et les propositions 2, 3 et 5, on a le théorème suivant:

Théorème 5. *Soit Δ un domaine qui se représente par une surface Σ de type (D). On suppose que $m\geqq 4$. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *le problème* (A) *est affirmatif*;

b) *le problème* (χ_1) *est affirmatif pour* T; *autrement dit*, ω *satisfait à la condition*:

$$\mathcal{B}_\omega^{(1)}(\underline{\Delta}_1)\cap\cdots\cap\mathcal{B}_\omega^{(1)}(\underline{\Delta}_m)=\mathcal{B}_\omega^{(1)}(\underline{\Delta})\,;$$

c) *la fonction* ω *jouit de la propriété* (Ω_1);

d) *la variété* S_ω *possède la propriété* (N).

Lorsque $m=3$, on obtient, d'après le théorème 2 et les propositions 1, 3 et 6, le corollaire suivant:

Corollaire. *Soit Δ un domaine qui se représente par une surface Σ de type (D). Lorsque $m=3$, le problème (A) est affirmatif, si l'une des trois conditions suivantes est remplie*:

a) *le problème* (χ_1) *est affirmatif pour* T; *autrement dit*, ω *satisfait à la condition*:

$$\mathcal{B}_\omega^{(1)}(\underline{\Delta}_1)\cap\mathcal{B}_\omega^{(1)}(\underline{\Delta}_2)\cap\mathcal{B}_\omega^{(1)}(\underline{\Delta}_3)=\mathcal{B}_\omega^{(1)}(\underline{\Delta})\,;$$

b) *la fonction* ω *jouit de la propriété* (Ω_1^*);

c) S_ω *possède la propriété* (N^*).

De plus, d'après le théorème 3 et la proposition 6, on a le théorème suivant:

Théorème 5 bis. *Soit Δ un domaine qui se représente par une surface Σ de type (D). Supposons que $m=3$, et que le degré $\lambda_0=\lambda(\omega)$ de ω sur $\mathcal{O}_{\underline{T}}$ soit égale à 2. Pour que le problème (A) soit affirmatif, il faut et il suffit que l'une des trois conditions a), b), c) énoncées dans le corollaire du théorème 5 soit remplie.*

12. Contre-exemples. Enfin, nous allons montrer l'existence d'un domaine Δ pour lequel le problème (A) n'est pas affirmatif.

Pour cela, commençons par construire un tel domaine Δ au cas où $m=n=3$, bien que nous l'ayons déja vu dans le mémoire [3].

Soit $\underline{\Delta}$ un polycylindre dans l'espace de trois variables complexes (x_1, x_2, x_3):

$$(\underline{\Delta}) \qquad |x_i|<r \quad (i=1, 2, 3),$$

et soient $\underline{\Delta}_j$ $(j=1, 2, 3)$ trois domaines cylindriques:

$$(\underline{\Delta}_j) \qquad 0<|x_j|<r, \ |x_i|<r \quad (i=1, 2, 3;\ i\neq j);$$

on a

$$\underline{\Delta}_1\cup\underline{\Delta}_2\cup\underline{\Delta}_3=\underline{\Delta}-\{(0, 0, 0)\}.$$

Soit a un nombre complexe tel que $0<|a|<1$, et soit $\underline{T}$ la surface analytique définie dans $\underline{\Delta}$ par

$$\Phi(x_1, x_2, x_3)=x_3^2-a^2x_2^2=0;$$

$\underline{T}$ se compose en deux plans $\underline{T}_1$ et $\underline{T}_2$:

$$(\underline{T}_1) \qquad x_3=ax_2\ ,$$

$$(\underline{T}_2) \qquad x_3=-ax_2\ .$$

Si l'on définit une fonction ω holomorphe sur $\underline{T}$, par

$$\omega=\begin{cases} x_1 & \text{sur } \underline{T}_1\ , \\ -x_1 & \text{sur } \underline{T}_2\ , \end{cases}$$

le degré $\lambda(\omega)$ de ω (sur $\mathcal{O}_{\underline{T}}$) est égale à 2, et ω satisfait à la condition (D) sur $\underline{T}$; la sous-variété S_ω de $\underline{T}$, d'espèce $(\bar{H})$ par rapport à ω, est identique à l'axe de x_1.

Soit T la variété analytique dans l'espace (x_1, x_2, x_3, y), définie sur $\underline{T}$ par

$$(T) \qquad\qquad y=\omega\ .$$

D'après [5], Théorème 3, on peut construire une surface algébroïde Σ de type (K) sur $\underline{\Delta}$ (avec quatre feuillets), ayant T pour sa variété double ordinaire; Σ est évidemment une surface de type (D), et définit un domaine Δ intérieurement ramifié sur $\underline{\Delta}$, à quatre feuillets.

Pour démontrer que le problème (A) n'est pas affirmatif pour Δ, il suffit, d'après le théorème 5 bis, de montrer que S_ω ne jouit pas de la propriété (N^*). Pour cela, définissons une fonction g holomorphe sur $S_\omega^0=S_\omega-\{(0,0,0)\}$: $x_2=x_3=0$, $x_1\neq 0$, par

$$g=\frac{1}{x_1}\ .$$

On a

$$g=B_j \qquad \text{sur} \quad S_\omega\cap\underline{\Delta}_j,\ \text{et}$$

$$(B_i-B_j)\,\omega=B_i'-B_j' \qquad \text{sur} \quad S_\omega\cap\underline{\Delta}_{ij}\,,$$

avec

$$B_1=\frac{1}{x_1},\quad B_2=0,\quad B_3=0;\quad B_1'=0,\quad B_2'=-\frac{x_3}{x_2},\quad B_3'=-\frac{x_2}{x_3}\ ;$$

par suite, g satisfait à l'hypothèse de la propriété (N^*).

Mais, g n'est pas restriction à S_ω d'aucune fonction holomorphe dans $\underline{\Delta}$; ce qui montre que S_ω ne jouit pas de la propriété (N^*), et donc que le problème (A) n'est pas affirmatif, d'après le théorème 5 bis.

13. Contre-exemples pour m$\geqq$4. Soit $\underline{\Delta}^{(n)}$ un polycylindre dans l'espace de $n(n\geqq 3)$ variables complexes $(x_1,\cdots,x_n)$:

$$(\underline{\Delta}^{(n)}) \qquad\qquad |x_i|<r \qquad (i=1,\cdots,n),$$

et soit $\Delta^{(n)}$ un domaine intérieurement ramifié sur $\underline{\Delta}^{(n)}$.

Considérons n domaines cylindriques $\underline{\Delta}_j^{(n)}$ $(j=1,\cdots,n)$:

$$(\underline{\Delta}_j^{(n)}) \qquad 0<|x_j|<r, \quad |x_i|<r \quad (i=1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n)$$

et n sous-domaines de Δ, $\Delta_j^{(n)}=\pi_n^{-1}(\underline{\Delta}_j^{(n)})$, π_n désignant l'opération de projection de $\Delta^{(n)}$ sur $\underline{\Delta}^{(n)}$.

Dans ces configurations, notons problème (A_n) le problème (A) posé pour le système des n domaines $\{\Delta_1^{(n)}, \cdots, \Delta_n^{(n)}\}$.

Supposons qu'il existe un domaine $\Delta_0=\Delta^{(n)}$ $(n\geqq 3)$ tel que:

1° Δ_0 se représente par une surface Σ_0: $y=\eta_0(P)$ $(P\in\Delta_0)$ de type (K) sur $\underline{\Delta}_0$, et de plus, de type (D); et que

2° on ait $\eta_0=0$ pour $\pi_n^{-1}(0)$, autrement dit, Σ_0 s'exprime par l'équation algébroïde de la forme:

$$y^\nu+A_1(x)y^{\nu-1}+\cdots+A_\nu(x)=0\,,$$

$A_j(x)$ étant des fonctions holomorphes dans $\underline{\Delta}$, et s'annulant à l'origine $(x)=(0)$; et tel que

3° le problème (A_n) posé sur $\Delta_0-\pi_n^{-1}(0)$ ne soit pas affirmatif.

Nous allons montrer que l'on peut construire un domaine $\Delta=\Delta^{(n+1)}$ satisfaisant aux trois conditions analogues à celles de Δ_0.

En effet, soit T_0 la variété double ordinaire de Σ_0. Le problème (A) étant, d'après le théorème 1, équivalent au problème (H^*), on voit que la sous-variété $\hat{T}_0=\pi_0^{-1}(\pi_0(T_0))$ de Σ_0 ne jouit pas de la propriété (N) par rapport au système de n domaines cylindriques $\{(\underline{\Delta}_1^{(n)}, C), \cdots, (\underline{\Delta}_n^{(n)}, C)\}$.

Comme Σ_0 satisfait à la condition 2°, l'intersection de $\hat{T}_0$ et de l'axe de y est un seule point $((x), y)=((0), 0)$; donc, on voit aisément que le seule point $((0), 0)$ de $\hat{T}_0$ est un obstacle pour la propriété (N) de $\hat{T}_0$.

Par une changement linéaire homogène convenable de coordonnées $((x), y)$, on peut supposer qu'il existe dans l'espace (x) un voisinage U de la forme:

$$(U) \qquad |x_j|<r' \quad (j=1, \cdots, n-1), \ |x_n|<r'',$$

et dans l'espace $((x), y)$ un voisinage U' de la forme:

(U') $$(x)\in U\,, \quad |y|<r''',$$

tels que:

a) $S=\hat{T}_0\cap U'$ ne rencontre pas l'ensemble B':

(B') $$|x_j|\leqq r' \quad (j=1, \cdots, n-1), \ |x_n|\leqq r'', \ |y|=r''';$$

b) la projection $\underline{S}$ de S sur U ne rencontre pas l'ensemble B:

(B) $$|x_j|\leqq r' \quad (j=1, \cdots, n-1), \ |x_n|=r'';$$

c) S s'exprime sur $\underline{S}$ comme

$$y=\theta\ ,$$

θ étant une fonction holomorphe sur $\underline{S}$.

Dans ces circonstances, comme nous avons vu dans [5], n° 6, Théorème 3, on peut construire une fonction algébroïde η de variables (x), telle que l'on ait $\eta=0$ à l'origine $(x)=(0)$, et que la surface analytique (de dimension n) $\underline{T}$: $y=\eta$ soit de type (K) sur U, et que $\underline{T}$ admette S pour sa variété double ordinaire; $\underline{T}$ est contenue dans un polycylindre $V=(U, C')$, C' étant un cercle sur le plan de y.

Maintenant, on peut aisément trouver une fonction ω bornée et holomorphe sur $\underline{T}$ telle que l'on ait $\omega=0$ à l'origine $((x), y)=((0), 0)$, et que la sous-variété S_ω de $\underline{T}$ d'espèce $(\bar{H})$ par rapport à ω coïncide avec S.

Soit T la variété (de dimension n) définie dans l'espace $((x), y, z)$ par

(T) $$z=\omega\ .$$

Encore d'après [5], Théorème 3, on peut construire une fonction algébroïde ζ de variables $((x), y)$ telle que l'on ait $\zeta=0$ à l'origine $((0), 0)$, et que la surface (de dimension $n+1$) Σ: $z=\zeta$ soit de type (K) sur V, et que Σ admette T pour sa variété double ordinaire.

La surface Σ ainsi construite satisfait évidemment aux conditions analogues aux deux premières conditions 1° et 2° de Δ_0.

De plus, il est clair que Σ est une surface de type (D), et que le seule point $((x), y, z)=((0), 0, 0)$ est un obstacle de la propriété (N) pour $S_\omega=S$.

En outre, par une transformation homothétique de l'espace $((x), y)$, on peut supposer que le polycylindre V soit identique au polycylindre donné $\underline{\Delta}^{(n+1)}$.

En appliquant le théorème 5 au cas actuel où l'on a $m=n+1 \geqq 4$, on voit que le problème (A_{n+1}) n'est pas affirmatif pour le domaine $\Delta^{(n+1)}$ défini par Σ sur $V=\underline{\Delta}^{(n+1)}$; ce qui montre que $\Delta^{(n+1)}$ satisfait à la condition 3°; d'où l'énoncé.

Or, pour $n=3$, nous avons déja montré au n° précédent, l'existence de $\Delta^{(3)}$ qui satisfait aux trois conditions énoncées plus haut.

Par récurrence sur $n(n\geqq 3)$, on voit que:

il existe, pour tout entier $n(n\geqq 3)$, un domaine $\Delta^{(n)}$ tel que le problème (A_n) posé sur $\Delta^{(n)}-\pi_n^{-1}(0)$ ne soit pas affirmatif.

Enfin, pour un nombre positif s tel que $s<r$, désignons par $\underline{\delta}$ le polycylindre

$$(\underline{\delta}) \qquad |x_i|<s \quad (i=1, \cdots, n),$$

et posons $\delta=\pi^{-1}(\underline{\delta})$, π désignant l'opération de projection de $\Delta=\Delta^{(n)}$ sur $\underline{\Delta}$.

Si $\pi^{-1}(0)$ se compose de q points O_j $(j=1, \cdots, q)$ de Δ, on peut choisir s assez petit pour que le domaine $\delta=\pi^{-1}(\underline{\delta})$ se décompose en q composantes connexes δ_j $(j=1, \cdots, q)$ telles que $O_j \in \delta_j$, et que $\delta_j \cap \delta_k = \emptyset$ $(j\neq k)$.

Comme le problème (A) est équivalent au problème (H^*), il est clair que le problème (A) posé sur $\delta-\pi^{-1}(0)$ n'est pas affirmatif non plus. Alors, comme nous avons vu dans [4], Lemme 1, il existe au moins une des composantes $\delta_1, \cdots, \delta_q$ de δ, soit δ_j, telle que le problème (A) posé sur $\delta_j - O_j$ n'est pas affirmatif.

On en conclut que:

Pour tout entier $n(n\geqq 3)$, il existe un domaine $\Delta^{(n)}$ intérieure-

ment ramifié sur le polycylindre $\underline{\Delta}^{(n)}$, *tel que* $\pi_n^{-1}(0)$ *se compose d'un seul point* O, *et tel que le problème* (A) *posé sur* $\Delta^{(n)}-O$ *ne soit pas affirmatif.*

En outre, cet exemple montre aussi l'existence d'une variété analytique $\hat{T}$ *de codimension* 2, *passant par l'origine* $((x), y)=((0), 0)$, *telle que* $\hat{T}$ *s'exprime par les deux équations des formes*:

$$\Phi((x), y)=y^{\nu}+A_1(x)y^{\nu-1}+\cdots+A_{\nu}(x)=0, \quad et \quad \varphi(x)=0,$$

et telle que le seul point $((0), 0)$ *soit un obstacle pour le problème* (H^*) [*ou pour la propriété* (N)].[28]

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VIII-Lemme fondamental, Journ. Math. Soc. Japan 3 (1951).

[2] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX-Domaines finis sans point critique intérieur, Japanese Journ. of Math. 23 (1953).

[3] H. Onishi, Quelques propriétés locales des domaines intérieurement ramifiés, Journ. Math. Kyoto Univ. 3 (1964).

[4] H. Onishi, Quelques propriétés locales des domaines intérieurement ramifiés. II, Journ. Math. Kyoto Univ. 4 (1964).

[5] H. Onishi, Construction des surfaces analytiques ayant une variété double ordinaire donnée, Journ. Math. Kyoto Univ. 4 (1964).

[6] W. Rothstein, Über die Fortsetzung von Verteilungen meromorpher Ortsfunktionen im R_6, Math. Annalen 124 (1952).

[7] W. Thimm, Untersuchungen über das Spurproblem von holomorphen Funktionen auf analytischen Mengen, Math. Annalen 139 (1959).

28) Ceci montre que la condition du théorème de M. W. Thimm, [7] (Satz 10) n'est pas exacte.