NOETHERSCHE GRUPPEN MIT NILPOTENTEN NORMALTEILERN VON ENDLICHEM INDEX

VON
Hermann Simon

Die Frage der Bestimmung der Beschaffenheit einer abstrakten, gruppentheoretischen Eigenschaft E, so dass endlich erzeugte E-Gruppen endlich sind, ist in Simon [1] für die Klasse der endlich erzeugten Gruppen mit endlicher Hyperzentrumsfaktorgruppe behandelt worden. In der vorliegenden Arbeit soll nun das Problem für die Klasse der endlich erzeugten Gruppen G mit nilpotenten Normalteilern N endlicher Klasse von endlichem Index $[G:N]$ analog zu [1] gelöst werden.

Terminologie und Bezeichnungen sind wie in Simon [1].

Definition 1. Eine Gruppe G heisst *fastpseudohomogen*, wenn es eine natürliche Zahl n und eine unendliche Primzahlmenge $\mathfrak{P}$ gibt, so dass für alle endlichen Faktorgruppen E von G gilt: Ist P ein p-Normalteiler von E (mit p aus $\mathfrak{P}$), so ist die Ordnung ϕ_p der von E in P induzierten Automorphismengruppe:

$$\phi_p = (n, \phi_p)p^{\beta}, \qquad \beta \geqq 0.$$

Anmerkung. Mann kann annehmen $p \nmid n$ für alle p aus $\mathfrak{P}$, da es ja nur endlich viele Primzahlen p mit $p \mid n$ gibt.

Hilfssatz 1. *Die fastpseudohomogene Gruppe H ist noethersch, wenn sie einen torsionsfreien abelschen Normalteiler B mit unendlicher zyklischer Faktorgruppe $H/B = \{gB\}$ und $B = \{b^H\}$ für geeignetes b aus B besitzt.*

Beweis. (1) Da für $B = 1$ die Aussage trivial ist, sei von nun an $B \neq 1$. Aus $B = \{b^H\}$ und $H/B = \{gB\}$ folgt $H = \{b, g\}$ und $B = \{\cdots, b^{g^i}, \cdots\}$ mit $i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Die Fastpseudohomogenität von H ergibt nach Simon [1; Lemma 1.1] die Unmöglichkeit der Unabhängigkeit der b^{g^i}, *also hat B endlichen Rang.*

(2) Sei $\mathfrak{P}$ die in der Fastpseudohomogenität von H geforderte, unendliche Primzahlmenge und $p \nmid n$ für alle p aus $\mathfrak{P}$ (s. Anmerkung zu Definition 1). Man bilde für p aus $\mathfrak{P}$: $B^p \leqq B \triangleleft\neq H$. Als charakteristische Untergruppe von B is B^p Normalteiler von H. Die Endlichkeit des Ranges von B zieht die Endlichkeit von B/B^p nach sich. Aus $H/B^p \triangleright B/B^p$ und der Zyklizität von $(H/B^p)/(B/B^p) \cong H/B$ folgt das Noetherschsein von H/B^p.

Die Kommutativität von B und H/B implizieren die Auflösbarkeit von H. In der auflösbaren, noetherschen Gruppe H/B^p existiert nach Hirsch [1] ein torsionsfreier Normalteiler T/B^p mit endlichem Index $[H:T]$. In unendlichen homomorphen Bildern von H/B^p existieren also von 1 verschiedene, torsions-

Received September 2, 1962.

freie Normalteiler. Die Anwendung von Simon [1; Hilfssatz 1.1] zusammen mit der Fastpseudohomogenität von H ergibt, dass H/B^p in B/B^p eine Automorphismengruppe der Ordnung $\phi_p = (n, \phi_p)p^\beta$ induziert. Sei C_p/B^p der Zentralisator von B/B^p in H/B^p. Dann gilt:

$$B/B^p \triangleleft\neq C_p/B^p \triangleleft H/B^p \quad \text{und} \quad o(H/C_p) = \phi_p\,.$$

Nun existiert eine Untergruppe Q_p von H mit $B^p \triangleleft B \triangleleft C_p \triangleleft Q_p \leqq H$ derart, dass $[Q_p:C_p] = p^\beta$ und $[H:Q_p] = (n, \phi_p)$. Da $(n, \phi_p) \mid n$, so ist $[H:Q_p] \leqq n$ für alle (unendlich vielen) p aus $\mathfrak{P}$. Da H endlich erzeugbar ist, so gibt es nach Baer [1; S. 331] nur endlich viele Untergruppen mit n nicht überschreitendem Index. Also gibt es eine Untergruppe Q von H, der unendlich viele p aus $\mathfrak{P}$, diese Menge heisse $\mathfrak{P}'$, zugeordnet sind, so dass gilt $[H:Q] = (n, \phi_p)$ und $[Q:C_p] = p^\beta$ für alle (unendlich vielen) p aus $\mathfrak{P}'$. Da H endlich erzeugt und $[H:Q]$ endlich ist, so ist auch Q endlich erzeugt.

Aus $B/B^p \leqq C_p/B^p \leqq Q/B^p$ folgt, dass der Zentralisator von B/B^p in Q/B^p ebenfalls C_p/B^p ist, so dass also Q/B^p in B/B^p eine p-Automorphismengruppe für alle p aus $\mathfrak{P}'$ induziert.

(3) Q/B^p ist als Untergruppe der auflösbaren, noetherschen Gruppe H/B^p ebenfalls noethersch und auflösbar. Sei nun T_0/B^p ein nach Hirsch [1] in Q/B^p existierender, torsionsfreier Normalteiler mit endlichem Index $[Q:T_0]$. Wegen der Torsionsfreiheit von T_0/B^p und der Endlichkeit von B/B^p folgt $T_0/B^p \cap B/B^p = 1$, was mit $T_0 \cap B = B^p$ äquivalent ist. Man betrachte nun für festes p aus $\mathfrak{P}$ die Menge $\mathfrak{M}$ der Normalteiler T von Q für welche gilt: $T \cap B = B^p$ und $[Q:T]$ ist endlich. $\mathfrak{M}$ ist wegen $T_0 \in \mathfrak{M}$ nicht leer. Sei nun T ein *maximaler* Normalteiler in $\mathfrak{M}$. Für die endliche Gruppe Q/T gilt:

$$Q/T \triangleright BT/T \cong B/B \cap T = B/B^p.$$

Sei S/T der Zentralisator von BT/T in Q/T. Aus $C_p \circ B \leqq B^p \leqq T$ folgt $C_p \circ BT \leqq T$, also $C_p \leqq S \leqq Q$. Daher induziert Q/T in BT/T wegen $o(Q/C_p) = p^\beta$ eine p-Gruppe von Automorphismen, also $o(Q/S) = p^{\beta'}$. Aus

$$Q/T \triangleright S/T \triangleright BT/T$$

und der Zyklizität von H/B folgt wegen $B \leqq BT \leqq S \leqq Q \leqq H$ die Zyklizität von S/BT. Da BT/T im Zentrum von S/T liegt, ist die Zentrumsfaktorgruppe von S/T zyklisch und daher ist S/T abelsch. Die abelsche Gruppe S/T ist eine p-Gruppe, denn andernfalls gäbe es ein Element $xT \in S/T$ mit $o(xT) = q \neq p$, q eine Primzahl. Der kleinste xT enthaltende Normalteiler von Q/T ist $X/T = \{xT^{Q/T}\} \leqq S/T$. Wegen $1 \neq xT \in X/T$ ist X/T ein von 1 verschiedener q-Normalteiler, also $T < X \triangleleft\neq Q$. Aus $q \neq p$ folgt $(X/T) \cap (BT/T) = 1$, also $X \cap BT = T$ und daher

$$X \cap B = X \cap BT \cap B = T \cap B = B^p.$$

Da $X \triangleleft\neq Q$, Q/X endlich, $X \cap B = B^p$ und $T < X$ ist, so widerspricht dies der Maximalität von T und daher gibt es keine von p verschiedene Primzahl, die die Ordnung von S/T teilt, d.h. $o(S/T) = p^{\beta''}$.

(4) Aus $o(Q/S) = p^{\beta'}$ und $o(S/T) = p^{\beta''}$ folgt, dass Q/T eine (endliche) p-Gruppe und somit nilpotent ist. Nun folgt wie in Simon [1; Hilfssatz 1.2], die Existenz einer Teilmenge $\mathfrak{P}''$ von $\mathfrak{P}'$, die fast alle p aus $\mathfrak{P}'$ enthält, so dass $\bigcap_{p\in\mathfrak{P}''} B^p = 1$ gilt; und Q ist nilpotent von endlicher Klasse.

Die endliche Erzeugbarkeit und die Endlichkeit der Klasse von Q ergeben, dass Q noethersch ist, und aus der Endlichkeit von $[H:Q]$ folgt das Noethersch-sein von H, Q.E.D.

Anmerkung. Hilfssatz 1 ist trivialerweise richtig, wenn H/B eine endliche zyklische Gruppe ist.

Hilfssatz 1 hat als Konsequenzen die beiden folgenden Korollare, deren Beweise wörtlich wie in Simon [1; Korollar 1.1, Korollar 1.2] geführt werden. Diese Korollare dienen dann zum Beweis von Satz B (s. Simon [1; Satz A]), welcher den wichtigsten Beitrag zum Beweis des Hauptsatzes (s. S. 245) liefert.

KOROLLAR 1. *Besitzt G einen torsionsfreien abelschen Normalteiler A mit zyklischer Faktorgruppe $G/A = \{gA\}$ und ist $\{a, g\}$ fastpseudohomogen für alle a aus A, dann ist G lokal-noethersch.*

KOROLLAR 2. *Besitzt G einen torsionsfreien, abelschen Normalteiler A mit lokal-noetherscher, fastauflösbarer Faktorgruppe G/A und ist $\{a, g\}$ fastpseudohomogen für alle a aus A und alle g aus G, dann ist G selbst lokal-noethersch.*

DEFINITION 2. Die Gruppe G heisst *t-halbauflösbar*, wenn jedes unendliche, homomorphe Bild H von G einen von 1 verschiedenen, torsionsfreien, abelschen Normalteiler besitzt.

SATZ B. *Die Gruppe G ist noethersch (und fastauflösbar), wenn gilt:*

(a) *G ist endlich erzeugt.*

(b) *G ist t-halbauflösbar.*

(c) *Für jedes Elementepaar x, y aus G ist $\{x, y\}/\{x, y\}''$ fastpseudohomogen.*

Sei e eine abstrakte, gruppentheoretische Eigenschaft, die folgenden Erbregeln genügt:

(e1) 1 ist eine e-Gruppe.

(e2) Untergruppen von e-Gruppen sind e-Gruppen.

(e3) Sind X und Y e-Gruppen, dann ist auch $X \otimes Y$ eine e-Gruppe.

HILFSSATZ 2. *G erfülle folgende Bedingungen:*

(a) *G ist keine* e-*Gruppe.*

(b) *Jede Faktorgruppe F von G, nach einem Normalteiler $\neq 1$, ist eine* e-*Gruppe.*

Dann gilt: Sind A und B Normalteiler von G mit $A \cap B = 1$, dann ist $A = 1$ oder $B = 1$.

Beweis. Angenommen, es gibt Normalteiler A, B von G mit $A \neq 1, B \neq 1$ und $A \cap B = 1$, dann sind nach (b) die Gruppen G/A und G/B e-Gruppen, und daher ist auch $G/A \otimes G/B$ eine e-Gruppe. Da aber stets $G/A \cap B$ isomorph zu einer Untergruppe von $G/A \otimes G/B$ ist, so ist wegen $A \cap B = 1$ auch G eine e-Gruppe, im Widerspruch zu (a).

Nun sei g eine Gruppeneigenschaft, die folgende Bedingungen erfüllt:

(g1) Erweiterungen von g-Gruppen durch endliche Gruppen sind g-Gruppen.

(g2) Ist G modulo einer Zentrumsuntergruppe eine g-Gruppe, dann ist auch G eine g-Gruppe.

(g3) 1 ist eine g-Gruppe.

(g4) Untergruppen von g-Gruppen sind g-Gruppen.

(g5) Sind X und Y g-Gruppen, dann ist auch $X \otimes Y$ eine g-Gruppe.

Bemerkung. Endliche Gruppen sind g-Gruppen.

HILFSSATZ 3. *G erfülle folgende Bedingungen:*

(a) *G ist keine* g-*Gruppe.*

(b) *Jede Faktorgruppe F von G, nach einem Normalteiler $\neq 1$, ist eine* g-*Gruppe.*

Dann gilt: Endliche Normalteiler von G sind 1.

Beweis. Aus (a) folgt die Unendlichkeit von G. Angenommen, es existiere ein von 1 verschiedener, endlicher Normalteiler in G, dann gibt es auch einen endlichen, minimalen Normalteiler $1 \neq M \triangleleft\neq G$. Aus der Endlichkeit von M folgt die von $G/\mathfrak{C}(M)$, wobei $\mathfrak{C}(M)$ der Zentralisator von M in G ist, und aus der Unendlichkeit von G folgt die von $\mathfrak{C}(M)$. Da also M und $\mathfrak{C}(M)$ von 1 verschiedene Normalteiler in G sind, so folgt nach Hilfssatz 2: $1 \neq M \cap \mathfrak{C}(M) \triangleleft\neq G$. Die Minimalität von M impliziert $M \cap \mathfrak{C}(M) = M$, also $M < \mathfrak{C}(M)$, also ist M abelsch und im Zentrum $Z(\mathfrak{C}(M))$ von $\mathfrak{C}(M)$ enthalten. Wegen $M \neq 1$ ist G/M und daher $\mathfrak{C}(M)/M$ eine g-Gruppe, und daher ist wegen (g2) auch $\mathfrak{C}(M)$ und wegen der Endlichkeit von $G/\mathfrak{C}(M)$ und (g1) auch G eine g-Gruppe, ein Widerspruch zu (a).

HILFSSATZ 4. *Das Zentrum $Z(G)$ der Gruppe G ist von* 1 *verschieden, wenn gilt:*

(a) *Es gibt eine unendliche Primzahlmenge $\mathfrak{P}$ mit der Eigenschaft: Ist H eine Faktorgruppe von G und P ein p-Normalteiler von H mit p aus $\mathfrak{P}$, dann induziert H in P eine p-Automorphismengruppe.*

(b) *G enthält einen freien, abelschen Normalteiler $A \neq 1$ von endlichem Rang.*

Beweis. Sei $M \neq 1$ ein—wegen (b) existierender—freier, abelscher Normalteiler von G mit minimalem Rang. Sei p aus $\mathfrak{P}$; dann ist M^p natürlich Normalteiler von G. Wegen (a) induziert dann G/M^p in $M/M^p \neq 1$ eine p-Gruppe von Automorphismen. Sei C/M^p der Zentralisator von M/M^p

in G/M^p. Dann ist $[G:C] = p^\alpha$ und daher $Z(G/M^p) \neq 1$; weiter folgt dann:

$$G/M^p \circ M/M^p < M/M^p.$$

Also ist $M/G \circ M \neq 1$ entweder endlich mit durch p teilbarer Ordnung oder $M/G \circ M$ ist unendlich. Da die Endlichkeit von $M/G \circ M$ die Teilbarkeit $p \mid o(M/G \circ M)$ für alle (unendlich vielen) p aus $\mathfrak{P}$ nach sich ziehen würde, so ist $M/G \circ M$ unendlich, was Rang $G \circ M <$ Rang M impliziert. Die Minimalität des Ranges von M hat $G \circ M = 1$ zur Folge, also $1 \neq M \leqq Z(G)$; Q.E.D.

DEFINITION 3. Die Gruppe G heisst *fastquasihomogen*, wenn jede Untergruppe U von G fastpseudohomogen ist.

HAUPTSATZ. *Folgende Eigenschaften einer Gruppe G sind äquivalent*:

(I) (a1) *G ist noethersch.*
(b1) *G besitzt einen nilpotenten Normalteiler N von endlicher Klasse und endlichem Index $[G:N]$.*

(II) (a2) *G ist endlich erzeugt.*
(b2) *Jedes homomorphe Bild $H \neq 1$ von G enthält ein Element $e \neq 1$, so dass e^H endlich ist.*

(III) (a3) *G ist endlich erzeugt.*
(b3) *G ist fastquasihomogen.*
(c3) *G besitzt eine t-halbauflösbare Untergruppe U mit endlichem $[G:U]$.*

Beweis. (I) $\Rightarrow$ (II). Aus (a1) folgt stets (a2). Ist $H \neq 1$ ein endliches homomorphes Bild von G, dann ist (b2) trivialerweise richtig. Ist H ein unendliches homomorphes Bild von G dann besitzt auch H einen nilpotenten Normalteiler N von endlicher Klasse und endlichem Index $[H:N]$. Die Endlichkeit von $[H:N]$ und die Unendlichkeit von H haben $Z(N) \neq 1$ zur Folge und jedes Element $1 \neq e$ aus $Z(N)$ erfüllt (b2).

(II) $\Rightarrow$ (I). Nach Baer [2; S. 288] ist G fastauflösbar und noethersch, also gilt (a1). Da G noethersch und fastauflösbar ist, so enthält G einen auflösbaren Normalteiler von endlichem Index.

Angenommen, Aussage (b1) wäre falsch. Dann gibt es einen Normalteiler K von G so, dass (b1) in $H = G/K$ falsch, in jeder Faktorgruppe von H, nach einem Normalteiler $\neq 1$, jedoch richtig ist. Ausserdem ist dann H unendlich. Die Eigenschaft g von G, dass G einen nilpotenten Normalteiler von endlichem Index und endlicher Klasse enthält, genügt den Bedingungen (g1) bis (g5).

Für H gilt dann: H ist keine g-Gruppe, jede echte Faktorgruppe von H ist jedoch eine g-Gruppe. Somit besitzt H nach Hilfssatz 3 keine nichttrivialen endlichen Normalteiler.

Da $H \neq 1$ ist, so gibt es nach (b2) ein Element $e \neq 1$, so dass e^H endlich ist. Sei $A = \{e^H\} = \{e_1, \cdots, e_r\}$, wobei r die Anzahl der paarweise verschiedenen Konjugierten zu e in H ist. Dann ist $A \neq 1$ ein endlich erzeugter Normalteiler von H. Aus der Endlichkeit von e^H folgt die Endlichkeit von $[H:\mathfrak{C}(e_i)]$ für $i = 1, \cdots, r$, wobei natürlich $\mathfrak{C}(e_i)$ der Zentralisator von e_i in H ist. Wegen $\mathfrak{C}(A) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{C}(e_i)$ folgt dann nach einem Satz von Poincaré die Endlichkeit von $H/\mathfrak{C}(A)$, was die Endlichkeit von $A/A \cap \mathfrak{C}(A) = A/Z(A)$ impliziert. Aus der Endlichkeit der Zentrumsfaktorgruppe einer Gruppe A folgt nach Baer [3; S. 153] die Endlichkeit von A'. Da A' als charakteristische Untergruppe des Normalteilers A von H ebenfalls normal in H ist, so folgt sogar $A' = 1$. A ist also ein endlich erzeugter, abelscher, torsionsfreier und daher frei abelscher Normalteiler (endlichen Ranges) von H.

Wegen $A \neq 1$ gilt (b1) in H/A, daher also in $\mathfrak{C}(A)/A$ und wegen $A \leqq Z(\mathfrak{C}(A))$ gilt (b1) auch in $\mathfrak{C}(A)$ und wegen der Endlichkeit von $H/\mathfrak{C}(A)$ in H selbst. Dieser Widerspruch beweist (II) $\Rightarrow$ (I).

(I) $\Rightarrow$ (III). Sei N der nach (b1) in G existierende, nilpotente Normalteiler von endlichem Index $[G:N]$. Wegen (a1) gilt (a3) und N ist noethersch. Daher folgt aus Simon [1; Lemma 2.1], dass N t-halbauflösbar ist; also gilt (c3).

Sei $U \neq 1$ eine Untergruppe von G. Aus der Endlichkeit von $[G:N]$ folgt die von $[U:U \cap N] = n$ und $V = U \cap N$ ist nilpotent (von endlicher Klasse) und daher quasihomogen. Sei weiter K ein Normalteiler von U so, dass $E = U/K$ endlich ist und es sei $\mathfrak{P}$ die Menge aller Primzahlen p mit $p \nmid n$. Wegen $V \leqq VK \leqq U$ ist $t = [U:VK]$ ein Teiler von n. Sei P/K ein p-Normalteiler von $E = U/K$ mit $p \nmid n$.

Angenommen, es gäbe ein Element x aus P/K mit $x \notin VK/K$. Dies impliziert $x \neq 1$ und $x^{p^r} = 1$ mit $r > 0$. Daher ist $x(VK/K)$ ein von 1 verschiedenes p-Potenz Element der Faktorgruppe $(U/K)/(VK/K) \cong U/VK$, wobei

$$o((U/K)/(VK/K)) = o(U/VK) = t$$

und $t \mid n$, $p \mid t = [U:VK]$ und $p \nmid n$; dies ist aber ein Widerspruch.

Daher gilt: Jeder p-Normalteiler ($p \nmid n$) $P/K \lhd E = U/K$ ist in VK/K enthalten. $VK/K \cong V/V \cap K$ ist nilpotent weil $V = U \cap N$ nilpotent ist. Also zentralisiert jedes Element x aus VK/K mit $p \nmid o(x)$ den Normalteiler P/K, d.h. ein Element y, das nicht im Zentralisator C/K von P/K liegt hat entweder p-Potenz Ordnung oder $o(y) \mid n$; hieraus folgt aber

$$[E:C/K] = [U:C] = (t, [U:C])p^{\alpha}.$$

Da diese Überlegungen für jede Untergruppe U aus G gelten, so folgt, dass G fastquasihomogen ist, also gilt (b3).

(III) $\Rightarrow$ (I). Da G endlich erzeugt und $[G:U]$ endlich ist, so ist auch U endlich erzeugt und für U sind daher die Voraussetzungen von Satz B erfüllt, also ist U noethersch, und die Endlichkeit von $[G:U]$ impliziert dann sogar das Noetherschsein von G.

Sei n die in der Fastquasihomogenität von G geforderte, natürliche Zahl.

Da G noethersch ist, so gibt es nach Baer [1; S. 331] nur endlich viele Untergruppen $W \leqq G$ mit $[G:W] \leqq n$. Man bilde $D = \bigcap_{[G:W]\leqq n} W \cap U$. D ist Normalteiler von G und G/D ist endlich. Da G noethersch ist, so folgt die Existenz einer natürlichen Zahl k, so dass $Z_k(D)$ das Hyperzentrum von D ist. $Z_k(D)$ ist natürlich Normalteiler von G. Angenommen, $G/Z_k(D)$ wäre unendlich, dann wäre wegen der Endlichkeit von G/D die Hyperzentrumsfaktorgruppe $D/Z_k(D)$ ebenfalls unendlich. Da U t-halbauflösbar ist und $D \lhd U$ mit endlichem $[U:D]$, so folgt die t-Halbauflösbarkeit von D, welche zusammen mit Baer [3; S. 148] und dem Noetherschsein von G die Existenz eines freien, abelschen Normalteilers $A \neq 1$ von endlichem Rang in jedem unendlichen, homomorphen Bild H von G impliziert, wobei sogar A in dem epimorphen Bild von D (unter dem Epimorphismus $G \to H$) enthalten ist. Sei $\mathfrak{P}$ die in der Fastquasihomogenität von G geforderte, unendliche Primzahlmenge. Aus der t-Halbauflösbarkeit von D und Simon [1; Hilfssatz 1.1] folgt, dass für $D/Z_k(D)$ die Bedingungen von Hilfssatz 4 erfüllt sind, also ist $Z(D/Z_k(D)) \neq 1$, ein Widerspruch, also ist $D/Z_k(D)$ endlich und daher gilt (I).

Literatur

REINHOLD BAER

1. *Das Hyperzentrum einer Gruppe. III*, Math. Zeitschrift, Bd. 59 (1953), S. 299–338.
2. *Noethersche Gruppen*, Math. Zeitschrift, Bd. 66 (1956), S. 269–288.
3. *Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung*, Math. Ann., Bd. 129 (1955), S. 139–173.

K. A. HIRSCH

1. *On infinite soluble groups (II)*, Proc. London Math. Soc. (2), vol. 44 (1948), pp. 336–344.

HERMANN SIMON

1. *Noethersche Gruppen mit endlicher Hyperzentrumsfaktorgruppe*, Illinois J. Math., vol. 8 (1964), pp. 231–240.

UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN, DEUTSCHLAND