J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
13-3 (1973) 557-578

Problème de Riemann et fonctions automorphes provenant des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables

Par

Toshiaki TERADA

(Reçu le 12, Décembre 1972)

Introduction

On sait que Riemann [8] a donné un nouveau point de vue aux fonctions hypergéométriques $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. En 1857 il a établi que, si une fonction à deux branches linéairement indépendantes a les trois points critiques 0, 1, ∞ et les exposants convenables relatifs à ces points, elle remplit nécessairement une équation différentielle hypergéométrique et par suite elle est une fonction hypergéométrique. Ensuite en 1873 Schwarz [9], à la recherche des conditions sous lesquelles $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ soit une fonction algébrique, a trouvé les cas particuliers où l'invertion du quotient de deux solutions d'une équation hypergéométrique définit une fonction automorphe sur le cercle unité.

Picard a généralisé ces travaux à deux variables. En donnant les exposants aux plans critiques ($x=0$, $x=1$, $x=\infty$, $x=y$, $y=0$, $y=1$, $y=\infty$) dans l'espace d'Osgood $(P^1)^2$, il a déterminé univoquement un système complètement intégrables d'équations différantielles dont une solution n'était autre chose qu'une série hypergéométrique d'Appell $F(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, x, y)$ [1], et remarqué qu'elle a une représentation intégrale du type d'Euler [3]. Puis il a montré que l'invertion de l'application à l'espace projectif définie par les trois solutions linéairement indépendantes donne des fonctions automorphes pourvu que les exposants soient bien choisis [4], [6], [7].

Ces travaux donnent des exemples de fonctions intéressantes et des méthodes de les trouver, qui sont importants pour les théories actuelles de fonctions analytiques de plusieurs variables. Alors nous allons essayer de les étendre aux plusieurs variables. Dans §1, en donnant convenablement les monodromies locales, nous déterminons un système de Pfaff complètement intégrable, dont une solution est une fonction hypergéométrique $F_D(\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \gamma, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ etudiée par Lauricella [2]. Elle a une représentation intégrale du type d'Euler aux notations près

$$F_D=\text{const.}\int u^{\lambda_0-1}(u-x_1)^{\lambda_1-1}, \ldots\ldots, (u-x_n)^{\lambda_n-1}(u-1)^{\lambda_{n+1}-1}du.$$

Ses propriétés sont examinées en détail dans §2. Grâce aux résultats dans §2, dans §3 on peut construire des fonctions automorphes sur la boule unité.

Or M. G. Shimura [10] a présenté quelques exemples de groupes discontinus dont le domaine est la boule unité, et le corps de fonctions automorphes est purement transcendental. Un de ces exemples est le premier où le domaine fondamental est compact au cas de deux variables. Or tous les nôtres ont le corps purement transcendental de fonctions et une partie desquels ont le domaine fondamental compact.

§1. Problème de Riemann.

On se donne les surfaces caractéristiques

$$S_{ij}=\{(x)\,;\, x_i=x_j\} \quad (i,j=0,1,\ldots\ldots,n+1,\infty, x_0=0, x_{n+1}=1, x_\infty=\infty)$$

et un domaine

$$D=(P^1)^n-\bigcup_{0\leq i,j\leq n+1} S_{ij}$$

dans l'espace d'Osgood $(P^1)^n$ à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et des constantes complexes $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$. Puis on pose $\lambda_\infty=n+1-\sum_{0\leq\alpha\leq n+1}\lambda_\alpha$ et $\lambda_{ij}=$

$\lambda_i+\lambda_j-1$ $(i,j=0,1,\dots,n+1,\infty,i\neq j)$ et on note $\mathring{S}_{ij}=\{(x);\ (x)\in S_{ij},\ x_i\neq x_\alpha\ (\alpha\neq i,j)\}$. Et considérons une fonction $F(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1};\ x_1,\ x_2,\dots,x_n)$ holomorphe sur l'espace $\tilde{D}$ de recouvrement universel de D qui satisfait les conditions;

1° Les $n+2$ branches arbitraires sur D sont linéairement dépendantes.

2° Il existe $n+1$ branches linéairement indépendantes.

3° Sur chaque $\mathring{S}_{ij}\,(i,j\neq\infty)$, il exste un point P_{ij} et son voisinage tels que, si λ_{ij} n'est pas un entier, toutes les branches soient engendrées par les combinaisons linéaires des branches de F

$$F_{ij1},\ F_{ij2},\ \dots,\ F_{ijn},\ (x_i-x_j)^{\lambda_{ij}}F_{ijn+1}$$

où $F_{ij\alpha}$ $(1\leqslant\alpha\leqslant n+1)$ sont holomorphes sur ce voisinage, et si λ_{ij} est un entier, on remplace $(x_i-x_j)^{\lambda_{ij}}F_{ijn+1}$ par $(x_i-x_j)^{\lambda'_{ij}}F_{ijn+1}$ et F_{ijn} par $(x_i-x_j)^{\lambda'_{ij}}F_{ijn+1}\log(x_i-x_j)+(x_i-x_j)^{\lambda''_{ij}}F'_{ijn}$, où $2\lambda'_{ij}=\lambda_{ij}+|\lambda_{ij}|$, $2\lambda''_{ij}=\lambda_{ij}-|\lambda_{ij}|$. Quant à $S_{i\infty}$, $\left(\dfrac{1}{x_i}\right)^{\lambda_i-1}F$ a les pareilles monodromies où on remplace x_i-x_j par $\dfrac{1}{x_i}$.

Dans ce qui suit, les fonctions $f_1,f_2,\dots,f_{m+2}$ étant données, notons par exemple,

$$\frac{D(f_1,f_2,\dots,f_{m+2})}{D(1,x_{i_1},\dots,x_{i_m},(x_i,x_j))}=\begin{vmatrix} f_1, & f_2 & \cdots\cdots & f_{m+2} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_{i_1}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_{m+2}}{\partial x_{i_1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f_{m+2}}{\partial x_i\partial x_j}, & \dfrac{\partial^2 f_{m+2}}{\partial x_i\partial x_j} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 f_{m+2}}{\partial x_i\partial x_j}\end{vmatrix}.$$

Soient $F_1,F_2,\dots,F_{n+1}$ des branches linéairement indépendantes, F étant une combinaison linaire de F_i $(1\leqslant i\leqslant n+1)$ d'après la deuxième condition, on a

$$\frac{D(F,F_1,F_2,\dots,F_{n+1})}{D(1,x_1,x_2,\dots,x_n,(x_i,x_j))}=0.$$

Envisageons d'abord le cas où $i\neq j$. Ces équations s'ecriront sous les formes

$$(*)\quad (x_i-x_j)\frac{D(F, F_1, F_2, \ldots, F_{n+1})}{D(1, x_1, x_2, \ldots, x_n, (x_i, x_j))}\prod_{0\leq\alpha<\beta\leq n+1}(x_\alpha-x_\beta)^{1-\lambda_{\alpha\beta}}$$

$$=A_{ij}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{1\leq\alpha\leq n}B_{ij\alpha}\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}+C_{ij}F=0.$$

Comme une substitution linéaire de $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ rend ces coéfficients invariants à un facteur constant près, en remplaçant les F_α $(1\leqslant\alpha\leqslant n+1)$ par le système de générateurs à chaque P_{ij} $(0\leqslant i, j\leqslant\infty, i\neq j)$ donnés au début, on peut voir facilement que ces coefficients sont méromorphes en tous les P_{ij} et, par suite, de la pseudoconvexité de domaines de méromorphie, ils sont des fonctions rationnelles. Examinons-les d'abord en supposant qu'aucun des λ_{ij} ne soit pas un entier.
Puisque

$$(x_i-x_\alpha)^{1-\lambda_{i\alpha}}\frac{D(F_{i\alpha 1}, F_{i\alpha 2}, \ldots, (x_i-x_\alpha)^{\lambda_{i\alpha}}F_{i\alpha n+1})}{D(1, x_1, \ldots, x_n)}$$

et

$$\prod_{0\leq\alpha\leq n+1, \alpha\neq i}(x_i-x_\alpha)^{1-\lambda_{i\alpha}}\cdot\frac{D(x_{ii}^{\lambda-1}F_{i\infty 1}, \ldots, x_i^{-\lambda}{}_\infty F_{i\infty n+1})}{D(1, x_1, \ldots, x_n)}$$

sont réguliers à $\mathring{S}_{i\alpha}$ $(0\leqslant\alpha\leqslant n+1)$, et à $\mathring{S}_{i\infty}$ respectivement, on a

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_{n+1})}{D(1, x, \ldots, x_n)}=\text{const.}\prod_{0\leq\alpha<\beta\leq n+1}(x_\alpha-x_\beta)^{\lambda_{\alpha\beta}-1}.$$

Or comme $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ sont linéairement indépendantes, cette constante n'est pas zéro. Sinon, on aurait par exemple,

$$F_{n+1}=\sum_{1\leq\alpha\leq n}c_\alpha F_\alpha, \quad \frac{\partial F_{n+1}}{\partial x_i}=\sum_{1\leq\alpha\leq n}c_\alpha\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\quad (1\leqslant i\leqslant n),$$

où c_α sont holomorphes. En prenant les dérivées par rapport à x_j $(1\leqslant j\leqslant n)$, on aurait $\sum_{1\leq\alpha\leq n}\frac{\partial c_\alpha}{\partial x_j}F_\alpha=0$. Donc, un des F_α $(1\leqslant\alpha\leqslant n)$, serait une combinaison linéaire des autres à coefficients dans les fonctions holomorphes. Par récurrence on a une contradiction.

De la même manière, on a

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n+1})}{D(1, x_1, \ldots, \hat{x}_\alpha, \ldots, (x_i, x_j))} = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq i, j) \\ \dfrac{b_{ij\alpha} x_\alpha + c_{ij\alpha}}{x_i - x_j} G & (\alpha = i, j) \end{cases}$$

où $\quad G = \prod_{0 \leq \alpha < \beta \leq n+1} (x_\alpha - x_\beta)^{\lambda\alpha\beta - 1}$,

et $\quad \dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n+1})}{D(x_1, \ldots, x_n, (x_i, x_j))} = \dfrac{c_{ij}}{x_i - x_j} G$

où $b_{ij\alpha}$, $c_{ij\alpha}$, c_{ij} sont des constantes.

Au cas où $i = j$, on a tout à fait pareillement, en posant

$$H_i^{-1} = \prod_{0 \leq \alpha \leq n+1, \alpha \neq i} (x_i - x_\alpha)$$

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n+1})}{D(1, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, (x_i, x_i))} = A_i G H_i$$

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n+1})}{D(1, x_1, \ldots, \hat{x}_k, \ldots, (x_i, x_i))} = x_k(x_k - 1) B_{ik} G H_i$$

et $\quad \dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n+1})}{D(x_1, \ldots, x_n, (x_i, x_i))} = C_i G H_i$

où A_i est un polynôme d'ordre n en x_i et d'ordre un en tout x_α $(\alpha \neq i)$, et B_{ik} est un polynôme d'ordre $n-2$ en x_i et d'ordre un en tout x_α $(\alpha \neq i, k)$ et indépendant de x_k, et c_i est un polynôme d'ordre $n-1$ en x_i et d'ordre un en tout x_α $(\alpha \neq i)$, dont, en train de calculer B_{ik}, on utitise une propriété élémentaire de déterminants.

Examinons-les plus précisément.

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n+1})}{D(1, x_1, \ldots, \hat{x}_\alpha, \ldots, (x_i, x_j))} \equiv 0 \quad (\alpha \neq i, j)$$

induit $\quad \dfrac{D(F_{ij1}, F_{ij2}, \ldots, F_{ijn})}{D(1, x_1, \ldots, \hat{x}_\alpha, \ldots, x_n)} = 0 \quad$ sur S_{ij}.

Comme j est arbitraire pourvu qu'il ne soit pas égal à i, 0, $n+1$ ni ∞, on a

$$B_{i\alpha} = b_{i\alpha} \prod_{1 \leq \beta \leq n, \beta \neq i, \alpha} (x_i - x_\beta)$$

où $b_{i\alpha}$ est une constante. Quant à A_i, on a

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_{n+1})}{D(1, x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, (x_i, x_i))} = (-1)^{n-i}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_{n+1})}{D(1, x_1, \dots, x_n)}\right.$$

$$\left.+\sum_{1\le\alpha\le n, \alpha\neq i}(-1)^{n-\alpha+1}\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_{n+1})}{D(1, x_1, \dots, \hat{x}_\alpha, \dots, x_n, (x_i, x_\alpha))}\right]$$

$$=(-1)^{n-i}\left[\sum_{0\le\alpha\le n+1, \alpha\neq i}\frac{\lambda_{\alpha i}-1}{x_i-x_\alpha}-(-1)^{n-\alpha+1}\sum_{1\le\alpha\le n, \alpha\neq i}\frac{b_{i\alpha\alpha}x_\alpha+c_{i\alpha\alpha}}{x_i-x_\alpha}\right]G.$$

Puisque l'équation

$$(**)\qquad \frac{D(F, F_1, F_2, \dots, F_{n+1})}{D(1, x_1, x_2, \dots, x_n, (x_i, x_i))}=0$$

a une solution $F_{i\alpha n+1}(x_i-x_\alpha)^{\lambda i\alpha}$, on a $b_{i\alpha\alpha}=0$. L'équation (*) a une solution $F_{ijn+1}(x_i-x_j)^{\lambda_{ij}}$, on a

$$(-1)^{n-i}c_{iji}-(-1)^{n-j}c_{ijj}=\lambda_{ij}-1.$$

Dès maintenant il faut distinguer les cas où $n=2$ et où $n\geq 3$.

Au dernier cas, on différentie l'équation (*) par une troisième variable x_k et, en changeant i, j, et k cycliquement, on a trois équations d'ordres trois. En les additionnant, et en substituant les termes d'ordre 2 par ceux d'ordre 1, on a une équation aux dérivees partielles d'ordre un. $\dfrac{D(F_1, F_2, \dots, F_{n+1})}{D(1, x_1, \dots, x_n)}$ n'étant pas zéro, tous les termes sont nuls d'où on a la première équations de (***). Donc, $\dfrac{D(F_{ij1}, \dots, F_{ijn})}{D(x_1, \dots, x_n)}$ étant nul sur S_{ij}, on a $C_i=c_i\prod_{\alpha\neq 0, n+1, i}(x_i-x_\alpha)$.

De ce qu'on a déjà vu et de ce que (**) a une solution $F_{ijn+1}\left(\dfrac{1}{x_j}\right)^{\lambda\infty}$, on a finalement,

$$(***)\begin{cases} (x_i-x_j)\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}+(\lambda_j-1)\dfrac{\partial F}{\partial x_i}-(\lambda_i-1)\dfrac{\partial F}{\partial x_j}=0 \quad (i\neq j) \\ x_i(x_i-1)\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}+\left[x_i(x_i-1)\displaystyle\sum_{1\le\alpha\le n,\ \alpha\neq i}\frac{1-\lambda_\alpha}{x_i-x_\alpha}+\lambda_0+\lambda_i-2\right. \\ \qquad \left.+(4-\lambda_0-2\lambda_i-\lambda_{n+1})x_i\right]\dfrac{\partial F}{\partial x_i}+(\lambda_i-1)\displaystyle\sum_{1\le\alpha\le n, \alpha\neq i}\frac{x_\alpha(x_\alpha-1)}{x_i-x_\alpha}\frac{\partial F}{\partial x_\alpha} \\ \qquad +\lambda_\infty(1-\lambda_i)F=0 \end{cases}$$

Au cas où $n=2$, on a, (**) ayant des solutions $F_{i\infty 1}\left(\dfrac{1}{x_i}\right)^{1-\lambda_i}$ et

$F_{i\infty n+1}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{1-\lambda_i}$ et $\lambda_{i\infty}$ n'étant pas un entier, $b_{i\alpha}=(-1)^{n+\alpha-1}(\lambda_i-1)$. Comme $(*)$ a une solution $F_{i\infty 1}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{1-\lambda_i}$, on a $C_{ij}\equiv 0$. Et par le même raisonnement que du cas où $n\geq 3$, on a le système d'equations $(***)$.

Au cas où quelques-uns de $\lambda_{\alpha\beta}$ sont des entiers, on a aussi le systmème $(***)$. Pour le prouver, il ne faudra qu'un peu de modification des démonstrations ci-dessus.

Ce système d'équations est déjà examiné par Lauricella [2]. En 1893 il a défini quelques séries hypergéométriques en imitant les méthodes d'Appell. Une d'eux est que voici;

$$F_D(\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \gamma, x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$=\sum \frac{(\alpha, m_1+m_2+\cdots+m_n)}{(\gamma, m_1+m_2+\cdots+m_n)} \frac{(\beta_1, m_n)\dots(\beta_n, m_n)}{(1, m_1)\dots(1, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n},$$

où $(\alpha, m)=\alpha(\alpha+1), \dots, (\alpha+m-1)$. De plus il a montré qu'elle est une solution de $(***)$ avec $\alpha=\lambda_\infty$ $\gamma=\lambda_\infty+\lambda_{n+1}$ et $\beta_i=1-\lambda_i (1\leq i\leq n)$, et qu'elle a une représentation intégrale du type d'Euler

$$F_D=\text{const.}\int_1^\infty u^{\lambda_0-1}(u-x_1)^{\lambda_1-1}, \dots, (u-x_n)^{\lambda_n-1}(u-1)^{\lambda_{n+1}-1}\, du,$$

où le chemin est le long de la droite réelle si $\mathrm{Re}\lambda_i>0$ $(0\leq i\leq\infty)$

Ainsi nous arriverons au

Théorème 1. *Si aucun de λ_i $(0\leq i\leq\infty)$ n'est pas un entier, la fonction définie au début remplit le système d'équations $(***)$ qui a $n+1$ solutions linéairement indépendantes, une desquelles est donnée par la série hypergéométrique qui a une représentation intégrale. Réciproquement, en changeant les chemins de cette intégrale, on obtient les $n+1$ solutions linéairement indépendantes, et ces solitions remplissent les conditions données au début.*

Corollaire 1. *Soient $F_1, F_2, \dots, F_{n+1}$ des solutions de $(***)$ linéairement indépendantes. Alors on a*

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_{n+1})}{D(1, x_1, \dots, x_n)} = \text{const.} \prod_{0 \le \alpha < \beta \le n+1} (x_\alpha - x_\beta)^{\lambda_{\alpha\beta}-1},$$

Corollaire 2. *$F_{ij\alpha}$ $(1 \leq \alpha \leq n+1)$ ne s'annule pas identiquement sur S_{ij}.*

En effet, la première partie du théorème et les corollaires sont les conséquences immédiates des travaux de Lauricella et de ce qu'on vient de voir. Et la deuxième sera démontrée complètement dans §2.

§2. Propriétés de l'intégrale du type d'Euler.

Ici examinons les propriétés de l'ingégrale

$$I = \int \varphi(u)du$$

où $\quad \varphi(u) = u^{\lambda_0 - 1}(u - x_1)^{\lambda_1 - 1} \cdots\cdots (u - x_n)^{\lambda_n - 1}(u - 1)^{\lambda_{n+1} - 1}.$

D'abord donnons les générateurs du group fondamental π_1 de D. Soit $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ un point fixé de D. On marque sur le plan de la variable u les points $x_0^{(0)}(=0)$, $x_1^{(0)}, \dots, x_2^{(0)}, x_n^{(0)}, x_{n+1}^{(0)}(=1), x_\infty^{(0)}(=\infty)$, et on décrit une courbe fermée de Jordan $C^{(0)}$ qui passe tous ces points en suivant cet ordre. Et on note $U^{(0)}$ le domaine entouré par $C^{(0)}$ qui se situe à gauche de $C^{(0)}$. Puis on décrira une courbe $u = \pi_{ij}^{(0)}(t)$ $(1 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq \infty,\ i \neq j,\ 0 \leq t \leq 1)$ définie comme suite: Elle part de $x_i^{(0)}$, se dirige vers $x_j^{(0)}$ en passant en dehors du domaine $U^{(0)}$, tourne autout de $x_j^{(0)}$ au sense positif, et retourne à $x_i^{(0)}$ suivant inversement le premier chemin. Et notons π_{ij} la classe d'homotopie des chemins sur D représsentée par la courbe $x_\alpha = x_\alpha^{(0)}$ $(\alpha \neq i)$, $x_i = \pi_{ij}^{(0)}(t)$. Il est facile de voir que ces π_{ij} $(i < j)$ engendrent le group fondamental π_1, et de plus les π_{jk} où $i < j$ forment une base du groupe de l'homologie de dimension une à coefficient dans les entiers.

Une fois fixés les générateurs du groupe fondamental, on va faire varier $(x^{(0)})$, $C^{(0)}$ et $U^{(0)}$. Soit l_0 une courbe partant de (x^0), alors on peut, pour tout point $(x) \in l_0$, décrire une courbe C et fixer le domaine U qui varient continument par rapport à (x). Ainsi il y a une correspondance biunivoque entre le recouvrement universel $\tilde{D}$ et l'ensemble des paires (C, U) à l'homotopie près qui fixe les points x_i $(0 \leq i \leq \infty)$ sur le plan de u. En effet, soit l; $x_i = x_i(t)$ $(1 \leq i \leq n,\ 0 \leq t \leq 1,\ x_i(0) = x_i(1) = x_i^{(0)})$ une courbe fermée sur D. On peut faire correspondre à chaque t une courbe $C^{(t)}$: $u = u(t, s)$ $(0 \leq s \leq 1)$ sur le plan de u où $u(t, s)$ est continue par rapport à (t, s) et il y a les constants $s_0(=0) < s_1 < \dots < s_{n+1} < s_\infty < 1$ tels que $u(t, s_i) = x_i(t)$ $(0 \leq i \leq \infty)$. Cela posé, il est évident que $l \sim 0$ (homotope) induit $C^{(0)} \sim C^{(1)}$. Réciproquement si $C^{(0)} \sim C^{(1)}$, on peut supposer que $C^{(0)} = C^{(1)}$. Alors, c'est une application continue d'un tore T au plan de u. Plongeons (einbetten) T convenablement dans l'espace euclidien réel à trois dimensions et on peut étendre cette application dans le domaine qu'entoure ce tore de façon que, pour chaque t fixé, elle soit un homéomorphisme à $U^{(t)}$. En retractant T convenablement en un cercle, on peut retracter la courbe l en le point $x^{(0)}$.

Notons $\mu_{i_0 i_1 \dots i_p} = \exp 2\pi\sqrt{-1}\,(\lambda_{i_0} + \lambda_{i_2} + \dots + \lambda_{i_p})$ et posons

$$\omega_i = \mu_{01 \dots i-1} \int \varphi(u)\,du \quad (1 \leq i \leq \infty)$$

où le chemin de l'intégrale est une courbe fermée qui tourne une fois autour de x_0, x_i, x_0 et x_i respectivement au sense positif, positif, négatif et négatif respectivement, en passant seulement dans U et près de x_0 et de x_i, et la branche de $\varphi(u)$ est choisie arbitrairement une fois pour toutes. Alors, ce qu'on vient de voir indique le moyen de calculer les substitutions $\rho_{ij}\omega_\alpha$ des ω_α $(1 \leq \alpha \leq \infty)$ par rapport aux π_{ij}, qui est la méthode de Picard [5].

Nous la présenterons succinctement. Il suffit de considérer au cas où $0 < \mathrm{Re}\lambda_i < 1$ $(0 \leq i \leq \infty)$ et de la prolonger analytiquement, puisque l'intégrale I dépend analytiquement de ces paramètres. Posons

$$\omega_{0i} = \int_0^{x_i} \varphi(u)\,du = \frac{1}{\mu_{01 \dots i-1}(1-\mu_0)(1-\mu_i)}\,\omega_i$$

où le chemin passe dans U. On a d'abord $\rho_{ij}\omega_{ok} = \omega_{ok}$ et par suite

$$\rho_{ij}\omega_k = \omega_k \quad (k \neq i, j,\ j \neq 0, \infty),$$

parce que la branche de $\varphi(u)$ sur ce chemin peut être invariant par le tour de x_i le long du $\pi_{ij}(t)$. Quant à ω_{ij}, divisons le chemin en trois parties; une courbe de x_0 au près de x_j n'en coupant pas $\pi_{ij}(t)$, celle jusqu'à x_i en passant en dehors de U et du domaine U_{ij} entouré par $\pi_{ij}(t)$ et contenant x_j, et celle de x_i jusqu'à x_j en passant dans U_{ij}. Si on calcule cette intégrale explicitement, on a

$$\rho_{ij}\omega_j=\omega_j+\mu_i(1-\mu_j)\omega_i-(1-\mu_i)(1-\mu_j)\sum_{\substack{i<\alpha<j\\ \text{ou } j<\alpha<i}}\omega_\alpha-(1-\mu_i)\omega_j$$

Comme l'intégrale le long de la courbe C en dehors de U étant nulle, on a $\sum_{1\leq\alpha\leq n+1}\omega_\alpha+\omega_\infty=0$, et par suite

$$\begin{aligned}\rho_{ij}\omega_i&=\omega_i-\rho_{ij}\omega_j+\omega_j\\ &=\omega_i-\mu_i(1-\mu_j)\omega_i+(1-\mu_i)(1-\mu_j)\sum_{\substack{i<\alpha<j\\ \text{ou } j<\alpha<i}}\omega_\alpha+(1-\mu_i)\omega_j\end{aligned}$$

Pareillement, on a

$$\begin{aligned}&\rho_{i\infty}\omega_j=\frac{1}{\mu_i}\omega_j\ (i\neq j),\\ &\rho_{i\infty}\omega_i=\frac{1}{\mu_i}((\mu_i-1)\sum_{1\leq\alpha\leq i}\omega_\alpha+\mu_{i\infty}\omega_i+\mu_\infty(\mu_i-1)\sum_{i<\alpha\leq n+1}\omega_\alpha),\\ &\rho_{i0}\omega_j=\omega_j-\mu_{01\dots j-1}(1-\mu_j)((1-\mu_i)\sum_{1\leq\alpha<i}\omega_\alpha+\omega_i)\quad(j\neq i),\\ \text{et}\quad&\rho_{i0}\omega_i=\omega_i-(1-\mu_0+(1-\mu_i)\mu_{01\dots i-1})((1-\mu_i)\sum_{1\leq\alpha<i}\omega_\alpha+\omega_i).\end{aligned}$$

Ainsi nous avons une représentation linéaire ρ du groupe fondamental π_1. On note $\omega=(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{n+1})$ et on pose

$${}^t(\rho_{ij}\omega_1,\dots,\rho_{ij}\omega_{n+1})=\rho^\omega{}_{ij}\,{}^t(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{n+1})$$

où $\rho^\omega{}_{ij}$ est une matrice carrée d'ordre $n+1$.

Montrons maintenant que ρ est irréductible si aucun de λ_i $(0\leq i\leq\infty)$ n'est pas un entier. En effet, soit $f_0=\sum_{i=1}^{n+1}a_i\omega_i$ une fonction non zéro contenue dans un espace V invariant par ρ. On peut supposer que $a_1=1$ parce que, si $a_i\neq0$ pour un i et $a_1=0$, il suffit de remplacer f_0

par $\rho_{ij}\frac{f_0}{\mu_i(1-\mu_i)a_i}$. Si tous les $a_i(1\leq i\leq n+1)$ ne sont pas égaux à 1, on peut supposer que $a_2\neq a_1=1$ parce que, si $1=a_1=a_2=\cdots=a_{i-1}\neq a_i$ il ne faut que remplacer f_0 par $\rho_{2i}f_0$. Posons $f_1=\rho_{12}f_0-f_0=(1-a_2)$ $[\mu_1(1-\mu_2)\omega_1+(1-\mu_1)\omega_2]$, alors $\rho_{10}f_1-f_1=(1-\mu_0)(1-\mu_1)\mu(1-a_2)\omega_1$ est contenu dans V. Il en est de même de $(1-\mu_2)\omega_2=\rho_{12}\omega_1+\mu_1(1-\mu_2)\omega_1$: de suite en suite on voit que tout $\omega_i\,(1\leq i\leq n+1)$ est contenu dans V. Si tous a_i sont égaux à 1, en opérant $\rho_{1\infty}$ à f, on voit que ω_1 est contenu dans V. En conséquence on a la

Proposition 1. *La représentation ρ est irréductible, et en conséquence $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{n+1}$ sont des solutions linéairement indépendantes du système d'équations* (***).

En effet, la première partie vient d'être démontrée. L'indépendance linéaire est parallèlement montrée. Et grâce à Lauricella [2], une branche de $\omega_\infty-\omega_{n+1}=-\sum_{1\leq i\leq n+1}\omega_i$ est une solution, ce qui montre la deuxième partie vu la première.

Cherchons maintenant la forme quadratique invariante par cette représentation ρ (qui est unique à un facteur réel près s'il existe parce que ρ est irréductible) et ses valeurs propres au cas où tous les λ_i sont réels. Après une suite de calculs directs, on a une matrice hermitienne $A=(a_{\alpha\beta})$ telle que

$$^t(\rho_{ij}^{\omega}\,{}^t\omega)A\overline{(\rho_{ij}^{\omega}\,{}^t\omega)}=\omega A\omega^* \quad (1\leq i\leq n,\ 0\leq j\leq\infty,\ i\neq j)$$

$$\text{où}\qquad a_{\alpha\beta}=\begin{cases} a & (\alpha<\beta)\\ \dfrac{\bar a-\mu_i a}{1-\mu_i} & (\alpha=\beta=i)\\ \bar a & (\alpha>\beta)\end{cases}\qquad (a=\sqrt{\mu_\infty})$$

Puis examinons les nombres de ses valeurs propres positives et négatives respéctivement. La représentation ρ étant irréductible, la matrice A n'a pas de valeurs propres zéro parce que l'espace propre en est invariant par ρ. Donc, ces nombres sont invairant pourvu que $(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1},\lambda_\infty)$ reste dans un domaine $n_i<\lambda_i<n_i+1$ où n_i sont des entiers. En

conséquence, pour savoir ces nombres, il suffit de les chercher quand λ_i prennent des valeurs particulières. D'abord posons $\lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda_{n+1}=\lambda$, $\mu=\exp 2\pi\sqrt{-1}\lambda$ et

$$f_k(r,\lambda)=\det\begin{pmatrix} r-b & -a & \ldots & -a \\ -\bar{a} & r-b & \ldots & -a \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ -\bar{a} & -\bar{a} & \ldots & r-b \end{pmatrix}$$

où $a=\sqrt{\mu_\infty}=\mu^{(n+2)/2}$, $b=\dfrac{a-a\mu}{1-\mu}=\dfrac{-\sin(n+1)\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}$ et l'ordre de cette matrice est $k+1$. $f_n(r,\lambda)$ n'est autre chose que le polynôme caractéristique de A (avec $\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_{n+1}=\lambda$), et

$$\frac{\partial f_n^{(n-k)}}{\partial r}(r,\lambda)|_{r=0}=\frac{n!}{k!}f_k(0,\lambda).$$

Par les relations de récurrence

$$f_{k+1}(r,\lambda)=(r-b+\bar{a})f_k+\mu^{n+2}(b-a-r)^k(-1)^{k+1},$$

on a $\quad f_k(0,\lambda)=\dfrac{\sin\pi\lambda(n+1-k)\sin^k\pi\lambda(n+2)}{\sin^{k+1}\pi\lambda}.$

Si on pose $\lambda=\dfrac{m}{n+2}+\varepsilon$ où m est un entier tel que $0\leq m\leq n+1$ et ε (>0) est choisi suffisamment petit tel que $(n+1-k)\lambda$ ne soit pas un entier pour tout k ($=0, 1, \ldots, n$), le singe de $f_k(0,\lambda)$ est égale à celle de $(-1)^{m(k+1)}\sin\left(\varepsilon-\dfrac{m(k+1)}{n+2}\pi\right)$. Par les changements des signes des $f_k(0,\lambda)$ et par le lemme suivant, si $m<(n+2)<m+1$, l'équation $f(r,\lambda)=0$ a justement m racines positives si m est paire et elle en a $n+1-m$ si m est impaire.

Lemme 1. *Soit $f(r)=r^{n+1}+a_0r^n+a_1r^{n-1}+\ldots+a_n$ un polynôme à coefficients réels non nuls dont l'équation $f(r)=0$ possède seulement des racines réelles. Supposons que, i croissant de zéro à n, les signes de a_i changent m fois. Alors, si $a_0>0$, cette équation a justement m racines positives et, si $a_0<0$, elle en a $m+1$.*

La démonstration se fait par l'induction relative à n.

Comme la matrice A dépend seulement des μ_α $(0\leq\alpha\leq n+1)$, on a la

Proposition 2. *Susppons que tous les* λ_α $(0\leq\alpha\leq\infty)$ *soient réels et aucun n'en est pas un entier, et posons* $\lambda_\infty=(n+2)d+\lambda_\infty^{(0)}$ *où* d *est un entier et* $-1<\lambda_\infty^{(0)}<n+1$. *Alors, si* $m-1<\lambda_\infty^{(0)}<m$, *il y a des solutions* $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{n+1}$ *de* $(***)$ *telles que la forme hermitienne*

$$|\Omega_1|^2+|\Omega_2|^2+\cdots+|\Omega_{n+1-m}|^2-|\Omega_{n+2-m}|^2-\cdots-|\Omega_{n+1}|^2$$

est invariante par la représentation ρ.

Maintenant nous allons examiner les aspects de ramification des solutions de $(***)$. Comme les hypersurfaces S_{ij} ne croisent pas en position générale, on repart de l'espace projectif P^n dont les coordonnées homogènes sont notées par $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ (quleque fois on posera $x_{n+1}\equiv 1$ et on considérera $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme un de système de coordonnées inhomogènes). Et designons

$$S_{i_0 i_1\cdots i_p}=\{(x)\colon x_{i_0}=x_{i_1}=\cdots=x_{i_p}\}^{1)}$$

et $$\lambda_{i_0 i_1\cdots i_p}=\lambda_{i_0}+\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_p}-p$$

Les points en problème sont sur un $\mathring{S}_{i_0 i_1\cdots i_p}$ $(p\geq 2)$ ou bien une partie commune des $S_{i_0 i_1\cdots i_p}$ $(p\geq 1)$. Alors si on pratique le σ-processus de Hopf a chaque $S_{i_0 i_1\cdots i_p}$ en l'ordre de p plus grands, dans l'espace modifié $\sigma(P^n)^{2)}$, surfaces modifiées $\sigma(S_{i_0 i_1\cdots i_p})^{2)}$ se croisent en position générale. En effet, c'est évident si $n=1$. Supposons que c'est vrai si les dimensions sont au plus $n-1$. Au cas de dimensions n, considérons par exemple $S_{012\cdots n}$ et posons $x_{n+1}\equiv 1$. Et pratiquons le σ-processus à l'origine en posant $\dfrac{x_1}{\xi_1}=\dfrac{x_2}{\xi_2}=\cdots=\dfrac{x_n}{\xi_n}$. A un point tel que $\xi_n\neq 0$, en posant $\xi_n=1$, on peut choisir $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, x_n)$ comme les coordonnées locales et, là, $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ s'exprime comme $x_n=0$ et chaque $x_i=x_j$ ont, par ces coordonnées, l'expression $\xi_i=\xi_j$ $(0\leq i, j\leq n$, $\xi_0\equiv 0$, $\xi_n\equiv 1)$. Alors le problème se réduit, localement, au cas de dimensions $n-1$, parce qu'on peut considérer séparément dans l'espace de la variable x_n et celui des $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$. Donc, par la récurence, l'énoncé est vrai localement. Or on peut unir ces σ-processus locaux sans difficultés[3], ce qui complète les démonstrations. Cela posé, il y a $2^{n+2}-(n+4)$ surfaces caractéristiques et il est évident que $\sigma(S_{i_0 i_1 \dots i_p}) \cap \sigma(S_{j_0 j_1 \dots j_q}) \neq \phi$, si et seulement si $\{i_1, i_0, \dots, i_p\} \cap \{j_0, j_1, \dots, j_q\} = \phi$, $\{i_0, i_1, \dots, i_p\} \subset \{j_0, j_1, \dots, j_q\}$ ou bien $\{i_0, i_1, \dots, i_p\} \supset \{j_0, j_1, \dots, j_q\}$ et que $\sigma(S_{01 \dots \hat{i} \dots n+1})$ correspond naturellement à $\mathring{S}_{i\infty}$.

Nous commençons par vérifier que la fonction F a les monodromies données. Les valeurs propres de $\rho^{\omega}{}_{ij}(1 \leqq i \leqq n,\ 0 \leqq j \leqq n+1,\ i \neq j)$ sont μ_{ij} et n-ple de 1, et celles de $\rho^{\omega}_{i\infty}(1 \leqq i \leqq n)$ sont μ_∞ et n-ple de $\frac{1}{\mu_i}$. La forme canonique de Jordan de $\rho^{\omega}{}_{ij}$(resp. $\rho^{\omega}{}_{i\infty}$) est diagonale si $\mu_{ij} \neq 1$ (resp. si $\mu_{i\infty} \neq 1$) et autrement elle est $E \dot{+} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left(\text{resp.} \frac{1}{\mu_i}\left(E \dot{+} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right)$ où E est la matrice unité. En se servant de ces propriétés de matrices $\rho^{\omega}{}_{ij}$ et an calculant les ordres par l'intégration, on peut savoir les états des ω_i $(1 \leqq i \leqq n+1)$ au voisinage de $\mathring{S}_{ij}$[4];

En $\mathring{S}_{ij}$ $(i, j \neq 0, \infty)$, $\omega_\alpha(\alpha \neq i, j)$ et $\omega_i + \omega_j$ sont holomorphes, et si $\mu_{ij} \neq 1$, $F_{ij} = \mu_i(1-\mu_j)\omega_i - (1-\mu_i)(1-\mu_j) \sum\limits_{\substack{i<\alpha<j \\ \text{ou } j<\alpha<i}} \omega_\alpha - (1-\mu_j)\omega_j$ correspond à $F_{ijn+1}(x_i - x_j)^{\lambda_{ij}}$ et, si $\mu_{ij} = 1$, F_{ij} et ω_j correspond respectivement à $F_{ijn+1}(x_i - x_j)^{\lambda'_{ij}}$ et à $(x_i - x_j)^{\lambda'_{ij}} F_{ijn+1} \log(x_i - x_j) + (x_i - x_j)^{\lambda''_{ij}} F_{ijn}$.

En $\mathring{S}_{i0}$, $\omega_k - \dfrac{1-\mu_k}{1-\mu_k} \mu_{jj+1 \dots k-1} \omega_j$ $(j, k \neq i, j < k)$ et $(1-\mu_0 + (1-\mu_i)\mu_{01 \dots i-1})\omega_j - \mu_{01 \dots j-1}(1-\mu_j)\omega_i$ sont holomorphes, et $F_{i0} = \sum\limits_{\alpha<i} (1-\mu_i)\omega_\alpha + \omega_i$ et ω_i si $(i \neq 1$, si $i = 1$, on pose $F_{i0} = \omega_2 - (1-\mu_1)\omega_1)$ correspondent aux dernières deux fonctions ci-dessus.

En $\mathring{S}_{i\infty}$, $\left(\dfrac{1}{x_i}\right)^{\lambda_i - 1} \omega_\alpha(\alpha = 1; \dots, \hat{i}, \dots, n+1)$ sont holomorphes et $\left(\dfrac{1}{x_i}\right)^{\lambda_i - 1}$ $[(\mu_{i\infty} - 1)\omega_i - (1-\mu_i) \sum\limits_{\alpha<i} \omega_\alpha + \mu_\infty(\mu_i - 1) \sum\limits_{\alpha>i} \omega_\alpha]$ et $\left(\dfrac{1}{x_i}\right)^{\lambda_i - 1} \omega_i$ correspondent aux dernières deux fonctions ci-dessus.

Ce qu'on vient de voir montre que les énoncés de §1 sont complètement affirmés. Puis on va faire les recherches des monodromies à $\sigma(\mathring{S}_{i_0 i_1 \dots i_p})$ $(p \geqq 2)$ et à $\mathring{S}_{0n+1}$. Pour cela, il suffit de considérer seulement $\sigma(\mathring{S}_{01\ldots m})$ $(m\leq n)$ et $\mathring{S}_{01}$ parce que, si, en décrivant la courbe C sur le plan de u, on change l'ordre des $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}, x_\infty$, on peut facilement les savoir sur les autres $\sigma(\mathring{S}_{i_0 i_1\ldots i_p})$.[5)]

En $\mathring{S}_{01\ldots m}$, posons $x_{n+1}\equiv 1$ et $\dfrac{\xi_1}{x_1}=\dfrac{\xi_2}{x_2}=\cdots=\dfrac{\xi_{m-1}}{x_{m-1}}=\dfrac{1}{x_m}$ Alors on a

$$I=\int u^{\lambda_0-1}(u-\xi_1 x_m)^{\lambda_1-1}\ldots(u-\xi_{m-1}x_m)^{\lambda_{m-1}-1}\\ \times(u-x_m)^{\lambda_m-1}(u-x_{m+1})^{\lambda_{m+1}-1}\ldots(u-1)^{\lambda_{n+1}-1}\,du$$

et, en posant $u=u'x_m$,

$$I=x_m^{\lambda_{01\cdots m\,n+1}}\int u'^{\lambda_0-1}(u'-\xi_1)^{\lambda_1-1}\ldots(u'-\xi_{m-1})^{\lambda_{m-1}-1}(u'-1)^{\lambda_m-1}\\ \times\left(u'-\frac{1}{x_m}\right)^{\lambda_{m+1}-1}(u'x_m-x_{m+1})^{\lambda_{m+1}-1}\ldots(u'x_m-x_n)^{\lambda_n-1}\,du.$$

Donc, on voit que, par l'intégrale première[5)], $\omega_i-\omega_j$ $(i,j=m+1,\ldots n+1,\infty)$ sont holomorphes en $\sigma(\mathring{S}_{01\ldots m})$ et, par la deuxième, $x_m^{-\lambda_{01\cdots m}}$ ω_k $(k=1,\ldots,m)$ sont holomorphe et $x_m^{-\lambda_{01\cdots m}}[(\mu_{01\cdots m-1})\omega_{n+1}+\sum_{\alpha\leq m}(1-\mu_{n+1})\omega_\alpha]$ et $x^{-\lambda_{01\cdots m}}\omega_{n+1}$ joue le rôle des dernières deux fonctions à $\mathring{S}_{ij}$. En effet, si les chemins d'intégrales sont bien choisies, et si x_{m+1}, $x_{m+2}, \ldots, x_n$ sont suffisamment grands, $(u'x_{m+1}-x_{m+1})^{\lambda_{m+1}-1}(u'x_{m+2}-x_{m+2})^{\lambda_{m+2}-1}, \ldots, (u'x_n-x_n)^{\lambda_n-1}$ est holomorphe. En la développant en série de Taylor, on peut considérer l'intégrale I comme l'intégrale du type d'Euler à moins dimensions. Par la pseudoconvexité on obtient le résultat ci-dessus.

En S_{0n+1} un de $1, 2, \ldots, n$, disons i, n'étant pas nul, si on pose $x_i=1$ et regarde $(x_1, x_2, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})$ comme un système de coordonnées inhomogènes. on a facilement

$$I=x_{n+1}^{\lambda_\infty}\int u^{\lambda_0-1}(u-x_1)^{\lambda_1-1}\ldots(u-1)^{\lambda_i-1}\ldots(u-x_{n+1})^{\lambda_{n+1}-1}\,du$$

et par suite on voit facilement les états des ω_i $(1\leq i\leq n+1)$ en $x_{n+1}=0$.

Maintenant, si aucun de $\lambda_{i_0\cdots i_p}$ n'est pas un entier, on peut savoir la monodromie aux points communs des quelques $\sigma(S_{i_0\cdots i_p})$, en se servant des expression ci-dessus et en remarquant ce que, comme le groupe fondamental local est commutatif, on peut diagonaliser simultanément tous les éléments du groupe de monodromie locale. Or nous n'allons qu'en présenter quelques exemples parce qu'il sera seulment ennuyeux de décrire le cas général.

En $\sigma(S_{01\cdots m})\cap\sigma(S_{m+1\ m+2\cdots n+1})$[6], les générateurs de $\omega_i\ (1\leq i\leq n+1)$ sont donnés par une fonction holomorphe, m fonctions en forme de $x_m^{\lambda_{01\cdots m}}\times$(fonct. holom.) et $(n-m)$ fonctions en forme de $(x_n-1)^{\lambda_{m+1\cdots n+1}}\times$(fonct. holom.) où on a eu posé $x_{n+1}=1$, $\dfrac{\xi_i}{x_i}=\dfrac{1}{x_m}\ (1\leq i\leq m-1)$ et $\dfrac{\eta_j}{x_j-1}=\dfrac{1}{x_n-1}\ (m+1\leq j\leq n-1)$, et adopté $\xi_1,\ldots,\xi_{m-1},x_m,\eta_{m+1},\ldots,\eta_{n-1},x_n-1$ comme les coordonnées locales.

En $\sigma(S_{01\cdots l})\cap\sigma(S_{01\cdots m})$[6] $(l<m)$, les $\omega_i\ (1\leq i\leq n+1)$ sont engendrés par $(n+1-m)$ fonctions holomorphes, $(m-l)$ fonctions en forme de $x_m^{\lambda_{01\cdots m}}\times$(fonct. holom.) et l fonctions en forme de $\xi_l^{\lambda_{0\cdots l}}x_m^{\lambda_{01\cdots m}}\times$(fonct. holom.) où on a eu posé $x_{n+1}=1$, $\dfrac{\xi_i}{x_i}=\dfrac{1}{x_m}\ (1\leq i\leq m-1)$ et $\dfrac{\eta_j}{\xi_j}=\dfrac{1}{\xi_l}\ (1\leq j\leq l-1)$, et adopté $\eta_1\ldots\eta_{l-1}\xi_l\ldots\xi_{m-1}x_m\ldots x_n$ comme les coordonnés locaux. Si quelques-uns des $\lambda_{i_0\cdots i_p}$ sont des entiers, les circonstances sont plus compliquées mais il ne sera pas très difficile de déterminer exactement les aspects de ramification. Cependent nous ne le donnons pas en détail parce qu'on n'a pas besoin pour le moment.

3. Fonctions automorphes.

Etant données les solutions linéairement indépendantes

$$\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{n+1}$$

du système d'équations (***), puisque

$$\frac{D(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{n+1})}{D(1,x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\text{const}\prod_{0\leq\alpha<\beta\leq n+1}(x_\alpha-x_\beta)^{\lambda_{\alpha\beta}-1}$$

par le corollaire 1, elles donnent une application analytique ω de l'espace de recouvrement universel de D à l'espace projectif de dimension n, et de plus elle est localement biunivoque. Donc on peut considérer l'application inverse ω^{-1} qui est généralement multiforme. Notre problème actuel est de chercher les conditions sous lesquelles cette application ω^{-1} est uniforme et de déterminer son domaine. Par le corollaire 2 [7], on voit que, pour cela, tous les $\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_p}$ doivent être égaux respectivement à l'inverse d'un entier[8] ou zéro, sinon il existerait deux points qui correspondent à un même point au voisinage de $\sigma(S_{i_0 i_1 \cdots i_p})$, qui est montré directement ou (si $\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_p}$ est un entier) par le théorème de Rouché. Dans la suite, supposons que $n \geqq 2$. Alors pour que ces conditions soient remplies, il faut que $0 < \lambda_i < 1$ $(0 \leq i \leq \infty)$. En effet, comme $-\frac{1}{2} \leq \lambda_i + \lambda_\infty - 1 \leq \frac{1}{2}$ $(0 \leq i \leq n+1)$, en additionnant pour tout i, on a $\lambda_\infty < 1$. Et si $\lambda_\infty < 0$, on aurait $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i >$ $n+1$ et un des λ_i, disons j, sera plus grand que $\frac{n+1}{n+2}$. Encore en additionnant $\lambda_i + \lambda_j - 1 \leq \frac{1}{2}$ pour tout i $(0 \leq i \leq n+1)$ on a une contradiction.

Sous ces conditions, si tous les λ_i sont des nombres rationnels, les ω_i sont regardés comme des périodes d'une forme différentielle de première espèce d'une courbe algébrique définie par

$$v = \varphi(u) = u^{\lambda_0 - 1}(u - x_1)^{\lambda_1 - 1} \dots (u - x_n)^{\lambda_n - 1}(u - 1)^{\lambda_{n+1} - 1}$$

Soient $\omega_1', \omega_2', \dots, \omega'_{2g}$ un système fondamental des périodes de la forme $\psi(u)du$, où g est le genre. Alors grâce à Riemann, il y a une forme hermitienne $A_0 = (a_{0\alpha\beta})$ invariante par le changement de système de cycles telle que

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2g} a_{0\alpha\beta} \omega'_\alpha \overline{\omega'_\beta} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{1 \leq i \leq g} (\omega'_j \overline{\omega'_{g+i}} - \omega'_{g+i} \overline{\omega'_i}) > 0$$

Puisque tous les ω'_j sont une combinaison linéaire des $\omega_i (1 \leq i \leq n)$, il existe une forme hermitienne par rapport aux ω_i qui est invariante par la représentation ρ, et comme, ρ étant irréductible, telle forme est unique à un facteur réel près, donc elle n'est autre chose que A. Donc, si on prend le nouveau système de solutions $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{n+1}$ données dans la proposition 2, on a (comme $0 < \lambda_\infty < 1$),

$$|\Omega_1|^2 + \Omega_2|^2 + \cdots + |\Omega_n|^2 - |\Omega_{n+1}|^2 < 0$$

On le voit facilement si on calcule la valeur de $\omega A\omega^*$ à $S_{01\dots n}$ en posant $\lambda_i=\dfrac{n+1/2}{n+1}$ $(1\leq i\leq n)$ et $\lambda_{n+1}=1/4$ et remarque que $\omega A\omega^*$ dépend continument de chaque λ_i.
Par suite on obtient une application

$$\Omega=(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{n+1})$$

de $\tilde{D}$ a l'espace projectif dont l' image de $\tilde{D}$ est contenue dans la boule unité B.

Jusqu'ici on a vu qu'il faut que $0<\lambda_i<1$ et $\lambda_{i_0 i_1\dots i_p}$ soient respectivement l'inverse d'un entier[8] ou zéro pour que l'invertion d'application Ω soit uniforme, et qu'en ce cas l'image est contenue dans la boule unité B. Mais l'auteur ne sait pas encore si ces conditions sont suffisantes ou non. Pour cette raison nous nous bornons maintenant à donner quelques examples.

D'abords préparons les lemmes,

Lemme 2. (*a*) *Soient* $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$ *les fonctions holomorphes définies dans* $\{0<|x_i|<|\ 1\leq i\leq n\}$. *Si*

$$\frac{D(f_1, \dots, f_{n+1})}{D(1, x_1, \dots, x_n)}=x_1^{\frac{1}{p_1}-1} x_2^{\frac{1}{p_2}-1}\cdots x_r^{\frac{1}{p_r}-1} f(x_1\dots x_n)$$

où f *est holomorphe et ne s'annule pas à l'origine, en posant*

$$x_1=\xi_1^{p_1},\ x_2=\xi_2^{p_2},\ \dots,\ x_r=\xi_r^{p_r},\ x_{r+1}=\xi_{r+1},\ \dots,\ x_n=\xi_n,$$

$\dfrac{D(f_1, \dots, f_{n+1})}{D(1, \xi_1, \dots, \xi_n)}$ *est holomorphe et ne s'annule pas à l'origine.*

(*b*) *Soient* $f_1, f_2, \dots, f_n$, h *des fonctions holomorphes à l'origine de l'espace des n variables* $x_1, x_2, \dots, x_n$. *Et posons* $f_{n+1}=f_n \log x_1+h$. *Si* $\dfrac{D(f_1, f_2, \dots, f_{n+1})}{D(1, x_1, \dots, x_n)}=\dfrac{1}{x_1}f(x_1\dots x_n)$ *où* f *est holomorphe et ne s'annule jamais, et si une forme*

$$\sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}f_j\Big|^2-\Big|\sum_{j=1}^{n+1} a_{n+1j}f_j\Big|^2,$$

dont tous les a_{in+1} *ne sont pas nuls est invariante par les changements des branches de log* x_1, $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}|\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}f_j|^2}{|\sum_{j=1}^{n} a_{n+1j}f_j|^2}$ *est bien définie au voisinage de* $x_1=0$ *et,* x_i *tendant vers zéro, elle converge uniformément localement à* 1.

En effet, (a) est évident si on remarque le fait que $\dfrac{D(f_1,\ldots,f_{n+1})}{D(1,\xi_1,\ldots,\xi_n)}$ $=\dfrac{D(f_1,\ldots,f_{n+1})}{D(1,x,\ldots,x_n)}\cdot\dfrac{D(x_1,\ldots,x_n)}{D(\xi_1,\ldots,\xi_n)}$. Par la première condition de (b), f_n ne s'annule jamais sur $x_1=0$, et la deuxieme assure que $\sum_{i=0}^{n}|a_{i0}|^2-|a_{n+10}|^2=0$. Donc on a le résultat désiré.

Si tous les λ_i $(0\leq i\leq n+1)$ sont rationnels, les ramifications du domaine riemannien obtenu par la prolongement analytique simultanée des ω_i $(0\leq i\leq n+1)$ sont, si on le considère dans $\sigma(P^n)$, logarithmiques (si $\lambda_{i_0i_1\cdots i_p}$ est un entier) ou bien algébriques et uniformisables (si $\lambda_{i_0i_1\cdots i_p}$ n'est pas un entier), ce qui est facilement montré par les résultats de §2. Donc désignons W la variété obtenue en les uniformisant, et τ la projection naturelle de W sur $\sigma(P_n)$.

Lemme 3. *Supposons que* $0<\lambda i<1$ $(0\leq i\leq\infty)$ *et l'application* Ω *puisse se définir partout sur* W, *qu'elle soit localement biunivoque, et que, pour toute suite* $\{P_\nu\}_{\nu=1,2,\ldots}$ *de points de* W *dont tous les points d'accumulatoin de* $\{\tau(P_\nu)\}$ *se situe sur* $\bigcap_{i_0,i_1,\cdots,i_p}\{\sigma(S_{i_0i_1\cdots i_p});\lambda_{i_0i_1\cdots i_p}$ *est un entier*$\}$, *tous les points d'accumulation de* $\{\Omega(P_r)\}$ *se situe sur la sphère unité. Alors l'application* Ω^{-1} *est uniforme et définie partout sur la boule unité et elle décide les fonctoins automorphes, dont le groupe est l'image du groupe fondamental* π_1 *de* D *par la représentation* ρ, *dont un domaine fondamental est l'image par* Ω *d'un domaine sur* W *dont l'image par* τ *recouvre tout* $\sigma(P^n)$ *d'une manière univalente, et dont le corps de fonctions est isomorphe au corps de toutes les fonctions méromorphes sur*

$$\sigma(P^n)-\bigcup_{i_0,i_1,\cdots,i_p}\{\sigma(S_{i_0i_1\cdots i_p});\ \lambda_{i_0i_1\cdots i_p}\ \textit{est un entier}\}.$$

Et s'il existe une variété V_ψ et une application birationnelle ψ de $\sigma(P^n)$ à V_ψ de facon que l'image par ψ de tout $\sigma(S_{i_0 i_1 \cdots i_p})$ dont $\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_p}$ est un entier soit une sous-variété de codimension au moins deux, le corps de fonctions automorphes est purement transcendental.

En effet, soit Q_0 un point de l'image par Ω. Au voisinage de Q_0, Ω est bien défini. Soit L une courbe partant de Q_0 et se dirigeant jusqu'à un point Q. Supposons que la prolongement analytique est possible partout sur L sauf Q. $\Omega^{-1}(L)$ est une courbe sur W et $\tau\Omega^{-1}(L)$ a au moins un point d'accumulation P. Si P est sur un $S_{i_0 i_1 \cdots i_p}$ dont $\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_p}$ est un entier, Q est sur la sphère unité. Autrement, notons $\{P_\nu\}_{\nu=1,2,\ldots}$ la pré-image de P par τ et Q_ν l'image de P_ν par Ω. Si on choisit un voisinage M de P suffisamment petit, les composants M_ν de $\tau^{-1}(M)$ qui contiennent P_ν sont disjointes et l'application Ω restreinte à un de M_ν est biunivoque. Comme les M_ν se transforment mutuellement par l'opération du groupe fondamentat π_1 et il en est de même de leurs images N_ν par l'opération de la représentation ρ de π_1, Ω restreint à un M_ν quelconque est biunivoque. Or, comme ρ rend invariant la forme $\sum_{i=1}^{n}|\Omega_i|^2-|\Omega_{n+1}|^2$, tous les N_ν sont congruents par rapport à la distance de Bergman-Poincaré. Donc si, Q ne se trouve pas sur la sphere unite ∂B, Q est contenu dans un N_ν. Ω transformant M_ν à N_ν isomorphiquement, Ω^{-1} peut se prolonger analytiquement aussi en Q. En consequence Ω^{-1} est défini partout dans la boule unité B. Comme la boule unite B est simplement connexe, Ω^{-1} est uniforme dans B. Le dernier énoncé est assuré par la pseudoconvexité de domaines de méromorphie, et les autres énoncés sont évidents.

Si $n=2$ et tous les λ_{ij} $(0\leq i, j\leq\infty,\ i\neq j)$ sont égaux respectivement à l'inverse d'un entier positif[8] ou à zéro, ou si $n=3$ et tout λ_i est égal à 2/3, le lemme 2 assure toutes les conditions du lemme 3. Pour le voir, il ne faut que remarquer qu'aucune des surfaces de ramification logarithmique ne se croisent pas mutuellement, et que, $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, x_n)$ étant des coordonnés locales d'un point de $\mathring{S}_{01\cdots n}$ par exemple, remplacer Ω_i ($1\leq_f\leq n+1$) par $x_n^{-\lambda_{01\cdots n}}\ \Omega$ et calculer

$$\frac{D(x_n^{-\lambda_{01\cdots n}}\Omega_1,\dots,x_n^{-\lambda_{01\cdots n}}\Omega_{n+1})}{D(1,\xi_1,\dots,\xi_{n-1},x_n)}$$

Exemple. On obtient les fonctions automorphes dont le corps est tout purement transcendental, si $n=3$ et

(1) $\lambda_i=2/3$ $(0\leq i\leq 4)$

ou si $n=2$ et les λ_i prennent les valeurs ci-dessous

(2) $\lambda_i=3/5$ $(0\leq i\leq 3)$, (3) $\lambda_i=5/8$ $(0\leq i\leq 3)$,
(4) $\lambda_i=5/9$ $(0\leq i\leq 3)$, (5) $\lambda_0=1/2$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=7/12$,
(6) $\lambda_i=7/12$ $(0\leq i\leq 3)$, (7) $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=5/8$ $\lambda_3=5/12$
(8) $\lambda_0=7/15$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3/5$, (9) $\lambda_0=\lambda_1=2/3$, $\lambda_2=\lambda_3=7/12$
(10) $\lambda_i=2/3$ $(0\leq i\leq 3)$ (11) $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=1/2$ $\lambda_3=2/3$
(12) $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=2/3$, $\lambda_3=7/12$ (13) $\lambda_0=\lambda_1=1/2$, $\lambda_2=\lambda_3=2/3$
(14) $\lambda_1=\lambda_2=3/4$, $\lambda_0=\lambda_3=1/2$

En effet, le problème est seulement relatif à la rationalité du corps de fonctions, Elle est évident pour (2)$\sim$(9) parce que le domaine fondamental est compact. Pour les autres, on peut construire facilement la variété V_ψ et l'application ψ.

Les exemples (2), (3), (7) et (10) sont trouvés par Picard, et l'auteur pense que les exemples (1), (2), (10) et (14) correspondent respectivement à (2), (4), (1) et (3) de M. G. Shimura.

UNIVERSITE DE KYOTO

Bibliographies

[1] P. Appell, Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables. Jour. de Math. 3^e sér. t. **VIII**, 1882, 173–216.

[2] G. Lauricella, Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili. Rendiconti di Palermo t. **VII**, 1893, 111–158.

[3] E. Picard, Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques, Ann. Ecole Norm. sur. II, 10, 1881, 304–322.

[4] ——————, Sur les fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires, Acta Math. **2**, 1883, 114–126.

[5] ————, Sur les groupes de certaines équations differentielles linéaires, Bull. des Sci. Math. Sér. II, T. **9**, 1885, 202–209.

[6] ————, Sur les fonctinos hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables, Ann. Ecole Norm. sup. III, 2, 1885, 357–384

[7] ————, Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques deux variables, Bull. Soc. Math. de France 15, 1887, 148–152.

[8] B. Riemman, Beiträge zur Theorie der durch die Gaussische Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ darstellbaren Functionen. Abh. König. Ges. Wiss. Göttingen Bd. 7.

[9] H. A. Schwarz, Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussishe hypergeometrische algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt, Jour. de Crelle t. **54**, 1873, 292–335,

[10] G. Shimura. On purely transcendental fields of automorphic functions of several variables, Osaka Jour. Math. 1, 1964, 1–14.

Notes

1) On note $\mathring{S}_{i_1 i_2 \cdots i_p} = \{(x);\ (x) \in S_{i_0 i_1 \cdots i_p},\ x_{i_0} \neq x_j$ pour tout $j \neq i_0, i_1, \ldots, i_p\}$

2) Exactement dire, $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \cdots \circ \sigma_n$ où σ_α $(2 \leq \alpha \leq n)$ est l'ensemble de σ-processus par rapport à chaque $\sigma_{\alpha+1} \circ \sigma_{\alpha+2} \circ \ldots \circ \sigma_n(S_{i_0 i_1 \cdots i_\alpha})$.

3) En effect, par exemple, au voisinage de $S_{10 \cdots n}$,

$$\frac{\eta_1}{x_1} = \frac{\eta_2}{x_2} = \cdots = \frac{\eta_{n-1}}{x_{n-1}} \quad \text{équivaut à} \quad \frac{\eta_1}{\xi_1} = \frac{\eta_2}{\xi_2} = \cdots = \frac{\eta_{n-1}}{\xi_{n-1}}$$

4) On peut confondre $\mathring{S}_{ij}$ *et* $\sigma(\mathring{S}_{ij})$.

5) Exactement dire, il faut prende les branches convenables. Mais ce que nous intéresse est les ramifications de ω en block.

6) Exactement, il faut en enlever les sous-variétés.

7) L'énoncé analogue au corollaire 2 est vrai aussi à $\sigma(\mathring{S}_{i_0 i_1 \cdots i_p})$. $(p \geqq 2)$.

8) Il faut exclure 1 et -1.