J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
24-4 (1984) 755-761

Applications holomorphes injectives de C^2 dans lui-même qui exceptent une droite complexe

Dédié au Professeur Yukio Kusunoki à son soixantième anniversaire

Par

Yasuichiro NISHIMURA

(Communiqué par Prof. Y. Kusunoki, le 8 Octobre, 1983)

Introduction.

Le présent mémoire concerne seulement des applications holomorphes de $\boldsymbol{C}^2$ dans lui-même, qu'on appellera ici applications entières. On dira qu'une application entière F excepte un ensemble A si son image $F(\boldsymbol{C}^2)$ ne rencontre par A. Nous disons qu'elle est une application entière à jacobien constant, si son déterminant jacobien est une constante.

Il est bien connu, au nom de l'exemple de Fatou [3] et Bieberbach [2], qu'il existe une application entière injective à jacobien constant qui excepte un ensemble ouvert. Kodaira [4] a construit une application entière injective qui excepte une droite complexe. L'auteur [5] a construit une application entière injective à jacobien constant qui excepte un voisinage d'une droite complexe (voir l'exemple 1 au n° 1).

Dans ce mémoire, en nous basant sur l'exemple 1, nous traitons des applications entières injectives qui exceptent une droite complexe.

Le théorème 1 au n° 1 montre un phénomène intéressant présenté par les applications entières injectives à jacobien constant:

Soient p et q deux nombres positifs. Posons

$$X=\{(x, y)\in \boldsymbol{C}^2 \,|\, y=0\},\ Y=\{x=0,\ |y|\leqq q\} \cup \{|x|\leqq p,\ |y|=q\}$$

et $A=\{|y|\leqq q,\ |xy|\leqq pq\}$. Si une application entière injective à jacobien constant excepte $X\cup Y$, alors elle excepte aussi A.

Deux exemples complètent ce théorème; l'exemple 2 montre que le voisinage A de X ne peut être remplacé par aucun voisinage contenant A; l'exemple 3 montre que, pour une application entière injective dont le jacobien n'est pas nécessairement constant, le théorème n'est plus vrai.

Au n° 2, nous traitons des applications entières injectives dont le jacobien n'est pas nécessairement constant. L'exemple 4 et le théorème 2 présentent une condition de la grandeur à l'infini d'un voisinage d'une droite complexe pour qu'il existe une application entière injective qui excepte ce voisinage.

Au *n*° 3, on concerne des applications entières qui exceptent deux droites complexes. Les exemples dans [4] et [5] nous amènent naturellement à la question suivante: *Existe-t-il une application entière injective (à jacobien constant) qui excepte deux droites complexes?* Au cas des applications à jacobien constant, nous donnons une réponse partielle suivante (la remarque du théorème 3):

Il n'existe pas d'application entière injective à jacobien constant qui excepte non seulement la réunion E en deux droites complexes mais aussi un voisinage d'un point de E.

A propos de ce théorème, nous remarquons que, si une application entière n'est pas injective et si son jacobien n'est pas nécessairement constant mais seulement non nul, il peut se faire qu'elle puisse excepter deux droites complexes et un voisinage de leur point d'intersection (Exemple 5).

1. Applications entières injectives à jacobien constant qui exceptent une droite complexe.

L'auteur [5] a donné un exemple d'application entière suivant:

Exemple 1. Il existe une application entière injective à jacobien constant qui excepte un voisinage d'une droite complexe.

Dans [5], on n'a pas prouvé que son jacobien est constant, mais, puisque le jacobien de l'automorphisme T de $\boldsymbol{C}^2$ qu'on y a considéré est constant, la preuve marche bien de façon sembleable à celle de Bieberbach [2].

Maintenant nous énonçons le théorème suivant:

Théorème 1. *Soient p et q deux nombers positifs. Posons*

$$X=\{(x, y)\,|y=0\},\ Y=\{x=0,\ |y|\leqq q\}\cup\{|x|\leqq p,\ |y|=q\}$$

et $A=\{|y|\leqq q,\ |xy|\leqq pq\}$. Si une application entière injective à jacobien constant excepte $X\cup Y$, alors elle excepte aussi A.

D'après le théorème 1, on peut obtenir l'exemple suivant plus précis que l'exemple 1:

Exemple 1'. Il existe une application entière injective à jacobien constant qui excepte $\{|y|\leqq 1,\ |xy|\leqq 1\}$.

La démonstration du théorème 1 repose sur le lemme suivant:

Lemme 1. *Avec les notations du théorème, définissons un domaine R par $R=\boldsymbol{C}^2-(X\cup Y)$, et prenons un nomble positif $k>1$. Alors, il existe une* *fonction plurisousharmonique non négative φ dans R ayant les propriétés suivantes:*

1° *On a* $\int_R \varphi dV < \infty$, *où dV désigne l'élément de volume euclidien.*

2° *Dans le domaine* $U(k) = \{0 < |x|,\ 0 < |y| < q,\ |x^k y| < p^k q\} \subset R$, *on a* $\varphi > 0$.

En effet, définissons $\varphi(x, y)$ par

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \log \dfrac{p^k q}{|x^k y|} & \text{dans } U(k) \\ 0 & \text{dans } R - U(k). \end{cases}$$

Il est évident que φ est une fonction continue dans R et que $\varphi > 0$ dans $U(k)$. En remarquant que $x \neq 0$ et $y \neq 0$ dans $U(k)$, on voit que φ est plurisousharmonique dans $U(k)$ et donc dans R. Il reste à prouver l'assertion 1°. Pour cela, désignant l'élément d'aire du plan de x par dv_x et posant $|y| = t$, on a

$$\begin{aligned} \int_{R \cap (|x| \leqq p)} \varphi dV &= 2\pi \int_{(|x| \leqq p)} dv_x \int_0^q t \log \frac{p^k q}{|x|^k t} dt \\ &= 2\pi \int_{(|x| \leqq p)} \left[\frac{t^2}{2} \log \frac{p^k q}{|x|^k t} + \frac{t^2}{4} \right]_0^q dv_x \\ &= \pi q^2 \int_{(|x| \leqq p)} \left\{ \log \left(\frac{p}{|x|} \right)^k + \frac{1}{2} \right\} dv_x < \infty \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} \int_{R \cap (|x| > p)} \varphi dV &= 2\pi \int_{(|x| > p)} \left[\frac{t^2}{2} \log \frac{p^k q}{|x|^k t} + \frac{t^2}{4} \right]_0^{\frac{p^k q}{|x|^k}} dv_x \\ &= \frac{\pi p^{2k} q^2}{2} \int_{(|x| > p)} \frac{1}{|x|^{2k}} dv_x < \infty, \end{aligned}$$

ce qui vérifie 1°. □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1. Prenons un nombre $k > 1$ quelconque et la fonction φ construite dans le lemme 1. Pour l'application F: $\boldsymbol{C}^2 \longrightarrow R$ qui satisfait aux hypothèses du théorème avec $|\det J_F|^2 \equiv c =$ constante, on a $F^*(dV) = |\det J_F|^2 dV_1 = c dV_1$, où dV_1 est l'élément de volume euclidien du domaine $\boldsymbol{C}^2$ de F. En posant $\phi = F^*(\varphi)$, ϕ est une fonction plurisousharmonique non négative dans $\boldsymbol{C}^2$ telle que $\int_{C^2} \phi dV_1 < \infty$, par suite elle est 0 identiquement. En effet, on a $\int_{C^2} \phi dV_1 = \frac{1}{c} \int_{C^2} F^*(\varphi) F^*(dV) = \frac{1}{c} \int_{F(C^2)} \varphi dV \leqq \frac{1}{c} \int_R \varphi dV < \infty$. Alors, d'après 2° du lemme 1, F excepte $U(k)$. Puisque $k > 1$ est arbitraire, F excepte $\bigcup_{k>1} U(k)$. L'image $F(\boldsymbol{C}^2)$ étant ouvert, F excepte $A = \overline{\bigcup_{k>1} U(k)}$. □

Maintenant, nous donnons deux exemples qui complètent le théorème 1. Le premier exemple montre que le voisinage A dans le théorème 1 est maximal.

Exemple 2. Avec les notations dans le théorème, pour tout point $(\alpha, \beta) \notin A$, il existe une application entière injective à jacobien constant qui excepte A mais n'excepte pas $\{(\alpha, \beta)\}$.

Sans perdre la généralité, on suppose $p=q=1$. Distinguons deux cas suivant que $|\beta|>1$ ou $|\beta|\leqq 1$.

1^{er} cas: Prenons un nombre positif ε tel que $1+\varepsilon<|\beta|$. D'après l'exemple 1′, prenons une application entière injective à jacobien constant F qui excepte $\{(u, v) \mid |v|\leqq 1, |uv|\leqq 1+\varepsilon\}$. Puisque l'application F ne peut excepter la droite complexe $K=\{v=\beta\}$, on prend un point $(u_0, \beta)\in K$ qui appartient à l'image $F(\boldsymbol{C}^2)$. En remarquant que $|\beta|>1$, prenons une fonction entière $f(z)$ d'une variable z telle que

$$|f(z)|\leqq\varepsilon \text{ sur } |z|\leqq 1, \text{ et } f(\beta)=\alpha-u_0.$$

Définissons un automorphisme de $\boldsymbol{C}^2$ à jacobien constant S: $(u, v)\longrightarrow (x, y)$ par $x=u+f(v)$, $y=v$, alors $S\circ F$ est un exemple d'application désirée. En effet, par un calcul direct, on a $S^{-1}(\{|y|\leqq 1, |xy|\leqq 1\})\subset\{|v|\leqq 1, |uv|\leqq 1+\varepsilon\}$ et $S^{-1}(\alpha, \beta)=(u_0, \beta)$, ce qui montre que $S\circ F$ excepte A mais n'excepte pas $\{(\alpha, \beta)\}$.

2^e cas: Par hypothèse, on a $|\alpha\beta|>1$. Sans perdre la généralité on suppose que α et β soient réels positifs. D'après l'exemple 1′, on prend une application entière injective à jacobien constant G qui excepte $\{|v|\leqq 1, |uv|\leqq 1\}$. Puisque G ne peut excepter $L=\{(u, v) \mid |uv|=\alpha\beta\}$, on prend un point $(a, b)\in L$ qui appartient à $G(\boldsymbol{C}^2)$. Sans perdre la généralité on suppose que a et b soient réels positifs, donc on a $ab=\alpha\beta$. En remarquant que $\alpha\beta>1$, on prend une fonction entière $g(z)$ d'une variable z telle que

$$|e^{g(z)}|\leqq 1 \quad \text{sur} \quad |z|\leqq 1, \text{ et } e^{g(\alpha\beta)}=\frac{b}{\beta}=\frac{\alpha}{a}.$$

Définissons un automorphisme de $\boldsymbol{C}^2$ à jacobien constant T: $(u, v)\longrightarrow (x, y)$ par $x=ue^{g(uv)}$, $y=ve^{-g(uv)}$, avec son inverse donné par $u=xe^{-g(xy)}$, $v=ye^{g(xy)}$, alors $T\circ G$ est un exemple d'application désirée. En effet, par un calcul direct on a $T^{-1}(\{|y|\leqq 1. |xy|\leqq 1\})\subset\{|v|\leqq 1, |uv|\leqq 1\}$ et $T^{-1}(\alpha, \beta)=(a, b)$, ce qui montre que $T\circ G$ excepte A mais n'excepte pas $\{(\alpha, \beta)\}$.

Le deuxième exemple montre que, sans supposer que le jacobien de l'application soit constant, le théorème n'est plus vrai. Précisément, on a le

Exemple 3. Soient p et q deux nombres positifs. Posons $B=\{y=0\}\cup\{|x|\leqq p, |y|\leqq q\}$. Alors pour tout point $(\xi, \eta)\notin B$, il existe une application entière injective qui excepte B mais n'excepte pas $\{(\xi, \eta)\}$.

Avec les notations de l'exemple 2, si $(\xi, \eta)\notin A$, puisqu'on a $B\subset A$, il suffit de prendre l'application qu'on vient de construire dans l'exemple

2. Il ne reste qu'à considérer le cas où $(\xi, \eta) \in A$. Sans perdre la généralité on suppose $p=q=1$. D'après l'exemple 1, prenons une application entière injective H qui excepte $\{v=0\} \cup \{|u| \leqq 1, |v| \leqq 1\}$. Prenons un point (c, d) avec $|d|>1$ qui appartient à l'image $H(\boldsymbol{C}^2)$, et prenons deux fonctions entières $r(z)$ et $s(z)$ d'une variable z telles que

$$|e^{r(z)}| \leqq 1 \quad \text{sur} \quad |z| \leqq 1, \quad e^{r(d)} = \frac{c}{\xi}$$

$$|e^{s(z)}| \leqq 1 \quad \text{sur} \quad |z| \leqq 1, \quad e^{s(\xi)} = \frac{d}{\eta}$$

Puisqu'on a $|\xi|>1$ et $|d|>1$, il est certainement possible. Définissons un automorphisme de $\boldsymbol{C}^2$ $U: (u, v) \to (x, y)$ par $x = ue^{-r(v)}$, $y = v \exp\{-s(ue^{-r(v)})\}$ avec son inverse U^{-1} donné par $u = x \exp\{r(ye^{s(x)})\}$, $v = ye^{s(x)}$. Par un calcul direct, on a $U^{-1}(\{|x| \leqq 1, |y| \leqq 1\}) \subset \{|u| \leqq 1, |v| \leqq 1\}$ et $U^{-1}(\xi, \eta) = (c, d)$, ce qui montre que $U \circ H$ excepte B mais n'excepte pas $\{(\xi, \eta)\}$.

2. Une condition d'un voisinage d'une droite complexe pour qu'il existe une application entière qui excepte ce voisinage.

A ce numéro, nous traitons des applications entières injectives dont le jacobien n'est pas nécessairement constant.

En utilisant l'exemple 1, on peut aisément construire l'exemple suivant:

Exemple 4. Pour tout nombre positif k, il existe une application injective qui excepte $\{|y| \leqq 1, |x^k y| \leqq 1\}$.

En prenant un nombre entier n tel que $n > \frac{1}{k}$, on définit un automorphisme $G: (u, v) \longrightarrow (x, y)$ de $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}^*$ par $x = uv^{-n}$, $y = v$. D'ailleurs, d'après l'exemple 1, on prend une application entière injective F qui excepte $\{v=0\} \cup \{|u| \leqq 1, |v| \leqq 1\}$. On pose $H = G \circ F$, alors, H est évidemment une application entière injective qui excepte $\{y=0\}$. Puis on a

$$\begin{aligned} G^{-1}(\{0<|y| \leqq 1, |x^k y| \leqq 1\}) &= \{0<|v| \leqq 1, |u^k v^{1-kn}| \leqq 1\} \\ &\subset \{0<|v| \leqq 1, |u^k| \leqq 1\} \\ &= \{0<|v| \leqq 1, |u| \leqq 1\}, \end{aligned}$$

ce qui montre que H excepte $\{|y| \leqq 1, |x^k y| \leqq 1\}$.

Inversement, on peut montrer l'inexistence d'application entière injective qui excepte un voisinage un peu plus grand que celui dans l'exemple 4. Précisément on a le

Théorème 2. *Soit $a(x)$ une fonction continue à valeurs réelles positives définie dans tout le plan $\boldsymbol{C} = \{|x| < \infty\}$ de x telle que, pour tout nombre positif ε, on ait*

$$\lim_{|x| \to +\infty} |x|^{\varepsilon} a(x) = \infty.$$

Posons $D=\{(x, y) \mid |y| \leqq a(x)\}$. *Alors, il n'existe pas d'application entière injective qui excepte* D.

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du théorème suivant dû à T. Ueda [8].

Théorème U. *Le complémentaire de la fermeture de l'image d'une application entière injective est un ouvert pseudoconvexe, s'il n'est pas vide.*

La démonstration du théorème 2. Supposons au contraire qu'il existe une application entière injective F qui excepte D. D'après le théorème U, le complémentaire $V=\boldsymbol{C}^2-\overline{F(\boldsymbol{C}^2)}$ est un ouvert pseudoconvexe contenant l'intérieur de D. Soit W la composante connexe de V contenant l'intérieur de D. Alors, $d(x)$ étant la distance dans la direction de y du point $(x, 0)$ à la frontière ∂W, $\varphi(x)=-\log d(x)$ est une fonction sousharmonique dans $\{|x|<\infty\}$ (voir par exemple [6], Korollar 10. 1). Puisque $\varphi(x) \leqq -\log a(x)$, on a, pour tout positif ε, $\varphi(x)-\varepsilon \log|x| \longrightarrow -\infty$ $(|x| \longrightarrow \infty)$. Alors, d'après le thérème de Brelot [7], $\varphi(x)$ s'étend en une fonction sousharmonique sur $\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$, donc se réduit à une constante c. Il en résulte que F excepte $\{|y| \leqq e^{-c}\}$, ce qui est une contradiction. $\square$

3. Applications entières injectives qui exceptent deux droites complexes.

Rappelons la question suivate mentionnée dans l'introduction: *Existe-t-il une application entière injective (à jacobien constant) qui excepte la réunion* E *en deux droites complexes*? Sans perdre la généralité on pose $E=\{xy=0\}$. S'il existe un automorphisme analytique (dont le jacobien est constant) de $(\boldsymbol{C}^*)^2=\boldsymbol{C}^2-E$ qui admet un point fixé attractif, alors d'après la méthode de Fatou et Bieberbach, on peut affirmativement répondre à cette question. Mais l'auteur ne sait s'il existe un tel automorphisme.

Dans ce numéro, en utilisant le théorème 1, nous donnons une réponse partielle suivante au cas des applications à jacobien constant.

Théorème 3. *Soit* a *un nombre complexe et soient* ε *et* ε' *deux nombres positifs. On pose* $E=\{xy=0\}$ *et* $I=\{x=a,\ |y| \leqq \varepsilon'\} \cup \{|x-a| \leqq \varepsilon,\ |y|=\varepsilon'\}$. *Alors il n'existe pas d'application entière injective à jacobien constant qui excepte* $E \cup I$.

Remarque. Puisqu'on peut prendre deux nombres ε et ε' arbitrairement petits, il n'existe pas en particulier d'application entière injective à jacobien constant qui excepte non seulement E mais aussi un voisinage d'un point de E.

Preuve. Il n'y a pas de restriction à supposer que $a>0$ et $0<\varepsilon<a$. Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe une application entière F injective à jacobien constant qui excepte $E \cup I$. D'après le théorème 1,

F excepterait $\{|y|\leqq\varepsilon',\ |(x-a)y|\leqq\varepsilon\varepsilon'\}$, donc en particulier $\left\{|x|\leqq\varepsilon,\ |y|\leqq\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+a}\right\}$. On pose $p=\varepsilon$ et $q=\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+a}$. Puisque F excepte $\{y=0\}$, d'après le théorème 1, elle excepterait $\{|y|\leqq q,\ |xy|\leqq pq\}$. De la même manière, puisque F excepte $\{x=0\}$, elle excepterait $\{|x|\leqq p,\ |xy|\leqq pq\}$. Donc F excepterait $\{|xy|\leqq pq\}$, ce qui est une contradiction, car le domaine $\{|xy|>pq\}$ est équivalent au domaine produit $\{|u|>pq,\ 0<|v|<\infty\}$ par la transformation $u=xy$, $v=y$. $\square$

L'auteur ne sait si le théorème est vrai sans supposer que F excepte aussi I, mais, au moins, il est nécessaire de supposer que F soit injective et que son jacobien soit constant, car on a l'exemple suivant:

Exemple 5. Soient p et q deux nombres positifs. Alors, il existe une application entière dont le jacobien ne s'annule nulle part, qui excepte $\{xy=0\}\cup\{|x|\leqq p,\ |y|\leqq q\}$.

Construisons l'application désirée en utilisant l'exemple 1$'$. Sans perdre la généralité, on suppose $p\leqq\frac{1}{e}$. Prenons d'abord une fonction entière $f(z)$ d'une variable z telle que $\mathrm{Re}\, f(z)\geqq\log(q|z|)$ sur $\{\mathrm{Re}\, z\leqq -1\}$. Une telle $f(z)$ existe certainement d'après le théorème d'approximation dû à Arakelyan [1]. Définissons une application entière G: $(u, v)\longrightarrow(x, y)$ par $x=e^u$, $y=ve^{f(u)}$. D'ailleurs, d'après l'exemple 1$'$, on prend une application entière injective F qui excepte $\{|v|\leqq 1,\ |uv|\leqq 1\}$. Posons $H=G\circ F$. Alors H excepte $\{xy=0\}$, et puis on a $G^{-1}(\{|x|\leqq p,\ |y|\leqq q\})=\{\mathrm{Re}\, u\leqq \log p,\ |v|\leqq qe^{-\mathrm{Re}\, f(u)}\}\subset\{\mathrm{Re}\, u\leqq -1,\ |uv|\leqq 1\}\subset\{|v|\leqq 1,\ |uv|\leqq 1\}$, ce qui montre que H est un exemple d'application désirée.

OSAKA MEDICAL COLLEGE

Références

[1] N. U. Arakelyan, Uniform approximation on closed sets by entire functions (Russian), Akad. Nauk SSSR Izv., **28** (1964), 1187-1206.

[2] L. Bieberbach, Beispiel zweier ganzen Funktionen zweier komplexer Variablen, welche eine schlichte volumetreue Abbildung des R^4 auf einem Teil seiner selbst vermitten, S. B. Preuss. Akad. Wiss., (1933), 476-479.

[3] P. Fatou, Sur certaines fonctions uniformes de deux variables, C. R., **175** (1922), 1030-1033.

[4] K. Kodaira, Holomorphic mappings of polydiscs into compact complex manifolds, J. Diff. Geometry, **6** (1971), 33-46.

[5] Y. Nishimura, Automorphismes analytiques admettant des sous-variétés de points fixés attractives dans la direction transversale, J. Math. Kyoto Univ., **23** (1983), 289-299.

[6] R. P. Pflug, Holomorphiegebiete, pseudokonvexe Gebiete und das Levi-Problem, Lect. Notes in Math., 432, 1975, Springer.

[7] T. Radó, Subharmonic functions, 1937, Springer.

[8] T. Ueda, à paraître.