J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
22-2 (1982) 333-368

Sur le problème de Cauchy pour une classe des opérateurs différentiels du type faiblement hyperbolique

Par

Shigeo TARAMA

(Reçu par Prof. M. Yamaguti, le 26 mars 1981)

§ 1. Introduction.

On considère le problème de Cauchy non-caractéristique pour l'opérateur différentiel du type faiblement hyperbolique dont les racines caractéristiques se touchent à l'ordre infini, et on cherche les conditions sur les termes d'ordres inférieurs pour que ce problème soit bien posé au sens de C^{∞}*). L'article précédent [8] a traité l'exemple

$$
(1.1)\quad \begin{cases} \left\{\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^2-\exp\left(-\dfrac{2}{t^n}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2+at^l\exp\left(-\dfrac{1}{t^n}\right)\dfrac{\partial}{\partial x}\right\}u=f(t, x), \quad t\geq 0 \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^{i-1}u(0, x)=\phi_i(x), \quad i=1, 2 \end{cases}
$$

et montré le résultat suivant; pour que le problème de Cauchy (1.1) soit bien posé, il faut et il suffit que $l\geq -n-1$ au cas où Re $a\neq 0$ et que $l\geq -2n-1$ au cas où Re $a=0$, ici on suppose que $n>0$ et que $a\neq 0$. D'autre part, pour le problème de Cauchy:

$$
(1.2)\quad \begin{cases} \left\{\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^2-\exp\left(-\dfrac{2}{x^{2n}}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2+ax^l\exp\left(-\dfrac{1}{x^{2n}}\right)\dfrac{\partial}{\partial x}\right\}u=f(t, x) \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^{i-1}u(0, x)=\phi_i(x) \quad (i=1, 2), \end{cases}
$$

la condition $l\geq -2n$ est nécessaire et suffisante pour que ce problème soit bien posé. Dans cet article, on considère une classe des opérateurs hyperboliques qui contient ces deux exemples. Plus précisément, on traite les opérateurs dont la partie principale:

*) Dans la suite on ne considère "bien posé" qu'au sens de C^{∞}, alors on ne répète pas le terme "C^{∞}".

$$p_m(t, x; \tau, \xi) = \tau^m + \sum_{\substack{j+|\alpha|=m \\ j \leq m-1}} a_{j,\alpha}(t, x)\tau^j \xi^\alpha$$

se factorise

$$p_m(t, x; \tau, \xi) = \prod_{i=1}^{m} (\tau - \sigma_1(t)\sigma_2(x)\mu_i(t, x; \xi))$$

où $\bar{p}_m(t, x; \tau, \xi) = \prod_{i=1}^{m} (\tau - \mu_i(t, x; \xi))$ est le polynôme régulièrement hyperbolique et que les fonctions à valeurs réeles $\sigma_1(t)$ et $\sigma_2(x)$ ont les propriétés pareilles à celles de $\exp\left(-\frac{1}{t^n}\right)$ ou de $\exp\left(-\frac{1}{x^{2n}}\right)$, ou bien elles sont constantes.

Au cas où $\sigma_1(t) = t^l$ et $\sigma_2(x) = \sigma_0(\neq 0)$, on sait déjà la condition nécessaire et suffisante sur les termes d'ordres inférieurs pour que le problème de Cauchy soit bien posé (voir p. ex. Tahara [7], Uryu [9], Yamamoto [11]) et aussi la construction de parametrix pour ce problème même au cas où $\sigma_2(x)$ n'est pas constante. (voir Nakamura-Uryu [2], Shinkai [6], Shinkai-Taniguchi [6 bis]). Tahara [7] et Uryu [10] traitent le cas où $\sigma_1(t)$ a le point de zéro d'ordre infini aussi. Mais l'exemple (1.1) *n*'est pas complètement compris dans leurs considérations.

En interprêtant la signification des quantités $t^{-n-1}\exp\left(-\frac{1}{t^n}\right)$, $t^{-2n-1}\exp\left(-\frac{1}{t^n}\right)$ et $x^{-2n}\exp\left(-\frac{1}{x^{2n}}\right)$ qui apparaissent aux conditions pour les exemples (1.1) et (1.2), on conclut le suivant: le problème

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \sigma_1^2(t)\sigma_2^2(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + a(t, x)\frac{\partial}{\partial x}\right]u = f \\ &u(0, x) = \phi_1(x), \quad \partial_t u(0, x) = \phi_2(x) \end{aligned}$$

est bien posé si $a(t, x)$ remplit pour k, $l = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^l \operatorname{Im} a(t, x)\right|$$

$$\leq C_{k,l}\left(|\log \sigma_1^2\sigma_2^2| \left|\frac{\sigma_1' + \sigma_1}{\sigma_1}\right|\right) \left|\frac{\sigma_1' + \sigma_1}{\sigma_1}\right|^k \left(\frac{|\sigma_2'| + |\sigma_2|}{|\sigma_2|}\right)^l |\sigma_1\sigma_2|$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^l \operatorname{Re} a(t, x)\right|$$

$$\leq C_{k,l}\left[\left(|\log \sigma_1^2\sigma_2^2| + \left|\frac{\sigma_1' + \sigma_1}{\sigma_1}\right|\right)\right] \left|\frac{\sigma_1' + \sigma_1}{\sigma_1}\right|^k \left(\frac{|\sigma_2'| + |\sigma_2|}{|\sigma_2|}\right)^l |\sigma_1\sigma_2|$$

Le but de cet article est essentiellement de démontrer le résultat ci-dessus.

§2. Notations et l'énoncé du résultat.

Soit Ω une bande $[0, T] \times R^n$ où $T > 0$. Notons $C^\infty(X)$ l'espace des fonctions infiniment dérivables sur X; $C_0^\infty(X)$ le sous-espace de $C^\infty(X)$ qui consiste en éléments à support compact; $B(X)$ le sous-espace de $C^\infty(X)$ composé des éléments qui sont bornés sur X et dont toutes les dérivées le sont aussi; $H^s(R^n)$ l'espace complété de $C_0^\infty(R^n)$ par la norme $\|u\|_s^2=(u, u)_s=\int (1+|\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)\overline{\hat{u}(\xi)}d\xi$ où $\hat{u}(\xi)$ est la transformation de Fourier de u; $H^\infty(R^n)=\bigcap_s H^s(R^n)$; $C^m([0, T], H^s(R^n))$ l'espace des fonctions m fois continument dérivables de $[0, T]$ à $H^s(R^n)$; $C^\infty([0, T], H^\infty(R^n))=\bigcap_{m=0}^\infty [\bigcap_s C^m([0, R], H^s(R^n))]$.

Soit U un vecteur ou une matrice. Quand toutes composantes sont dans l'espace E, on le désigne par $U\in E$. Surtout si U est un vecteur de composantes $u_1, u_2,\dots, u_m$, on pose $\|U\|_s^2=(U, U)_s=\sum_{i=1}^m (u_i, u_i)_s$.

Pour un multi-indice α: un n-tuple d'entier non négatif, on pose $|\alpha|=\sum_{i=1}^n \alpha_i$,

$$D_x^\alpha=D_{x_1}^{\alpha_1}\cdots D_{x_n}^{\alpha_n}.\ ^{*)}$$

On considère deux fonctions à valeurs réelles $\sigma_1(t)$ et $\sigma_2(x)$ qui appartiennent à $B([0, T])$ et à $B(R^n)$ respectivement et satisfont aux suivants:

i)

(2.1) $\sigma_1(t)$ est une constante, ou

$\sigma_1(0)=0,\quad \frac{1}{2}>\sigma_1(t)>0$ pour $t>0$, et $\sigma_1'(t)\geq 0$ sur $[0, T]$

(2.1′) $|\sigma_2(x)|<\frac{1}{2}$.

ii) Pour tout entier positif k, il existe une constante C_k telle que l'on a, quand on pose $\sigma_1'=\frac{d}{dt}\sigma_1$,

$$(2.2)\qquad \left|\left(\frac{d}{dt}\right)^k\sigma_1(t)\right|\leq C^k\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)^{k-1}(\sigma_1+\sigma_1')\quad t\in]0, T]$$

surtout si $k=2$, on peut prendre $C_2=2-\varepsilon$ où ε est un nombre positif.

Pour tout multi-indice α, il existe une constante C_α telle que l'on a

$$(2.2')\qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\sigma_2(x)\right|\leq C_\alpha\left(\frac{|\nabla\sigma_2(x)|+|\sigma_2(x)|}{|\sigma_2(x)|}\right)^{|\alpha|-1}(|\nabla\sigma_2(x)|+|\sigma_2(x)|)$$

dans $\{x: \sigma_2(x)\neq 0\}$, où $|\nabla\sigma_2(x)|^2=\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_2(x)\right|^2$.

iii) Pour tout entier positif k,

(2.3) $\left|\left(\frac{\sigma_1'(t)}{\sigma_1(t)}\right)\right|^k\sigma_1(t)$ est borné sur $]0, T]$. Pour tout entier positif k,

(2.3′) $\left(\frac{|\nabla\sigma_2(x)|+|\sigma_2(x)|}{|\sigma_2(x)|}\right)^k|\sigma_2(x)|$ est borné dans $\{x: \sigma_2(x)\neq 0\}$

D'après les propriétés ci-dessus, on voit que $\sigma_1(t)$ et $\sigma_2(x)$ n'ont que les points de

---

*) $D_t=\frac{1}{i}\frac{1}{\partial t}\quad D_{x_k}=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$

zéro à l'ordre infini, c'est-à-dire, si $\sigma_1(0)=0$, alors $\left(\frac{d}{dt}\right)^k\sigma_1(0)=0$ pour $k=1, 2,\ldots,$ de même, si $\sigma_2(x_0)=0$, on a $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\sigma_2(x_0)=0$ pour tout multi-indice α. En effet, pour tout ε nombre positif et tout k entier positif, les inégalités suivantes découlent de (2.2), (2.3), (2.2′) et de (2.3)′.

$$\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^k\sigma_1(t)\right|\le C_{\varepsilon,k}\sigma_1(t)^{1-\varepsilon} \quad \text{sur} \quad]0, T] \tag{2.4}$$

$$\sum_{|\alpha|=k}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\sigma_2(x)\right|\le C_{\varepsilon,k}|\sigma_2(x)|^{1-\varepsilon} \quad \text{dans} \quad \{x: \sigma_2(x)\neq 0\} \tag{2.4'}$$

où $C_{\varepsilon,k}$ est une constante positive.
On remarque à la fin qu'il existe une constante positive C telle que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{3t}\frac{\sigma_1^2(t)}{\sigma_1'(t)+\sigma_1(t)}\right)\ge C\sigma_1(t) \quad \text{sur} \quad]0, T]. \quad (\text{vu } (2.2)) \tag{2.5}$$

Soit P l'opérateur différentiel:

$$P=\sum_{j+|\alpha|\le m} a_{j,\alpha}(t, x)D_t^k D_x^\alpha \quad \text{où} \quad a_{m,0}\equiv 1\,;\ a_{j,\alpha}\in B(\Omega)$$

Supposons que P satisfasse aux hypothèses suivantes. On pose

$$Z=\{(t, x)\in\Omega: \sigma_1(t)\sigma_2(x)\neq 0\} \text{ et } p_m(t, x; \tau, \xi)=\sum_{j+|\alpha|=m} a_{j,\alpha}(t, x)\tau^j\xi^\alpha.$$

[H–1] Pour $(t, x; \xi)\in Z\times R^n$, on peut décomposer

$$p_m(t, x; \tau, \xi)=\prod_{i=1}^m(\tau-\lambda_i(t, x; \xi))$$

où $\lambda_i(t, x; \xi)$ est à valeurs réelles; il existe un nombre positif $\delta>0$ indépendant de $(t, x; \xi)$ et on a

$$|\lambda_i(t, x; \xi)-\lambda_j(t, x; \xi)|\ge\delta|\sigma_1(t)\sigma_2(x)||\xi| \tag{2.6}$$

pour tous i, j tels que $i\neq j$; où $|\xi|^2=\sum_{i=1}^n\xi_i^2$.
[H–2] Les coefficients de $p_m(t, x; \tau, \xi)$ remplissent les majorations:

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta a_{i,\alpha}(t, x)\right|\le C_{k,\beta}\left(\frac{|\nabla\sigma_2|+|\sigma_2|}{|\sigma_2|}\right)^{|\beta|}\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^k|\sigma_1\sigma_2|^{|\alpha|} \tag{2.7}$$

pour tout multi-indice α tel que $|\alpha|\ge 1$, tout multi-indice β, et tout entier $k\ge 0$.

On considere le problème de Cauchy non-caractéristique pour l'opérateur $P(t, x; D_t, D_x)$ qui satisfait aux hypothèses [H–1] et [H–2]:

$$[\mathrm{C}]\qquad \begin{cases} P(t, x; D_t, D_x)\, u=f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ D_t^j u(x, 0)=\phi_j(x), \quad j=0, 1,\ldots, m-1 \end{cases}$$

Pour ce problème on obtient le

Théorème 2.1. *Si les coefficients des termes d'ordres inférieurs de P satisfont les inégalités*

$$(2.8)\qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta a_{j,\alpha}(t,x)\right| \le C_{k,\beta}\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)^k\left(\frac{|\nabla\sigma_2|+|\sigma_2|}{|\sigma_2|}\right)^{|\beta|}\times$$

$$\left[|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)\right]^{m-j-|\alpha|}|\sigma_1\sigma_2|^{|\alpha|}$$

$$(2.9)\qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta \operatorname{Im} a_{m-1-|\alpha|,\alpha}(t,x)\right|$$

$$\le C_{k,\beta}\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)^k\left(\frac{|\nabla\sigma_2|+|\sigma_2|}{|\sigma_2|}\right)^{|\beta|}\left[|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|+\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right]|\sigma_1\sigma_2|^{|\alpha|}$$

pour tout multi-indice α *tel que* $|\alpha|\ge 1$, *et* $j+|\alpha|\le m-1$, *et pour tout entier* $k\ge 0$ *et tout multi-indice* β, *où* $C_{k,\beta}$ *est une constante ne dépandant que de k et de* β. *Alors, pour toutes les données de* $C^\infty(R^n)$ *et tout le second membre de* $C^\infty(\Omega)$, *il existe une et une seule solution du problème* [C] *dans* $C^\infty(\Omega)$. *Il existe un domaine d'influence aussi.*

Remarque. Tahara [7] et Uryu [10], en considérant ce genre de problème, introduisent les conditions pareilles à (2.8) et (2.9), mais elles ne contiennent pas de terme de logarithme. (voir aussi Nishitani [5]).

Pour démontrer le théorème 2.1, on montre l'inégalité d'énergie pour le problème de [C]. En utilisant cet inégalité on voit l'existence de la solution du problème [C] dans $C^\infty([0, T], H^\infty)$. Puis on montre qu'il existe le domaine d'influence.

§ 3. Quelques classes de symboles.

Dans cette section on introduit quelques classes des symboles dont on se sert dans les sections suivantes. Pour trois nombres réels m, ρ et δ et un nombre entier $k\ge 0$, on désigne par $S^{m;k}_{\rho,\delta}(t)$ la classe des symboles $\mu\in C^k(]0, T]; C^\infty(R^{2n}))$ tels que, pour tout nombre entier i: $0\le i\le k$ et tous les multi-indices α, β, il existe une constante $C_{i,\alpha,\beta}$ telle que

$$|\partial_t^i\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\mu(t,x;\xi)|\le C_{i,\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$$

$$\text{pour } (t,x;\xi)\in\,]0,T]\times R^n\times R^n.$$

On désigne par $\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)S^{m;0}_{\rho,\delta}(t)$ la classe des symboles μ tels que $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_1'}\right)\mu\in S^{m;0}_{\rho,\delta}(t)$. Posons $S^m_{\rho,\delta}(t)=\bigcap_{k=0}^\infty S^{m;k}_{\rho,\delta}(t)$.

Soit $\delta(t,x)$ une des fonctions suivantes:

$$\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)^\alpha\left(\frac{|(\nabla\sigma_2,\sigma_2)|}{|\sigma_2|}\right)^\beta,\quad\left[\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\right]^\alpha\quad\text{ou}$$

$$\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}+|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\right)\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)^{\alpha}|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|^{\beta}\left(\frac{|(\nabla\sigma_2,\sigma_2)|}{|\sigma_2|}\right)^{\gamma}\ {}^{*)}$$

où α, β, γ sont des nombres réels.

De (2.3) et de (2.3′), on voit que, pour tout nombre positif ε, $\delta(t, x)|\sigma_1\sigma_2|^{\varepsilon}\in C^{\infty}(\Omega)$ quand on pose $\delta(t, x)|\sigma_1\sigma_2|^{\varepsilon}=0$ pour $(t, x)\notin Z$.**)

Pour une couple de nombres réels (k, l), on désigne par $\delta S(k, l)$, la classe des symboles $\lambda\in C^{\infty}(Z\times R_{\xi}^{n})$ tels que, pour tout nombre entier i et tous multi-indices, α, β, il existe une constante $C_{i,\alpha,\beta}$ telle que

$$|\partial_t^i\partial_x^{\alpha}\partial_{\xi}^{\beta}\lambda(t, x;\xi)|\le C_{i,\alpha,\beta}\delta(t, x)\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^{i}\left(\frac{|\sigma_2|+|\nabla\sigma_2|}{|\sigma_2|}\right)^{|\alpha|}$$

$$|\sigma_1(t)\sigma_2(x)|^{k}(1+|\xi|)^{l-|\beta|},\quad \text{pour}\quad (t, x;\xi)\in Z\times R^n$$

Quand $\delta\equiv 1$, on écrit $S(k, l)$ au lieu de $1S(k, l)$.

Par définition, quand $\lambda\in S(k, l)$,

$$\partial_t^i\partial_x^{\alpha}\partial_{\xi}^{\beta}\lambda\in\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)^{i}\left(\frac{|(\nabla\sigma_2,\sigma_2)|}{|\sigma_2|}\right)^{|\alpha|}S(k, l-|\beta|).$$

Pour une couple de nombres réels $k>0$ et l, on désigne par $\delta(t, x)\bar{S}(k, l)$ une classe des symboles $\lambda\in C^{\infty}(]0, T]\times R^{2n})$ tels que

a) $\lambda\in S_{1,0}^{l}(t)$

b) pour tout entier $N\ge 0$, il existe $\phi_i\in\left(\frac{|\nabla\sigma_2|+|\sigma_2|}{|\sigma_2|}\right)^{i}\delta S(k, l-i)$ $i=0, 1\cdots N$ et $\psi_N\in S_{1,0}^{l-N-1}(t)$ tels que

$$\lambda=\sum_{i=0}^{N}\phi_i+\psi_N$$

On pose $\sigma_0(\lambda)=\phi_0$.

Par définition, si $k>0$, $\delta S(k, l)\subset\delta\bar{S}(k, l)$; ici pour $f\in\delta S(k, l)$ on pose $f=0$ sur $\{(t, x)\in\Omega;\ \sigma_1(t)\sigma_2(x)=0\}$.

Quand $p_i(t, x;\xi)\in\bar{S}(k_i, l_i)$ $i=1, 2$, on voit

$$p_1(t, x, D)p_2(t, x, D)\in\bar{S}(k_1+k_2, l_1+l_2)\quad \text{et}$$

on peut choisir $\sigma_0(p_1p_2)=\sigma_0(p_1)\sigma_0(p_2)$. Ici, $p(t, x, D)\in\bar{S}(k, l)$ signifine l'opérateur pseudo différentiel dont le symbole est à $\bar{S}(k, l)$.***)

On utilise le fait suivant : quand $a(t, x; D)\in(\bigcap_{\varepsilon>0}S_{1,\varepsilon}^{0}(t))\cap S(0, 0)$ et $b(t, x; D)\in S(1, 1)$, on a $ab\in\bar{S}(1, 1)$.

Dans la suite on écrit o.p.d. à la place de "opérateur pseudo-différentiel". Soient P, Q deux o.p.d., alors on désigne par $P\circ Q$ l'o.p.d. dont le symbol est le produit de ceux de P et de Q. A la fin, on pose $S^{-\infty,i}(t)=\bigcap_{m}S_{\rho,\delta}^{m,i}(t)$.

---

*) On définit $|(\nabla\sigma_2,\sigma_2)|=(|\nabla\sigma_2|^2+\sigma_2^2)^{1/2}$

**) Rappelons que $Z=\{(t, x)|\sigma_1(t)\sigma_2(x)\neq 0\}$.

***) $P(t, x, D)u=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}p(t, x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi$

§ 4. Réduction au système à premier ordre.

Dans la suite on suppose que l'opérateur satifasse aux hypothèses [H-1] et [H-2] et remplisse les conditions (2.8) et (2.9). Soient χ une fonction non-négative de $C_0^\infty(R)$ telle que $\chi=0$ hors de]-2, 2[et $\chi=1$ sur $[-1, 1]$; λ_i, $i=1, 2,\dots, m$ les racines caractéristiques de $p_m(t, x; \tau, \xi)$. Posons

$$\tilde{\lambda}_i(t, x; \xi)=\lambda_i(t, x; \xi)(1-\chi(|\xi|)).$$

De (2.6), (2.7) et de la définition de symboles, on voit

$$\tilde{\lambda}_i(t, x; \xi)\in S(1, 1). \tag{4.1}$$

On pose $A_i(t, x, D_x)=\tilde{\lambda}_i(t, x; D_x)$ $(i=1,\dots, m)$ et

$$L_i=(D_t-A_i(t, x; D_x))\cdots(D_t-A_1(t, x; D_x)) \qquad (i=1,\dots, m). \tag{4.2}$$

Par le calcul des o. p. d. et les propiétés de symboles définis à § 3,

$$L_i=D_t^i+\sum_{k=0}^{i-1} C_k^i(t, x; D_x)D_t^k \quad \text{où} \quad C_k^i(t, x; D_x)=\sum_{s=0}^{i-k-1} C_k^{i,s}(t, x; D_x) \tag{4.3}$$

$$C_k^{i,s}(t, x, \xi)\in\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)^s \bar{S}(i-k-s, i-k-s)$$

$$\sigma_0(C_k^{i,0})=(-1)^{i-k}\Sigma\,\tilde{\lambda}_{j_{i-k}}\cdots\tilde{\lambda}_{j_1} \quad \text{pour} \quad i\geq j_{i-k}>j_{i-k-1}>\cdots>j_1\geq 1.$$

Il existe les o. p. d. A_k^i $i=0,\dots, m-1$, $k=0, 1,\dots, i$, tels que

(4.4)

1) $A_i^i=I$

2) $A_k^i=\sum_{p=0}^{i-k-1} A_k^{i,p}(t, x; D_x)$, $\quad k=0, 1,\dots, i-1$

$$A_k^{i,p}(t, x; \xi)\in\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)^p \bar{S}(i-k-p, i-k-p)$$

3) $\sigma_0(A_k^{i,0})(t, x; \xi)$ est à valeurs réelles

et que l'on a

$$D_t^i=\sum_{k=0}^{i} A_k^i L_k, \quad \text{ici on pose } L_0\equiv I. \tag{4.5}$$

En notant que, si $\lambda\in\bar{S}(l, l)$ $\;l>1$,

$$\lambda-\sigma_0(\lambda)\in\left(\frac{|(\nabla\sigma_2, \sigma_2)|}{|\sigma_2|}\right)\bar{S}(l, l-1) \quad \text{et que}$$

$$\left(\frac{|(\nabla\sigma_2, \sigma_2)|}{|\sigma_2|}\right)\bar{S}(l, l-1)\subset\bar{S}(l-1, l-1), \quad \text{on voit}$$

$$P_m-L_m=\sum_{i=0}^{m-1} a_i^1(t, x; D_x)D_t^i+\sum_{i=0}^{m-2} a_i^2(t, x; D_x)D_t^i \tag{4.6}$$

où $a_i^1 \in S^{-\infty}(t)$

$$a_i^2 = \sum_{k=1}^{m-i-1} a_i^{2,k}$$

$$a_i^{2,k} \in \left[\frac{\sigma_1' + \sigma_1}{\sigma_1}\right]^k \bar{S}(m-i-k,\ m-i-k).$$

Compte tenu de (2.8), (2.9), (4.4), (4.5) et de (4.6), on obtient la

Proposition 4.1. *Si l'opéarteur P satisfait aux conditions* (2.8) *et* (2.9), *on a* $P = L_m - \sum_{k=0}^{m-1} (B_k^1 + B_k^2) L_k$ où

$$B_k^1 = \sum_{s=1}^{m-k} B_k^{1,s}(t,\ x;\ D_x)$$

$$B_k^{1,m-k} = -a_{k,0}(t,\ x)$$

$$B_k^{1,s}(t,\ x;\ \xi) \in \left[\left(\frac{\sigma_1' + \sigma_1}{\sigma_1}\right)|\log \sigma_1^2 \sigma_2^2|\right]^s \bar{S}(m-k-s,\ m-k-s),$$

$$s = 1,\ 2, \dots,\ m-k-1$$

$$\operatorname{Im} \sigma_0(B_k^{1,1})(t,\ x;\ \xi) \in \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_1'}{\sigma_1} + |\log \sigma_1^2 \sigma_2^2|\right] S(m-k-1,\ m-k-1)$$

et $B_k^2(t,\ x;\ \xi) \in S^{-\infty}(t)$.

En effet, les (2.8) et (2.9) montrent que, quand on pose

$$P - P_m = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t,\ x;\ D_x) D_t^k, \quad \text{on a}$$

$$a_k(t,\ x;\ D_x) = \sum_{j=0}^{m-1-k} a_k^j(t,\ x;\ D_x)$$

(4.7) où $a_k^0(t,\ x;\ D_x) = a_{k,0}(t,\ x)$,

$$a_k^j(t,\ x,\ \xi) \in \left[\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_1'}{\sigma_1}\right)|\log \sigma_1^2 \sigma_2^2|\right]^{m-k-j} S(j,\ j), \quad j = 1, \dots,\ m-k-1$$

$$\text{et} \quad \operatorname{Im} a_k^{m-1-k} \in \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_1'}{\sigma_1} + |\log \sigma_1^2 \sigma_2^2|\right] S(m-k-1,\ m-k-1)$$

d'où l'on a la proposition 4.1 en tenant compte de (4.4), (4.5), (4.6) et des propriétés des o. p. d..

§ 5. Réduction au système à premier ordre (suite et fin).

On continue à réduire le problème [C] à celui pour le système à premier ordre. Posons $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$, où $u_i = L_{i-1} u$ $i = 1, \dots,\ m$. L'équation $Pu = f$ est équivalente à, d'après la proposition 4.1,

$$(5.1)\qquad D_tU=\left\{\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \Lambda_2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \Lambda_m \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} & 0 & \\ B_0^1+B_0^2,\dots, & & B_{m-1}^1+B_{m-1}^2 \end{bmatrix}\right\}U+\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{bmatrix}$$

où

$$B_i^1=\sum_{k=1}^{m-i} B_i^{1,k}$$

$$B_i^{1,k}\in\left[\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\right]^k\bar{S}(m-i-k,\ m-i-k)$$

$$\text{pour}\quad k=1,\ 2,\dots,\ m-i-1$$

$$\operatorname{Im}\sigma_0(B_i^{1,1})\in\left[\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}+|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\right]S(m-i-1,\ m-i-1)$$

$$B_i^{1,m-i}=-a_{i,0}(t,\ x)$$

$$\text{et}\quad B_i^2(t,\ x,\ D_x)\in S^{-\infty}(t)$$

Proposition 5.1. *Il existe N la matrice carrée d'odre m des o.p.d. dont les éléments n_{ij} remplissent les suivants*

1) $n_{ii}=1,\quad n_{ij}=0\qquad (i<j)$

2) $n_{i,i-1}=0\quad i=1,\dots,\ m$

3) $n_{ij}=\sum_{s=1}^{i-j-1} n_{ij}^s\qquad (i\le j+2)$

$$n_{ij}^s\in\left[\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\right]^{i-j-s}\bar{S}(s,\ s)$$

Et quand on pose $V=NU$, l'équation (5.1) *se met sous*

$$(5.2)\qquad D_tV=\left\{\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & \ddots & 1 \\ & & \Lambda_m \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} C_{ij} \end{bmatrix}\right\}V+N\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{bmatrix}$$

où

$$C_{ij}=0\qquad (i<j)$$

$$C_{ii}\in S_{1,0}^0(t)$$

$$C_{ij}=C_{ij}^1+C_{ij}^2\qquad\qquad (j<i\le m)$$

$$(5.3)\qquad C_{ij}^2\in S_{1,0}^0(t)$$

$$C_{ij}^1\in\left[|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)\right]^{i-j}\bar{S}(1,\ 1)$$

et $$\operatorname{Im}\sigma_0(C^1_{ii-1})\in\left(|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|+\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)S(1,1)$$

Pour montrer la proposition 5.1. on prépare les lemmes suivants.

Lemme 5.2. *Soit A une matrice carrée d'ordre m dont les éléments a_{ij} sont nombres complexes et $a_{ij}=0$ pour (i, j) tel que $i-j\le k$ où k est un nombre entier positif.*

Soient λ_i, $i=1, 2,\dots, m$ des nombres complexes distincts l'un de l'autre. Quand on pose

$$n_{ij}=0\quad (i-j\le k, \text{ sauf le cas où } i=j)$$

$$n_{ii}=1$$

$$n_{ij}=\frac{a_{ij}}{\lambda_i-\lambda_j}+\frac{1}{\lambda_i-\lambda_j}(n_{i,j-1}-n_{i+1,j})\qquad (i-j\le k+1) \tag{5.4}$$

$$\text{où}\quad n_{i,0}=n_{m+1,j}=0$$

et $N=(n_{ij})$, on a

$$N\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_m\end{bmatrix}+A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_m\end{bmatrix}N+\begin{bmatrix} C_{ij}\end{bmatrix}$$

où $C_{ij}=0$ $(i-j\neq k)$

$$C_{i,i-k}=n_{i,i-k-1}-n_{i+1,i-k}.$$

Lemme 5.3. *Soit K_1 une matrice carrée d'ordre m de o.p.d. qui a la* forme $\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ k^1_{ij} & & 1\end{bmatrix}$, alors l'inverse de K_1, K_1^{-1}, est défini par $\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ k^2_{ij} & & 1\end{bmatrix}$ où

$$k^2_{ij}=\sum_{i=j_1>j_2>\cdots>j_s=j}(-1)^{s-1}k^1_{j_1j_2}k^1_{j_2j_3}\cdots k^1_{j_{s-1}j_s}\qquad (i>j). \tag{5.5}$$

Prenons, au lemme 5.2,

$$A=\begin{bmatrix} & 0 & \\ \sigma_0(B_0^{1,1}),\ \sigma_0(B_1^{1,1})\cdots\sigma_0(B_{m-3}^{1,1}),\ 0,\ 0 & & \end{bmatrix}\quad \text{et}\quad k=2$$

et on définit n_{ij} selon (5.4) en posant $\lambda_i=\lambda_i(t, x;\xi)$, où $\lambda_i(t, x;\xi)$ $i=1, 2,\dots, m$ sont les racines caracteristiques. Soit χ_1 une fonction non-négative de $C_0^\infty(R^1)$ telle que $\chi_1(s)=0$ hors de $]-3, 3[$ et $\chi_1(s)=1$ sur $[-2, 2]$. Et on pose

$$\tilde{n}_{ij}=n_{ij}(1-\chi_1(|\xi|))\qquad (i\neq j),$$

$$\tilde{n}_{ii}=1.$$

Alors, de (2.6), (4.1), (5.1) et de (5.4), on voit

$$\tilde{n}_{ij}\in\left[\frac{\sigma_1+\sigma'_1}{\sigma_1}|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\right]S(i-j-1,\, i-j-1)\qquad (i-j\geq 2)$$

Soit $N_1=(\tilde{n}_{ij})$, et on pose $V_1=N_1U$, alors l'équation (5.1) se met sous

$$D_tV_1=\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \Lambda_m\end{bmatrix}V_1+\left[\ C_{ij}^{(1)}\ \right]V_1+N^1\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ f\end{bmatrix}\qquad (5.6)_1$$

où $C_{ij}^{(1)}=0\qquad (i-j<0)$

$C_{ij}^{(1)}=C_{ij}^{(1)1}+C_{ij}^{(1)2}\qquad (i-j\geq 0)$

$C_{ij}^{(1)2}\in S_{1,0}^0(t)$

$C_{ii}^{(1)1}=0\qquad (1\leq i\leq m),$

$C_{i,i-1}^{(1)1}\in\left[\frac{\sigma'_1+\sigma_1}{\sigma_1}|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\right]\bar{S}(1,\,1)$

$\operatorname{Im}\sigma_0(C_{i,i-1}^{(1)1})\in\left[\frac{\sigma'_1+\sigma_1}{\sigma_1}+|\log\sigma_1^3\sigma_2^2|\right]S(1,\,1)$

$C_{i,j}^{(1)1}=\sum_{p=2}^{i-j}C_{i,j}^{(1)1,p}\qquad (i-j\geq 2)$

$$C_{i,j}^{(1)1,p}\in\left[\frac{\sigma'_1+\sigma_1}{\sigma_1}|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\right]^p\bar{S}(i-j+1-p,\, i-j+1-p)\qquad (2\leq p\leq i-j)$$

En général, quand V_k vérifie l'équation

$$D_tV_k=\left\{\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \Lambda_m\end{bmatrix}+\left[\ C_{i,j}^{(k)}\ \right]\right\}V_k+F_k\qquad (5.6)_k$$

où $C_{ij}^{(k)}=0\qquad (i<j)$

$C_{ij}^{(k)}=C_{ij}^{(k)1}+C_{ij}^{(k)2}\qquad (i\geq j)$

$C_{ij}^{(k)2}\in S_{1,0}^0(t)$

(5.6′)$_k$ $\quad C_{i,i}^{(k)1}=0\qquad (1\leq i\leq m)$

$C_{ij}^{(k)1}\in\left[\frac{\sigma'_1+\sigma_1}{\sigma_1}|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\right]^{i-j}\bar{S}(1,\,1)\qquad (1\leq i-j\leq k)$

$\operatorname{Im}\sigma_0(C_{i,i-1}^{(k)1})\in\left[\frac{\sigma'_1+\sigma_1}{\sigma_1}+|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\right]S(1,\,1)$

$$C_{ij}^{(k)1} = \sum_{p=k+1}^{i-j} C_{ij}^{(k)1,p} \qquad (i-j \geq k+1)$$

$$C_{ij}^{(k)1,p} \in \left[\frac{\sigma_1' + \sigma_1}{\sigma_1} |\log \sigma_1^2 \sigma_2^2|\right]^p \bar{S}(i-j+1-p,\, i-j+1-p)$$

on prend, au lemme 5.2, $k+2$ à la place de k et

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ a_{k+3,1} & & & \ddots \\ a_{m,m} & & a_{m,m-k-2} & 0 \cdots 0 \end{bmatrix} \qquad \text{où} \quad a_{ij} = \sigma_0(C_{i,j}^{(k),k+1})$$

$(i-j \geq k+2)$ et définit $n_{ij}^{(k+1)}$ selon (5.4). Et on pose $\tilde{n}_{ij}^{(k+1)} = n_{ij}^{(k+1)}(1-\chi_1(|\xi|))$ $(i \neq j)$ et $\tilde{n}_{ii}^{(k+1)} = 1$. Posons $V_{k+1} = N_{k+1} V_k$ où $N_{k+1} = (\tilde{n}_{ij}^{(k+1)})$, alors V_{k+1} vérifie l'équation $(5.4)_{k+1}$, ici on pose $F_{k+1} = N_{k+1} F_k$. En effet, on voit que, de (5.4) et de (5.5)

$$(5.7) \qquad \tilde{n}_{ij}^{(k+1)} \in \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_1'}{\sigma_1} |\log \sigma_1^2 \sigma_2^2|\right]^{k+1} \bar{S}(i-j-k-1,\, i-j-k-1) \qquad (i-j \geq k+2)$$

$$(5.7') \qquad \tilde{m}_{ij}^{(k+1)} = \sum_{p=0}^{i-j-k-2} \tilde{m}_{ij}^{(k+1),p} \qquad (i-j \geq k+2)$$

$$\tilde{m}_{ij}^{(k+1),p} \in \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_1'}{\sigma_1} |\log \sigma_1^2 \sigma_2^2|\right]^{k+1+p} \bar{S}(i-j-k-1-p,\, i-j-k-1-p)$$

où $(m_{ij}^{k+1}(t, x, D_x)) = [N_{k+1}(t, x, D_x)]^{-1}$, et que d'après le lemme 5.2,

$$(5.8) \qquad N_{k+1} \begin{bmatrix} A_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & A_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & A_m \end{bmatrix} N_{k+1} + [C_{ij}^{(k)}]$$

$= [\hat{C}_{ij}^{(k)}]$, où les éléments $\hat{C}_{ij}^{(k)}$ ont les même propriétés que $(5.6')_{k+1}$.

Ici on a utilisé le suivant: si $p(t, x; \xi) \in \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_1'}{\sigma_1} |\log \sigma_1^2 \sigma_2^2|\right]^k \bar{S}(l, l)$ $(l > 1)$,

$$p - \sigma_0(p) \in \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_1'}{\sigma_1} |\log \sigma_1^2 \sigma_2^2|\right]^k \bar{S}(l-1,\, l-1).$$

D'où l'on voit que V_{k+1} vérifie l'équation $(5.6)_{k+1}$. Pour montrer la proposition 5.1, il suffit de poser $N = N_{m-1} N_{m-2} \cdots N_1$. C.Q.F.D.

§ 6. Inégatités d'énerige.

Dans cette section et les suivantes, on va montrer les inégalités d'énergie pour l'équation :

(6.1) $$D_t V = LV + F$$

$$\text{où} \quad L = \begin{bmatrix} A_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & A_m \end{bmatrix} + [C_{ij}]$$

(6.1′)
$$C_{ij} = 0 \qquad (i<j)$$
$$C_{ij} = C^1_{ij} + C^2_{ij} \qquad (i \geq j)$$
$$C^1_{ii} = 0$$
$$C^1_{ij} \in \left[|\log \sigma_1^2 \sigma_2^2| \frac{\sigma'_1 + \sigma_1}{\sigma_1} \right]^{i-j} S(1,1) \qquad (i>j)$$
$$\operatorname{Im} C^1_{i,i-1} \in \left[|\log \sigma_1^2 \sigma_2^2| + \frac{\sigma'_1 + \sigma_1}{\sigma_1} \right] S(1,1)$$
$$C^2_{ij} \in S^0_{1,0}(t)$$

Dans cette section, on considère le cas où $\sigma_1(t) \equiv C_0$ (C_0 est une constante). Alors, on voit

(6.2) $$C^1_{ij} \in |\log \sigma_2^2|^{i-j} S(1,1) \qquad (i-j>0).$$

Soit χ une fonction non-négative de $C_0^\infty(R)$ telle que $\chi = 1$ sur $]-2, 2[$ et $\chi = 0$ hors de $]-3, 3[$. Posons $\psi(x; \xi) = \chi(\langle\xi\rangle \sigma_2(x))$, où $\langle\xi\rangle^2 = 1 + |\xi|^2$. Comme $\psi(x; \xi) \in S(0, 0)$, on voit de (6.2)

$$C^1_{ij}(t, x; \xi) \psi(x; \xi) (\log(\langle\xi\rangle + 1))^{j-i} \in \bigcap_{\varepsilon>0} S^0_{1,\varepsilon}(t) \qquad (i>j)$$
$$C^1_{ij}(1-\psi)(\log(\langle\xi\rangle + 1))^{j-i} \in S(1,1) \qquad (i>j).$$

D'où l'on obtient le

Lemme 6.1. *Quand on pose* $V_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \log(\langle D\rangle + 1)^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & [\log(\langle D\rangle + 1)]^{-m+1} \end{bmatrix} V$, *l'equation* (6.1) *se met sous*

(6.3) $D_t V_1 =$

$$\left\{ \begin{bmatrix} A_1 & \log(\langle D\rangle + 1) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \log(\langle D\rangle + 1) \\ & & & A_m \end{bmatrix} + [\tilde{C}_{ij}] \right\} V_1 + \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & (\log(\langle D\rangle + 1))^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\log(\langle D\rangle + 1))^{1-m} \end{bmatrix} F$$

où

$$
(6.3')\qquad
\begin{aligned}
&\tilde{C}_{ij}=0 \qquad i<j\\
&\tilde{C}_{ii}\in S^{0}_{1,0}(t)\\
&\tilde{C}_{ij}=\tilde{C}^{1}_{ij}+\tilde{C}^{2}_{ij} \qquad (i>j)\\
&\tilde{C}^{1}_{ij}\in S(1,1) \qquad \operatorname{supp}\tilde{C}^{1}_{ij}\subset\operatorname{supp}(1-\psi)\\
&\tilde{C}^{2}_{ij}\in\bigcap_{\varepsilon>0} S^{0}_{1,\varepsilon}(t)
\end{aligned}
$$

On définit $n_{ij}(t, x; \xi)$ par

$$
(6.4)\qquad
\begin{aligned}
&n_{ij}=0 \qquad (i<j)\\
&n_{ii}=1\\
&n_{ij}=\frac{\tilde{C}^{1}_{ij}}{\lambda_i-\lambda_j}+\sum_{k=j+1}^{i-1} n_{ik}\frac{\tilde{C}^{1}_{kj}}{\lambda_i-\lambda_j} \qquad (i>j).
\end{aligned}
$$

On voit, de (2.6), (4.1) et de (6.3'), $n_{ij}\in\bigcap_{\varepsilon>0} S^{0}_{1,\varepsilon}(t)$. Par la définition de n_{ij}, on a la

Proposition 6.2. *Soit N la matrice des o.p.d. dont les éléments sont $n_{ij}(t, x; D)$. Quand on pose $V_2=NV_1$, l'équation (6.3) se transforme en*

$$
(6.5)\qquad D_tV_2=\left\{\begin{bmatrix}\Lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_m\end{bmatrix}+A\log(\langle D_x\rangle+1)+B\right\}V_2
$$

$$
+N\begin{bmatrix}1 & & & \\ & [\log(\langle D_x\rangle+1)]^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & [\log(\langle D_x\rangle+1)]^{1-m}\end{bmatrix}F
$$

où $A, B\in\bigcap_{\varepsilon>0} S^{0}_{1,\varepsilon}(t)$

En effet, compte tenu du fait:

$$
N(t, x; \xi)\begin{bmatrix}\lambda_1(t, x; \xi) & & \\ & \ddots & \\ \tilde{C}^{1}_{ij}(t, x; \xi) & & \lambda_m(t, x; \xi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1(t, x; \xi) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m(t, x; \xi)\end{bmatrix}N(t, x; \xi),
$$

on obtient (6.5) par le calcul des o.p.d.

Lemme 6.3. *Posons $\Lambda^{qt}=(1+\langle D_x\rangle)^{qt}$. Alors on a $\Lambda^{qt}\in S^{q^+T,0}_{1,0}(t)$ où $q^+=\max(0, q)$, $\Lambda^{-qt}\Lambda_i\Lambda^{+qt}-\Lambda_i\in S^{0,0}_{1,0}(t)$ et, pour $a(t, x, \xi)\in\bigcap_{\varepsilon>0} S^{0}_{1,\varepsilon}(t)$, $a-\Lambda^{-qt}a\Lambda^{qt}\in\bigcap_{\varepsilon>0} S^{\varepsilon-1,0}_{1,\varepsilon}(t)$.*

Par la considération *ci*-dessus, on a le

Lemme 6.4. *Quand on pose $V_3=\Lambda^{-qt}V_2$, on a*

(6.6)
$$D_t V_3 = \frac{1}{i}(-q \log(\langle D_x\rangle + 1)) V_3$$
$$+ \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{bmatrix} + A \log(\langle D_x\rangle + 1) + \bar{B} \right\} V_3$$
$$+ \Lambda^{-qt} N \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & (\log(\langle D_x\rangle + 1))^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\log\langle D_x\rangle + 1))^{1-m} \end{bmatrix} F$$

où $\bar{B} \in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{0;0}_{1,\varepsilon}(t)$.

Soit p_0 une constante telle que

$$|(A(\log\langle D_x\rangle + 1)U, U)_s| \le p_0 \|(\log\langle D_x\rangle + 1))^{1/2} U\|_s^2 + C_s \|U\|_s^2$$

où C_s est une constante ne dépandant que de s. Quand on choisit $q = p_0$ (resp. $q = -p_0$) au lemme 6.4, d'après le lemme 6.4, on a

$$\frac{d}{dt} \|V_3\|_s \le C_s(\|V_3\|_s + \|F\|_s)$$

$$\left[\text{resp.} \quad \frac{d}{dt} \|V_3\|_s \ge -C_s(\|V_3\|_s + \|F\|_{s+Tp_0})\right].$$

D'où l'on a le

Théorème 6.5. *(au cas où $\sigma(t) = C_0 > 0$) Soit $V(t, x)$ une fonction de $C^\infty([0, T], H^\infty)$ qui satisfait l'équation (6.1) avec $F \in C^\infty([0, T], H^\infty)$. Il existe un nombre positif k tel que, pour tout nombre entier l et tout nombre réel s, il existe une constante $C_{l,s}$ et on a*

(6.7)
$$\sum_{i=0}^{l} \|D_t^i V(t, x)\|_{s+l-i} \le C_{l,s}\left(\sum_{i=0}^{l} \|D_t^i V(0, x)\|_{s+k+l-i} + \int_0^t \sum_{i=0}^{l} \|D_t^i F(\tau, x)\|_{s+k+l-i} d\tau\right)$$

(6.8)
$$\sum_{i=0}^{l} \|D_t^i V(t, x)\|_{s+l-i} \le C_{l,s}\left(\sum_{i=0}^{l} \|D_t^i V(T, x)\|_{s+k+l-i} + \int_t^T \sum_{i=0}^{l} \|D_t^i F(\tau, x)\|_{s+k+l-i} d\tau\right).$$

En effet, il suffit de noter que

$$\|V\|_s \le C_s \|V_3\|_{s+1+Tq^+}$$
$$\|V_3\|_s \le C_s \|V\|_{s+T(-q)^+}.$$

§ 7. Inégalités d'énergie (suite).

Dans cette section et la suivante on considère le cas où $\sigma_1(0) = 0$ et $\sigma_1(t) > 0$ $(t > 0)$.

Soit χ une fonction non-négative de $C_0^\infty(R)$ telle que $\chi=1$ sur $]-1, 1[$ et $\chi=0$ hors de $]-2, 2[$. Posons

$$\alpha=\left[|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|^{\frac{m-1}{m}}\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}|\sigma_1\sigma_2|^{\frac{1}{m}}\langle\xi\rangle^{\frac{1}{m}}(1-\chi(\sigma_2(x)\langle\xi\rangle))^2+\log(\langle\xi\rangle+1)\right].$$

D'après les propriétés de σ_1 et de σ_2, on voit que $\alpha\in S_{1,0}^{1/m,0}(t)$, et que, pour tous multi-indices β, γ et tout nombre positif ε, il existe une constante $C_{\gamma,\beta,\varepsilon}$ telle que

$$\left|\frac{\partial_x^\beta\partial_\xi^\gamma\alpha(t, x; \xi)}{\alpha(t, x; \xi)}\right|\le C_{\gamma,\beta,\varepsilon}(1+|\xi|)^{\varepsilon|\beta|-|\gamma|} \tag{7.1}$$

$$\left|\frac{\partial_t\partial_x^\beta\partial_\xi^\gamma\alpha(t, x; \xi)}{\alpha(t, x; \xi)}\right|\le C_{\gamma,\beta,\varepsilon}\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)(1+|\xi|)^{\varepsilon|\beta|-|\gamma|}$$

$$\left|\frac{\partial_t\partial_x^\beta\partial_\xi^\gamma\alpha(t, x; \xi)}{\alpha(t, x; \xi)}\right|\le C_{\gamma,\beta,\varepsilon}(1+|\xi|)^{\varepsilon+\varepsilon|\beta|-|\gamma|}$$

et que pour tout $l>0$

$$\log(\langle\xi\rangle+1)^l\alpha^{-l}\in\bigcap_{\varepsilon>0}S_{1,\varepsilon}^{0,0}(t)$$

$$\log(\langle\xi\rangle+1)^l\frac{\partial}{\partial t}(\alpha^{-l})\in\left[\bigcap_{\varepsilon>0}\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)S_{1,\varepsilon}^{0,0}(t)\right]\cap\left[\bigcap_{\varepsilon>0}S_{1,\varepsilon}^{\varepsilon,0}(t)\right]$$

(voir l'appendice I)

De (7.1), on voit qu'il existe $B_l\in\bigcap_{\varepsilon>0}S_{1,\varepsilon}^{l/m,0}(t)$ $(l=1, 2,\dots, m-1)$ tel que

$$B_l(t, x; D_x)(\alpha^{-l})(t, x; D_x)-1,\quad (\alpha^{-l})(t, x; D_x)B_l(t, x; Dx)-1\in S^{-\infty,0}(t)$$

et que

$$B_l(t, x; \xi)-\left\{\alpha^l(t, x; \xi)+l^2\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\alpha\right)(D_{x_j}\alpha)\cdot\alpha^{l-2}\right\}\in\bigcap_{\varepsilon>0}S_{1,\varepsilon}^{2(\varepsilon-1)+\frac{l}{m},0}(t) \tag{7.2}$$

Proposition 7.1. *En utilisant les notations de* (6.1), *quand on pose*

$$U_1=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \alpha^{-1}(t, x; D_x) & \\ & & \ddots \\ & & & \alpha^{1-m}(t, x; D_x)\end{bmatrix}V,$$ *l'équation* (6.1) *se transforme en*

$$D_tU_1=\left\{\begin{bmatrix}\lambda_1 & \alpha & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha \\ & & & \lambda_m\end{bmatrix}+[d_{ij}]+\begin{bmatrix}0 & & & \\ & \beta_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_{m-1}\end{bmatrix}\right\}U_1 \tag{7.3}$$

$$+GV+\begin{bmatrix}1 & & & \\ & \alpha^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha^{1-m}\end{bmatrix}F$$

où

$$d_{ij}=0 \qquad i-j\leq -2$$

$$d_{ij}=d^1_{ij}+d^2_{ij} \qquad i-j\geq -1$$

(7,3′) $$d^2_{ij}\in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t)$$

$$d^1_{ij}=0 \qquad i-j\leq 0$$

$$d^1_{ij}(t,x;\xi)=C^1_{ij}(t,x;\xi)\alpha^{j-i}(t,x;\xi) \quad . \quad i-j\leq 1$$

$$\beta_l=(-l)\frac{D_l\alpha}{\alpha}\in\Big(\bigcap_{\varepsilon>0}\Big(\frac{\sigma'_1+\sigma_1}{\sigma_1}\Big)S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t)\Big)\cap\big(\bigcap_{\varepsilon>0} S^{\varepsilon,0}_{1,\varepsilon}(t)\big)$$

$$G\in S^{-\infty,0}(t)$$

Remarque. Soit $\tilde{\chi}_1$ une fonction non-négative de $C_0^\infty(R)$ telle que $\tilde{\chi}\equiv 1$ sur $]-3, 3[$ et que $\tilde{\chi}\equiv 0$ hors de $]-4, 4[$. Quand on pose

$$d^{1,1}_{i,j}=d^1_{ij}(1-\tilde{\chi}(\sigma_2(x)\langle\xi\rangle))^2$$

$d^{1,2}_{i,j}=d^1_{ij}-d^{1,1}_{i,j}$, de (6.1′) et de (7.3′) on a

$$d^{1,1}_{i,j}\in\Big[|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\Big(\frac{\sigma'_1+\sigma_1}{\sigma_1}\Big)\Big]^{\frac{i-j}{m}} S\Big(1-\frac{i-j}{m},\ 1-\frac{i-j}{m}\Big)$$

(7.4) $$\operatorname{Im} d^{1,1}_{i,i-1}\in\Big(|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|+\frac{\sigma'_1+\sigma_1}{\sigma_1}\Big)\Big[|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\frac{\sigma'_1+\sigma_1}{\sigma_1}\Big]^{\frac{1-m}{m}} S\Big(1-\frac{1}{m},\ 1-\frac{1}{m}\Big)$$

et

$$d^{1,2}_{i,j}\in\bigcap_{\varepsilon>0} S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t).$$

La proposition 7.1 découle immédiatement du

Lemme 7.2.

a) $$(\alpha^{-i+1})(t,x,D_x)C^1_{ij}(t,x,D_x)B_{j-1}(t,x,D_x)-\alpha^{j-i}\circ C^1_{ij}(t,x,D_x)\in\bigcap_{\varepsilon<0} S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t)$$

$$(i,j=1,2,\dots,m)$$

b) $$(\alpha^{-i})(t,x,D_x)B_{i+1}(t,x,D_x)-\alpha(t,x,D_x)\in\bigcap_{\varepsilon>0} S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t) \qquad (i=1,\dots,m-1)$$

c) $$\alpha^{-i+1}(t,x;D_x)A_i(t,x;D_x)B_{i-1}(t,x;D_x)-A_i(t,x;D_x)\in\bigcap_{\varepsilon>0} S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t)$$

$$(i=1,\dots,m)$$

d) *pour* $i=1,2,\dots,m$

$$\Big[\frac{d}{dt}\alpha^{-i}(t,x;D_x)\Big]B_i(t,x;D_x)-(-i)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\alpha\Big)\alpha^{-1}(t,x;D_x)\in\bigcap_{\varepsilon>0} S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t).$$

La preuve est donnée à l'appendice.

Dans la suite, on considère l'équation

$$(7.5)\qquad D_t V = \tilde{L} V + \tilde{F}$$

$$\text{où}\quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \log(\langle D_x\rangle+1) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \log(\langle D_x\rangle+1) \\ & & & \Lambda_m \end{pmatrix} + [C_{ij}]$$

$$C_{ij} = d^1_{i;j} \qquad (i \geq j+1)$$

$$(7.5')\qquad C_{i,i+1} = \alpha_1 = \left[\,|\log \sigma_1^2\sigma_2^2|\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)\right]^{\frac{m-1}{m}} |\sigma_1\sigma_2|^{\frac{1}{m}} \langle\xi\rangle^{\frac{1}{m}} (1-\chi(\sigma_2(x)\langle\xi\rangle))^2$$

$$C_{ij} = 0 \quad \text{d'autres } (i,j).$$

On partage V en deux parties. Soit χ_i une fonction non-négative de $C_0^\infty(R)$ telle que $\chi_i = 1$ sur $]-2i, 2i[$ et $\chi_i = 0$ hors de $]-2i-1, 2i+1[$. On pose

$$(7.6)\qquad \psi_i(t, x; \xi) = \chi_i\left(\frac{\sigma_1^2\sigma_2\langle\xi\rangle e^{3t}}{\log(\langle\xi\rangle+1)(\sigma_1'+\sigma_1)}\right)$$

$$\text{et}\quad V_1 = \psi_3(t, x, D_x)V$$

$$V_2 = (1-\psi_3)(t, x, D_x)V.$$

Remarquez que

$$\psi_i \in S(0,0),$$

$$\psi_i \in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t) \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_i \in \left[\bigcap_{\varepsilon>0}\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right) S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t)\right] \cap \left[\bigcap_{\varepsilon>0} S^{\varepsilon,0}_{1,\varepsilon}(t)\right].$$

On voit que

$$(7.7)\qquad D_t V_1 = \left\{\begin{pmatrix} \Lambda_1 & \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_2 \\ & & & \Lambda_m \end{pmatrix} + [C_{ij}]\right\} V_1 + (D_t\psi_3)(t, x; D_x)V$$

$$+ D_1 V + \psi_3(t, x; D_x)\tilde{F}$$

$$(7.8)\qquad D_t V_2 = \left\{\begin{pmatrix} \Lambda_1 & \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_2 \\ & & & \Lambda_m \end{pmatrix} + [C_{ij}]\right\} V_2 + (-D_t\psi_3)(t, x; D_x)V$$

$$+ D_2 V + (1-\psi_3)(t, x; D_x)\tilde{F}$$

où $\alpha_2 = \log(\langle D\rangle + 1)$

$$D_1, D_2 \in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t)$$

Par la définition de ψ_i,

$$V_1=\psi_4(t, x; D_x)V_1+\gamma V \quad \text{où} \quad \gamma\in S^{-\infty,0}(t)$$

$$C_{ij}V_1=C_{ij}\psi_4V_1+\gamma_{ij}V \quad \text{où} \quad \gamma_{ij}\in S^{-\infty,0}(t)$$

Lemme 7.3. *Il existe* $\bar{C}_{ij}\in\bigcap_{\varepsilon>0}S^{0;0}_{1,\varepsilon}(t)$ $(i-j\geq 1)$ *tels que*

$$C_{ij}\psi_4-\bar{C}_{ij}(\psi_5^2 d)\in\bigcap_{\varepsilon>0}S^{0;0}_{1,\varepsilon}(t)$$

$$où \quad d=\left[|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)\right]^{\frac{m-1}{m}}|\sigma_1\sigma_2\langle\xi\rangle|^{\frac{1}{m}}(1-\chi(\sigma_2(x)\langle\xi\rangle))^2$$

En effet, les majorations (2.3) montrent le suivant: pour tout nombre positif ε, il existe une constante C_ε et on a

$$C_\varepsilon\sigma_1^{1+\varepsilon}|\sigma_2|^{1+\varepsilon}\langle\xi\rangle^{1-\varepsilon}\leq\frac{\sigma_1^2|\sigma_2|\langle\xi\rangle}{(\sigma_1+\sigma_1')\log(\langle\xi\rangle+1)}\leq 2|\sigma_1\sigma_2|\langle\xi\rangle. \tag{7.9}$$

D'où l'on voit que $\dfrac{|\sigma_1\sigma_2|\langle\xi\rangle}{|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\left(\dfrac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)}$ est borné sur supp ψ_4. Alors, compte tenu de (7.4) et de (7.5′) on a

$$C_{ij}(t, x; \xi)\psi_4(t, x; \xi)/d(t, x; \xi)\in S(0, 0),$$

d'où l'on obtient le lemme 7.3.

D'après lemme 7.3, l'équation (7.7) est égale à

$$D_tV_1=\left\{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_2 \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix}+\bar{C}_1(\psi_5^2 d)\right\}V_1+\bar{C}_2V \tag{7.10}$$

$$+(D_t\psi_3)(t, x; D_x)V+\psi_3(t, x; D_x)\tilde{F}$$

où $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2\in\bigcap_{\varepsilon>0}S^{0;0}_{1,\varepsilon}(t)$

Pour ce qui est de V_2, comme le cas de V_1, l'équation (7.8) est égale à

$$D_tV_2=\left\{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_2 \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix}+C_{ij}\circ(1-\psi_2)\right\}V_2+(-D_t\psi_3)(t, x; D_x)V \tag{7.8′}$$

$$+\bar{D}_2V+(1-\psi_3)(t, x; D_x)\tilde{F}$$

où $\bar{D}_2\in\bigcap_{\varepsilon>0}S^{0;0}_{1,\varepsilon}(t)$.

On va diagonalizer "la partie principale" de (7.8′). On définit le diagonalizateur comme ci-dessous. Soient n^s_{ij} $(s=1, 2 \quad i, j=1, 2,\dots, m)$ les symboles définis par

$$n^1_{ij}=0 \qquad (i-j\leq -1)$$

(7.11) $$n^1_{ii}=1$$

$$n^1_{ij}=\frac{1}{\lambda_i-\lambda_j}\circ\{C_{ij}\circ(1-\psi_2)+\sum_{k=j+1}^{i+1} n^1_{ik}\circ C_{kj}\circ(1-\psi_2)\} \qquad (i-j\geq 1)$$

$$n^2_{ij}=\frac{1}{\lambda_i-\lambda_j}\circ C_{j-1,j}\circ(1-\psi_2)\circ n^2_{i,j-1} \qquad (i-j\leq -1)$$

(7.11′) $$n^2_{ii}=1$$

$$n^2_{ij}=0 \qquad (i-j\geq 1)$$

Posons

$N_s=[n^s_{ij}(t, x; D_x)]$. Alors on a le

Lemme 7.4. *(en utilisant les même notations que celles de* (7.5′))

(7.12) $$N_2N_1\left\{ D_t-\begin{bmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_m\end{bmatrix}-[C_{ij}\circ(1-\psi_2)]\right\} N_1^{-1}N_2^{-1}$$

$$=D_t-\begin{bmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_m\end{bmatrix}-[d_{ij}]-E-G$$

où $$d_{ij}\in\left[|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)\right]^{\frac{i-j}{m}+1} S\left(-\frac{i-j}{m},\ -\frac{i-j}{m}\right) \qquad (i\geq j)$$

$$d_{ii}=d_i^1+d_i^2$$

$$d_i^1=\frac{C_{i,i-1}\circ(1-\psi_2)}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\circ\alpha_1\circ(1-\psi_2)-\frac{C_{i+1,i}\circ(1-\psi_2)}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}\circ\alpha_1\circ(1-\psi_2)$$

(7.12′) $$d_i^2\in\left[|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)\right]^2 S(-1,\ -1)$$

$$d_{ij}\in\left[|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)\right]^{2-\frac{1}{m}} S\left(\frac{1}{m}-1,\ \frac{1}{m}-1\right) \qquad (i\leq j-1)$$

$$\operatorname{supp} d_{ij}\subset\operatorname{supp}(1-\psi_2)$$

$$E\in\left(\bigcap_{\varepsilon>0}\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t)\right)\cap\left(\bigcap_{\varepsilon>0}S^{\varepsilon,0}_{1,\varepsilon}(t)\right)$$

$$G\in\bigcap_{\varepsilon>0}S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t)$$

Remarque. De (7.12′), on a

(7.13)
$$d_{ij}\in\bigcap_{\varepsilon>0}S^{\varepsilon,0}_{1,\varepsilon}(t)$$

$$d_{ij},\ d_i^2\in\left[|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)\right]^{1+\frac{1}{m}} S\left(-\frac{1}{m},\ -\frac{1}{m}\right) \qquad (i\neq j)$$

$$\text{(7.14)}\quad \begin{aligned} &\operatorname{Re} d_i^1 \in |\log \sigma_1^2\sigma_2^2|\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)S(0,0)\\ &\operatorname{Im} d_i^1 \in \left(|\log \sigma_1^2\sigma_2^2| + \frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)S(0,0)\end{aligned}$$

et

$$\text{(7.15)}\quad \begin{aligned} &\operatorname{Re} d_i^1 \in \bigcap_{\varepsilon>0} S_{1,\varepsilon}^{\varepsilon,0}(t) \quad et\\ &\operatorname{Re} d_i^1 - (\operatorname{Re} d_i^1)^* \in \bigcap_{\varepsilon>0} S_{1,\varepsilon}^{0,0}(t)\end{aligned}$$

où $(\operatorname{Re} d_i^1)^*$ est l'opérateur formellement adjoint de $\operatorname{Re} d_i^1$

$$\text{(7.16)}\quad \begin{aligned} &\operatorname{Im} d_i^1 = d_i^3 + d_i^4\\ &[\log(1+\langle\xi\rangle)]^{-1} d_i^3 \in \bigcap_{\varepsilon>0} S_{1,\varepsilon}^{0,0}(t)\\ &d_i^4 \in \left(\bigcap_{\varepsilon>0}\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)S_{1,\varepsilon}^{0,0}(t)\right) \cap \left(\bigcap_{\varepsilon>0} S_{1,\varepsilon}^{\varepsilon,0}(t)\right)\end{aligned}$$

$$\text{(7.17)}\quad \begin{aligned} &N_s \in \bigcap_{\varepsilon>0} S_{1,\varepsilon}^{0,0}(t), \quad \text{et}\\ &\left(\frac{d}{dt}N_s\right) \in \left(\bigcap_{\varepsilon>0}\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)S_{1,\varepsilon}^{0,0}(t)\right) \cap \left(\bigcap_{\varepsilon>0} S_{1,\varepsilon}^{\varepsilon,0}(t)\right)\end{aligned}$$

En effet, d'après (2.3), (2.3') et (7.9), on voit que

(7.18) $\quad |\log \sigma_2^2\sigma_2^2|\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)\frac{1}{\sigma_1(t)|\sigma_2(x)|\langle\xi\rangle}$ est borné sur $\operatorname{supp}(1-\psi_2)\ (t, x; \xi)$ et que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une constante C_ε telle que

$$\text{(7.19)}\quad \left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right) \leq C_\varepsilon\langle\xi\rangle^\varepsilon, \quad \left(\frac{|\sigma_2|+|\nabla\sigma_2|}{|\sigma_2|}\right) \leq C_\varepsilon\langle\xi\rangle^\varepsilon$$

$$\text{et}\quad |\log \sigma_2^2\sigma_2^2|\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right) \leq C_\varepsilon\langle\xi\rangle^\varepsilon \quad \text{sur } \operatorname{supp}(1-\psi_2)\ (t, x; \xi).$$

D'où l'on a (7.13), (7.14), (7.15) et (7.16). Pour ce qui est de (7.17), il suffit de remarquer les suivants:

$$\text{(7.20)}\quad \begin{aligned} &n_{ij}^1 \in \left[|\log \sigma_1^2\sigma_2^2|\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)\right]^{\frac{i-j}{m}} S\left(-\frac{i-j}{m}, -\frac{i-j}{m}\right) \qquad (i \geq j+1)\\ &n_{ij}^2 \in \left[|\log \sigma_1^2\sigma_2^2|\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)\right]^{\frac{m-1}{m}(j-i)} S\left(-\frac{m-1}{m}(j-i), -\frac{m-1}{m}(j-1)\right)\\ &\hspace{25em}(j \geq i+1)\end{aligned}$$

$$\text{et}\quad \operatorname{supp} n_{ij}^s \subset \operatorname{supp}(1-\psi_2) \qquad (i \neq j).$$

Pour montrer le lemme 7.4, on remarque d'abord, par les définitions de $N_s = 1, 2$, en posant $\bar{C}_{ij} = C_{ij}\circ(1-\psi_2)$

$$N_1\circ\left\{\begin{bmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_m \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & 0 \\ \bar{C}_{ij} & \ddots & 0 \end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_m \end{bmatrix}\circ N_1$$

$$N_1\circ\left\{\begin{bmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_m \end{bmatrix}+[\bar{C}_{ij}]\right\}=\left\{\begin{bmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_m \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d_{ii} & & 0 \\ & \ddots & \\ d_{ij} & & d_{mm} \end{bmatrix}\right.$$

(7.21)
$$\left.+\begin{bmatrix} 0 & \bar{C}_{12} & 0 & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \bar{C}_{m-1,m} \\ & \ddots & & 0 \end{bmatrix}\right\}\circ N_1$$

$$N_2\circ\left\{\begin{bmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_m \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & \bar{C}_{12} & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \bar{C}_{m-1,m} \\ & & & 0 \end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_m \end{bmatrix}\circ N_2$$

où $d_{ii}=\dfrac{\bar{C}_{i,i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\bar{C}_{i-1,i}-\dfrac{\bar{C}_{i+1,i}}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}\bar{C}_{i,i+1}$

$$d_{ij}\in\left[|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)\right]^{1+\frac{i-j}{m}}S\left(-\frac{i-j}{m},\ -\frac{i-j}{m}\right)\qquad(i>j)$$

$\operatorname{supp} d_{ij}\subset\operatorname{supp}(1-\psi_2)$

En utilisant la remarque précédente et (7.20), (7.21), on obtient le lemme 7.4.

D'après le lemme 7.4, (7.13), (7.14), (7.15) et (7.16), on a immédiatement la

Proposition 7.5. *Il existe les matrices carrées d'ordre m des o.p.d. M, N telles que $MN=NM=I_m$ et que, quand on pose $W_2=NV_2$ où V_2 est défini par (7.6), W_2 satisfait à l'équation*

(7.22)
$$D_tW_2=\left\{\begin{bmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_m \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_m \end{bmatrix}+[d_{ij}]\beta\right\}W_2$$

$$+\{E\log(\langle D_x\rangle+1)+G+H\}V+N(1-\psi_3(t,x,D_x))\tilde{F}$$

où $d_i\in\bigcap_{\varepsilon>0}S^{\varepsilon,0}_{1,\varepsilon}(t)$ et $d_i-d_i^*\in S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t)$

$$\beta=(1-\psi_1(t,x;\xi))^2\left[|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right]^{1+\frac{1}{m}}(|\sigma_1\sigma_2|\langle\xi\rangle)^{-\frac{1}{m}}$$

(7.22′)
$$d_{ij}\in\bigcap_{\varepsilon>0}S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t)$$

$$G\in\left[\bigcap_{\varepsilon>0}\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t)\right]\cap\left[\bigcap_{\varepsilon>0}S^{\varepsilon,0}_{1,\varepsilon}(t)\right]$$

$$E,\ H\in\bigcap_{\varepsilon>0}S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t)$$

Remarque. Des majorations (7.18) et (7.19), on voit $\beta \in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{\varepsilon,0}_{1,\varepsilon}(t)$. En somme, d'après (7.10) et la proposition 7.5, on a la

Proposition 7.6. *Il existe N, M les matrices carrée d'ordre m des o.p.d. telle que, $NM=MN=I_m$ et $N, M \in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t)$. Soit U_1 un vecteur défini à la proposition 7.1. Posons*

$$\tilde{U}_1 = \psi_3(t, x; D_x)U_1$$

$$\tilde{U}_2 = N(1-\psi_3)(t, x; D_x)U_1.$$

Alors $\tilde{U}_1$ et $\tilde{U}_2$ satisfont aux équations:

$$D_t\tilde{U}_1 = \left\{\begin{bmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_m \end{bmatrix} + A_1\beta_1\right\}\tilde{U}_1 + (B_{11}\log(\langle D_x\rangle+1) + C_{11} + D_{11})\tilde{U}_1 \tag{7.23}$$

$$+ (B_{12}\log(\langle D_x\rangle+1) + C_{12} + D_{12})\tilde{U}_2 + E_1V +$$

$$+ G_1\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \alpha^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha^{1-m} \end{bmatrix} F$$

$$D_t\tilde{U}_2 = \left\{\begin{bmatrix} \Lambda_1+d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_m+d_m \end{bmatrix} + A_2\beta_2\right\}\tilde{U}_2$$

$$+ (B_{21}\log(\langle D_x\rangle+1) + C_{21} + D_{21})\tilde{U}_1$$

$$+ (B_{22}\log(\langle D_x\rangle+1) + C_{22} + D_{22})\tilde{U}_2 + E_2V$$

$$+ G_2\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \alpha^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha^{1-m} \end{bmatrix} F$$

où

$$d_i \in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{\varepsilon,0}_{1,\varepsilon}(t)$$

$$d_i - d_i^* \in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t)$$

$$\beta_1 = \psi_5^2\left(|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^{1-\frac{1}{m}}(|\sigma_1\sigma_2|\langle\xi\rangle)^{\frac{1}{m}}(1-\chi(\sigma_2(x)\langle\xi\rangle))^2$$

$$\beta_2 = (1-\psi_1)^2\left(|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^{1+\frac{1}{m}}(|\sigma_1\sigma_2|\langle\xi\rangle)^{-\frac{1}{m}}.$$

$$C_{ij} \in \left(\bigcap_{\varepsilon>0}\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t)\right) \cap \left(\bigcap_{\varepsilon>0} S^{\varepsilon,0}_{1,\varepsilon}(t)\right) \qquad (i, j=1, 2) \tag{7.23'}$$

$$\Lambda_i,\ B_{ij},\ D_{ij} \text{ et } G_i \in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t) \qquad (i, j=1, 2)$$

$$(\alpha^{-i})(t, x; \xi)=\Big[\Big(|\log \sigma_1^2\sigma_2^2|\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\Big)^{1-\frac{1}{m}}|\sigma_1\sigma_2\langle\xi\rangle|^{\frac{1}{m}}(1-\chi(\sigma_2(x)\langle\xi\rangle))^2$$

$$+\log(\langle\xi\rangle+1)\Big]^{-i}$$

$$E_i \in S^{-\infty,0}(t) \qquad (i=1, 2)$$

Remarquons que l'on voit, par les majorations (7.9), (7.18) et (7.19),

$$(7.24) \qquad \beta_i \in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{\varepsilon,0}_{1,\varepsilon}(t).$$

§8. Inégalités d'énergie (suite et fin).

On transforme encore l'équation (7.23) en forme convenable à obtenir les inégalités d'énergie. Rappelons, en utilisant les notations de (7.23'),

$$\beta_1=\psi_3^2(t, x; \xi)\Big(|\log \sigma_1^2\sigma_2^2|\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\Big)^{1-\frac{1}{m}}|\sigma_1\sigma_2\langle\xi\rangle|^{\frac{1}{m}}(1-\chi(\sigma_2(x)\langle\xi\rangle))^2$$

$$\beta_2=(1-\psi_1(t, x; \xi))^2\Big(|\log \sigma_1^2\sigma_2^2|\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\Big)^{1+\frac{1}{m}}|\sigma_1\sigma_2\langle\xi\rangle|^{-\frac{1}{m}}$$

Lemme 8.1. *On a les majorations:*

$$(8.1) \qquad \int_0^t \beta_i(s, x, \xi)ds \le c_0 \log(\langle\xi\rangle+1) \quad \text{pour} \quad t\in[0, T] \qquad (i=1, 2)$$

où c_0 cst une constante

et

$$(\log(\langle\xi\rangle+1)+1)^{-1}\int_0^t \beta_i(s, x; \xi)ds \in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t).$$

On fait sa preuve à l'appendice.

On pose

$$e_p(t, x; \xi)=\exp\Big(-p\int_0^t(\beta_1+\beta_2)(s, x; \xi)ds\Big).$$

Du lemme 8.1, on voit que pour tous multi-indices α, β et tout $\varepsilon>0$, il existe une constante $c_{\alpha,\beta,\varepsilon}$ telle que

$$(8.2) \qquad \Big|\frac{\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta e_p(t, x, \xi)}{e_p(t, x, \xi)}\Big| \le c_{\alpha,\beta,\varepsilon}(|p|+1)^{|\alpha|+|\beta|}(1+|\xi|)^{-(1-\varepsilon)|\beta|+\varepsilon|\alpha|}$$

De (8.2) on a, par le raisonnement pareil à celui du lemme 7.2, le

Lemme 8.2. *Il existe $f_p(t, x; \xi)\in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{2C_0Tp^+,0}_{1-\varepsilon,\varepsilon}(t)$ tel que $e_p(t, x; D_x)f_p(t, x; D_x)$ -1, $f_p(t, x; D_x)e_p(t, x; D_x)-1 \in S^{-\infty,0}(t)$. Et on a*

i) $\left(\frac{d}{dt}e_p(t, x; D_x)\right)f_p(t, x; D_x)+p(\beta_1+\beta_2)(t, x; D_x)\in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{0;0}_{1,\varepsilon}(t)$

ii) *Pour tout* $a\in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{\delta;0}_{1,\varepsilon}(t) \qquad (\delta<1)$

$$e_p(t, x; D_x)\, a f_p(t, x; D_x)-a\in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{0;0}_{1,\varepsilon}(t) \tag{8.3}$$

iii) $e_p(t, x; D_x)\Lambda_i f_p(t, x; D_x)$

$$-\left\{\Lambda_i+(-p)\left[\int_0^t (\beta_1(s, x; D_x)+\beta_2(s, x; D_x))ds,\ \Lambda_i\right]\right\}\in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{0;0}_{1,\varepsilon}(t)$$

et $[\log\langle D_x\rangle+1]^{-1}\left[\int_0^t(\beta_1+\beta_2)ds,\ \Lambda_i\right]\in \bigcap_{\varepsilon>0} S^{0;0}_{1,\varepsilon}(t)$

où $[A, B]=AB-BA$.

En remarquant que le lemme 6.3 reste valable au cas où $\sigma_1(0)=0$ et $\sigma_1(t)>0$ sur $]0, T]$, on obtient, par le lemme 8.2,

Proposition 8.4. (*on utilise les même notations que celles à la proposition* 7.6) *Posons*

$W_1=\Lambda^{-qt}e_p(t, x, D_x)\tilde{U}_1$

$W_2=\Lambda^{-qt}e_p(t, x, D_x)\tilde{U}_2$. On *a*

$$D_t\begin{bmatrix} W_1\\ W_2\end{bmatrix}=\frac{1}{i}(-q\log(\langle D_x\rangle+1)-p(\beta_1+\beta_2)(t, x; D_x))\begin{bmatrix} W_1\\ W_2\end{bmatrix}+$$

$$+\left\{\begin{bmatrix}\Lambda_1 &&&\\ &\Lambda_m&&\\ &&\Lambda_1+d_1&\\ &&&\Lambda_m+d_m\end{bmatrix}+(-p)\begin{bmatrix}[\mu_1+\mu_2, \Lambda_1]&&&\\ &[\mu_1+\mu_2, \Lambda_m]&&\\ &&[\mu_1+\mu_2, \Lambda_1]&\\ &&&[\mu_1+\mu_2, \Lambda_m]\end{bmatrix}\right.$$

$$\left.+\begin{bmatrix}A_1\beta_1 & 0\\ 0 & A_2\beta_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}\log(\langle D_x\rangle+1)+\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}W_1\\ W_2\end{bmatrix} \tag{8.4}$$

$$+\begin{bmatrix}\tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12}\\ \tilde{D}_{21} & \tilde{D}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_1\\ W_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\tilde{E}_1\\ \tilde{E}_2\end{bmatrix}U+$$

$$+\Lambda^{-qt}e_p(t, x, D_x)\begin{bmatrix}G_1\\ G_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\ &\alpha^{-1}&\\ &&\ddots\\ &&&\alpha^{1-m}\end{bmatrix}F$$

où

$$\mu_i=\int_0^t \beta_i(s, x;\xi)ds \qquad (i=1, 2)$$

$$\tilde{D}_{ij}\in\bigcap_{\varepsilon>0} S^{0,0}_{1,\varepsilon}(t)$$

$$\tilde{E}_i\in S^{-\infty,0}(t)$$

Avant de montrer les inégalités d'énergie, on prépare le lemme suivant dû à Nersesjan [3] (voir aussi Nishitani [5]).

Lemme 8.5. *Supposons que une fonction* $U(t, x)\in C^\infty([0, T], H^\infty)$, *satisfasse à l'équation* (6.1) *avec* $F(t, x)\in C^\infty([0, T], H^\infty)$. *On définit, successivement,* U_j $j=0, 1, 2,\dots$, *comme les solutions des équations suivantes*:

$$(8.5)_0 \qquad \begin{aligned} &D_tU_0(t, x)=\left\{\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \Lambda_m\end{bmatrix}+[C^2_{ij}]\right\}U_0(t, x)+F(t, x)\\ &U_0(0, x)=U(0, x)\end{aligned}$$

$$(8.5)_j \qquad \begin{aligned} &(j\geq 1)\\ &D_tU_j(t, x)=\left\{\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \Lambda_m\end{bmatrix}+[C^2_{ij}]\right\}U_j+[C^1_{ij}]U_{j-1}\\ &U_j(0, x)=0\end{aligned}$$

Ici on utilise les notations de (6.1) *et* (6.1′). *Alors, quand on pose*

$$V_n(t, x)=U(t, x)-\sum_{i=0}^n U_i(t, x) \qquad (n=0, 1, 2,\cdots) \quad \text{on } a$$

pour tout nombre réel s,

$$\|U_n(t, x)\|_s\leq C_{s,n}\sigma_1^{\frac{n}{2}}(t)\Big(\|U(0, x)\|_{s+n}+\int_0^t\|F(\tau, x)\|_{s+n}d\tau\Big)$$

$$(8.6) \qquad \left\|D_tV_n-\left\{\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \Lambda_m\end{bmatrix}+[C^1_{ij}+C^2_{ij}]\right\}V_n\right\|_s\leq C_{s,n}\sigma_1^{\frac{n+1}{2}}(t)\times$$

$$\times\Big(\|U(0, x)\|_{s+n+1}+\int_0^t\|F(\tau, x)\|_{s+n+1}d\tau\Big) \quad \text{pour} \quad t\in[0, T]$$

$$\text{et} \quad \|V_n(t, x)\|=0(\sigma_1^{\frac{n+1}{2}}(t))$$

où $C_{s,n}$ *une constante positive. D'autre part, si on a la majoration* $\|\sigma_2(t)^{n/2}U(t, x)\|_s\leq C_0$ *où n est un entier positif, on obtient*

$$\|U(t,x)\|_{s-n}\le K\Big\{C_0+\int_t^T\sum_{i=0}^{n-1}\|\sigma_1(\tau)^{\frac{i}{2}}F(\tau,x)\|_{s-n+i}d\tau \tag{8.7}$$
$$+\sum_{i=0}^{n-1}\|\sigma_1^{\frac{i}{2}}(T)U(T,x)\|_{s-n+i}\Big\}$$

où K est une constante positive indépendante de C_0, U et de F.

*Preuve.**)

On voit que V_n remplit l'équation:

$$(8.8)\quad \begin{aligned} &D_tV_n(t,x)=\left\{\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \Lambda_m\end{bmatrix}+[C_{ij}^2]\right\}V_n+[C_{ij}^1]V_{n-1}\\ &V_n(0,x)=0\end{aligned}$$

où $V_{-1}=U \qquad (n=0,1,2,\cdots)$

Par (6.1′) et (2.4), on a, pour s nombre réel,

$$\|C_{ij}^1(t)v\|_s\le C_s\sigma_1^{\frac{1}{2}}(t)\|v\|_{s+1} \tag{8.9}$$

En utilisant les inégalités d'énergie pour l'équation $D_tV=\left\{\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \Lambda_m\end{bmatrix}+[C_{ij}^2]\right\}V+G$, et $\sigma_1'(t)\ge 0$, on obtient (8.6) de (8.8) et de (8.9). Pour montrer (8.7), il suffit de remarquer que, pour $i=0,1,2,\dots,n-1$,

$$\|\sigma_1^{\frac{i}{2}}(t)U(t,x)\|_s\le C_s\|\sigma_1^{\frac{i}{2}}(T)U(T,x)\|_s$$
$$+\int_t^T\{\sigma_1^{\frac{i+1}{2}}(\tau)\|U(\tau,x)\|_{s+1}+\sigma_1^{\frac{i}{2}}(\tau)\|F(\tau)\|_s\}d\tau;$$

qui découle de

$$\frac{d}{dt}(\sigma_1^{\frac{i}{2}}(t)U(t,x),\quad \sigma_1^{\frac{i}{2}}(t)U(t,x))_s$$
$$\ge -C_s(\|\sigma_1^{\frac{i}{2}}(t)U(t,x)\|_s^2+\|[C_{ij}^1]\sigma_1^{\frac{i}{2}}(t)U(t,x)\|_s\times$$
$$\times\|\sigma_1^{\frac{i}{2}}(t)U(t,x)\|_s+\|\sigma_1^{\frac{i}{2}}(t)F(t)\|_s\|\sigma_1^{\frac{i}{2}}(t)U(t,x)\|_s)$$

C.Q.F.D.

On est maintenant prêt à montrer le

Théorème 8.6. (*Inégalités d'énergie au cas où $\sigma_1(0)=0$ et $\sigma_1(t)>0$ sur*]0, *T*]) *Si $U(t,x)\in C^\infty([0,T],H^\infty)$ satisfait à l'équation*

---

*) Dans la suite, C_s signifie une constante arbitaire qui ne dépend que de s.

$$(8.10)\quad D_tU(t,x)=\left\{\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \Lambda_m \end{bmatrix}+[C_{ij}]\right\}U(t,x)+F(t,x)\quad \text{dans } \Omega$$

où $C_{ij}=0 \quad i\leq j-1$

$C_{ij}=C^1_{ij}+C^2_{ij} \qquad (i\geq j)$

$C^1_{ij}=0 \qquad (i\leq j)$

$C^1_{ij}\in\left[|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)\right]^{i-j}S(1,1) \qquad (i>j)$

$\operatorname{Im} C^1_{i,i-1}\in\left[|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|+\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right]S(1,1)$

$C^2_{ij}\in\bigcap_{\varepsilon>0}S^0_{1,\varepsilon}(t)$

et $F(t,x)\in C^\infty([0,T],H^\infty)$

Alors $U(t,x)$ remplit les inégalités suivantes; il existe un nombre $k>0$ qui ne dépand pas de U et de F, et pour tout nombre réel s et tout entier $l\geq 0$ on a

$$(8.11)\quad \begin{aligned}\sum_{i=0}^{l}\|D_t^iu(t,x)\|_{s+l-i}\leq C_{s,l}\Big(&\sum_{i=0}^{l}\|D_t^iU(0,x)\|_{s+k+l-i}+\\ &+\int_0^t\sum_{i=0}^{l}\|D_t^iF(\tau,x)\|_{s+k+l-i}d\tau\Big)\end{aligned}$$

et

$$(8.12)\quad \begin{aligned}\sum_{i=0}^{l}\|D_t^iU(t,x)\|_{s+l-i}\leq C_{s,l}\Big(&\sum_{i=0}^{l}\|D_t^iU(T,x)\|_{s+k+l-i}\\ &+\int_t^T\sum_{i=0}^{l}\|D_t^iF(t,x)\|_{s+k+l-i}d\tau\Big)\quad \text{pour}\quad t\in[0,T]\end{aligned}$$

où $C_{s,l}$ est une constante indépandante de U et de F.

Démonstration. Il suffit de démontrer au cas où $l=0$. On utilise les notations de la proposition 8.4.

Soit p_0 un nombre positif qui remplit les suivants: pour tout s

$$(8.13)\quad \begin{aligned}&\|A_iU\|_s\leq p_0\|U\|_s+C_s\|U\|_{s-1} \qquad (i=1,2)\ ^{*)}\\ &\|B_{ij}U\|_s\leq p_0\|U\|_s+C_s\|U\|_{s-1} \qquad (i,j=1,2)\\ &\|C_{ij}U\|_s\leq p_0\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)\|U\|_s+C_s\|U\|_s \qquad (i,j=1,2)\\ &\|[\mu_1+\mu_2,\Lambda_i]u\|_s\leq p_0\|\log(\langle D_x\rangle+1)u\|_s+C_s\|u\|_s \qquad (i=1,2,\dots,m)\end{aligned}$$

*) Dans la suite on utilise C_s comme une constante arbitraire dépendante de s.

Ensuite on remarque que, quand on pose

$$\beta_1^0=\psi_5(t,x;\xi)\left[|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)\right]^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{m})}(|\sigma_1\sigma_2|\langle\xi\rangle)^{\frac{1}{2m}}(1-\chi(\sigma_2(x)\langle\xi\rangle))$$

et

$$\beta_2^0=(1-\psi_1(t,x;\xi))\left[|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)\right]^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{m})}(|\sigma_1\sigma_2|\langle\xi\rangle)^{-\frac{1}{2m}},$$

on voit, de (7.9) et de (7.24)

$$\text{(8.14)}\qquad \begin{aligned}&\beta_i(t,x;D_x)-(\beta_i^0)^*(\beta_i^0)\in\bigcap_{\varepsilon>0}S^{0;0}_{1,\varepsilon}(t)\qquad (i=1,2)\\ &\text{et}\quad \beta_i^0\in\bigcap_{\varepsilon>0}S^{\varepsilon;0}_{1,\varepsilon}(t).\end{aligned}$$

Alors on a

$$\text{(8.15)}\qquad \begin{aligned}&|(A^i\beta_iU,U)_s|\le p_0\|\beta_i^0U\|_s^2+C_s\|U\|_s^2\qquad (i=1,2)\\ &\text{et}\quad \mathrm{Re}\,(\beta_iU,U)_s\ge\|\beta_i^0U\|_s^2-C_s\|U\|_s^2\end{aligned}$$

Prenons $p=p_0$ et $q=p_0^2+2p_0$ à la proposition 8.4. On a, de (8.4), (8.13), (8.14) et de (8.15),

$$\text{(8.16)}\qquad \begin{aligned}\frac{d}{dt}(\|W_1\|_s^2+\|W_2\|_s^2)^{\frac{1}{2}}\le\Big\{&C_s(\|W_1\|_s^2+\|W_2\|_s^2)^{\frac{1}{2}}+2p_0\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)\\ &(\|W_1\|_s^2+\|W_2\|_s^2)^{\frac{1}{2}}+C_s\|\tilde F\|_s+C_{s,t}\|U\|_t\Big\}\end{aligned}$$

$$\text{où}\quad \tilde F=\Lambda^{-qt}e_q(t,x;D_x)\begin{bmatrix}G_1\\ G_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\ &\alpha^{-1}&&\\ &&\ddots&\\ &&&\alpha^{1-m}\end{bmatrix}F.$$

Les définitions de W_1 et de W_2, (7.2) et le lemme 8.2 montrent l'expression suivante:

$$\begin{aligned}U(t,x)=\begin{bmatrix}1&&&&\\ &B_1&&&\\ &&B_2&&\\ &&&\ddots&\\ &&&&B_{m-1}\end{bmatrix}&\{K_1f_p(t,x;D_x)\Lambda^{tq}W_1\\ &+K_2f_p(t,x;D_x)\Lambda^{tq}W_2\}+SU(t,x)\end{aligned}$$

où $K_i\in\bigcap_{\varepsilon>0}S^{0;0}_{1,\varepsilon}(t)$, $S\in S^{-\infty,0}(t)$. Comme $B_i\in\bigcap_{\varepsilon>0}S^{i/m,0}_{1,\varepsilon}(t)$, $f_p(t,x;D_x)\in\bigcap_{\varepsilon>0}S^{2C_0Tp^+}_{1-\varepsilon,\varepsilon}(t)$ et $\Lambda^{qt}\in S^{Tq^+,0}_{1,0}(t)$, on a, pour tous s_1 et t_1.

$$(8.17)\qquad \begin{aligned}\|U\|_{s_1} \le C_{s_1}(\|W_1\|_{\frac{m-1}{m}+2C_0Tp^++Tq^++s_1} \\ +\|W_2\|_{\frac{m-1}{m}+2C_0Tp^++Tq^++s_1}) + C_{s_1,t_1}\|U\|_{t_1}\end{aligned}$$

De (6.1) et de (8.17), on a, choisissant $s_1=\tilde{s}+1$ et $t_1=\tilde{s}$,

$$(8.18)\qquad \left|\frac{d}{dt}\|U\|_{\tilde{s}}\right| \le C_{\tilde{s},p,q}\{\|U\|_{\tilde{s}}+\|W_1\|_{\tilde{s}+1+k_{p,q}}+\|W_2\|_{\tilde{s}+1+k_{p,q}}+\|F\|_{\tilde{s}}\}$$

où $k_{p,q}=\frac{m-1}{m}+2C_0Tp^++Tq^+$. Posons $\tilde{s}=s-1-k_{p_1,q_1}$ à (8.18) et $\tilde{t}=s-1-k_{p_1,q_1}$ à (8.16) où $p_1=p_0$ et $q_1=p_0^2+2p_0$. Alors on obtient

$$(8.19)\qquad \begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|U\|_{s-k_{p_1,q_1}-1}+(\|W_1\|_s^2+\|W_2\|_s^2)^{\frac{1}{2}}) \\ &\le C_s(\|U\|_{s-k_{p_1,q_1}-1}+(\|W_1\|_s^2+\|W_2\|_s^2)^{\frac{1}{2}}+\|F\|_s) \\ &\quad +2p_0\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}(\|U\|_{s-k_{p_1,q_1}-1}+(\|W_1\|_s^2+\|W_2\|_s^2)^{\frac{1}{2}})\end{aligned}$$

Ici on a utilisé le suivants:

$$\|\tilde{F}\|_s \le C_s\|F\|_s \quad \text{et} \quad \|F\|_{s-k_{p_1,q_1}-1} \le \|F\|_s.$$

D'où l'on a, en supposant que

$$\|U\|_s = 0(\sigma_1^{2p_0})$$

et $\qquad \|F\|_s\sigma_1^{-2p_0}(t)$ soit borné sur $]0, T]$,

$$(8.20)\qquad \begin{aligned}&\|U\|_{s-k_{p_1,q_1}-1}(t)+(\|W_1\|_s^2+\|W_2\|_s^2)^{\frac{1}{2}}(t) \\ &\le C_s\sigma_1^{2p_0}(t)\left(\int_0^t \sigma_1^{-2p_0}(\tau)\|F\|_s(\tau)d\tau\right)\end{aligned}$$

Soit V_{n_0} une fonction définie au lemme 8.5 où n_0 est l'entier égal ou supérieur à $4p_0$. Compte tenu de (8.6) et de (8.20) on a

$$\begin{aligned}&\|V_{n_0}\|_{s-k_{p_1,q_1}-1}(t) \le C_s\sigma_1^{2p_0}(t)\int_0^t \sigma_1^{-2p_0}(\tau)\times \\ &\times\left(\left\| D_tV_{n_0}-\left\{\begin{pmatrix}\Lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \Lambda_m\end{pmatrix}+[C_{ij}]\right\}V_{n_0}\right\|_s\right)d\tau.\end{aligned}$$

D'où l'on obtient (8.11) en tenant compte de (8.6).

En ce qui concerne (8.12).

Posons $p=-p_0$, $q=-p_0^2-2p_0$. Alors on a, par le raisonnement pareil à (8.16),

$$\frac{d}{dt}(\|W_1\|_s^2+\|W_2\|_s^2)^{\frac{1}{2}} \geq -C_s(\|W_1\|_s^2+\|W_2\|_s^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$-2p_0\frac{\sigma_1+\sigma'_1}{\sigma_1}(\|W_1\|_s^2+\|W_2\|_s^2)^{\frac{1}{2}}-C_s\|\tilde{F}\|_s-C_{s,\tilde{t}}\|U\|_{\tilde{t}}$$

D'où, en prenant $\tilde{t}=s-\frac{m-1}{m}-1$, on obtient, par (8.18) où $\tilde{s}=s-\frac{m-1}{m}-1$ et $K_{p,q}=K_{-p_0,-p_0^2-2p_0}=\frac{m-1}{m}$,

$$\frac{d}{dt}(\|U\|_{s-\frac{m-1}{m}-1}+(\|W_1\|_s^2+\|W_2\|_s^2)^{\frac{1}{2}})$$

$$\geq -C_s\{(\|W_1\|_s^2+\|W_2\|_s^2)^{\frac{1}{2}}+\|U\|_{s-\frac{m-1}{m}-1}\}$$

$$-2p_0\frac{\sigma_1+\sigma'_1}{\sigma_1}(\|W_1\|_s^2+\|W_2\|_s^2)^{\frac{1}{2}}-C_s\|\tilde{F}\|_s-C_s\|F\|_{s-\frac{m-1}{m}-1}.$$

Remarquons que

$$\|\tilde{F}\|_s \leq C_s\|F\|_{s+2c_0Tp_2+Tq_2}$$

$$\text{où}\quad p_2=p_0 \quad\text{et}\quad q_2=p_0^2+2p_0.$$

Alors on a

$$\sigma_1^{2p_0}(t)(\|U\|_{s-\frac{m-1}{m}-1}+(\|W_1\|_s^2+\|W_2\|_s^2)^{\frac{1}{2}})(t)$$

$$\leq \sigma_1^{2p_0}(T)C_s(\|U\|_{s-\frac{m-1}{m}-1}+(\|W_1\|_s^2+\|W_2\|_s^2)^{\frac{1}{2}})(T)$$

$$+C_s\int_t^T \sigma^{2p_0}(s)\|F\|_{s+k_1}(s)\,ds$$

où $k_1=2c_0Tp_2+Tq_2$. Compte tenu du lemme 8.5, on obtient (8.12). C.Q.F.D.

D'après la proposition 5.1, les théorèmes 6.5 et 8.6 impliquent le

Théorème 8.7. *Supposons que P satisfasse aux hypothèses* [H–1] *et* [H–2] *et remplisse les conditions* (2.8) *et* (2.9). *Alors il existe un nombre $k\geq 0$ et on a les inégalités suivantes: pour tout s, tout entier $n\geq 0$, $t\in[0, T]$ et toute $u\in C^\infty([0, T], H^\infty)$,*

$$\sum_{l=0}^{n+m-1}\|D_t^l u(t,x)\|_{s+m+n-1-l}$$

$$\leq C_{s,n}\Big(\sum_{l=0}^{n+m-1}\|D_t^l u(0,x)\|_{s+m+n-1+k-l} \tag{8.21}$$

$$+\int_0^t\sum_{l=0}^{n}\|D_t^l Pu\|_{s+m+n-1+k-l}\,d\tau\Big)$$

$$\sum_{l=0}^{n+m-1}\|D_t^l u(t,x)\|_{s+m+n-1-l}$$

$$\leq C_{s,n}\Big(\sum_{l=0}^{n+m-1}\|D_t^l u(T,x)\|_{s+m+n-1+k-l} \tag{8.22}$$

$$+\int_t^T \sum_{l=0}^{n} \| D_t^l P^* u \|_{s+m+n-1+k-l} d\tau \Big)$$

où P^* est l'opérateur formellement adjoint de P.

En effet, il suffit de noter que l'opérateur P^* aussi satisfait aux hypothèses [H-1] et [H-2] et remplit les condition (2.8) et (2.9).

Remarque. Grâce aux inégalités (8.21) et (8.22), on voit que le problème de Cauchy [C] pour P, qui satisfait aux suppositions du théorème 8.7, a une et une seule solution $C^\infty([0, T], H^\infty)$ pour toutes les données de H^∞ et tout le second membre de $C^\infty([0, T], H^\infty)$. (voir p. ex. Nirenberg [4])

§9. Démonstration du théorème 2.1.

Supposons que l'opérateur P remplisse les suppositions du théorème 8.7. Au cas où $\sigma_1(t)=C_0$ (C_0: une constante), on voit aisément les conditions [H-1] et [H-2] et les majorations (2.8) et (2.9) restent valable pour l'opérateur obtenu par le changement de coordonnées: $t=t_1+\phi(y)$, $x=y$ tel que $\lambda_0|\nabla\phi(y)|<1$ où $\lambda_0=\max_{\substack{i=1\cdots n\\(t,x)\in\Omega\,|\xi|=1}}|\lambda_i(t, x; \xi)|$, les $\lambda_i(t, x; \xi)$ $(i=1, 2,\dots, m)$ sont les racines caractéristiques de $p_m(t, x; \tau, \xi)=0$.

Alors, les solutions $u(t, x)$ et $v(t, x)$ des équations suivantes

$$(9.1)\quad \begin{cases} Pu(t, x)=f(t, x) & (t, x)\in\Omega \\ D_t^i u(0, x)=\psi_i(x) & i=0, 1,\dots, m-1 \end{cases}$$

$$(9.2)\quad \begin{cases} P^*v(t, x)=g(t, x) & (t, x)\in\Omega \\ D_t^i v(T, x)=\psi_i(x) & i=0, 1,\dots, m-1 \end{cases}$$

satisfont

$$(9.3)\quad \operatorname{supp} u(t, x)\subset\Big(\bigcup_{e\in\operatorname{supp} f} D_+(e)\Big)\cup\Big(\bigcup_{\substack{e'\in\operatorname{supp}\psi_i\\ i=0,1,\dots,m-1}} D_+(0, e')\Big)$$

$$(9.4)\quad \operatorname{supp} v(t, x)\subset\Big(\bigcup_{e\in\operatorname{supp} g} D_-(e)\Big)\cup\Big(\bigcup_{\substack{e'\in\operatorname{supp}\psi_i\\ i=0,1,\dots,m-1}} D_-(T, e')\Big)$$

où l'on désigne par $D_+(e)$ (resp. $D_-(e)$) le demi-cône de Ω de sommet $e=(e^\circ, e')\in\Omega$: $\{(t, x)\in\Omega: \lambda_0(t-e^\circ)\geq|x-e'|\}$ [resp. $\{(t, x)\in\Omega: \lambda_0(e^\circ-t)\geq|x-e'|\}$]. (voir p. ex. Mizohata [1]). Au cas où $\sigma_1(0)=0$ et $\sigma_1(t)>0$ $(t>0)$. Comme $\sigma_1'(t)\geq 0$, quel que soit $\varepsilon\in]0, T]$, l'opérateur P remplit, dans $[\varepsilon, T]\times R^n$, [H-1] [H-2] et les majorations (2.8) et (2.9) même si $\sigma_1(t)$ est remplacé par $\bar\sigma_1(t)\equiv\sigma_1(\varepsilon)$. D'après la discussion précédente, pour la solution v de (9.2), on a

$$\operatorname{supp} v(t, x)\cap[\varepsilon, T]\times R^n\subset\Big(\bigcup_{e\in\operatorname{supp} g} D_-(e)\Big)\cup\Big(\bigcup_{\substack{e'\in\operatorname{supp}\psi_i\\ i=0,1,\dots,m-1}} D_-(T, e')\Big)$$

Comme on peut prendre ε arbitrairement petit, (9.4) est valable, d'où l'on voit que (9.3) est aussi valable.

En somme, d'après la remarque après le théorème 8.7, et (9.3) on voit que le problème de Cauchy pour P a une et une seule solution $\in C_0^\infty(\Omega)$ pour toutes les donnés de $C_0^\infty(R^n)$ et tout le second membre de $C_0^\infty(\Omega)$ et que cette solution remplit (9.3).

D'où l'on obtient le théorème 2.1 par le même raisonnement qu'au cas où l'opérateur est régulièrement hyperbolique. (voir p. ex. Mizohata [1]).

C.Q.F.D.

L'auteur remercie Prof. Y. Ohya pour ses conseils et encouragements.

Appendice.

I. On va montrer les majoration de (7.1) comme un exemple des calculs qu'on rencontre plusieurs fois dans le corps de cet article.

Par la formule de Leibnitz

$$\partial_t^i\partial_x^\beta\partial_\xi^\gamma\left(|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|^{\frac{m-1}{m}}\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}|\sigma_1\sigma_2|^{\frac{1}{m}}\langle\xi\rangle^{\frac{1}{m}}(1-\chi(\sigma_2(x)\langle\xi\rangle))^2\right)$$

$$=\sum_{\beta_1\leq\beta}\sum_{\gamma_1\leq\gamma}C_{\beta_1\gamma_1}\left[\partial_t^i\partial_x^{\beta-\beta_1}\partial_\xi^{\gamma-\gamma_1}\left\{\left(|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}|\sigma_1\sigma_2\langle\xi\rangle|^{\frac{1}{m}}\right\}\right]$$

$$\times\partial_x^{\beta_1}\partial_\xi^{\gamma_1}(1-\chi(\sigma_2(x)\langle\xi\rangle))^2.$$

De (2.2) et de (2.2′) on a

$$\left|\partial_t^i\partial_x^\beta\partial_\xi^\gamma\left\{\left(|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}|\sigma_1\sigma_2\langle\xi\rangle|^{\frac{1}{m}}\right\}\right|$$

$$\leq C_{i,\beta,\gamma}\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^i\left(\frac{|\nabla\sigma_2|+|\sigma_2|}{|\sigma_2|}\right)^{|\beta|}\langle\xi\rangle^{-|\gamma|}$$

$$\times\left\{\left(|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}|\sigma_1\sigma_2\langle\xi\rangle|^{\frac{1}{m}}\right\}$$

Et de (2.3′)

$$(A.1)\qquad \begin{aligned}&\leq C_{i,\beta,\gamma,\varepsilon}\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^i\langle\xi\rangle^{\varepsilon|\beta|-|\gamma|}\\ &\times\left\{\left(|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}|\sigma_1\sigma_2\langle\xi\rangle|^{\frac{1}{m}}\right\}\quad\text{sur supp}\,(1-\chi(\sigma_2(x)\langle\xi\rangle))^2\end{aligned}$$

et comme, compte tenu de (2.3) et de (2.3′), pour tout $\varepsilon>0$,

$$\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^i\left\{\left(|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}|\sigma_1\sigma_2|^{\frac{1}{m}}\right\}^\varepsilon\quad\text{est borné,}$$

$$(A.2)\qquad \leq C_{i,\beta,\gamma,\varepsilon}\langle\xi\rangle^{\frac{1}{m}\varepsilon+|\beta|\varepsilon-|\gamma|}\left\{\left(|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}|\sigma_1\sigma_2\langle\xi\rangle|^{\frac{1}{m}}\right\}^{1-\varepsilon}$$

$$\text{sur supp}\,(1-\chi(\sigma_2(x)\langle\xi\rangle))^2$$

D'autre part, si $|\beta_1|+|\gamma_1|\geq 1$, pour tout $\varepsilon>0$

$$|\partial_x^{\beta_1}\partial_\xi^{\gamma_1}(1-\chi(\sigma_2(x)\langle\xi\rangle))^2|\leq C_{\beta_1,\gamma_1,\varepsilon}\langle\xi\rangle^{\varepsilon|\beta_1|-|\gamma_1|} \qquad \text{(vu (2.3'))}$$

et, de (2.3)

$$(A.3) \qquad \left[\left|\log\sigma_1^2\sigma_2^2\right|\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right]^{\frac{m-1}{m}}\left|\sigma_1\sigma_2\langle\xi\rangle\right|^{\frac{1}{m}}\leq C|\log(1+|\xi|)|^{\frac{m-1}{m}}$$

$$\text{sur supp}\,\partial_x^{\beta_1}\partial_\xi^{\gamma_1}(1-\chi(\sigma_2(x)\langle\xi\rangle))^2$$

De (A.1), (A.2) et de (A.3), on obtient (7.1).

II. Preuve du lemme 7.2.

Comme $C_{ij}^1\in S_{1,0}^{1,0}(t)$ et $\alpha^{-i+1}\in S_{\varepsilon,1}^{0,0}(t)$,

$$\alpha^{-i+1}C_{ij}^1B^{j-1}-\alpha^{-i+1}C_{ij}^1\left\{\alpha^{j-1}+(j-1)^2\sum_{l=1}^n\frac{\partial}{\partial\xi_l}\alpha\circ D_{x_l}\alpha\circ\alpha^{j-3}\right\}\in S_{1,\varepsilon}^{0,0}(t)$$

Notons que

$$\alpha^{-i+1}C_{ij}^1\alpha^{j-1}-\sum_{|\beta|+|\gamma|\leq 1}((\alpha^{-i+1})^{(\beta)}C_{ij(\beta)}^1)^{(\gamma)}(\alpha^{j-1})_{(\gamma)}$$

$$\in\bigcap_{\varepsilon>0}S_{1,\varepsilon}^{1-2(1-\varepsilon)+\frac{j-1}{m},0}(t)$$

et que

$$\alpha^{-i+1}C_{ij}^1\left(\frac{\partial}{\partial\xi_l}\alpha\circ D_{x_l}\alpha\circ\alpha^{j-3}\right)-\alpha^{j-i-2}\circ\frac{\partial}{\partial\xi_l}\alpha\circ D_{x_l}\alpha\circ C_{ji}^1$$

$$\in\bigcap_{\varepsilon<0}S_{1,\varepsilon}^{1-(1-\varepsilon)2+\frac{j-1}{m},0}(t)$$

où $\lambda_{(\gamma)}^{(\beta)}(t,x;\xi)=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\beta D_x^\gamma\lambda(t,x;\xi)$. Comme

$$\alpha_{(\delta)}^{(\gamma)}/\alpha\in\left(\frac{|(\nabla\sigma_2,\sigma_2)|}{|\sigma_2|}\right)^{|\delta|}S(0,-|\gamma|) \quad \text{et}$$

$$C_{ij}^1\in\left[(\log\sigma_1^2\sigma_2^2)\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)\right]^{i-j}S(1,1), \quad \text{on voit que}$$

$$((\alpha^{-i+1})^{(\beta)}\circ C_{ij(\beta)}^1)^{(\gamma)}\circ(\alpha^{j-1})_{(\gamma)}\in\bigcap_{\varepsilon>0}S_{1,\varepsilon}^{0,0}(t) \qquad (|\beta|+|\gamma|>0)$$

et

$$\alpha^{j-i-1}\circ\frac{\partial}{\partial\xi_l}\alpha\circ D_{x_l}\alpha\circ C_{ij}^1\in\bigcap_{\varepsilon>0}S_{1,\varepsilon}^{0,0}(t).$$

De la considération ci-dessus, on obtient a) du lemme 7.2. Le reste du lemme 7.2 est aussi montré par le raisonnement pareil.

III. Preuve du lemme 8.1.

Posons

$$t_{1,x,\xi}=\max\{t\in[0,T]:(t,x,\xi)\in\text{supp}\,\psi_5\}$$

$$t_{2,x,\xi}=\min\{t\in[0,T]:(t,x,\xi)\in\text{supp}\,(1-\psi_1)\}$$

Ici, quand $[0, T]\times\{(x, \xi)\}\cap\operatorname{supp}(1-\psi_1)(t, x; \xi)=\emptyset$, on pose $t_{2,x,\xi}=T$. Comme

$$\frac{d}{dt}\left(e^{3t}\frac{\sigma_1^2(t)}{\sigma_1'(t)+\sigma_1(t)}\right)>0 \quad \text{sur }]0, T] \text{ de (2.5), on voit}$$

que pour tout $(x_0, \xi_0)\in \boldsymbol{R}^{2n}$

$$(A.4)\qquad \begin{aligned}&[0, t_{1,x_0,\xi_0}]=\operatorname{supp}\psi_5\cap[0, T]\times\{(x_0, \xi_0)\}\\ &[t_{2,x_0,\xi_0}, T]\supset\operatorname{supp}(1-\psi_1)\cap[0, T]\times\{(x_0, \xi_0)\}\end{aligned}$$

De (2.5) on a

$$\left[\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1'+\sigma_1}e^{3t}\right)^{\frac{1}{m}}\right]'\geq C\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^{1-\frac{1}{m}}\sigma_1^{\frac{1}{m}} \quad \text{et}$$

$$\left[\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1'+\sigma_1}e^{3t}\right)^{-\frac{1}{m}}\right]'\leq -C\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_1'}\right)^{-1-\frac{1}{m}}\sigma_1^{-\frac{1}{m}} \quad \text{où} \quad C>0.$$

De (7.9), sur $[0, t_{1,x,\xi}]$, $|\log\sigma_1^2(t)\sigma_2^2(x)|\geq C\log(\langle\xi\rangle+1)$. Alors il existe des constantes $M>0$ et $C>0$ et on a pour $|\xi|>M$

$$\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^{1-\frac{1}{m}}\sigma_1^{\frac{1}{m}}|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|^{1-\frac{1}{m}}\leq C\left(|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|^{1-\frac{1}{m}}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1'+\sigma_1}e^{3t}\right)^{\frac{1}{m}}\right)',$$

$$\text{sur } [0, t_{1,x,\xi}] \quad \text{et}$$

$$\left(\frac{\sigma_1'+\sigma_1}{\sigma_1}\right)^{1+\frac{1}{m}}\sigma_1^{-\frac{1}{m}}|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|^{1+\frac{1}{m}}\leq -C\left(|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|^{1+\frac{1}{m}}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1'+\sigma_1}e^{3t}\right)^{-\frac{1}{m}}\right)',$$

$$\text{sur } [t_{2,x,\xi}, T].$$

Alors, pour montrer le lemme 8.1, il suffit de noter que pour tous multi-indices α, β

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\int_0^t \beta_1(s, x; \xi)ds\right|$$

$$\leq C_{\alpha,\beta}\int_0^{t_{1,x,\xi}}\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|\right)^{1-\frac{1}{m}}|\sigma_1\sigma_2|^{\frac{1}{m}}\langle\xi\rangle^{\frac{1}{m}}\langle\xi\rangle^{\varepsilon|\alpha|-|\beta|}ds$$

et

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\int_0^t \beta_2(s, x; \xi)ds\right|$$

$$\leq C_{\alpha,\beta}\int_{t_{2,x,\xi}}^T\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}|\log\sigma_2^2\sigma_2^2|\right)^{1+\frac{1}{m}}\sigma_1^{-\frac{1}{m}}|\sigma_2\langle\xi\rangle|^{-\frac{1}{m}}\langle\xi\rangle^{\varepsilon|\alpha|-|\beta|}ds$$

(Ici on a utilisé les suivants: $\left(\frac{|\sigma_2|+|\nabla_2\sigma|}{|\sigma_2|}\right)\leq C\langle\xi\rangle^\varepsilon$ sur $\{(x, \xi)\colon |\sigma_2(x)\langle\xi\rangle|\geq c_0>0\}$ et $|\sigma_2(x)\langle\xi\rangle|\geq c_1>0$ dans $\operatorname{supp}\{1-\psi_1\}$) et de (7.9)

$$\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)^{-\frac{1}{m}}|\log\sigma_1^2\sigma_2^2|^{1-\frac{1}{m}}(|\sigma_1\sigma_2|\langle\xi\rangle)^{\frac{1}{m}}|_{t=t_{1,x,\xi}}\leq C\log(\langle\xi\rangle+1) \quad \text{et}$$

$$\left(\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{\sigma_1}\right)^{\frac{1}{m}} |\log \sigma_1^2\sigma_2^2|^{1+\frac{1}{m}} (|\sigma_2\sigma_2|\langle\xi\rangle)^{-\frac{1}{m}}\big|_{t=t_2,x,\xi} \leq C\log(\langle\xi\rangle+1).$$

C. Q. F. D.

Section de Mathématique et Physique Appliquées
Faculté des Sciences Techniques
Université de Kyoto

Références

[1] S. Mizohata, The theory of partial differenital equations (Ch. 6 Sec. 12), Cambridge Univ. Press.

[2] G. Nakamura and H. Uryu, Parametrix of certain weakly hyperbolic operators, Comm, in Partial Differential Equations, **5** (1980), 837–896.

[3] A. B. Nersesjan, On Cauchy problem for degenerating hyperbolic equation of second order (in Russian), Izv. Acad. Nauk Arm. S. S. R., **3** (1968), 78–100.

[4] L. Nirenberg, Pseudo-differential operators (Appendix), Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math., **16** (1970), 149–167.

[5] T. Nishitani, On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Comm. in Partial Differential Equations, **3** (1978), 319–333.

[6] K. Shinkai, On the fundamental solution for a degenerate hyperbolic system, to appear in Osaka J. Math.

[6 bis] K. Shinkai and K. Taniguchi, Sur les solutions fondamentales pour les systèmes faiblement hyperboliques (en japonais), Sûkaiken kôkyûroku 357 (1979), 86–96 RIMS Kyoto Univ.

[7] H. Tahara, Singular hyperbolic systems, I. Existence, uniqueness and differentiability, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, **26** (1979), 213–238.

———, II. Pseudo-differential operators with a parameter and their applications to singular hyperbolic systems, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, **26** (1980).

———, III. On the Cauchy problems for Fuchsian hyperbolic partial differential equations, to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA.

[8] S. Tarama, Un exemple dans le problème de Cauchy pour les équations faiblement hyperboliques, Publ. RIMS Kyoto Univ., **15** (1979), 455–468.

[9] H. Uryu, The Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Comm. in Partial Differential equations, **5** (1980), 23–40.

[10] H. Uryu, The Cauchy problem for weakly hyperbolic equations (II); Infinite degenerate case, Tokyo J. Math., **3** (1980), 99–113.

[11] K. Yamamoto, The Cauchy problem for some class of hyperbolic differential operators with variable multiple characteristics, J. Math. Soc. Japan, **31** (1979), 481–502.