J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
24-3 (1984) 453–471

Unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs quasi-homogènes

Par

Belhassen DEHMAN

(Communiqué par Prof. Mizohata, le 22janvier 1983)

Introduction

La propriété d'unicité du problème de Cauchy pour un opérateur différentiel, à partir d'une surface non caractéristique, a fait l'objet de nombreux travaux dont les premiers remontent à T. Carleman [7], A. P. Calderón [6], S. Mizohata [14] et L. Hörmander [10]. Ces auteurs ont donné des conditions suffisantes sur la partie principale pour avoir l'unicité quels que soient les termes d'ordre inférieur. Cela dit, la propriété d'unicité, comme l'ont d'abord montré P. Cohen [8], A. Pliš [16],... dépend, en général, du symbole total de l'opérateur. Des travaux récents de S. Alinhac - M. S. Baouendi [2], S. Alinhac - C. Zuily [3], R. Lascar - C. Zuily [13], S. Alinhac [1], ont permis de clarifier sur certaines classes d'opérateurs, le rôle des termes d'ordre inférieur, en fournissant pour l'unicité des conditions suffisantes et des condition nécessaires.

Le présent travail est consacré à une classe d'opérateurs du second ordre et constitue une suite naturelle aux travaux de [3] et [13].

On considère dans un ouvert Ω de $\boldsymbol{R}^{n+m}$ (dont on note (x, y), $x \in \boldsymbol{R}^n$, $y \in \boldsymbol{R}^m$ le point courant), un opérateur de la forme:

$$P=\sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x, y) D_x^\alpha + p_1(x, y, D_y) + i p_2(x, y, D_y)$$

où a_α, $|\alpha|=2$, est réel et dans $C^\infty(\Omega)$, et pour $j=1, 2$, $p_j(x, y, D_y)$ est un opérateur homogène d'ordre 1, à coefficients réels, et dans $C^\infty(\Omega)$.

Soit (x_0, y_0) un point de Ω et $S=\{\varphi(x, y)=\varphi(x_0, y_0)\}$; $d\varphi(x_0, y_0)\neq 0$, une hypersurface passant par (x_0, y_0). On se place dans l'un des deux cas suivants:

1. Les formes linéaires $p_1(x_0, y_0, \eta)$ et $p_2(x_0, y_0, \eta)$ sont indépendantes.
2. $p_2 \equiv 0$ sur Ω et $p_1(x_0, y_0, \eta) \not\equiv 0$.

On montre alors que, modulo des conditions de structure (dont une partie est justifiée dans [3]), l'unicité locale du problème de Cauchy relativement à S est régie essentiellement par une notion géométrique liée à cette hypersurface: la pseudo-convexité par rapport aux bicaractéristiques (Th. 2.1 cf. [13]).

On donne aussi un Théorème, en coordonnées locales, qui permet d'étudier des opérateurs n'entrant pas dans le cadre de cette classification (Th. 2.2 cf. [3]).

La preuve de ces résultats utilise la technique classique des inégalités de Carleman avec des poids analogues à ceux utilisés dans [5].

§ 1. Préliminaires

1.1. Notations

On aborde cette section en définissant la classe d'opérateurs sur laquelle on travaillera. Soient n et $m \in \boldsymbol{N}^*$. On conviendra dans la suite, d'appeler (x, y) le point courant de $\boldsymbol{R}^{n+m}$, $x \in \boldsymbol{R}^n$, $y \in \boldsymbol{R}^m$ et ξ, η les variables duales de x et y.

Soit S une hypersurface de $\boldsymbol{R}^{n+m}$, $S=\{\varphi(x, y)=\varphi(x_0, y_0)\}$, $d\varphi(x_0, y_0)\neq 0$ et Ω un voisinage de (x_0, y_0) dnas $\boldsymbol{R}^{n+m}$.

On considèrera dans ce travail les opérateurs différentiels P définis sur Ω, de la forme:

$$P=\sum_{|\alpha|<2} a_\alpha(x, y)D_x^\alpha+p_1(x, y, D_y)+ip_2(x, y, D_y) \tag{1.1}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} \text{1-Le symbole principal } p \text{ de } P \text{ est réel et à coefficients dans } C^\infty(\Omega). \\ \text{2-Pour } j=1, 2\ p_j=p_j(x, y, D_y) \text{ est un opérateur homogène d'ordre 1,} \\ \quad \text{à symbole réel et à coefficients dans } C^\infty(\Omega). \end{array}\right. \tag{1.2}$$

Nous nous placerons successivement dans l'un des deux cas suivants:

(1.3) 1*er cas*: Les formes linéaires $p_1(x_0, y_0, \eta)$ et $p_2(x_0, y_0, \eta)$ sont indépendantes.

(1.4) 2*ème cas*: $p_2\equiv 0$ sur Ω et $p_1(x_0, y_0, \eta)\not\equiv 0$.

1.2. La pseudo-convexité quasi-homogène

Nous reprenons dans ce paragraphe les constructions de Lascar - Zuily [13].

Désignons par N la sous variété involutive de $T^*\Omega\backslash 0$: $N=\{(x, y; \xi, \eta): \xi=0\}$ et notons par σ la 2-forme symplectique de $T^*\Omega$.

L'opérateur P est à caractéristiques doubles sur N, et le théorème de Frobenius ([9]) implique que la sous variété N est "feuilletée" c.a.d. par tout point $m_0\in N$, il passe au moins une feuille locale de N, soit une sous variété connexe F de $T^*\Omega$ telle que:

$$m_0\in F\subset N$$

$$\forall m\in F,\quad T_mF=T_mN.$$

Soit F une feuille locale de N passant par $m_0\in N$, et soit Q^F la forme quadratique induite sur T_FM par $\frac{1}{2}$ Hess p, où Hess p désigne la hessienne du symbole principal p de P et $M=T^*\Omega$.

Nous allons construire, à partir de Q^F, un invariant défini sur T^*F.

Il est tout d'abord clair qu'étant non dégénérée, la 2-forme σ induit un isomorphisme:

$$\begin{aligned} i=TM &\longrightarrow T^*M & \text{où}\quad i_z\colon T_zM &\longrightarrow T_z^*M \\ (z,t) &\longrightarrow i(z,t)=(z,i_z(t)) & t &\longrightarrow i_z(t)\colon T_zM \longrightarrow \boldsymbol{R} \\ & & t' &\longrightarrow \sigma_z(t,t') \end{aligned}$$

Cet isomorphisme en induit un autre $i_F=T_FM\to T_F^*M$.

D'autre part, F étant une feuille locale de $N\hookrightarrow M$, on a le morphisme surjectif:

$$j_F\colon T_F^*M \longrightarrow T^*F.$$

Poson $h_F=j_F\circ i_F\colon T_FM\to T^*F$. Le noyau de h_F est T_FN et on a la factorisation:

$$\begin{tikzcd} T_FM \arrow[rr, "h_F"] \arrow[dr, shift right, "k_F"'] & & T^*F \\ & N_F(N) \arrow[ul, shift right, "r_F"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

où $N_F(N)=\dfrac{T_NM}{TN|_F}$, où k_F est la projection induite par la projection canonique: $T_NM\to\dfrac{T_NM}{TN}$, où r_F est un relèvement de k_F, et où g est un isomorphisme. On définit dans ces conditions:

$$Q_F=Q^F\circ r_F\circ g^{-1}.$$

Toute cette construction est invariante par transformation canonique, et la forme quadratique Q_F ainsi définie sur T^*F, est indépendante du relèvement r_F choisi pour k_F.

(1.5) On pose: $q_F=Q_F+\operatorname{Re} p_{s|F}$

où p_s est le symbole sous principal de P.

Enfin, si $\varphi\in C^\infty(\Omega)$, on pose $\tilde\varphi=\varphi\circ\Pi\circ\theta_F$, où θ_F et Π sont les projections canoniques: $T^*F\to F$ (resp.: $T^*\Omega\to\Omega$).

On peut, à présent définir la notion de pseudo-convexité dans les cas 1 et 2 décrits en (1.3) et (1.4). On pose à cet effect:

$$N_1=\{z_0\in N\colon \Pi(z_0)=(x_0,y_0),\quad \operatorname{Re} p_s(z_0)\neq 0 \text{ et } \operatorname{Im} p_s(z_0)=0\}$$

$$N_2=\{z_0\in N\colon \Pi(z_0)=(x_0,y_0),\quad \operatorname{Re} p_s(z_0)\neq 0\}.$$

Définition 1.2.1. Soit P défini en (1.1) satisfaisant à (1.3) (resp. 1.4)). L'hypersurface orientée $\{\varphi(x,y)=\varphi(x_0,y_0)\}$ est dite pseudo-convexe par rapport aux bicaractéristiques de P en (x_0,y_0), si elle est non caractéristique, et si elle vérifie la condition suivante:

$$(\psi)\quad\begin{cases} \text{Si } z_0\in T^*\Omega\backslash 0 \text{ est un point de } N_1 \text{ (resp. } N_2\text{), il existe une feuille locale } F \\ \text{de } N \text{ passant par } z_0 \text{ telle que:} \\ (z_0,\zeta_0)\in T^*F,\quad q_F(z_0,\zeta_0)=0,\quad H_{q_F}(\tilde\varphi)(z_0,\zeta_0)=0\Rightarrow H^2_{q_F}(\tilde\varphi)(z_0,\zeta_0)<0 \end{cases}$$

où H_{q_F} désigne le hamiltonien de la fonction q_F définie en (1.6).
Cette hypersurface sera dite fortement non pseudo-convexe par rapport aux bicaractéristiques de P en (x_0, y_0) si:

$$(*)\quad \begin{cases} \exists z_0 \in T^*\Omega\backslash 0,\ z_0 \in N_1 \text{ (resp. } N_2\text{), il existe une feuille locale } F \text{ de } N \text{ passant} \\ \text{par } z_0, \text{ il existe } \zeta_0 \in T^*_{z_0}F: \\ q_F(z_0, \zeta_0)=0, \quad H_{q_F}(\tilde{\varphi})(z_0, \zeta_0)=0 \text{ et } H^2_{q_F}(\tilde{\varphi})(z_0, \zeta_0)>0. \end{cases}$$

1.2.2. Exemple. On se place dans le système de coordonnées (t, x, y), $t \in \boldsymbol{R}$, $x \in \boldsymbol{R}^{n-1}$, $y \in \boldsymbol{R}^m$; et on travaille au voisinage de l'origine, l'hypersurface S étant donnée par $\{t=0\}$.

Soit

$$P=D_t^2+\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(t, x, y)D_{x_i}D_{x_j}+p_1(t, x, y, D_y) + ip_2(t, x, y, D_y)+\sum_{|\alpha|\leq 1} a_\alpha(t, x, y)D_x^\alpha+bD_t.$$

On fait sur P les hypothèses suivantes:

1. La forme linéaire p_1 $(0, 0, 0, \eta)$ n'est pas identiquement nulle sur $\boldsymbol{R}^m$.
2. Il existe des fonctions réelles C^∞ près de l'origine α et β telles que:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, p_1\right]=\alpha p_1+\beta p_2.$$

3. Les champs p_1 et p_2 sont indépendants à l'origine, ou bien la forme linéaire p_2 est identiquement nulle près de l'origine.

Dans ce cadre, on a:

$$N=\{(t, x, y, z, \xi, \eta)\in T^*\Omega\backslash 0: \xi=0\}$$

$$F=\{(t, x, y, \tau, \xi, \eta)\in T^*\Omega\backslash 0: \tau=\xi=0;\ y=y_0;\ \eta=\eta_0\neq 0,\ |t|<t_0,\ |x|<|x_0|\}.$$

Un point (z, ζ) de T^*F tel que $p_s(z)=\mathrm{Re}\,p_s(z)\neq 0$ s'écrit:
$(t, x, y_0, 0, 0, \eta_0, \zeta_1, \zeta_2, 0, 0, 0, 0)$ avec $p_1(0, 0, 0, \eta_0)\neq 0$ et $p_2(0, 0, 0, \eta_0)=0$
Par suite, on obtient: $q_F(z, \zeta)=\zeta_1^2+a(t, x, y_0, \zeta_2)+p_1(t, x, y_0, \eta_0)$ où

$$a(t, x, y_0, \zeta_2)=\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(t, x, y_0)\zeta_2^i\zeta_2^j, \quad \zeta_2=(\zeta_2^i)_{1\leq i\leq n-1}.$$

Comme $\tilde{\varphi}(z, \zeta)=t$, on a: $H_{q_F}(\tilde{\varphi})=2\zeta_1$ et $H^2_{q_F}(\tilde{\varphi})=-2\dfrac{\partial q_F}{\partial t}$. La condition de pseudo convexité (ψ) s'écrit donc:

$$\forall \zeta_2 \in \boldsymbol{R}^{n-1}\backslash 0 \left\{\begin{array}{l} a(0, \zeta_2)+p_1(0, \eta_0)=0 \\ \text{et} \\ \qquad p_1(0, \eta_0)\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\frac{\partial a}{\partial t}(0, \zeta_2)+\frac{\partial p_1}{\partial t}(0, \eta_0)>0\right\}$$

ce qui est équivalent à:

$$(\psi) \qquad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^{n-1}\backslash 0: \frac{\partial a}{\partial t}(0, \xi) - \alpha(0)a(0, \xi) > 0.$$

Et de manière analogue:

$$(*) \qquad \exists \xi \in \boldsymbol{R}^{n-1}\backslash 0: \frac{\partial a}{\partial t}(0, \xi) - \alpha(0)a(0, \xi) < 0.$$

§ 2. Enoncé des résultats — Remarques — Exemples

Dans ce qui suit, Ω désignera un voisinage du point (x_0, y_0), $S = \{\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0)\}$ une hypersurface non caractéristique passant par (x_0, y_0), et $\Omega^+ = \{(x, y) \in \Omega: \varphi(x, y) > \varphi(x_0, y_0)\}$.

D'autre part, si $X_1, \dots, X_n$ sont des champs de vecteurs définis sur Ω, on appellera $\mathscr{E}(X_1, \dots, X_n)$ l'espace de leurs combinaisons linéaires à coefficients $C^\infty(\Omega)$ réels.

Théorème 2.1. *Soit P un opérateur différentiel défini sur le voisinage Ω du point (x_0, y_0) par* (1.1) *et* (1.2):

$$P = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x, y) D_x^\alpha + p_1(x, y, D_y) + i p_2(x, y, D_y).$$

On suppose que l'on se trouve dans l'un des cas suivants:

i) Les formes linéaires $p_1(x_0, y_0, \eta)$ et $p_2(x_0, y_0, \eta)$ sont indépendantes.

ii) $p_2 \equiv 0$ sur Ω et $p_1(x_0, y_0, \eta) \not\equiv 0$.

Soit $S = \{(x, y) \in \Omega: \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0)\}$ une hypersurface orientée pseudo-convexe par rapport aux bicaractéristiques de P en (x_0, y_0).

On suppose en outre que:

$$(H) \qquad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial x_j}, p_1\right] \in \mathscr{E}(p_1, p_2) & \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial x_j}, p_2\right] \in \mathscr{E}(p_2) & \text{pour } j = 1, \cdots, n. \\ [p_1, p_2] \in \mathscr{E}(p_1, p_2) & \end{cases}$$

Il existe alors un voisinage V de (x_0, y_0) tel que si u est une fonction de $C^\infty(\Omega)$ qui, pour un $C = C(u) \geqslant 0$ vérifie:

$$\begin{cases} |Pu(x, y)| \leqslant C\{|\nabla_x u(x, y)| + |u(x, y)|\} & (x, y) \in \Omega \\ u = 0 \text{ dans } \{\varphi(x, y) < \varphi(x_0, y_0)\}, & \end{cases}$$

alors $u \equiv 0$ dans V.

Théorème 2.2. *Soit P un opérateur différentiel défini dans les coordonnées (t, x, y), $t \in \boldsymbol{R}$, $x \in \boldsymbol{R}^{n-1}$, $y \in \boldsymbol{R}^m$ par:*

$$P=D_t^2+\sum_{i<j=1}^{r} a_{ij}(t,x,y)D_{x_i}D_{x_j}+p_1(t,x,y,D_y)+ip_2(t,x,y,D_y) \quad \text{où } 1\leqslant r\leqslant n-1$$

l'hypersurface S étant définie au voisinage de l'origine par $\{t=0\}$.

On suppose que:

(H_0) $\quad p_1(0,\eta)\not\equiv 0$

(H_1) Il existe des fonctions a_1, b_1, a_2, w_1, w_2 bornées dans Ω^+, avec $t\dfrac{\partial a_1}{\partial t}$ bornée, et $\varepsilon>0$ tels que l'on ait dans Ω^+:

$$\begin{cases} i)\ \left[\dfrac{\partial}{\partial t}, p_1\right]=\dfrac{1}{t}[a_1p_1+b_1p_2] \\ ii)\ \left[\dfrac{\partial}{\partial t}, p_2\right]=\dfrac{1}{t}a_2p_2 \\ iii)\ [p_1,p_2]=w_1p_1+w_2p_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_1+2\geqslant\varepsilon \\ 2(a_2+1)-a_1\geqslant\varepsilon \\ (2a_2+2-a_1)(a_1+2)-b_1^2\geqslant\varepsilon \end{cases}$$

(H_2)
$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial x_k}, p_1\right]\in\mathscr{E}(p_1,p_2) \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial x_k}, p_2\right]\in\mathscr{E}(p_2) \end{cases} \quad \text{pour} \quad k=1,\dots,r.$$

(H_3)
$$\begin{cases} \exists c_0>0 \text{ tel que:} \\ \forall\xi\in \boldsymbol{R}^r\backslash 0:\ \dfrac{\partial a}{\partial t}(t,x,\xi)-\dfrac{a_1}{t}a(t,x,y,\xi)>c_0|\xi|^2 \text{ dans } \Omega^+. \end{cases}$$

Il existe alors un voisinage V de l'origine tel que, si u est une fonction de $C^\infty(\Omega)$ qui, pour un $C=C(u)$ vérifie:

$$\begin{cases} |Pu(t,x,y)|\leqslant C\left\{|\nabla_x u(t,x,y)|+\dfrac{1}{t}\left|\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x,y)\right|+\dfrac{1}{t^2}|u(t,x,y)|\right\}(t,x,y)\in\Omega^+ \\ u=0 \text{ dans } \{t<0\} \end{cases}$$

alors $u\equiv 0$ dans V.

2.3 Remarques — Exemples.

i) Le théorème 2.1 généralise le théorème de Lascar - Zuily ([13], th. 1.3).

ii) Le travail de Alinhac - Zuily [3] montre que, dans certains cas, les conditions H_1 i), ii) du théorème 2.2 sont nécessaires.

iii) Dans $\boldsymbol{R}^{n+2}$ (cas $m=2$) muni du système de coordonnées (t,x,y), $t\in\boldsymbol{R}$, $x\in\boldsymbol{R}^{n-1}$, $y\in\boldsymbol{R}^2$, considérons au voisingae de l'origine, l'opérateur:

$$P=D_t^2+a(t,x,y;D_x)+c(t,x,y)D_{y_1}+id(t,x,y)D_{y_2}$$

où $a(t,x,y;\xi)$ est une forme quadratique réelle et C^∞, c et d C^∞ réelles, et non nulles en 0.

$$Si \qquad \forall\xi\in\boldsymbol{R}^{n-1}\backslash 0:\frac{\partial a}{\partial t}(0,\xi)-\frac{\dfrac{\partial c}{\partial t}(0)}{c(0)}a(0,\xi)>0,$$

alors le théorème 2.1 s'applique avec $S=\{t=0\}$.

iv) Dans $\boldsymbol{R}^4$ muni du système de coordonnées (t, x, y_1, y_2), on considère, au voisinage de l'origine, l'opérateur:

$$P=D_t^2+D_x^2+(1-t)D_{y_1}+i(D_{y_1}+y_2D_{y_2}).$$

Il admet l'unicité, à l'origine, pour S donnée par $\{t=0\}$.

§ 3. Preuve des théorèmes

Soit $P=\sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x, y)D_x^\alpha+p_1(x, y, D_y)+ip_2(x, y, D_y)$ défini en (1.1) et (1.2); et $S=\{\varphi(x, y)=\varphi(x_0, y_0)\}$ l'hypersurface initiale. Nous donnons, d'abord, le lemme de réduction suivant:

Lemme 3.1. *On peut trouver des coordonnées $(t, x; y)$ de $\boldsymbol{R}^{n+m}$, $t\in\boldsymbol{R}$, $x\in\boldsymbol{R}^{n-1}$, $y\in\boldsymbol{R}^m$, dans lesquelles:*

i) $(x_0; y_0)=(0, 0; 0)$; φ est donnée par $\varphi(t, x, y)=t$

ii) L'opérateur P s'écrit, à la multiplication près par une fonction C^∞ rélle, non nulle en 0:

$$P=D_t^2+\sum_{i\leq j=1}^{n-1} b_{ij}(t, x, y)D_{x_i}D_{x_j}+q_1(t, x, y, D_y)$$
$$+iq_2(t, x, y, D_y)+\sum_1^{n-1} b_kD_{x_k}+\alpha D_t+\beta$$

où les b_{ij} sont des fonctions C^∞ réelles, et où $q_j=q_j(t, x, y, D_y)$ $j=1, 2$ est un opérateur homogène d'ordre 1, à symbole réel.

iii) L'hypothèse (H) du théorème 2.1 s'écrit:

$$(H)\quad\begin{cases}\left[\dfrac{\partial}{\partial t}, q_1\right]\in\mathscr{E}(q_1, q_2) \quad et \quad \left[\dfrac{\partial}{\partial t}, q_2\right]\in\mathscr{E}(q_2)\\[2mm] \left[\dfrac{\partial}{\partial x_j}, q_1\right]\in\mathscr{E}(q_1, q_2) \quad et \quad \left[\dfrac{\partial}{\partial x_j}, q_2\right]\in\mathscr{E}(q_2) \qquad j=1,\dots, n-1\\[2mm] [q_1, q_2]\in\mathscr{E}(q_1, q_2).\end{cases}$$

iv) Si, de plus, P vérifie (1.3) ou (1.4), alors la condition (ψ) de pseudo-convexité par rapport aux bicaractéristiques s'écrit comme dans l'exemple 1.2.2.

Preuve du Lemme. Le problème étant de nature locale, on ramène, par translation, le point (x_0, y_0) à l'origine.

Ensuite, l'hypersurface S étant non caractéristique, on peut supposer que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0, 0)\neq 0$. En posant alors le changement de variables:

$$\begin{cases}T=\varphi(x, y)\\ X_j=x_j \qquad j=2,\dots, n\\ Y_j=y_j \qquad j=1,\dots, m.\end{cases}$$

On peut écrire P, quitte à le multiplier par une fonction C^∞ réelle, non nulle en 0, sous la forme:

$$P = D_T^2 + \sum_{i \leq j=2}^{n} c_{ij}(T, X, Y) D_{X_i} D_{X_j} + \sum_{k=2}^{n} c_k D_{X_k} D_T + q_1 + iq_2 + \sum_{k=2}^{n} b_k D_{X_k} + \alpha D_T + \beta$$

avec $q_j = q_j(T, X, Y, D_Y)$ $j=1, 2$, la surface S étant donnée par $\{T=0\}$.

L'étape suivante consiste à éliminer les termes en $D_X D_T$. Considérons les nouvelles variables:

$$\begin{cases} t' = T \\ x'_j = f_j(T, X, Y) & j = 2, \ldots, n \\ y'_j = Y_j & j = 1, \ldots, m \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial T} \text{ se transforme en } \dfrac{\partial}{\partial t'} + \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \dfrac{\partial f_j}{\partial T} \dfrac{\partial}{\partial x'_j} \\ \dfrac{\partial}{\partial X_j} \text{ se transforme en } \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{\partial f_k}{\partial X_j} \dfrac{\partial}{\partial x'_k}, \end{array}$$

et choisissons pour f_l la solution du problème de Cauchy:

$$\left[\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f_l}{\partial T} + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} c_k \dfrac{\partial f_l}{\partial X_k} = 0 & \text{pour tout } l = 2, \ldots, n \\ f_l|_{T=0} = X_l & \end{array} \right].$$

Il est alors facile de voir que l'opérateur P se transforme en:

$$\tilde{p} = D_{t'}^2 + \sum_{i \leq j=2}^{n} \tilde{c}_{ij} D_{x'_i} D_{x'_j} + \tilde{q}_1 + i\tilde{q}_2 + R + \tilde{\alpha} D_{t'} + \tilde{\beta}$$

où les $\tilde{c}_{ij}$ sont C^∞ réelles, $\tilde{q}_j = \tilde{q}_j(t', x', y', D_{y'}) = q_j(T, X, Y, D_Y)$ et $R \in \mathscr{E}(D_{x'_2}, \ldots, D_{x'_n})$.

Pour simplifier les notations, on supprimera dans la suite les $\sim$ et on reviendra aux lettres non primées. De plus, on fera varier les indices i et j entre 1 et $n-1$.

3.2. Preuve du théorème 2.1 pour P vérifiant (1.3)

Dans le système de coordonnées fourni par le lemme 3.1, un tel opérateur s'écrit, au voisinage de l'origine, à un facteur multiplicatif C^∞, non nul près:

$$P = D_t^2 + \sum_{i \leq j=1}^{n-1} a_{ij}(t, x, y) D_{x_i} D_{x_j} + p_1(t, x, y, D_y) + ip_2(t, x, y, D_y) + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j D_{x_j} + \alpha D_t + \beta.$$

L'hypothèse (H) s'écrit, toujour d'après le lemme 3.1:

$$(H) \quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial t}, p_1\right] = a_1 p_1 + a_2 p_2 & \text{et} \quad \left[\dfrac{\partial}{\partial t}, p_2\right] \in \mathscr{E}(p_2) \quad a_1, a_2 \in C^\infty \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial x_j}, p_1\right] \in \mathscr{E}(p_1, p_2) & \text{et} \quad \left[\dfrac{\partial}{\partial x_j}, p_2\right] \in \mathscr{E}(p_2) \quad j = 1, \ldots, n-1 \\ [p_1, p_2] \in \mathscr{E}(p_1, p_2). \end{cases}$$

Et la pseudo-convexité par rapport aux bicaractéristiques de P en 0, se traduit alors par:

$$\forall \xi \in \boldsymbol{R}^{n-1}\backslash 0: \frac{\partial a}{\partial t}(0, \xi) - a_1(0) a(0, \xi) > 0.$$

3.2.1. Eclatement de la surface initiale

Suivant M. S. Baouendi - E. C. Zachmanoglou [5], on procède au changement de variables singulier:

$$\begin{cases} t = t'[\delta - (|x|^2 + |y|^2)] = t'(\delta - r^2) & 0 < \delta < 1 \text{ à choisir} \\ x' = x \\ y' = y. \end{cases}$$

Dans la suite, on notera par ∂_t la dérivation $\dfrac{\partial}{\partial t} = iD_t\left(\text{Idem pour } \dfrac{\partial}{\partial x_j} \text{ et } \dfrac{\partial}{\partial y_j}\right)$. ∂_t se transforme en $\dfrac{1}{\delta - r^2}\partial_{t'}$, ∂_{x_j} en $\partial_{x_j'} + \dfrac{2t'x_j'}{\delta - r^2}\partial_{t'}$ et ∂_{y_j} en $\partial_{y_j'} + \dfrac{2t'y_j'}{\delta - r^2}\partial_{t'}$. Et, en notant $\tilde{P}$ l'opérateur P, écrit dans les nouvelles variables, on obtient:

$$\begin{aligned}(\delta - r^2)^2 \tilde{P} = {} & -\partial_{t'}^2 - \sum_1^{n-1} \tilde{a}_{ij}[(\delta - r^2)\partial_{x_i'} + 2t'x_i'\partial_{t'}][(\delta - r^2)\partial_{x_j'} + 2t'x_j'\partial_{t'}] \\ & + 2\sum_1^{n-1} \tilde{a}_{ij} x_i'[(\delta - r^2)\partial_{x_j'} + 2t'x_j'\partial_{t'}] + (\delta - r^2)^2 \tilde{p}_1(t', x', y', D_{y'}) \\ & + i(\delta - r^2)^2 \tilde{p}_2(t', x', y', D_{y'}) - i(\delta - r^2)\sum_1^{n-1} \tilde{\alpha}_j[(\delta - r^2)\partial_{x_j'} + 2t'x_j'\partial_{t'}] \\ & + \tilde{\alpha}(\delta - r^2)\partial_{t'} + (\delta - r^2)^2 \tilde{\beta}\end{aligned}$$

où on a écrit, pour $j = 1, 2$: $\tilde{p}_j(t', x', y', D_{y'}) = p_j(t'(\delta - r^2), x', y', D_{y'})$.
Dans la suite, on notera par X_j le champ $(\delta - r^2)\partial_{x_j'} + 2t'x_j'\partial_{t'}$ $j = 1, \ldots, n-1$. On montre facilement que les conditions du théorème 2.1 sont encore vérifiées par l'opérateur $(\delta - r^2)^2 \tilde{p}$.

On revient alors aux lettres non primées pour désigner les variables, et on supprime les $\sim$. Soit:

$$\begin{aligned}(3.2.2) \qquad N \equiv (\delta - r^2)^2 \tilde{p} = {} & -\partial_t^2 - \sum_1^{n-1} a_{ij} X_i X_j + 2\sum_1^{n-1} a_{ij} x_i X_j \\ & + (\delta - r^2)^2 p_1 + i(\delta - r^2)^2 p_2 - i(\delta - r^2)\sum_1^{n-1} \alpha_j X_j + \alpha(\delta - r^2)\partial_t + (\delta - r^2)^2 \beta.\end{aligned}$$

Le théorème 2.1 découlera, par un argument usuel, de l'estimation de Carleman suivante:

Proposition 3.2.3. *Soit N défini en* (3.2.2) *et satisfaisant aux conditions du théorème* (2.1). *Il existe des constantes positives C, γ_0, T_0, r_0 telles que pour tout $u \in C^\infty(\Omega)$, avec* supp $u \subset \{0 \leqslant t \leqslant T_0, |x| + |y| \leqslant r_0\}$, *et tout $\gamma \geqslant \gamma_0$, on ait:*

$$\gamma^3\|t^{-\gamma-\frac{3}{2}}u\|^2+\gamma\sum_{j=1}^{n-1}\|t^{-\gamma}X_ju\|^2+\gamma\|t^{-\gamma-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t}\|^2\leqslant C\|t^{-\gamma+\frac{1}{2}}Nu\|^2.$$

Preuve de la proposition 3.2.3. Il est tout d'avord clair qu'il suffit de montrer (3.2.3) avec N remplacé par l'opérateur:

$$N_0=-\partial_t^2-\sum_1^{n-1}a_{ij}X_iX_j+(\delta-r^2)^2p_1+i(\delta-r^2)^2p_2.$$

On pose $u=t^\gamma v$ et on calcule facilement:
$t^{-\gamma}X_ju=X_jv+2\gamma x_jv$; $t^{-\gamma}X_iX_ju=X_iX_jv+2\gamma(x_iX_j+x_jX_i)v+2\gamma\delta_{ij}(\delta-r^2)v+4\gamma^2x_ix_jv$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. On en déduit:

$$\begin{aligned}N_1v\equiv t^{-\gamma}N_0u=-\partial_t^2v-\gamma(\gamma-1)t^{-2}v-2\gamma t^{-1}\partial_tv-\sum_1^{n-1}a_{ij}X_iX_jv\\+(\delta-r^2)^2p_1v+i(\delta-r^2)^2p_2v+\gamma\sum_1^{n-1}c_kX_kv+\gamma gv+\gamma^2hv\end{aligned}$$

où g, h et les c_k sont des fonctions C^∞ réelles.

Posons $t^{\frac{1}{2}}N_1v=t^{\frac{1}{2}}Av+t^{\frac{1}{2}}Bv$ avec:

$$\begin{cases}t^{\frac{1}{2}}Av=-t^{\frac{1}{2}}\partial_t^2v-\gamma(\gamma-1)t^{-\frac{3}{2}}v-t^{\frac{1}{2}}\sum_1^{n-1}a_{ij}X_iX_jv\\ \qquad\qquad+t^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2p_1v+\gamma t^{\frac{1}{2}}gv+\gamma^2t^{\frac{1}{2}}hv\\ t^{\frac{1}{2}}Bv=-2\gamma t^{-\frac{1}{2}}\partial_tv+\gamma t^{\frac{1}{2}}\sum_1^{n-1}c_kX_kv+it^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2p_2v.\end{cases}$$

On a: $\|t^{\frac{1}{2}}N_1v\|^2=\|t^{\frac{1}{2}}Av\|^2+\|t^{\frac{1}{2}}Bv\|^2+2\,\mathrm{Re}\,(t^{\frac{1}{2}}Av,\ t^{\frac{1}{2}}Bv)$. C'est cette dernière quantité: 2 Re (...) que nous allons calculer.

Pour la clarté des calculs qui vont suivre, remarquons tout d'abord que:

$$[\partial_t,\ X_i]=2x_i\partial_t \text{ et } [X_i,\ X_j]\in\mathscr{E}(X_1,\dots,X_{n-1},\ t\partial_t) \text{ cela pour } i,j=1,\dots,n-1.$$

De plus nous noterons $L(X)$ tout élément de $\mathscr{E}(X_1,\dots,X_{n-1})$.

$$①=2\,\mathrm{Re}\,(-t^{\frac{1}{2}}\partial_t^2v,\ -2\gamma t^{-\frac{1}{2}}\partial_tv)=0.$$

$$②=2\,\mathrm{Re}\,(-\gamma(\gamma-1)t^{-\frac{3}{2}}v,\ -2\gamma t^{-\frac{1}{2}}\partial_tv)=4\gamma^2(\gamma-1)\|t^{-\frac{3}{2}}v\|^2.$$

$$③=2\,\mathrm{Re}\,(-2\gamma t^{-\frac{1}{2}}\partial_tv,\ t^{\frac{1}{2}}\textstyle\sum a_{ij}X_iX_jv)=2\gamma\sum 2\,\mathrm{Re}\,(\partial_tv,\ a_{ij}X_iX_jv).$$

Or $(\partial_tv,\ a_{ij}X_iX_jv)=-\left(v,\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}X_iX_jv\right)-(v,\ a_{ij}[\partial_t,\ X_iX_j]v)-(v,\ a_{ij}X_iX_j\partial_tv)$

$$=-\left(v,\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}X_iX_jv\right)-2(v,\ a_{ij}x_i\partial_tX_jv)-2(v,\ a_{ij}X_ix_j\partial_tv)-(v,\ a_{ij}X_iX_j\partial_tv).$$

Comme $X_i^*-X_i\in C^\infty(\Omega)$, on obtient:

$$2\,\mathrm{Re}\,(\partial_t v,\ a_{ij}X_iX_jv)=\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}X_iv,\ X_jv\right)+(L(X)v,\ \partial_t v)+R_1$$

$$\text{avec}\quad |R_1|\leqslant \text{cte}\,(\|v\|^2+\|\partial_t v\|^2).$$

On en déduit:

$$③=2\gamma\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}X_iv,\ X_jv\right)+\gamma R_2\quad \text{avec}\quad |R_2|\leqslant \varepsilon\sum_1^{n-1}\|X_jv\|^2+C_\varepsilon\|\partial_t v\|^2+C\|v\|^2.$$

$$\begin{aligned}④&=2\,\mathrm{Re}\,(-2\gamma t^{-\frac{1}{2}}\partial_t v,\ t^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2p_1v)=2\gamma\ 2\,\mathrm{Re}\,(-\partial_t v,\ (\delta-r^2)^2p_1v)\\&=2\gamma(v,\ (\delta-r^2)^2[\partial_t,\ p_1]v)+\gamma(\alpha v,\ \partial_t v)\qquad \alpha\in C^\infty(\Omega)\\&=2\gamma(v,\ a_1(\delta-r^2)^2p_1v)+2\gamma(v,\ a_2(\delta-r^2)^2p_2v)+\gamma(\alpha v,\ \partial_t v)\\&=2\gamma[I_1+I_2]+\gamma(\alpha v,\ \partial_t v).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1=&(t^{-\frac{1}{2}}v,\ a_1t^{\frac{1}{2}}Av)+(v,\ a_1\partial_t^2v)+\gamma(\gamma-1)(t^{-\frac{1}{2}}v,\ a_1t^{-\frac{3}{2}}v)+\sum(v,\ a_1a_{ij}X_iX_jv)\\&-\gamma^2(v,\ a_1hv)-\gamma(v,\ a_1gv),\end{aligned}$$

et pour γ assez grand, on a:

$$2\gamma I_1=-2\gamma\sum_1^{n-1}(a_1a_{ij}X_iv,\ X_jv)+R_3$$

$$\begin{aligned}\text{où}\quad |R_3|\leqslant&\ \varepsilon\|t^{\frac{1}{2}}Av\|^2+C_\varepsilon\gamma^2\|t^{-\frac{1}{2}}v\|^2\\&+C[\gamma^3\|t^{-1}v\|^2+\gamma\|\partial_t v\|^2+\sum\|X_jv\|^2].\end{aligned}$$

De même, on a, pour I_2:

$$I_2=(t^{-\frac{1}{2}}v,\ -ia_2t^{\frac{1}{2}}Bv)-2\gamma(t^{-\frac{1}{2}}v,\ ia_2t^{-\frac{1}{2}}\partial_t v)+\sum_k(t^{-\frac{1}{2}}v,\ i\gamma t^{\frac{1}{2}}a_2c_kX_kv),$$

d'où l'on déduit:

$$\begin{aligned}|2\gamma I_2|\leqslant&\ \varepsilon\|t^{\frac{1}{2}}Bv\|^2+C_\varepsilon\gamma^2\|t^{-\frac{1}{2}}v\|^2+C[\gamma^3\|t^{-1}v\|^2+\gamma\|\partial_t v\|^2]\\&+C'\gamma\sum_k\|t^{\frac{1}{2}}X_kv\|^2.\end{aligned}$$

Finalement on a:

$$④=-2\gamma\sum_1^{n-1}(a_1a_{ij}X_iv,\ X_jv)+R_4$$

$$\begin{aligned}\text{avec}\quad |R_4|\leqslant&\ \varepsilon[\|t^{\frac{1}{2}}Av\|^2+\|t^{\frac{1}{2}}Bv\|^2]+C_\varepsilon\gamma^2\|t^{-\frac{1}{2}}v\|^2\\&+C[\gamma^3\|t^{-1}v\|^2+\gamma\|\partial_t v\|^2]+C\sum\|X_jv\|^2+C'\gamma\sum\|t^{\frac{1}{2}}X_kv\|^2.\end{aligned}$$

$$⑤=2\,\mathrm{Re}\,(-2\gamma t^{-\frac{1}{2}}\partial_t v,\ t^{\frac{1}{2}}(\gamma g+\gamma^2h)v)=-2\gamma\ 2\,\mathrm{Re}\,(-\partial_t v,\ (\gamma g+\gamma^2h)v)$$

et $|⑤|\leqslant C\gamma^3\|v\|^2$.

$$⑥=2\,\mathrm{Re}\,(-t^{\frac{1}{2}}\partial_t^2 v,\ it^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2 p_2 v)=2\,\mathrm{Re}\,(-\partial_t^2 v,\ it(\delta-r^2)^2 p_2 v),$$

$$(-\partial_t^2 v,\ it(\delta-r^2)^2 p_2 v)=(\partial_t v,\ i(\delta-r^2)^2 p_2 v)+(\partial_t v,\ it(\delta-r^2)^2[\partial_t,\ p_2]v)$$
$$+(\partial_t v,\ it(\delta-r^2)^2 p_2\partial_t v).$$

Soit, en utilisant l'hypothèse (H) du théorème 2.1:

$$⑥=2\,\mathrm{Re}\,(\partial_t v,\ i(\delta-r^2)^2 p_2 v)+R_5$$

avec $|R_5|\leqslant\varepsilon\|t^{\frac{1}{2}}Bv\|^2+C_\varepsilon\|t^{\frac{1}{2}}\partial_t v\|^2+C\gamma\|\partial_t v\|^2+C'\gamma\sum_k\|t^{\frac{1}{2}}X_k v\|^2.$

Et par suite:

$$⑥=2\gamma\|t^{-\frac{1}{2}}\partial_t v\|^2+R_6$$

avec $|R_6|\leqslant\varepsilon\|t^{\frac{1}{2}}Bv\|^2+C_\varepsilon\|t^{-\frac{1}{2}}\partial_t v\|^2+C\gamma\delta(\|\partial_t v\|^2+\sum_k\|X_k v\|^2)$
$$+C\gamma\|\partial_t v\|^2+C'\gamma\sum_k\|t^{\frac{1}{2}}X_k v\|^2.$$

$$⑦=2\,\mathrm{Re}\,(-t^{\frac{1}{2}}\sum_1^{n-1}a_{ij}X_iX_j v,\ it^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2 p_2 v)=-\sum_1^{n-1}2\,\mathrm{Re}\,(a_{ij}X_iX_j v,\ it(\delta-r^2)^2 p_2 v).$$

En tenant compte de l'hypothèse (H), on montre facilement que:

$2\,\mathrm{Re}\,(a_{ij}X_iX_j v,\ it(\delta-r^2)^2 p_2 v)$ est de la forme: $(it^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2 p_2 v,\ t^{\frac{1}{2}}L(X)v)+R_7$

$$\text{où}\quad |R_7|\leqslant C[\|v\|^2+\sum_1^{n-1}\|t^{\frac{1}{2}}X_k v\|^2+\|t^{\frac{3}{2}}\partial_t v\|^2].$$

En retirant alors, comme pour ④ et ⑥, $it^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2 p_2 v$ de $t^{\frac{1}{2}}Bv$, on obtient:

$$|⑦|\leqslant\varepsilon\|t^{\frac{1}{2}}Bv\|^2+C_\varepsilon\gamma\|\partial_t v\|^2+\varepsilon\gamma\sum\|X_k v\|^2+C\gamma\sum\|t^{\frac{1}{2}}X_k v\|^2+C\|v\|^2.$$

$$⑧=2\,\mathrm{Re}\,(t^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2 p_1 v,\ it^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2 p_2 v)=2\,\mathrm{Re}\,((\delta-r^2)^2 p_1 v,\ it(\delta-r^2)^2 p_2 v),$$

$$((\delta-r^2)^2 p_1 v,\ it(\delta-r^2)^2 p_2 v)=(v,\ it[(\delta-r^2)^2 p_1,\ (\delta-r^2)^2 p_2]v)+$$
$$+(v,\ it(\delta-r^2)^2 p_2(\delta-r^2)^2 p_1 v)+(v,\ i\beta_1 t(\delta-r^2)^2 p_2 v)$$

où on a adopté la notation: $p_i^*=p_i+\beta_i$, $\beta_i\in C^\infty(\Omega)$, $i=1,\,2$.

Comme $[p_1,\ p_2]\in\mathscr{E}(p_1,\ p_2)$, on voit aisément que ⑧ est de la forme:

$\mathrm{Re}\,(\alpha_1 t^{\frac{1}{2}}v,\ it^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2 p_1 v)+\mathrm{Re}\,(\alpha_2 t^{\frac{1}{2}}v,\ t^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2 p_2 v)$ où α_1 et α_2 sont C^∞.

On retire alors $it^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2 p_1 v$ et $it^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2 p_2 v$ respectivement de $t^{\frac{1}{2}}Av$ et $t^{\frac{1}{2}}Bv$, et on obtient:

$$|⑧|\leqslant\varepsilon[\|t^{\frac{1}{2}}Av\|^2+\|t^{\frac{1}{2}}Bv\|^2]+C\gamma[\|\partial_t v\|^2+\sum_k\|t^{\frac{1}{2}}X_k v\|^2+\gamma\|t^{-\frac{1}{2}}v\|^2].$$

$$⑨=2\ \mathrm{Re}\ (t^{\frac{1}{2}}(\gamma g+\gamma^2 h)v,\ it^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2 p_2 v).$$

On voit facilement que: $|⑨|\leqslant C\gamma^2\|t^{\frac{1}{2}}v\|^2$.

$$⑩=2\,\mathrm{Re}\,(-\gamma(\gamma-1)t^{-\frac{3}{2}}v,\ it^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2p_2v)=-\gamma(\gamma-1)2\,\mathrm{Re}\,(t^{-1}v,\ i(\delta-r^2)^2p_2v)$$

$$\text{et}\quad |⑩|\leqslant C\gamma^2\|t^{-\frac{1}{2}}v\|^2.$$

$$⑪=2\,\mathrm{Re}\,(-t^{\frac{1}{2}}\partial_t^2v,\ \gamma t^{\frac{1}{2}}\sum c_kX_kv)=\gamma\cdot 2\,\mathrm{Re}\,(-\partial_t^2v,\ t\sum c_kX_kv),$$

$$(-\partial_t^2v,\ tc_kX_kv)=(\partial_tv,\ c_kX_kv)+(\partial_tv,\ tc_k'X_kv)+2(\partial_tv,\ tc_kx_k\partial_tv)+(\partial_tv,\ tc_kX_k\partial_tv).$$

Par suite: $|⑪|\leqslant C_\varepsilon\gamma\|\partial_tv\|^2+\varepsilon\gamma\sum\|X_kv\|^2+C\gamma[\|t^{\frac{1}{2}}\partial_tv\|^2+\sum\|t^{\frac{1}{2}}X_kv\|^2]$.

$$⑫=2\,\mathrm{Re}\,(\gamma t^{\frac{1}{2}}\sum c_kX_kv,\ -\gamma(\gamma-1)t^{-\frac{3}{2}}v)=\gamma^2(\gamma-1)\sum 2\,\mathrm{Re}\,(c_kX_kv,\ t^{-1}v),$$

donc $$|⑫|\leqslant C\gamma^2(\gamma-1)\|t^{-\frac{1}{2}}v\|^2.$$

$$⑬=2\,\mathrm{Re}\,(\gamma t^{\frac{1}{2}}\sum_1^{n-1}c_kX_kv,\ -t^{\frac{1}{2}}\sum_1^{n-1}a_{ij}X_iX_jv)=\gamma\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i\leqslant j=1}^{n-1}2\,\mathrm{Re}\,(c_kX_kv,\ -ta_{ij}X_iX_jv).$$

Or $$(c_kX_kv,\ -ta_{ij}X_iX_jv)=(v,\ X_k(c_ka_{ij})tX_iX_jv)+2(v,\ c_ka_{ij}x_ktX_iX_jv)$$
$$+(c_kv,\ a_{ij}t[X_k,\ X_iX_j]v)+(c_kv,\ a_{ij}tX_iX_jX_kv)+(g_kv,\ c_ka_{ij}tX_iX_jv)$$

où on a noté: $g_k=X_k^*+X_k$.

On obtient donc: $|⑬|\leqslant C\gamma[\|v\|^2+\sum_1^{n-1}\|t^{\frac{1}{2}}X_kv\|^2+\|t^{\frac{1}{2}}\partial_tv\|^2]$.

$$⑭=2\,\mathrm{Re}\,(\gamma t^{\frac{1}{2}}\sum c_kX_kv,\ t^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2p_1v)=\gamma\sum 2\,\mathrm{Re}\,(c_kX_kv,\ t(\delta-r^2)^2p_1v),$$

$$(c_kX_kv,\ t(\delta-r^2)^2p_1v)=-(v,\ X_k(c_k)t(\delta-r^2)^2p_1v)-2(c_kv,\ x_kt(\delta-r^2)^2p_1v)$$
$$-(c_kv,\ t[X_k,\ (\delta-r^2)^2p_1v]v)-(c_kv,\ t(\delta-r^2)^2p_1X_kv)+(c_kg_kv,\ t(\delta-r^2)^2p_1v).$$

On en déduit:

$$2\,\mathrm{Re}\,(c_kX_kv,\ t(\delta-r^2)^2p_1v)=-([X_k(c_k)+2x_kc_k-g_kc_k]t^{\frac{1}{2}}v,\ t^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2p_1v)$$
$$-(c_kv,\ t[X_k,\ (\delta-r^2)^2p_1]v)+R_8=-I_1-I_2+R_8$$

avec $|R_8|\leqslant C(\|v\|^2+\|tX_kv\|^2)$.

1) En écrivant: $t^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2p_1v=t^{\frac{1}{2}}Av+t^{\frac{1}{2}}\partial_t^2v+\gamma(\gamma-1)t^{-\frac{3}{2}}v+t^{\frac{1}{2}}\sum a_{ij}X_iX_jv-t^{\frac{1}{2}}(\gamma g+\gamma^2h)v$ il est facile de voir que, pour γ assez grand, on a:

$$|2\gamma I_1|\leqslant\varepsilon\|t^{\frac{1}{2}}Av\|^2+C[\gamma^3\|t^{-\frac{1}{2}}v\|^2+\gamma\|\partial_tv\|^2+\gamma\sum\|t^{\frac{1}{2}}X_kv\|^2].$$

2) Nous savons, par hypothèse, qu'il existe pour tout $k=1,\dots,n-1$, des fonctions C^∞ réelles H_k, G_k et S_k vérifiant:

$$[X_k,\ (\delta-r^2)^2p_1]=H_k(\delta-r^2)^2p_1+G_k(\delta-r^2)^2p_2+S_kt\partial_t+L_k(X).$$

Par suite:

$$I_2=(t^{\frac{1}{2}}c_kv,\ H_kt^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2p_1v)+i(t^{\frac{1}{2}}c_kv,\ iG_kt^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2p_2v)$$

$$+(t^{\frac{1}{2}}c_kv,\ [S_kt^{\frac{3}{2}}\partial_tv+t^{\frac{1}{2}}L_k(X)v])=(i_1)+(i_2)+(i_3)$$

* (i_1) se traite comme I_1
* $|(i_3)|\leqslant C[\|t^{\frac{1}{2}}v\|^2+\|t^{\frac{3}{2}}\partial_tv\|^2+\sum\|t^{\frac{1}{2}}X_kv\|^2]$
* On écrit: $it^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2p_2v=t^{\frac{1}{2}}Bv+2\gamma t^{-\frac{1}{2}}\partial_tv-\gamma t^{\frac{1}{2}}\sum c_kS_kv$

et on aboutit aisément à l'inégalité suivante:

$$|(i_2)|\leqslant\varepsilon\|t^{\frac{1}{2}}Bv\|^2+C(\gamma^2\|v\|^2+\|\partial_tv\|^2+\sum_1^{n-1}\|t^{\frac{1}{2}}X_kv\|^2)$$

Finalement, en réunissant les estimations de I_1 et I_2, on obtient:

$$|(14)|\leqslant\varepsilon[\|t^{\frac{1}{2}}Av\|^2+\|t^{\frac{1}{2}}Bv\|^2]+C(\gamma^3\|t^{-\frac{1}{2}}v\|^2+\gamma\|\partial_tv\|^2+\gamma\sum\|t^{\frac{1}{2}}X_kv\|^2).$$

Le dernier terme à examiner est:

$$(15)=2\,\mathrm{Re}\,(\gamma t^{\frac{1}{2}}\sum c_kX_kv,\ t^{\frac{1}{2}}(\gamma g+\gamma^2h)v)=\gamma\sum 2\,\mathrm{Re}\,(c_kX_kv,\ t(\gamma g+\gamma^2h)v).$$

Et on a facilement: $|(15)|\leqslant C\gamma^3\|t^{\frac{1}{2}}v\|^2$.

Fin de la preuve de la Proposition 3.2.3. En regroupant les informations fournies par les calculs (1),..., (15), on obtient:

$$2\,\mathrm{Re}\,(Av,\ Bv)=4\gamma^2(\gamma-1)\|t^{-\frac{3}{2}}v\|^2+2\gamma\|t^{-\frac{1}{2}}\partial_tv\|^2+2\gamma\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}X_iv,\ X_jv\right)$$

$$-2\gamma\sum_1^{n-1}(a_1a_{ij}X_iv,\ X_jv)+R$$

où $$|R|\leqslant\varepsilon[3\|t^{\frac{1}{2}}Av\|^2+5\|t^{\frac{1}{2}}Bv\|^2]+C_1\gamma^3\|t^{\frac{1}{2}}v\|^2+C_2\gamma^3\|v\|^2+(C_3+C_\varepsilon)\gamma^2\|t^{-\frac{1}{2}}v\|^2$$

$$+C_4\gamma^3\|t^{-1}v\|^2+C_5\gamma\sum\|t^{\frac{1}{2}}X_hv\|^2+(\varepsilon\gamma+C_6+C_7\gamma\delta)\sum\|X_kv\|^2$$

$$+C_8\gamma\|t^{\frac{1}{2}}\partial_tv\|^2+(C_\varepsilon+C_9+C_{10}\delta)\gamma\|\partial_tv\|^2+C_\varepsilon\|t^{-\frac{1}{2}}\partial_tv\|^2.$$

On fixe alors $\varepsilon<\frac{1}{5}$, T_0, r et δ assez petits et on utilise l'hypothèse de pseudo-convexité par rapport aux bicaractéristiques, pour achever la preuve de (3.2.3).

3.3. Preuve du théorème 2.1 pour P vérifiant (1.4)

Un opérateur P vérifiant (1.1), (1.2) et (1.4) s'écrit dans le système de coordonnées donné par le lemme 3.1, au voisinage de l'origine:

$$P=D_t^2+\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}(t,x,y)D_{x_i}D_{x_j}+q(t,x,y,D_y)+\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_jD_{x_j}+\alpha D_t+\beta$$

où q est un champ de vecteurs C^∞ réel, $q(0, 0, 0, \eta) \neq 0$.
L'hypothèse (H) s'écrit:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, q\right] = a_1 q \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_j}, q\right] = b_j q$$

où a_1 et b_j $(j = 1, \ldots, n-1)$ sont des fonctions C^∞.
Quant à la pseudo-convexité de la surface initiale $\{t = 0\}$ par rapport aux bicaractèristiques de P, à l'origine, elle s'écrit, d'après l'exemple 1.2.2:

$$\forall \xi \in \boldsymbol{R}^{n-1} \backslash 0: \quad \frac{\partial a}{\partial t}(0, \xi) - a_1(0) a(0, \xi) > 0.$$

La preuve est analogue à celle présentée dans l'article de R. Lascar - C. Zuily [13]. Nous en donnons une esquisse.

On procède à la convexification de la surface initiale en posant le changement de variables:

$$\begin{cases} t' = t - \delta(|x|^2 + |y|^2) & 0 < \delta < 1 \quad \text{à choisir} \\ x' = x & \\ y' = y. & \end{cases}$$

∂_t et ∂_{x_j} se transforment respectivement en $\partial_{t'}$ et $\partial_{x'_j} - 2\delta x'_j \partial_{t'}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$. De même pour ∂_{y_j}.

Si on note par X_i le champ $\partial_{x'_i} - 2\delta x'_i \partial_{t'}$, l'oéprateur P s'écrit dans les nouvelles variables:

$$\tilde{P} = -\partial_{t'}^2 - \sum_{i,j=1}^{n-1} \tilde{a}_{ij} X_i X_j + q(t', x', y', D_{y'}) - i \sum_{1}^{n-1} \tilde{\alpha}_j X_j - i \tilde{\alpha} \partial_{t'} + \tilde{\beta}$$

avec $q(t', x', y', D_{y'}) = q(t' + \delta(|x|^2 + |y|^2), x', y', D_{y'})$.
On vérifie aisément que $\tilde{P}$ satisfait encore aux hypothèses du théorème 2.1. On revient donc aux notations initiales, et on travaille avec:

$$N = -\partial_t^2 - \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} X_i X_j + q(t, x, y, D_y) + \sum_{1}^{n-1} \alpha_j X_j + \alpha \partial_t + \beta. \tag{3.3.1}$$

L'inégalité de Carleman qu'on établit est la suivante:

Proposition 3.3.2. *Soit N défini en* (3.3.1) *et satisfaisant aux conditions du théorème* 2.1. *Il existe des constantes positives C, γ_0, T_0, r_0, telles que, pour tout $u \in C^\infty(\Omega)$, avec* supp $u \subset \{0 \leqslant t \leqslant T_0, |x| + |y| < r_0\}$ *et tout $\gamma \geqslant \gamma_0$, on ait:*

$$\gamma^3 \|t^{-\gamma - \frac{3}{2}} u\|^2 + \gamma \sum_{j=1}^{n-1} \left\| t^{-\gamma} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \gamma \left\| t^{-\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 \leqslant C \|t^{-\gamma + \frac{1}{2}} N u\|^2. \tag{3.3.3}$$

Preuve de la Proposition 3.3.2. Il est tout d'abord suffisant d'établir (3.3.3) avec N remplace par l'opérateur:

$$N_0 = -\partial_t^2 - \sum_{i,j=1}^{n-1} X_i a_{ij} X_i + q.$$

On pose $u=t^\gamma v$ et on voit facilement que:

$$N_1 v \equiv t^{-\gamma} N_0 u = -\partial_t^2 v - \gamma(\gamma-1)t^{-2} dv - 2\gamma t^{-1}\partial_t v - \sum_{i,j=1}^{n-1} X_i a_{ij} X_j v + qv$$

$$+\gamma\delta t^{-1} \sum_1^{n-1} c_k X_k v + \gamma t^{-1} g v$$

où c_k $(k=1,\dots,n-1)$, d et g sont des fonctions C^∞ réelles, $d(0)=1$. L'inégalité (3.3.3) résultera, si γ est assez grand, de l'inégalité suivante:

$$\gamma^3\|t^{-\frac{3}{2}}v\|^2 + \gamma \sum_1^{n-1} \|X_j v\|^2 + \gamma\|\partial_t v\|^2 \leqslant C\|t^{\frac{1}{2}} N_2 v\|^2 \tag{3.3.4}$$

où $t^{\frac{1}{2}} N_2 v = t^{\frac{1}{2}} Av + t^{\frac{1}{2}} Bv$, avec:

$$t^{\frac{1}{2}} Av = -\partial_t^2 v - \gamma(\gamma-1)t^{-\frac{3}{2}} dv - t^{\frac{1}{2}} \sum_{i,j=1} X_i a_{ij} X_j v + t^{\frac{1}{2}} qv - \lambda t^{\frac{1}{2}}\partial_t v$$

$$t^{\frac{1}{2}} Bv = -2\gamma t^{-\frac{1}{2}}\partial_t v + \delta\gamma t^{-\frac{1}{2}} \sum_1^{n-1} c_k X_k v$$

et λ une constante positive à choisir.

En notant que $[\partial_t, X_i]=[X_i, X_j]=0$ pour tout $i, j=1,\dots,n-1$, on estime:

$$\|t^{\frac{1}{2}} Av\|^2 + \|t^{\frac{1}{2}} Bv\|^2 + 2\gamma \sum_{i,j=1}^{n-1} \left(\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} - a_1 a_{ij}\right) X_i v,\ X_j v\right) + 2\lambda\gamma\|\partial_t v\|^2$$

$$-2\gamma(\partial_t v,\ a_1\partial_t v) + 4\gamma^2(\gamma-1)\|t^{-\frac{3}{2}} v\|^2 \leqslant \|t^{\frac{1}{2}} N_2 v\|^2 + R$$

avec $|R| \leqslant 2\varepsilon\|t^{\frac{1}{2}} Av\|^2 + C_\varepsilon\gamma^2\|t^{-\frac{1}{2}} v\|^2 + C[\gamma^3\|t^{-1}v\|^2 + \|\partial_t v\|^2 + \sum_1^{n-1} \|X_j v\|^2]$

$$+ C\delta[\gamma\|\partial_t v\|^2 + \gamma \sum_1^{n-1} \|X_j v\|^2 + \gamma^3\|t^{-\frac{3}{2}} v\|^2].$$

On choisit alors $\lambda > |a_1(0)|$, T_0, r et δ assez petits, et on fixe $\varepsilon < \frac{1}{2}$ pour trouver (3.3.4).

3.4. Preuve du théorème 2.2.

On considère au voisinage de l'origine, et sous les hypothèses du théorème 2.2, l'opérateur:

$$P = D_t^2 + \sum_{i<j=1}^{r} a_{ij}(t, x, y) D_{x_i} D_{x_j} + p_1(t, x, y, D_y)$$

$$+ i p_2(t, x, y, D_y) + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j D_{x_j} + \alpha D_t + \beta.$$

Comme en (3.2.1), on pose le changement de variables singulier:

$$\begin{cases} t = t'[\delta - (|x|^2 + |y|^2)] = t'(\delta - r^2) & 0<\delta<1 \quad \text{à choisir} \\ x' = x \\ y' = y. \end{cases}$$

En notant $\tilde{P}$ l'opérateur P écrit dans les nouvelles variables, et X_i le champ $(\delta-r^2)\partial_{x_i'}-2t'x_j'\partial_{t'}$ on peut écrire:

(3.4.1) $$N\equiv(\delta-r^2)^2\tilde{P}=-\partial_{t'}^2-\sum_1^r\tilde{a}_{ij}X_iX_j+2\sum_1^r\tilde{a}_{ij}x_i'X_j+(\delta-r^2)^2q_1(t',x',y',D_{y'})$$
$$+iq_2(t',x',y',D_{y'})-i(\delta-r^2)\sum_1^r\tilde{\alpha}_jX_j+\tilde{\alpha}(\delta-r^2)\partial_{t'}+(\delta-r^2)^2\tilde{\beta}$$

où $q_j(t',x',y',D_{y'})=p_j(t'(\delta-r^2),x',y',D_{y'})$, $j=1,2$.

Nous allons examiner comment se traduisent sur N les hypothèses du théorème 2.2

$$\frac{\partial q_2}{\partial t'}(t',x',y',\eta')=(\delta-r^2)\frac{\partial p_2}{\partial t}(t'(\delta-r^2),x',y',\eta')$$
$$=\frac{1}{t'}a_2(t'(\delta-r^2),x',y')p_2(t'(\delta-r^2),x',y',\eta').$$

Donc $$\begin{cases} H_1' \text{ ii}): \left[\dfrac{\partial}{\partial t'},q_2\right]=\dfrac{1}{t'}a_2(t'(\delta-r^2),x',y')q_2,\\ H_1' \text{ i}): \left[\dfrac{\partial}{\partial t'},q_1\right]=\dfrac{1}{t'}[a_1(t'(\delta-r^2),x',y')q_1+b_1(t'(\delta-r^2),x',y')q_2].\end{cases}$$

D'autre part, le crochet $[q_1,q_2]$ est homogène du premier ordre, de symbole:

$$\frac{1}{i}\sum_{j=1}^m\left[\frac{\partial p_1}{\partial\eta_j}\left[\frac{\partial p_2}{\partial y_j}-2y_j't'\frac{\partial p_2}{\partial t}\right]-\frac{\partial p_2}{\partial\eta_j}\left[\frac{\partial p_1}{\partial y_j}-2x_j't'\frac{\partial p_1}{\partial t}\right]\right]$$
$$=\frac{1}{i}\{p_1,p_2\}+\frac{1}{i}\frac{1}{(\delta-r^2)}[f_1(t',x',y')q_1+f_2(t',x',y')q_2]$$

en vertu de H_1 i) et H_1 ii), où f_1 et f_2 sont bornées.

On utilise alors l'hypothèse H_1 iii) et on obtient:

$$H' \text{ iii}): [q_1,q_2]=\omega_1q_1+\omega_2q_2+\frac{1}{\delta-r^2}(f_1q_1+f_2q_2).$$

De même, en utilisant H_i', ii) et H_2 on montre que:
$[X_j,(\delta-r^2)^2q_1]\in\mathscr{E}[(\delta-r^2)^2q_1,(\delta-r^2)^2q_2,t'\partial_{t'},X_1,\ldots,X_r]$ et $[X_j,(\delta-r^2)^2q_2]\in\mathscr{E}[(\delta-r^2)^2q_2,t'\partial_{t'},X_1,\ldots,X_r]$.

Quant à la condition H_3, il est facile de voir qu'elle se transforme en:

$$H_3'\begin{cases}\exists C_0>0 \text{ tel que: } \forall(t',x',y')\in\Omega^+,\ \forall\xi\in\boldsymbol{R}^r\backslash 0\\ \dfrac{\partial a}{\partial t'}(t'(\delta-r^2),x',y',\xi)-\dfrac{1}{t'}a_1(t'(\delta-r^2),x',y')a(t'(\delta-r^2),x',y',\xi)\\ \qquad\qquad >C_0(\delta-r^2)|\xi|^2.\end{cases}$$

Enfin, on a clairement: H_0': $q_1(0,0,0,\eta)\not\equiv 0$.

Dans ce qui suit, on reviendra, pour simplifier les notations, aux lettres non primées, et on supprimera les $\sim$.

Soit:

$$(3.4.2)\qquad N=-\partial_t^2-\sum_1^r a_{ij}X_iX_j+(\delta-r^2)^2q_1+i(\delta-r^2)^2q_2+2\sum_1^r a_{ij}x_iX_j$$
$$-i(\delta-r^2)\sum_1^r \alpha_jX_j+\alpha(\delta-r^2)\partial_t+(\delta-r^2)^2\beta.$$

Le théorème 2.2 découlera, par une méthode classique, de l'inégalité de Carleman suivante:

Proposition 3.4.3. *Soit N défini en* (3.4.3) *et satisfaisant aux conditions $H_0', \cdots, H_3'$. Il existe des constantes positives C, γ_0, T_0, r_0 telles que pour tout $u\in C^\infty(\Omega)$ avec*: $\operatorname{supp} u\subset\{0\leqslant t\leqslant T_0,\ |x|+|y|\leqslant r_0\}$, *et tout $\gamma\geqslant\gamma_0$, on ait*:

$$(3.4.4)\qquad \gamma^3\|t^{-\gamma-\frac{3}{2}}u\|^2+\gamma\sum_1^r\|t^{-\gamma}X_ju\|^2+\gamma\left\|t^{-\gamma-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2\leqslant C\|t^{-\gamma+\frac{1}{2}}Nu\|^2.$$

Esquisse de la preuve. Il est tout d'abord clair qu'il suffit de prouver (3.4.4) avec N remplacé par:

$$N_0=-\partial_t^2-\sum_1^r a_{ij}X_iX_j+(\delta-r^2)^2q_1(t,x,y,D_y)+i(\delta-r^2)^2q_2(t,x,y,D_y).$$

On pose $u=t^\gamma v$ et on calcule aisément: $t^{-\gamma+\frac{1}{2}}N_0u=t^{\frac{1}{2}}Av+t^{\frac{1}{2}}Bv$ avec

$$\begin{cases} t^{\frac{1}{2}}Av=-t^{\frac{1}{2}}\partial_t^2v-\gamma(\gamma-1)t^{-\frac{3}{2}}v-t^{\frac{1}{2}}\sum_1^r a_{ij}X_iX_jv+t^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2q_1v+t^{\frac{1}{2}}(\gamma g+\gamma^2h)v\\ t^{\frac{1}{2}}Bv=-2\gamma t^{-\frac{1}{2}}\partial_tv+\gamma t^{\frac{1}{2}}\sum_1^r c_kX_kv+it^{\frac{1}{2}}(\delta-r^2)^2q_2v\end{cases}$$

où g, h et les c_k sont des fonctions C^∞ réelles.

On calcule:

$$2\operatorname{Re}(t^{\frac{1}{2}}Av,t^{\frac{1}{2}}Bv)=4\gamma^2(\gamma-1)\|t^{-\frac{3}{2}}v\|^2+2\gamma^2(\gamma-1)\operatorname{Re}(t^{-\frac{3}{2}}v,a_1t^{-\frac{3}{2}}v)$$
$$-2\gamma\operatorname{Re}(t^{-\frac{1}{2}}\partial_tv,a_1t^{-\frac{3}{2}}\partial_tv)+4\gamma\operatorname{Re}(t^{-\frac{1}{2}}\partial_tv,(a_2+1)t^{-\frac{1}{2}}\partial_tv)-4\gamma^2\operatorname{Re}(t^{-\frac{3}{2}}v,ib_1t^{-\frac{1}{2}}\partial_tv)$$
$$+2\gamma\operatorname{Re}\left[\sum_1^r\left(\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}-\frac{a_1}{t}a_{ij}\right)X_iv,X_jv\right)\right]+R$$

avec

$$|R|<\varepsilon[3\|t^{\frac{1}{2}}Av\|^2+5\|t^{\frac{1}{2}}Bv\|^2]+C_\varepsilon\gamma^2\|t^{-\frac{3}{2}}v\|^2+C_\varepsilon\gamma^3\|t^{-1}v\|^2+(C+C_\varepsilon)\gamma^3\|t^{-\frac{1}{2}}v\|^2$$
$$+C\gamma^3\|v\|^2+C\gamma^3\|t^{\frac{1}{2}}v\|^2+(\varepsilon\gamma+C_\varepsilon)\|t^{-\frac{1}{2}}\partial_tv\|^2+(C_\varepsilon+C)\gamma\|\partial_tv\|^2+4\varepsilon\gamma\sum_1^r\|X_kv\|^2$$
$$+C\gamma\sum_1^r\|t^{\frac{1}{2}}X_kv\|^2.$$

On prend alors $\varepsilon<\frac{1}{5}$, T_0, r_0 et γ_0^{-1} assez petits, et on utilise l'hypothèse numérique de H_1, et l'hypothèse H_3' pour trouver l'inégalité (3.4.3) cherchée.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
UNIVERSITEDE PARIS - SUD

Bibliographie

[1] S. Alinhac, Non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs de type principal, Séminaire Goulaouic - Schwartz, Exposé n° 16, Ecole Polytechnique Paris (Mars 1981), et article à paraître Ann. Math., **116** (1982).

[2] S. Alinhac -M. S. Baouendi, Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal, Séminaire Goulaouic - Schwartz, Exposé n° 22 (1979).

[3] S. Alinhac -C. Zuily, Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles, C.P.D.E., **6** (7) (1981), 799–828.

[4] H. Bahouri, Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel, Thèse 3ème cycle, Orsay, et article à paraître.

[5] M. S. Baouendi-E. C. Zachmanoglou, Unique continuation of solutions of partial differential equations and inequalities from manifolds of any dimension, Duke Math. Journal, **45** (1978), 1–13.

[6] A. P. Calderón, Uniqueness for the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. J. of Maths, **80** (1958), 16–36.

[7] T. Carleman, Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes, Ark. Mat. Astr. Fys 26 B n° 17 (1939), 1–9.

[8] P. Cohen, The non uniqueness of the Cauchy problem, O.N.R. Technical report n° 93, Stanford University (1960).

[9] J. J. Duistermatt, Fourier integral operators, Courant institute of Math. Sc. New-York University 1973.

[10] L. Hörmander, Linear partial differential operators, Springer Verlag 1963.

[11] L. Hörmander, Non uniqueness for the Cauchy problem, Lecture Notes in Math. Springer Verlag n° 459 (1975), 36–72.

[12] J. Hounie-M. E. Moraes-Melo, Uniqueness in the Cauchy problem for a class of differential operators with double characteristics, Preprint.

[13] R. Lascar-C. Zuily, Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs à caractéristiques doubles, Duke Mathematical Journal., **49** n° 1 (1982).

[14] S. Mizohata, Unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques du 4ème ordre, Proc. Japan Acad., **34** (1958), 687–692.

[15] L. Nirenberg, Uniqueness in Cauchy problem for differential equations with constant leading coefficients: C.P.A.M., **10** (1957), 89–105.

[16] A. Pliš, A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere, C.P.A.M., **14** (1961), 599–617.

[17] X. Saint-Raymond, L'unicité pour des problèmes de Cauchy caractéristiques en certains points, C.P.D.E, **7** (5) (1982), 559–579.

[18] F. Trèves, A link between solvability of pseudo-differential equations and uniqueness of the Cauchy problem, Amer. Journ. of Math., **94** (1972), 267–288.

[19] C. Zuily, Lectures on uniqueness and non uniqueness of the non characteristic Cauchy problem, "Progress in Mathematics" Birkhäuser Boston Inc.