J. Math. Kyoto Univ.
7-1 (1967) 45-63

Analyticité d'hyperbolicité non stricte dans le problème de Cauchy

Par

Yujiro OHYA*)

(Communiqué par Prof. Y. Kusunoki, le 11, Avril, 1967)

1. INTRODUCTION—Le théorème de Cauchy-Kowalewski constate l'existence local d'une seule solution holomorphe pour n'importe quel type des équations kowalewskiennes. Ce théorème se borne forcément à la théorie locale. Par contre, l'hyperbolicité stricte a des propriétés beaucoup plus fines, c'est-à-dire, nous pouvons énoncer même l'analyticité globale par rapport au temps: P. D. Lax [2] traite les systèmes quasi-linéaires hyperboliques d'ordre un à deux variables au sens de Friedrichs-Lewy, et S. Mizohata [7] les a étendus à plusieurs variables en se limitant aux systèmes linéaires. Dans une série des articles [8], [4], [5], nous avons étudié l'hyperbolicité non stricte comme une étape d'extension des idées de l'hyperbolicité stricte dûes à Gårding-Leray; le polynôme caractéristique est un produit de polynômes strictement hyperboliques dont les propriétés ne sont pas nécessairement analogues à l'hyperbolicité stricte (J. Leray [3]). Le but de cet article est de montrer l'analyticité globale pour les systèmes linéaires digonaux et les équations quasi-linéaires, hyperboliques non stricts; d'ailleurs le mot "global" ne peut plus être employé dans le même sens.

2. SOMMAIRE—L'inégalité d'énergie classique n'est pas suffisante; les approximations successives d'après E. Picard [1] y seront employées au sens de L^2. Une précision du théorème de

*) L'auteur adresse son remerciement au Centre National de la Recherche Scientifique de France qui a facilité son séjour à Paris pour l'année scolaire 1965~66.

P. Lévy [9] sera appliquée au théorème de substitution. Le raisonnement de P. D. Lax s'effectue du point de vue de S. Mizohata. Nous avons déjà éxposé cette partie principale dans [4], [5]. Le procédé nouveau que nous allons faire se trouvera aux n°7 et n°13.

Note Tous les énoncés dans cet article sont valables en remplaçant $L^{m+n,\infty}_{p}(K)$ par des classes de Gevrey $\gamma^{m+n,(\alpha)}_{p}(K)$[1] où $\alpha>1$ pour lesquelles il suffit de nous appuyer sur une partition de l'unité.

§ 1. Notation

3. Soient $(x_0, x_1, \cdots, x_l)$ de coordonnées de $\boldsymbol{R}^{l+1}$, et soit X la bande définie par $\{(x_0, x); 0\leqslant x_0\leqslant T, (x_1, \cdots, x_l)\in \boldsymbol{R}^l\}$; notons S_t l'hyperplan de cette bande d'équation ; $x_0=t$, où $0\leqslant t\leqslant T$. Etant donnée une fonction $f: X\to \boldsymbol{C}$, on note pour $1\leqslant p\leqslant +\infty$, $|f, K_t|_p$ $=\left(\int_{K_t}|f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ la norme de sa restriction à un sous-ensemble K_t de S_t, et on désigne D^α ses dérivées, où $\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_l)$, $\alpha\leqslant(r, s)$ signifiant $\alpha_0\leqslant r$, $|\alpha|=\alpha_0+\alpha_1+\cdots\alpha_l\leqslant r+s$. Définissons, n étant un entier positif,

$$|D^n f, K_t|_p = c\sup_{|\beta|\leqslant n}|D^\beta f, K_t|_p \tag{3.1}$$

où c est une constante qui depend de l, n, p et K_t, assez grande pour avoir l'énconcé dans la note 4.

En tenant compte de ce que l'analyticité par rapport à l'espace entraîne celle par rapport au temps, nous n'essayons l'évaluation qu' en $(x_1, \cdots, x_l)$ (Proposition 2. 4. de [8]).

Définition 3. 1 Etant donnée une fonction $f: \tilde{X}=[0, T]\times K_t \to \boldsymbol{C}$, nous dirons que $f(x)$ appartient à $L^{n,\infty}_{p}(\tilde{X})$, s'il existe une constante C telle que

$$\sup_{\substack{|\sigma|=s\\ \sigma_0=0}}|D^n D^\sigma f, K_t|_p\leqslant C^{s+1}s\,! \tag{3.2}$$

pout tout s et tout t, où $0\leqslant t\leqslant T$.

Depuis longtemps, on sait que l'appartenance à cet espace de solutions est très utile pour montrer l'analyticité, compte tenu d'un

1) Voir [4].

lemme de Sobolev. Mais, il est facile à voir que cette méthode équivaut à la forme suivante ; si l'on définit une serie formelle associée à $f(x)$ par

$$(3.3)\qquad |D^{n,\infty}f, K_t, \rho|_p = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s\,!} \sup_{\substack{|\sigma|=s \\ \sigma_0=0}} |D^n D^\sigma f, K_t|_p$$

où les coefficients de $\rho^s/s!$ sont des fonctions non négatives de t (que l'on note par $\Phi_s(t)$), le second membre de (3. 3) définit bien une série formelle en ρ

$$(3.4)\qquad \Phi(t, \rho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s\,!} \Phi_s(t)$$

Définition 3. 2 Par $\Phi(t, \rho) \in \Gamma^p(T)$ pour un entier $p(\geqslant 0)$ donné, nous entendons $(\partial/\partial t)^j \Phi(t, \rho)$ est une série holomorphe à l'origine $\rho=0$, uniformément par rapport à t ; $0 \leqslant t \leqslant T$, pour $0 \leqslant j \leqslant p$.

Or, on a l'équivalence ; on a $f(x) \in L_p^{n,\infty}(\tilde{X})$, si et seulement si $\Phi(t, \rho) \in \Gamma^0(T)$.

4. FORMULES—Rappelons les propriétés sans preuve que l'on a établies dans [4] ; on emprunte une notation des séries majorantes :

1° *Formule du produit*, pour $1/p = 1/q + 1/r$

$$(4.1)\qquad |D^{n,\infty}(fg), K_t, \rho|_p \ll |D^{n,\infty}f, K_t, \rho|_q |D^{n,\infty}g, K_t, \rho|_r$$

2° *Formule de la dérivée*, en notant $\partial/\partial x_j = D_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant l$,

$$(4.2)\qquad |D^{n,\infty}D_j f, K_t, \rho|_p \ll \frac{\partial}{\partial \rho} |D^{n,\infty}f, K_t, \rho|_p \ll |D^{n+1,\infty}f, K_t, \rho|_p$$
$$\ll c'' |D^{0,\infty}D_0^{n+1}f, K_t, \rho|_p + c''\Big(1+\frac{\partial}{\partial \rho}\Big)|D^{n,\infty}f, K_t, \rho|_p$$

où $c'' = c''(l, n)$.

3° *Formule du commutateur*, $a(x, D)$ étant un opérateur différentiel, normal[1] d'ordre m, si l'on définit

$$(4.3)\qquad |[D^{n,\infty}, a]f, K_t, \rho|_p = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^s}{s\,!} \sup_{\substack{|\sigma|=s \\ \sigma_0=0}} |[D^n D^\sigma, a]f, K_t, \rho|_p$$

1) le coefficient de D_0^m est égale à un.

où l'on entend le commutateur de deux fonctions par

(4.4) $$[D^{\gamma}, f]g = D^{\gamma}(fg) - fD^{\gamma}g\,,$$

alors, vu (4.1) et (4.2),

(4.5) $$|[D^{n,\infty}, a]f, K_t, \rho|_p$$
$$\ll \{|D^{n,\infty}a, K_t, \rho|_q - |D^n a, K_t|_q\}\left(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\right)|D^{m+n-1,\infty}f, K_t, \rho|_r,$$

les normes d'opérateur différentiel étant la somme de celles de ses coefficients.

Note 4 Remarquons que, si $n>l/2$, les formules $1°\sim 3°$ sont exactes même pour $p=q=r=2$.

5. ALGÈBRE—Etant donné un espace vectoriel $\boldsymbol{C}^k(k<\infty)$, nous considérons une algèbre de Banach $A(\tilde{X})$ de fonction $a:\tilde{X}\to\boldsymbol{C}$ et l'espace vectoriel $V(\tilde{X})$ ayant pour éléments les applications $v=(v_1, \cdots, v_k): \tilde{X}\to\boldsymbol{C}^k$ telles que $v_j(x)\in A(\tilde{X})$. Y étant un sous-ensemble de $\boldsymbol{C}^k$, nous définissons un espace vectoriel $B(\tilde{X}, Y)$ de fonctions $F:\tilde{X}\times Y\to\boldsymbol{C}$ de norme $||F, \tilde{X}\times Y, \nu||$ dependant d'un paramètre $\nu=(\nu_1, \cdots, \nu_k)$. Si $v:\tilde{X}\to Y$, nous notons $F\circ v$ la composée de $F\in B(\tilde{X}, Y)$ et de $v\in V(\tilde{X})$.

Supposons la condition satisfaite :

(5.1) $$\begin{array}{l} \text{si} \quad F\in B(\tilde{X}, Y)\,, \quad v\in V(\tilde{X}) \quad \text{où} \quad v:\tilde{X}\to Y \\ \text{et} \quad ||F, \tilde{X}\times Y, \nu||<\infty, \quad \text{alors on a} \\ F\circ v\in A(\tilde{X}) \quad \text{et} \quad |F\circ v, \tilde{X}|\leqslant ||F, \tilde{X}\times Y, \nu||\,. \end{array}$$

Note 5.1 Cette condition se réalise en définissant norme de $B(\tilde{X}, Y)$ par

(5.2)
$$||D^n F, K_t\times Y, \nu|| = c\sup_{|\beta|\leqslant n}|\sup_{Y}|D_{x,y}^{\beta}F(x, y), Y|, K_t|_2\,(1+c'|\nu|)^n$$

où c' est une constante, suffisamment grande pour que (5.3) aura lieu. Alors, Sobolev établit la formule de composition, si $n>l/2+1$,

(5.3) $$|D^n(F\circ v), K_t|_2\leqslant ||D^n F, K_t\times Y, |D^n v, K_t|_2||$$

qui est équivalente à (5.1).

Introduisant des variables commutatives $(\rho, \eta_1, \cdots, \eta_k, \nu)$, définissons, où $\eta^\tau = \eta_1^{\tau_1} \cdots \eta_k^{\tau_k}$,

$$(5.4)\qquad \|D^{n,\infty}F, K_t \times Y, \rho, \eta, \nu\| = \sum_{s,\tau} \frac{\rho^s}{s\,!} \frac{\eta^\tau}{\tau\,!} \sup_{\substack{|\sigma|=s \\ \sigma_0=0}} \|D^n D_x^\sigma D_y^\tau F(x, y), K_t \times Y, \nu\|\,.$$

Définition 5.1 Etant donnée une fonction $F: \tilde{X} \times Y \to \boldsymbol{C}$, nous dirons que F appartient à $L_2^{n,\infty}(\tilde{X} \times Y)$, s'il existe une constante C telle que

$$\sup_{\sigma,\tau,t} \|D^n D_x^\sigma D_y^\tau F, K_t \times Y, \nu\| \leqslant C^{s+|\tau|+1}(s+|\tau|)\,!$$

pour ν fixé.

Notons $F[\nu, \rho, \eta]$ la série formelle en (ρ, η) qui est définie par le second membre de (5.4) ; en désignant ses coefficients par $F_{s\tau}(\nu)$,

$$(5.5)\qquad F[\nu, \rho, \eta] = \sum_{s,\tau} \frac{\rho^s}{s\,!} \frac{\eta^\tau}{\tau\,!} F_{s\tau}(\nu)\,.$$

Définition 5.2 Par $F[\nu, \rho, \eta] \in \Gamma^p(T)$, nous entendons que $(\partial/\partial\nu)^j F[\nu, \rho, \eta]$ est une série holomorphe à l'origine $\rho = \eta = 0$, uniformément par rapport à ν ; $0 \leqslant |\nu| \leqslant T$, pour $0 \leqslant j \leqslant p$.

Or, on a la formule de composition d'après [6] si $n > l/2+1$,

$$(5.6)\qquad |D^{n,\infty}(F \circ v), K_t, \rho|_2 \ll \|D^{n,\infty}F, K_t \times Y, \rho, |D^{n,\infty}v, K_t\, \rho|_2 - |D^n v, K_t|_2, |D^n v, K_t|_2\|.$$

Note 5.2 C'est une précision du théorème de P. Lévy, qu'énonce L. Schwartz dans [9], Théorème 7-32.

§ 2. Systèmes linéaires

6. PROBLÈME POSÉ—Considérons le problème de Cauchy concernant les systèmes diagonaux d'ordre m dont la partie principale est le produit de polynômes strictement hyperboliques dans une bande X:

$$(6.1)\qquad \begin{cases} a(x, D)u^\nu(x) = \sum b_\mu^\nu(x, D)u^\mu(x) + b^\nu(x)\,, & 1 \leqslant \nu \leqslant N\,, \\ D_0^{m-1}u^\nu \,|\, S_0 : \text{ donnés}^{1)} \end{cases}$$

où $a(x, D) = a_1 \cdots a_{j+1}(x, D) \cdots a_p\,,\quad 0 \leqslant j < p\,,$

1) C'est-à-dire, $u^\nu | S_0, \cdots, D_0^{m-1}u^\nu | S_0$ sont donnés,

$a_{j+1}(x, D)$ étant un opérateur différentiel normel et régulièrement hyperbolique pour l'hyperplan S_t, et l'ordre de $b^{\nu}_{\mu}(x, D)$ est $m+n^{\mu}-n^{\nu}-p+q$, q étant un nombre entier positif $\leqslant p$.

Soit $\{\lambda_k(x;\xi), 1\leqslant k\leqslant m\}$ l'ensemble des racines caractéristiques associées à l'opérateurs $a(x, D)$ et notons que

$$(6.2)\qquad \lambda_{\max} = \sup_{\substack{(x)\in X\\ |\xi|=1\\ 1\leqslant k\leqslant m}} |\lambda_k(x;\xi)| \qquad \text{est fini.}$$

Définition 6 Nous appellons $C=\{(t, x); |x|\leqslant \lambda_{\max}|t|, t\leqslant 0\}$ le cône rétrograde à l'origine, et notons

$$C(t^0, x^0) = \{(t, x); (t, x)\in C+(t^0, x^0)\}$$

ce cône attaché au point $(t^0, x^0)\in X$.

Note 6 Ce cône est strictement convexe, par lequel on entend que $C\cap\{(t, x); t=0\}$ n'a pas de point commun sauf l'origine. Prenons un disque du rayon δ autour du centre (x^0) dans l'hyperplan S_{t^0}; on le note par

$$\tilde{S}_{t^0} = \{(t^0, x); |x-x^0|\leqslant\delta\}.$$

Soit $\alpha(x)$ une fonction indéfiniment dérivable à support contenu dans un ensemble compact K, qui est le domaine d'analyticité des coefficients, du second membre et des donnés initiales de (6.1); on suppose qu'elle est identiquement égale à 1 sur $\tilde{C}=\{(t, x); \bigcup_{(x)\in\tilde{S}_{t0}} C(t^0, x)\}$ et que $\tilde{S}_t=\tilde{C}\cap S_t\subset K_t=K\cap S_t$.

7. Cas d'hyperbolicité stricte—Etant donné un problème de Cauchy pour un opérateur différentiel normal et strictement hyperbolique $a(x, D)$:

$$(7.1)\qquad \begin{cases} a(x, D)u(x) = b(x) \\ D^{m-1}_0 u|S_0 = 0 \end{cases}$$

voici un lemme qui fait un rôle essentiel dans cet article.

Lemme 7 *Si l'on suppose que les coefficients de* $a(x, D)$ (*resp.* $b(x)$) *appartiennet à* $L^{n,\infty}_{\infty}(K)$ (*resp.* $L^{n,\infty}_2(K)$) *et que* $D^j_0 b|S_0=0$ $(j<n)$, *alors la solution de* (7.1) *se trouvera dans* $L^{m+n,\infty}_2(\tilde{C})$.

Preuve Si l'on définit d'abord $\tilde{u}(x)$ la solution du problème de Cauchy

$$(7.2)\qquad \begin{cases} a(x, D)\tilde{u}(x) = \alpha(x)b(x) \\ D^{m-1}_0\tilde{u}\,|\,S_0 = 0 \end{cases}$$

alors, le support de $D^{m-1}\tilde{u}(x)$ étant contenu dans K, compte tenu du domaine d'influence, on a $D^{m-1}\tilde{u}(x)=D^{m-1}u(x)$ sur S_t, où $0\leqslant t\leqslant t^0$.

Note 7.1 Plus précisément, (7.2) devra s'être mis en

$$(7.2)'\qquad \begin{cases} g(x, D)\tilde{u}(x) = \alpha(x)\{[g(x, D)-a(x, D)]u(x)+b(x)\} \\ D^{m-1}_0\tilde{u}\,|\,S_0 = 0\,, \end{cases}$$

$g(x, D)$ étant la partie principale de $a(x, D)$, ce que l'on ne détaille pas.

L'inégaliteé énergétique donne

$$(7.3)\qquad |D^{m-1}\tilde{u},\, K_t|_2\leqslant c_0\int_0^t |b,\, K_{t'}|_2 dt'$$

où c_0 est une constante qui ne dépend que de $(l, m, \chi, |D^1 g, K|_\infty)$.[1] Le même procédé permet de définir $D^{m-1}D^\beta\tilde{u}(x)$ qui se coïncide avec $D^{m-1}D^\beta u(x)$ sur $\tilde{C}$ successivement pour $|\beta|\leqslant n$; il s'ensuit de majorer $\sup\limits_{|\beta|\leqslant n} |D^{m-1}D^\beta\tilde{u},\, \tilde{S}_t|_2\leqslant \sup\limits_{|\beta|\leqslant n} |D^{m-1}D^\beta\tilde{u},\, K_t|_2$ avec une constante c_0 modifiée qui depend de $|D^n g, K|_\infty$. Ensuite, on va définir $D^{m-1}D^\beta D^\sigma\tilde{u}(x)$ la solution du problème de Cauchy

$$(7.4)\qquad \begin{cases} a(x, D)D^\beta D^\sigma\tilde{u}(x) = \alpha(x)\{-[D^\beta D^\sigma,\, a(x, D)]u(x)+D^\beta D^\sigma b(x)\} \\ D^{m-1}_0 D^\beta D^\sigma\tilde{u}\,|\,S_0 = 0^{2)} \end{cases}$$

par la récurrence sur (σ) tel que $|\sigma|=s$, $\sigma_0=0$. D'où l'on tire

$$(7.5)\qquad \begin{aligned} |D^{m-1}D^\beta D^\sigma\tilde{u},\, K_t|_2 &\leqslant c_0\int_0^t |[D^\beta D^\sigma,\, a]u,\, K_{t'}|_2 dt' \\ &\quad + c_0\int_0^t |D^\beta D^\sigma b,\, K_{t'}|_2 dt' \end{aligned}$$

Le terme sous le signe d'intégration du premier terme du second membre se constitue de

---

1) χ est le caractère de régularité de $a(x, D)$.

2) se réalise par l'hypothèse sur $b(x)$.

$$(\sum_{|\alpha|=m}+\sum_{|\alpha|<m})|[D^\beta D^\sigma, a_\alpha(x)D^\alpha]u, K_t|_2$$

dont le premier se majore par

$$\sum_{|\alpha|=m}(\sum_{\gamma=\beta+\sigma-1}+\sum_{\gamma<\beta+\sigma-1})\binom{\beta+\sigma}{\gamma}|D^{\beta+\sigma-\gamma}a_\alpha, K_t|_\infty|D^\gamma D^\alpha u, K_t|_2$$

vu l'inégalité d'Hölder et (4. 4).

En supposant $D^{m-1}D^\beta D^{\sigma'}\tilde{u}(x)=D^{m-1}D^\beta D^{\sigma'}u(x)$ où $|\sigma'|<|\sigma|$ déjà définis sur $\tilde{C}$, on a donc

$$\begin{aligned}(7.6)\quad & |D^{m-1}D^\beta D^\sigma\tilde{u}, K_t|_2\\ &\leqslant c_0\int_0^t\sum_{|\alpha|=m}\sum_{\gamma=\beta+\sigma-1}\binom{\beta+\sigma}{\gamma}|D^{\beta+\sigma-\gamma}a_\alpha, K_{t'}|_\infty|D^\alpha D^\gamma u, K_{t'}|_2dt'\\ &+c_0\int_0^t\sum_{|\alpha|=m}\sum_{\gamma<\beta+\sigma-1}\binom{\beta+\sigma}{\gamma}|D^{\beta+\sigma-\gamma}a_\alpha, K_{t'}|_\infty|D^\alpha D^\gamma\tilde{u}, K_{t'}|_2dt'\\ &+c_0\int_0^t\sum_{|\alpha|<m}|[D^\beta D^\sigma, a_\alpha D^\alpha]\tilde{u}, K_{t'}|_2dt'+c_0\int_0^t|D^\beta D^\sigma b, K_{t'}|_2dt'.\end{aligned}$$

Or, il s'ensuit d'avoir la majoration pour

$$\sup_{\substack{|\beta|\leqslant n\\|\sigma|=s\\\sigma_0=0}}|D^{m-1}D^\beta D^\sigma\tilde{u}, \tilde{S}_t|_2\leqslant\sup_{\substack{|\beta|\leqslant n\\|\sigma|=s\\\sigma_0\neq 0}}|D^{m-1}D^\beta D^\sigma\tilde{u}, K_t|_2$$

de l'hypothèse de récurrence.

Ce type de majoration était suffisant pour prouver l'analyticité globale d'hyperbolicité stricte (par exemble [7]), mais nous profitons des méthodes employées dans [4]; c'est-à-dire l'analyticité se resulte d'une série holomorphe en ρ construite par $\sum_{s=0}^\infty\frac{\rho^s}{s!}\Phi_s(t)=\Phi(t, \rho)$. En effet, il existe des séries holomorphes à l'origine telles que

$$(7.7)\qquad\begin{cases}c_0|D^{n,\infty}a, K, \rho|_\infty\ll C_1(\rho) & \text{où}\quad C_1(0)=|D^n a, K|_\infty\\ c_0|D^{n,\infty}b, K_t, \rho|_2\ll\Psi(t, \rho) & \text{pour}\quad 0\leqslant t\leqslant t^0,\end{cases}$$

par les hypothèses du lemme; si l'on applique $\sum\frac{\rho^s}{s!}\sup_{\substack{|\beta|\leqslant n\\|\sigma|=s\\\sigma_0=0}}\cdots$ à (7. 5), alors, vu (4. 1) et (4. 5), $\Phi(t, \rho)$ est la solution du problème de Cauchy holomorphe tel que

$$(7.8)\qquad \begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t}-(C_1(\rho)-C_1(0))\left(1+\frac{\partial}{\partial \rho}\right)\right]\Phi(t, \rho) = \Psi(t, \rho) \\ \Phi(0, \rho) = 0 \end{cases}$$

Or, cette résolution se resulte de la théorie des équations différentielles ordinaires ; $\Phi(t, \rho)$ appartient à $\Gamma^1(t^0)$, qui prouve $\tilde{u}(x) \in L_2^{m+n-1,\infty}(\tilde{C})$. De plus, elle appartient à $L_2^{m+n,\infty}(\tilde{C})$, puisque l'on a $(8.6)_0$ où $k=1$, $p=1$, et $n^\nu = n$. C.Q.F.D.

Note 7.2 Ce lemme s'exprime comme ceci ; il existe une constante C telle que

$$|D^{m+n,s} u(t^0, x), \tilde{S}_{t^0}|_2 \leqslant C^{s+1} s!$$

8. Revenons au problème de Cauchy (6.1), où l'on suppose que $D_0^j b^\nu | S_0 = 0$ $(j < n^\nu)$, et que les données initiales sont nulles[1]. On le résout par des approximations successives :

$$(8.1)_0 \qquad \begin{cases} a(x, D)\ u_0^\nu(x) = b^\nu(x) \\ D_0^{m-1} u_0^\nu | S_0 = 0 \end{cases}$$

$$(8.1)_K \qquad \begin{cases} a(x, D) u_K^\nu(x) = \sum_{\mu=1}^{N} b_\mu^\nu(x, D) u_{K-1}^\mu(x) \\ D_0^{m-1} u_K^\nu | S_0 = 0. \end{cases}$$

Toutes les dérivées successives s'estiment de la même méthode que dans [4]. En effet, chaque $(8.1)_K$ se décompose à une suite du problème de Cauchy ;

$$(8.2)_K \qquad \begin{cases} a_j(x, D) v_j(x) = v_{j-1}(x) \\ D_0^{m_j - 1} v_j | S_0 = 0 \end{cases}$$

où $m_j = \sum_{i=1}^{j}$ order (a_i), $1 \leqslant j \leqslant p$.

Note 8 Il suffit de traiter le cas où $D_0^k v_j | S_0 = 0$ $(k < m_j + n^\nu)$, puisque $D_0^k b^\nu | S_0 = 0$ $(k < n^\nu)$ entraîne $D_0^k (\sum b_\mu^\nu(x, D) u_{K-1}^\mu) | S_0 = 0$ $(k < n^\nu)$: Voir le leme 15.1 de [4].

Le procédé du numéro précédent s'applique à chaque problème de Cauchy ; il s'agira de trouver la solution $\Phi_K(t, \rho)$ telle que

---

1) ne perdent aucune généralite.

$$(8.3)_K \quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial t}-(C_1(\rho)-C_1(0))\left(1+\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right)\right]^p \Phi_K(t,\rho) \\ \qquad\qquad = L_q\left(\rho, \dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\partial}{\partial\rho}\right)\Phi_{K-1}(t,\rho) \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^j \Phi_K(0,\rho)=0 \qquad 0\leqslant j<p, \end{cases}$$

où

$$(8.4) \quad \begin{cases} C_1(\rho)\gg c_0|D^{m_{j+1}+n-j,\infty}a_{j+1}, K, \rho|_\infty \text{ tel que} \\ C_1(0)=c_0|D^{m_{j+1}+n-j}a_{j+1}, K|_\infty, \\ C_2(\rho)\gg c_0[1+|D^{n^\nu-p+k,\infty}a, K, \rho|_\infty]^k, \\ C_3(\rho)\gg c_0|D^{n^\nu,\infty}b_\mu^\nu, K, \rho|_\infty, \\ L_q\left(\rho, \dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\partial}{\partial\rho}\right)=C_2(\rho)C_3(\rho)\left(1+\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right)^q, \end{cases}$$

puisque

$$\begin{aligned} &|D^{n^\nu,\infty}\textstyle\sum b_\mu^\nu\tilde{u}_{K-1}^\mu, K_t, \rho|_2 \\ &\ll C_3(\rho)|D^{m+n^\mu-p+q,\infty}\tilde{u}_{K-1}^\mu, K_t, \rho|_2 \\ &\ll C_3(\rho)C_2(\rho)\left(1+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^q\Phi_{K-1}(t,\rho) \end{aligned}$$

d'après $(8.6)_{K-1}$; $\Phi_K(t,\rho)$ de $(8.3)_K$ satisfait à

$$(8.5)_K \qquad |D^{m+n^\nu-p,\infty}u_K^\nu, \tilde{S}_t, \rho|_2\ll\Phi_K(t,\rho)$$

et aussi à

$$(8.6)_K \quad |D^{m+n^\nu-p+k,\infty}u_K^\nu, \tilde{S}_t, \rho|_2\ll C_2(\rho)\left(1+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^k\Phi_K(t,\rho)$$

pour $k\leqslant q$.

9. Preuve de $(8.6)_K$—On ne montre que le procédé de $(8.5)_K$ à $(8.6)_K$, en supposant $(8.5)_K$ et $(8.6)_{K-1}$ déjà établis: vu (4.2)

$$(9.1) \quad \begin{aligned} |D^{m+n^\nu-p+k,\infty}\tilde{u}_K^\nu, K_t, \rho|_2 &\ll c''|D_0^{m+n^\nu-p+k}\tilde{u}_K^\nu, K_t, \rho|_2 \\ &+c''\left(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\right)|D^{m+n^\nu-p+k-1,\infty}\tilde{u}_K^\nu, K_t, \rho|_2 \end{aligned}$$

où $\tilde{u}_K^\nu$ satisfait à l'équation $(8.1)_K$ sur K.

En décomposant le premier terme du second membre de (9.1) à $D_0^{m+n^\nu-p+k}\tilde{u}_K^\nu(x)=D_0^{n^\nu-p+k}[D_0^m-a(x,D)]\tilde{u}_K^\nu+D_0^{n^\nu-p+k}\sum b_\mu^\nu(x,D)\tilde{u}_{K-1}^\mu(x)$, les formules (4. 1) et (4. 2) montrent

$$|D^{0,\infty}D_0^{m+n^\nu-p+k}\tilde{u}_K^\nu,\ K_t,\ \rho|_2$$
$$\ll |D^{n^\nu-p+k,\infty}a,\ K,\ \rho|_\infty\Big(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)|D^{m+n^\nu-p+k-1,\infty}\tilde{u}_K^\nu,\ K_t,\ \rho|_2$$
$$+|D^{n^\nu-p+k,\infty}(\textstyle\sum b_\mu^\nu\tilde{u}_{K-1}^\mu),\ K_t,\ \rho|_2 \qquad \text{puisque } a(x,\ D)$$

est normal.

D'où, (9. 1) nous donne

$$(9.2)\quad |D^{m+n^\nu-p+k,\infty}\tilde{u}_K^\nu,\ K_t,\ \rho|_2$$
$$\ll c''[1+|D^{n^\nu-p+k,\infty}a,\ K,\ \rho|_\infty]\Big(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)|D^{m+n^\nu-p+k-1,\infty}\tilde{u}_K^\nu,\ K_t,\ \rho|_2$$
$$+c''|D^{n^\nu-p+k,\infty}(\textstyle\sum b_\mu^\nu\tilde{u}_{K-1}^\mu),\ K_t,\ \rho|_2$$

La récurrence sur k et $(8.5)_K$ prouvent

$$|D^{m+n^\nu-p+k,\infty}\tilde{u}_K^\nu,\ K_t,\ \rho|_2$$
$$\ll c''[1+|D^{n^\nu-p+k,\infty}a,\ K,\ \rho|_\infty]^k\Big(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)^k\Phi_K(t,\ \rho)$$
$$+c''\sum_{j=1}^{k}[1+|D^{n^\nu-p+k,\infty}a,\ K,\ \rho|_\infty]^{k-j}\Big(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)^{k-j}$$
$$\times|D^{n^\nu-p+j,\infty}(\textstyle\sum b_\mu^\nu\tilde{u}_{K-1}^\mu),\ K_t,\ \rho|_2$$

où le facteur $|D^{n^\nu-p+j,\infty}(\sum b_\mu^\nu\tilde{u}_{K-1}^\mu),\ K_t,\ \rho|_2$, vu (4. 1), se majore par

$$C_3(\rho)|D^{m+n^\mu-p+(q-p+j),\infty}\tilde{u}_{K-1}^\mu,\ K_t,\ \rho|_2;$$

c'est-à-dire, par l'hypothèse de récurrence $(8.6)_{K-1}$,

$$\ll C_3(\rho)C_2(\rho)\Big(1+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)^{q-p+j}\Phi_{K-1}(t,\ \rho).$$

Or, le lemme 9. 2 de [5], vu (8. 3),

$$L_q\Big(\rho,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial\rho}\Big)\Phi_{K-1}(t,\ \rho)\ll\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^p\Phi_K(t,\ \rho)$$

prouve $(8.6)_K$.

La somme $\sum_{K=0}^{\infty}u_K^\nu$ des approximations successives $(8.1)_K$, si elle converge, fournit la solution cherchée de (6. 1). La convergence de cette somme se résulte de celle du problème de Cauchy pour $(8.3)_K$. La somme $\Phi(t,\ \rho)=\sum_{K=0}^{\infty}\Phi_K(t,\ \rho)$ satisfait au problème de

Cauchy

$$(9.3)\qquad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial t} - (C_1(\rho) - C_1(0))\left(1 + \dfrac{\partial}{\partial \rho}\right)\right]^p \Phi(t, \rho) = L_q \Phi(t, \rho) + \Psi(t, \rho) \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^j \Phi(0, \rho) = 0 \qquad 0 \leqslant j < p, \end{cases}$$

où $C_i(\rho)$, L_q et $\Psi(t, \rho)$ sont définis par (8.4) et (7.7).

THÉORÈME 9

Si $a(x, D)$ *a ses coefficients* $\in L^{n^\nu - p + k, \infty}_{\infty}(K)$
$a_{j+1}(x, D)$ *a ses coefficients* $\in L^{m_j + n^\nu - j, \infty}_{\infty}(K)$
$b^\nu_\mu(x, D)$ *ont leurs coefficients* $\in L^{n^\nu, \infty}_{\infty}(K)$
et $b^\nu(x)$ *appartient à* $L^{n^\nu, \infty}_2(K)$,
alors la solution relative à (6.1) *se trouve dans* $L^{m+n, \nu_\infty}_2(\tilde{C})$.

La preuve de ce théorème s'achève de la

Proposition 9 *Le problème de Cauchy concernant* (9.3) *admet au moins une solution appartenante à* $\Gamma^p(t^0)$ *sous les hypothèses*

$$C_i(\rho) \in \Gamma(t^0) \quad \text{et} \quad \Psi(t, \rho) \in \Gamma^0(t^0).$$

§ 3. Equations quasi-linéaires

10. PROBLÈME POSÉ—Nous allons trouver la théorie analogue au cas linéaire dans le problème de Cauchy pour les équations quasi-linéaires :

$$(10.1)\qquad \begin{cases} a(x, D^{m-1}u, D)u(x) = b(x, D^{m-p+q}u) \\ D_0^{m-1}u \,|\, S_0 : \text{ donnés} \qquad 0 \leqslant q \leqslant p.\text{[1]} \end{cases}$$

Pour développer le raisonnement parallèle aux sysytémes linéaires, il y a assez de complications ; tout d'abord, la difficulté de définir l'hyperbolicité non stricte. Dans le cas de deux variables, P. D. Lax emploie une solution particulière ; nous étendons son procédé à plusieuas variables par la méthode employée dans [5].

11. DÉFINITION DU CÔNE RÉTROGRADE—Soit $v(x)$ une function arbitraire appartenante à l'espace $L^{m+n, \infty}_2(X)$, et désignons $g(x, D^{m-1}v, D)$ la partie principale de $a(x, D^{m-1}v, D)$.

1) si $q=p$, $b(x, D^m u)$ ne contient pas $D_0{}^m u$.

Définition 11 Nous appellons que $a(x, D^{m-1}u, D)$ est un opérateur différentiel normal et hyperbolique non strict, si

$$g(x, D^{m-1}v, D) = g_1 \cdots g_{j+1}(x, D^{m-m_j-p+j}v, D) \cdots g_p \tag{11.1}$$

où $g_{j+1}(x, D^{m-m_j-p+j}v, D)$ est un opérateur différentiel normal et régulierèment hyperbolique dans X, en notant

$$m_j = \sum_{i=1}^{j} \text{ordre}\,(g_i).$$

Supposons (11.1) rempli dans la suite; alors

$$g_{j+1}(x, D^{m-m_j-p+j}v\,;\,\xi) = \prod_{k=1}^{m_{j+1}-m_j}(\lambda - \lambda_k^{(j+1)}(x, D^{m-m_j-p+j}v\,;\,\xi))$$

dont les racines $\lambda_k^{(j+1)}(x, D^{m-m_j-p+j}v\,;\,\xi)$ sont réelles et distinctes pour tout $v \in L_2^{m+n,\infty}(X)$, $(x) \in X$ et tout (ξ) tel que $|\xi| = 1$.

On définit

$$\lambda_{\max} = \sup_{\substack{(x)\in X \\ 1\leqslant k\leqslant m_{j+1}-m_j \\ 0\leqslant j<p \\ v\in L_2^{m+n,\infty}(X')}} |\lambda_k^{(j+1)}(x, D^{m-m_j-p+j}v\,;\,\xi)| \tag{11.2}$$

où la bande X' plus étroite que X sera déterminée par $X' = X \cap \{(t, x)\,;\ 0 \leqslant t \leqslant T_q\}$, T_q étant défini par (15.5)[1]. Compte tenu de la formule (5.3), on voit facilement la justification de cette définition; en effet, si $g(x, y, D)$ a ses coefficients dans $L_2^{n,\infty}(X \times Y)$, alors $\lambda_k^{(j+1)}(x, y, D)$ appartiennent à $L_2^{n,\infty}(X \times Y)$. Donc, si $v(x) \in L_2^{m+n,\infty}(X)$ puisque $D^{m-m_j-p+j}v(x) \in L_2^{n,\infty}(X)$, (5.3) implique $\lambda_k^{(j+1)}(x, D^{m-m_j-p+j}v\,;\,\xi) \in L_2^{n,\infty}(X)$ pour (ξ) fixé: ceci vaut à dire, d'après Sobolev, que $\lambda_k^{(j+1)}$ sont bornées dans X, si $n > \frac{l}{2} + 1$ pour (ξ) fixé. On emploie la définition 6 et ses suites sans aucune modification.

12. Resolution de (10.1)—qui s'achève des approximations successives:

$$\left\{\begin{array}{l} a(x, 0, D)u_0(x) = b(x, 0) \\ D_0^{m-1}u_0 \,|\, S_0 = 0 \end{array}\right. \tag{12.1$_0$}$$

---

1) bien évidemment $L_2^{m+n,\infty}(X') \supset L_2^{m+n,\infty}(X)$.

$$(12.1)_K \qquad \begin{cases} a(x, D^{m-1}u_{K-1}, D)u_K(x) = b(x, D^{m-p+q}u_{K-1}) \\ D_0^{m-1}u_K | S_0 = 0 \end{cases}$$

sous les hypothèses ; n étant un nombre entier tel que $n > \frac{l}{2} + p$,

(12.2) $a(x, D^{m-1}v, D)$ est hyperbolique non strict pour tout $v(x) \in L_2^{m+n,\infty}(X')$,

$$(12.3) \qquad \begin{cases} a(x, y, D) \text{ a ses coefficients } \in L_2^{n,\infty}(K \times Y) \\ a_{j+1}(x, y, D) \text{ a ses coefficients } \in L_2^{mj+n-j,\infty}(K \times Y) \\ b(x, y) \text{ appartient à } L_2^{n,\infty}(K \times Y) \end{cases}$$

où Y est l'adhérence des valeurs prises par $D^m v(x) \in L_2^{n,\infty}(K)$,

$$(12.4) \qquad D_0^j b(x, 0) | S_0 = 0 \qquad (j < n).$$

Toutes les dérivées successives de suites $u_K(x)$ dans $(12.1)_K$ s'obtiennent de la répétition du

Lemme 12 *Dans le problème de Cauchy*

$$(12.5) \qquad \begin{cases} a(x, D^{m-1}v, D)u(x) = b(x, D^m v) \\ D_0^{m-1}u | S_0 = 0 \end{cases}$$

on suppose :

$$(12.6) \qquad \begin{cases} a(x, D^{m-1}v, D) \textit{ est strictement hyperbolique,} \\ D_0^j b(x, 0) | S_0 = 0 \quad (j < n) \quad \textit{où} \quad n > \frac{l}{2} + 1 \end{cases}$$

pour toute $v(x)$ donnée arbitrairement dans $L_2^{m+n,\infty}(K)$ telle que, son support étant compact,

$$D_0^j v | S_0 = 0 \qquad (j < m+n) \textit{ avec } (12.3).$$

Alors la solution se trouve dans $L_2^{m+n,\infty}(\tilde{C})$.

13. Preuve—Soient $\Psi_k(t, \rho)$ des séries holomorphes en ρ associées à $v(x)$ telle que

$$|D^{m+n-1+k,\infty}v, K_t, \rho|_2 \ll \Psi_k(t, \rho) \qquad 0 \leqslant k \leqslant 1,$$

et on note $\Psi_0(t, 0) = \varphi(t)$.

Pourvu que, $D^{m-1}D^\beta D^\sigma \tilde{u}(x)$ pour $|\beta| \leqslant n$, $|\sigma| \leqslant s-1$ tel que

$\sigma_0=0$, soient déjà définies par la même méthode que dans le lemme 7, on définira la solution pour $|\sigma|=s$;

$$(13.1)\quad \begin{cases} a(x, D^{m-1}v, D)D^{\beta}D^{\sigma}\tilde{u}(x) = \alpha(x)\{[D^{\beta}D^{\sigma}, a]u + D^{\beta}D^{\sigma}b\} \\ D_0^{m-1}D^{\beta}D^{\sigma}\tilde{u}\,|\,S_0 = 0 \end{cases}$$

On a l'inégalité énergétique :

$$(13.2)\quad |D^{m-1}D^{\beta}D^{\sigma}\tilde{u}, K_t|_2 \leqslant A_0(\psi)\int_0^t |[D^{\beta}D^{\sigma}, a]u, K_{t'}|_2 dt' + A_0(\psi)\int_0^t |D^{\beta}D^{\sigma}b, K_{t'}|_2 dt'$$

où $A_0(\psi)$ ne depend que de $(l, m, n, C[\psi(t), 0, 0])$.

Note 13 Ceci s'interprète comme il suit : $A_0(\psi)$ depend de $|D^n g(x, D^{m-1}v, D), K_t|_2$, d'après le résultat déduit du cas linéaire. Si l'on applique (5.3) et (5.7) en y remplaçant F (resp. v) par a (resp. $D^{m-1}v$), alors on a

$$(13.3)\quad |D^n a(x, D^{m-1}v, D), K_t|_2 \leqslant ||D^n a, K_t\times Y, |D^{m+n-1}v, K_t|_2||$$

$$(13.4)\quad |D^{n,\infty}a(x, D^{m-1}v, D), K_t, \rho|_2 \ll ||D^{n,\infty}a, K_t\times Y, \rho, |D^{m+n-1,\infty}v, K_t, \rho|_2 - |D^{m+n-1}v, K_t|_2, |D^{m+n-1}v, K_t|_2|| ;$$

on désigne $C[\nu, \rho, \theta]$ une série (majorante) holomorphe en (ρ, θ) définie par le second membre de (13.4) telle que $C[\nu, 0, 0]= ||D^n a, K_t\times Y, \nu||$, d'où il résulte $|D^n g(x, D^{m-1}v, D), K_t|_2 \ll C[\psi(t), 0, 0]$. Puisque $a=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x, D^{m-1}v)D^\alpha$, on peut remplacer $u(x)$ par $\tilde{u}(x)$ dans $D^{m-1}D^{\beta}D^{\sigma}u(x)$ sauf les termes $|\beta|=n$, $|\sigma|=s$ par l'hypothése de récurrence ; c'est-à-dire, vu la note 4,

$$\begin{aligned} &|D^{m-1}D^{\beta}D^{\sigma}\tilde{u}, K_t|_2 \\ &\leqslant A_0(\psi)\int_0^t \sum_{|\alpha|=m}\ \sum_{\gamma=\beta+\sigma-1}\binom{\beta+\sigma}{\gamma}|D^{\beta+\sigma-\gamma}a_\alpha, K_{t'}|_2 |D^\alpha D^\gamma u, K_{t'}|_2 dt' \\ &+A_0(\psi)\int_0^t \sum_{|\alpha|=m}\ \sum_{\gamma<\beta+\sigma-1}\binom{\beta+\sigma}{\gamma}|D^{\beta+\sigma-\gamma}a_\alpha, K_{t'}|_2 |D^\alpha D^\gamma \tilde{u}, K_{t'}|_2 dt' \\ &+A_0(\psi)\int_0^t \sum_{|\alpha|<m} |[D^{\beta}D^{\sigma}, a_\alpha D^\alpha]\tilde{u}, K_{t'}|_2 dt' + A_0(\psi)\int_0^t |D^{\beta}D^{\sigma}b, K_{t'}|_2 dt'. \end{aligned}$$

La majoration de $\sup_{\substack{|\beta|\leqslant n\\ |\sigma|=s\\ \sigma_0=0}} |D^{m-1}D^{\beta}D^{\sigma}\tilde{u}, K_t|_2$ se résulte de ce qu'indique

(13.1)

$$D^{m-1}D^{\beta}D^{\sigma}\tilde{u}(x) = D^m D^{\gamma}u(x) \quad \text{où} \quad \gamma=\beta+\sigma-1 \quad \text{sur } \tilde{C}.$$

La série formée par $\Phi(t, \rho)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\rho^s}{s\,!}\Phi_s(t)$ satisfait au problème de Cauchy holomorphe:

$$(13.5)\quad \begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t}-A(\psi, \Psi_0)\left(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\right]\Phi(t, \rho) = B[\Psi_1(t, 0), \rho, \Psi_1(t, \rho) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\Psi_1(t, 0)] \\ \Phi(0, \rho) = 0 \end{cases}$$

où $\quad A(\psi, \Psi_0)=A_0(\psi)\{C[\psi(t), \rho, \Psi_0(t, \rho)-\psi(t)]-C[\psi(t), 0, 0]\}$.

En effet, si l'on applique $\sum\frac{\rho^s}{s\,!}\sup_{\substack{|\beta|\leqslant n\\ |\sigma|=s\\ \sigma_0=0}}\cdots$ à (13.2), on a

$$\begin{aligned} &|D^{m+n-1,\infty}\tilde{u}, K_t, \rho|_2 \\ &\quad\ll A_0(\psi)\int_0^t|[D^{n,\infty}, a(x, D^{m-1}v, D)]\tilde{u}, K_{t'}, \rho|_2 dt' \\ &\quad+A_0(\psi)\int_0^t|D^{n,\infty}b(x, D^m v), K_{t'}, \rho|_2 dt', \qquad \text{vu (4.5)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &|[D^{n,\infty}, a(x, D^{m-1}v, D)]\tilde{u}, K_t, \rho|_2 \\ &\quad\ll\{|D^{n,\infty}a, K_t, \rho|_2-|D^n a, K_t|_2\}\left(1+\frac{\partial}{\partial\rho}\right)|D^{m+n-1,\infty}\tilde{u}, K_t, \rho|_2. \end{aligned}$$

D'après (5.7) avec la note 13, il existe des séries holomorphes $C[\nu, \rho, \theta]$ et $B[\nu, \rho, \theta]$ telles que

$$|D^{n,\infty}a, K_t, \rho|_2-|D^n a, K_t|_2\ll C[\psi(t), \rho, \Psi_0(t, \rho)-\psi(t)]-C[\psi(t), 0, 0]$$

et

$$|D^{n,\infty}b, K_t, \rho|_2\ll B[\Psi_1(t, 0), \rho, \Psi_1(t, \rho)-\Psi_1(t, 0)].$$

Du fait que $v(x)\in L^{m+\frac{n}{2},\infty}(X)$ signifie $\Psi_k(t, \rho)\in\Gamma^0(t^0)$ qui implique $A, B\in\Gamma^0(t^0)$, il résulte que $\Phi(t, \rho)\in\Gamma^1(t^0)$ d'après le théorème de Cauchy-Kowalewski. De plus, (8.6) où $p=k=1$ est aussi valable, ce qui prouve $\tilde{u}(x)\in L^{m+\frac{n}{2},\infty}(\tilde{C})$.

14. Le lemme 12 permet d'évaluer toutes les dérivées des suites $u_K(x)$ définies par (12.1) sur K, puisque $u_K(x)$ se trouvent

dans $L^{m+\frac{n}{2},\infty}(K)$ par les opérations linéaires pour $u_{K-1}(x)$ donnée dans $L^{m+\frac{n}{2},\infty}(K)$; en effet, si l'on suppose

$$|D^{m+n-p+k,\infty}\tilde{u}_{K-1},\,K_t,\,\rho|_2 \ll \Phi^{(k)}_{K-1}(t,\,\rho) \tag{14.1}$$

où $\Phi^{(k)}_{K-1}(t,\,\rho)$ vérifie

$$\begin{cases} \Phi^{(k)}_{K-1}(t,\,\rho)\in\Gamma^0(t^0) \\ \Phi^{(0)}_{K-1}(t,\,\rho)\in\Gamma^p(t^0) \end{cases} \tag{14.2}$$

telle que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \Phi^{(0)}_{K-1}(t,\,\rho)\gg 0 \qquad \text{pour} \quad 0\leqslant j<p\,, \quad \Phi^{(0)}_{K-1}(0,\,0)=0\,,$$

et on note $\Phi^{(0)}_{K-1}(t,\,0)=\varphi_{K-1}(t)$, alors la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial t}-A(\varphi_{K-1}.\,\Phi^{(0)}_{K-1})\left(1+\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right)\right]^p\Phi_K(t,\,\rho) \\ \qquad = B[\Phi^{(q)}_{K-1}(t,\,0),\,\rho,\,\Phi^{(q)}_{K-1}(t,\,\rho)-\Phi^{(q)}_{K-1}(t,\,0)] \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^j\Phi_K(0,\,\rho)=0 \qquad 0\leqslant j<p \end{cases} \tag{14.3$_K$}$$

donne

$$|D^{m+n-p,\infty}\tilde{u}_K,\,K_t,\,\rho|_2 \ll A_0(\varphi_{K-1})\Phi_K(t,\,\rho) \tag{14.4}$$

et aussi

$$\begin{aligned} &|D^{m+n-p+k,\infty}\tilde{u}_K,\,K_t,\,\rho|_2 \\ &\quad\ll c''_k A_0(\varphi_{K-1})\{1+c_k[\Phi^{(k-1)}_{K-1}(t,\,0),\,\rho,\,\Phi^{(k-1)}_{K-1}(t,\,\rho)-\Phi^{(k-1)}_{K-1}(t,\,0)]\}^k \\ &\quad\times\left(1+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^k\Phi_K(t,\,\rho) \qquad k\leqslant q\,, \end{aligned} \tag{14.5}$$

où

$$\begin{aligned} &c_k[\Phi^{(k-1)}_{K-1}(t,\,0),\,\rho,\,\Phi^{(k-1)}_{K-1}(t,\,\rho)-\Phi^{(k-1)}_{K-1}(t,\,0)] \\ &\quad\gg |D^{n-p+k,\infty}a(x,\,D^{m-1}u_{K-1},\,D),\,K_t,\,\rho|_2 \end{aligned} \tag{14.6}$$

On ne répète pas ces détails qui sont analoques aux n° 8 et n° 9.

Note 14 Dans ce traitement, chaque étape se fait sur le même cône $\tilde{C}$, ce que l'on a montré dans le lemme 18 de [5].

15. On sait déjà que la solution (10.1) peut être approximée

par $(12.1)_K$, vu [5]; l'allure de suites $\{u_K(x)\}$ se résulte de celle des approximations successives $\{\Phi_K(t, \rho)\}$ définies par $(14.3)_K$. Elles ont des propriétés qu'énonce le n° 14 dans [5];

$$(15.1) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \Phi_K(t, \rho) \gg 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \Phi_{K+1}(t, \rho) \gg \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \Phi_K(t, \rho)$$

pour tout K.

La majoration de $\{\Phi_K(t, \rho)\}$ s'obtient du théorème de Cauchy-Kowalewski pour

$$(15.2) \qquad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial t} - F_0(\Phi)\left(1 + \dfrac{\partial}{\partial \rho}\right)\right]^p \Phi(t, \rho) = F_q(D^q \Phi) \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^j \Phi(0, \rho) = 0 \qquad 0 \leqslant j < p, \end{cases}$$

tel que $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^j \Phi(t, \rho) \gg 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant p$, où, D^q désignant $\dfrac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial \rho^j}$ pour $i+j \leqslant q$,

$$(15.3) \qquad F_q(D^q \Phi) = F_q[D^q \Phi(t, 0), \rho, D^q \Phi(t, \rho) - D^q \Phi(t, 0)]$$

et que

$$(15.4) \qquad A \ll F_0, \quad B \ll F_q.$$

Note 15.1 On suppose que, $F_p(D^p \Phi) \not\ni \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^p \Phi$ si $q = p$.

Lemme 15 *Le problème de Cauchy* (15.2) *possède au moins une solution appartenante à* $\Gamma^p(T_q)$ *sous les hypothèses*; $F_0 \in \Gamma^{p-1}(t^0)$, $F_q \in \Gamma^0(t^0)$ *tels que leur coefficients de Taylor à* (0, 0, 0) *sont tous positifs,*

et $$\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^j F_0[\nu, \rho, \theta] \gg 0 \qquad \textit{pour} \quad 0 \leqslant j < p,$$

où T_q *est suffisament petit tel que*

$$(15.5) \qquad |D^q \Phi(t, 0)| \leqslant T_q.$$

Preuve Voir le lemme 11 de [5].

En résumé, voici un théorème que l'on peut en deduire:

THÉORÈME 15 *Sous les hypothèses* (11.1) (12.2) *et* (12.3), *la* *solution du problème de Cauchy relatif à* (10.1) *se trouve dans* $L_2^{m+n,\infty}(\tilde{C}')$ *où* $\tilde{C}'$ *est défini par* $\tilde{C}'=\tilde{C}\cap X'$.

Note 15.2 Ce théorème subsiste pour les systèms quasi-linéaires diagonaux, compte tenu des raisonnements développés au §6 de [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Goursat, Cours d'Analyse Mathématique, Tome 2, Paris, 1918, p. 374.
[2] P. D. Lax, Non linear hyperbolic equations, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 6, 1953, pp. 231-258.
[3] J. Leray, Equations hyperboliques non strictes: contre exemple du type de Giorgi, aux théorèmes d'existence et d'unicité, Math. Ann., Vol. 162, 1966 pp. 228-236.
[4] J. Leray et Y. Ohya, Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts, Colloque Belge sur l'Analyse Fonctionnelle, 1964, C.B.R.M., pp. 105-144.
[5] J. Leray et Y. Ohya, Equations et systèmes non linéaires, hyperboliques non stricts, Math. Ann., Vol. 170, 1967, pp. 167-205.
[6] J. Leray et L. Waelbroeck, Normes des fonctions composées, 1964, C.B.R.M.
[7] S. Mizohata, Analyticity of solutions of hyperbolic systems with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., Vol 14, 1961, pp. 547-559.
[8] Y. Ohya, Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques à caractéristique multiple, Jour. Math. Soc. Japan, Vol 16, 1964, pp. 268-286.
[9] L. Schwartz, Functional Analysis, Cours professé à New York, 1964.