ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 22, Number 2, June 1978

ENDLICHE GRUPPEN MIT EINER 2-ZENTRALEN INVOLUTION, DEREN ZENTRALISATOR 2-ABGESCHLOSSEN IST

VON

BERND BAUMANN

Section 1

Ein in [15] von Suzuki aufgeworfenes Problem ist die Kennzeichnung der endlichen Gruppen, die eine Involution enthalten, deren Zentralisator 2-abgeschlossen ist, d.h. eine normale 2-Sylowgruppe besitzt. Die Lösung dieses Problems würde eine Verallgemeinerung seines Resultates aus [14] bedeuten, wo Gruppen gekennzeichnet werden, in denen der Zentralisator einer jeden Involution 2-abgeschlossen ist.

In der vorliegenden Arbeit werden endliche Gruppen betrachtet, in denen zwar die Existenz von nur einer Involution mit 2-abgeschlossenem Zentralisator vorausgesetzt wird. Jedoch muß zusätzlich angenommen werden, daß es sich um eine Involution aus dem Zentrum einer 2-Sylowgruppe handelt. Man erhält folgenden

SATZ. *Sei G eine endliche Gruppe ohne nichttriviale auflösbare Normalteiler, die eine Involution enthält, in deren Zentralisator eine 2-Sylowgruppe von G normal ist. Dann ist der kleinste Normalteiler N von G mit 2-abgeschlossener Faktorgruppe ein direktes Produkt von einfachen Gruppen. Ist E ein einfacher direkter Faktor von N, so ist E isomorph zu einer der folgenden Gruppen:*

(a) $L_2(q)$, $Sz(q)$, $U_3(q)$, $L_3(q)$, $S_4(q)$ *mit* $q = 2^n > 2$;
(b) $L_2(q)$ *mit* $q = 2^n \pm 1 > 3$.

Hierbei bezeichnen $L_n(q)$, $U_n(q^{1/2})$ bzw. $S_n(q)$ einfache lineare, unitäre bzw. symplektische Gruppen der Dimension n über einem Körper mit q Elementen sowie $Sz(q)$ einfache Gruppen von Suzuki. Die übrigen Bezeichnungen sind vermutlich allgemein üblich und stimmen größtenteils mit denen aus [5] überein. Auf den folgenden Unterschied bei der Definition der Thompson Gruppe sei jedoch hingewiesen: Anders als in [5] wird im folgenden mit $A(G)$ die Menge der elementar-abelschen Gruppe maximaler Ordnung einer p-Gruppe G und mit $J(G)$ dereren Erzeugnis bezeichnet.

Um Platz zu sparen, wird der Beweis des Satzes nur für den Fall durchgeführt, bei dem $C_G(O_2(M)) \leq O_2(M)$ für alle 2-lokalen Untergruppen M von

Received September 20, 1976.

G gilt. Die dadurch nicht erfaßten Fälle behandelt man in naheliegender Weise mit der vorhandenen Komponententheorie (s. etwa [1]) und Goldschmidts "signalizer functor theorem" [4].

Dem Referenten dieser Arbeit danke ich für zahlreiche Verbesserungsvorschläge. Aus seinem Bericht habe ich einige Formulierungen und Beweise übernommen.

Section 2

Im folgenden sei G immer eine endliche Gruppe.

(2.1) (Suzuki [14]) *Sei G eine nichtauflösbare einfache Gruppe, in der der Zentralisator einer jeden Involution eine normale 2-Sylowgruppe besitzt. Dann ist G isomorph zu einer der im Satz erwähnten Gruppen, jedoch nicht isomorph zu $S_4(q)$.*

(2.2) (Suzuki [9, Lemma 4]) *Sei G eine 2-Gruppe. Enthält G eine Involution x mit $|C_G(x)| = 4$, so ist G eine Diedergruppe, eine Quasidiedergruppe oder eine Gruppe der Ordnung 4.*

(2.3) [8, 12.3] *Sei G eine Gruppe gerader Ordnung, die keine Untergruppe vom Index 2 besitzt. Eine 2-Sylowgruppe S von G habe eine maximale Untergruppe M, so daß es in $S \setminus M$ keine Elemente der Ordnung $\leq 2^{n-1}$ gibt. Ist $x \in S$ ein Element der Ordnung 2^n, so gibt es ein $g \in G$ mit $x^g \in M$.*

(2.4) [1, Lemma 3.1] *Sei V ein n-dimensionaler F_2-Vektorraum, $G = O^2(G) \leq GL(V)$ und $Y \neq 1$ eine zyklische Untergruppe ungerader Ordnung von G, die transitiv auf $[V, Y]^{\#}$ operiert. Außerdem habe $U = C_V(Y)$ die Dimension $k \geq 1$, es gelte $U \cap U^x = 0$ für $x \in G \setminus N_G(U)$ und Y sei ein Normalteiler von $N_G(U)$. Dann gilt* (i), (ii) *oder* (iii).

(i) $k = 1$ *und* $n = 3$.
(ii) $[V, Y]$ *und* U *sind* G*-invariant.*
(iii) $[V, Y]$ *ist* G*-invariant,* Y *operiert regulär auf* $U^G \setminus U$ *und*

$$V \setminus [V, Y] = \left(\bigcup_{x \in G} U^x\right)^{\#}.$$

(2.5) (a) [2, S. 24, 25] *Für eine Inzidenzstruktur $S = (P, L, I)$ mit Punkten P und Geraden L gelte:*

(1) *Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.*
(2) *Auf jeder Geraden liegen mindestens drei Punkte.*
(3) *Haben zwei verschiedene Geraden L und M einen gemeinsamen Punkt U und sind U, Q, R* bzw. *U, S, T drei paarweise verschiedene Punkte auf L* bzw. *M, so haben die Gerade durch Q und S und die Gerade durch R und T einen gemeinsamen Punkt.*

(4) *Es gibt* $n + 1$ *Punkte, die in keinem echten Unterraum (d.i. eine Teilmenge von* S*, die mit zwei verschiedenen Punkten auch deren Verbindungsgerade enthält) liegen.*

Dann ist die Menge der Unterräume eine projektive Geometrie der Dimension n.

(b) [2, 1.4.46] *Die Gruppe der Kollineationen einer dreidimensionalen projektiven Geometrie mit* $2^n + 1$ *Punkten auf einer Geraden, die eine symplektische Polarität festlassen, ist die symplektische Gruppe* $S_4(2^n)$ *der Ordnung* $2^{4n}(2^{2n} - 1)(2^{4n} - 1)$.

(2.6) *Sei* G *eine* p*-Gruppe und* L *eine Menge von Teilmengen von* G *mit* $L^G = L$. *Ist* $L_0 \subseteq L$ *mit* $\langle L_0 \rangle < \langle L \rangle$, *so ist* $\langle L_0 \rangle < \langle N_L(L_0) \rangle$.

Beweis. Trivial.

(2.7) *Sei* G *eine* p*-Gruppe, die eine Untergruppe* Q *mit* $G = Q\Omega_1(Z(G))$ *enthält. Dann ist* $\Phi(G) = \Phi(Q)$.

Beweis. Wegen $\Omega_1(Z(G)) \leq C_G(\Phi(Q))$ ist $\Phi(Q)$ ein Normalteiler mit elementar-abelscher Faktorgruppe und damit $\Phi(G) \leq \Phi(G)$. Da Q eine Untergruppe von G ist, gilt auch $\Phi(Q) \leq \Phi(G)$ sowie (2.7).

(2.8) *Sei* U *eine Untergruppe gerader Ordnung von* G*, die nicht alle Involutionen von* G *enthält. Ist* $x \in U$ *eine Involution, so gelte* $C_G(x) \leq U$. *Dann sind alle Involutionen von* G *konjugiert.*

Beweis. Seien x und y Involutionen von G mit $x \in U$ und $y \notin U$. Sind x und y nicht konjugiert, so enthält $Z(\langle x, y \rangle)$ eine Involution. Aus $Z(\langle x, y \rangle) \leq C_G(x) \leq U$ folgt dann der Widerspruch $y \in C_G(Z(\langle x, y \rangle)) \leq U$.

(2.9) *Sei* $q > 2$ *eine Zweierpotenz und* G *die Automorphismengruppe eines 4-dimensionalen symplektischen Vektorraumes über einem Körper mit* q *Elementen sowie* H *der Stabilisator eines eindimensionalen Unterraumes. Ferner sei* $N = O_2(H)$ *und* S *eine 2-Sylowgruppe von* G *mit* $N \leq S$. *Dann gilt:*

(a) G *ist isomorph zur einfachen Gruppe* $S_4(q)$.
(b) N *ist eine elementar-abelsche Gruppe der Ordnung* q^3.
(c) H *ist eine zerfallende Erweiterung von* N *mit einer zu* $GL_2(q)$ *isomorphen Gruppe* X *mit:*

(i) $|C_N(X')| = q$,
(ii) X *induziert eine natürliche Darstellung von* $GL_2(q)$ *auf* $N/C_N(X')$,
(iii) *es gibt kein* X*-invariantes Komplement zu* $C_N(X')$ *in* N.

(d) *Außer* N *enthält* S *genau eine elementar-abelsche Untergruppe* M *der Ordnung* q^3, *und* $M \cup N$ *enthält alle Involutionen von* S.

(e) *$Z(S)$ ist eine elementar-abelsche Gruppe der Ordnung q^2.*

(f) *Es gibt genau 3 Konjugiertenklassen von Involutionen in G. Der Zentralisator von Repräsentanten zweier dieser Konjugiertenklassen ist isomorph zu H'. Der Zentralisator einer Involution aus der dritten Konjugiertenklasse ist eine 2-Sylowgruppe von G.*

Beweis. Wegen [7, II.9.19] ist $\det(X) = 1$ für $X \in G$ und wegen $q = 2^n$ damit $Z(G) = 1$. Aus $q > 2$ und [7, II.9.22] folgt daher (a).

Nach [6, §2] kann man G als Menge der 4×4-Matrizen A über F_q mit $\det(A) = 1$ und $AJA^t = J$ auffassen, wobei A^t die zu A transponierte Matrix und

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Für eine 2-Sylowgruppe S erhält man dann Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 & 0 \\ u + vw & w & 1 & 0 \\ c & u & v & 1 \end{pmatrix}.$$

Ist eine derartige Matrix ein Quadrat in S, so ist $v = w = 0$. Daher ist sie genau dann eine Involution, wenn sie nicht die Einheitsmatrix und $w = 0$ oder $v = 0$ ist. Für Elemente aus N gilt insbesondere $w = 0$. Ferner besteht das Zentrum von S aus den Matrizen mit $v = w = 0$. Hieraus folgt (d) und (e).

Ist R die Menge der Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & 0 \quad 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 \quad 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

mit $A \in SL_2(q)$ und $a \in F_q^*$, so ist R isomorph zu $GL_2(q)$ und $H = RN$. Damit erhält man (c).

Die Matrizen mit $a = 1$ zentralisieren die Involutionen aus S mit $u = v = w = 0$. Ist Q die Menge der Matrizen

$$\begin{pmatrix} bB & 0 \\ 0 & b^{-1}B \end{pmatrix}$$

mit $B \in SL_2(q)$ und $b \in F_q^*$, so ist Q isomorph zu $GL_2(q)$. Ferner normalisiert Q die Menge der Matrizen aus S, für die $v = 0$ ist. Insbesondere ist $K = QM$ isomorph zu H, und die Matrizen mit $b = 1$ zentralisieren die Involutionen aus S mit $c = v = w = 0$, während S der Zentralisator der Elemente mit $w = v = 0$

und $u \neq 0 \neq c$ ist. Da die Involutionen aus N bzw. M, die in G konjugiert sind schon in H bzw. K konjugiert sind und $N \cap M = Z(S)$ ist, folgt auch (f).

(2.10) *Sei* $|G:G'| = 2$, $Z(G) = 1$, $D = \{x \in G \mid x^2 = 1 \neq x$ *und* $O_2(C_G(x)) \in \mathrm{Syl}_2(G)\} \neq \emptyset$ *und* G' *eine der im Satz erwähnten einfachen Gruppen. Dann ist* G' *isomorph zu* $L_2(2^{2n})$, $S_4(2^n)$, $L_3(4)$, $L_3(16)$ *oder* $L_2(2^{2n} \pm 1)$. *Ist* G' *nicht isomorph zu* $L_2(9)$, *so gibt es eine Involution in* $G \setminus G'$. *Ist t eine Involution aus* $G \setminus G'$, *so ist* $C_{G'}(t)$ *isomorph zu*

(a) $L_2(2^n)$ *für* $G' \cong L_2(2^{2n})$,
(b) $L_3(2)$, $L_2(4)$ *oder* $U_3(2)$ *für* $G' \cong L_3(4)$,
(c) $U_3(4)$ *für* $G' \cong L_3(16)$,
(d) $S_4(2^n)$ *für* $G' \cong S_4(2^{2n})$
(e) $Sz(2^{2n+1})$ *für* $G' \cong S_4(2^{2n+1})$
(f) *einer Diedergruppe der Ordnung* $q \pm 1$ *für* $G' \cong L_2(q)$ *mit* $q = 2^n \pm 1$ *und* $G \not\cong \Sigma_6$
(g) Σ_4 *für* $G \cong \Sigma_6$

In den Fällen (a)–(f) *sind außerdem alle Involutionen aus* $G \setminus G'$ *zu t konjugiert.*

Beweis. Sei $S \in \mathrm{Syl}_2\,(G')$ und L ein Komplement zu S in $N_{G'}(S)$.

Ist G' isomorph zu $L_2(2^n)$ bzw. $Sz(2^n)$, so folgt die Behauptung aus [7, II.8.7] bzw. [18]. Ist G' isomorph zu $U_3(2^n)$, so ist wegen [12] $C_S(L) = 1$, woraus die Existenz einer Involution $t \in G \setminus G'$ folgt, und wegen [16, 2.1] ist $C_{G'}(t)$ isomorph zu $L_2(2^n)$. Nun erhält man aber wegen [12] in $C_{G'}(d)$ für $d \in C_D(t)$ eine Untergruppe R ungerader Ordnung mit $[t, R] \neq 1$, was $d \in D$ widerspricht. Für eine Primzahlpotenz $q = 2^n \pm 1$ ist q eine Primzahl oder $q = 9$ (s.z.B. [17, Lemma 3]. Ist q eine Primzahl, so ist G isomorph zu $PGL_2(q)$. Für $q = 9$ ist G isomorph zu $PGL_2(9)$ oder Σ_6, oder es gibt außerhalb von G' keine Involutionen, woraus auch in diesem Fall die Behauptung folgt.

Sei nun G' isomorph zu $S_4(q)$ mit $q = 2^n > 2$. Wegen (2.9) (d) ist dann $S = MN$, wobei M und N die einzigen elementar-abelschen Untergruppen maximaler Ordnung von S sind, und wegen (2.9) (c) $C_S(L) = 1$, woraus die Existenz einer Involution $t \in G \setminus G'$ mit $t \in N_G(S)$ folgt. Gibt es einen äußeren Automorphismus s von G' mit $[s, H] \leq M$ oder $[s, K] \leq N$ für $H = N_{G'}(M')$ und $K = N_{G'}(N)'$, so kann man s so wählen, daß $C_{Z(S) \cap D}(s) \neq \emptyset$ ist, und es folgt mit (2.9) (c) $[s, M] = [s, N] = [s, S] = [s, H] = [s, K] = 1$, was wegen $\langle H, K\rangle = G'$ nicht sein kann. Für $t \in N_G(M) \cap N_G(N)$ induziert daher t einen Körperautomorphismus auf den wegen (2.9) (c) zu $L_2(q)$ isomorphen Gruppen H/M und K/N, und n ist gerade. Außerdem ist $\langle s\rangle G' = \langle t\rangle G'$ für einen involutorischen Körperautomorphismus s von G. Aus $C_M(L_1) = 1$ für $L_1 = L \cap O_{2,2'}(N_G(M))$ folgt nun

$$s^G \cap \langle s\rangle L_1 M = t^G \cap \langle s\rangle L_1 M,$$

und s und t sind konjugiert. Angenommen, es gibt außer dem involutorischen Körperautomorphismus s einen involutorischen Automorphismus r von G' mit $M^r = N$. Dann lassen sich r und s so auswählen, daß $rs = sr$ gilt. Da r die beiden Konjugiertenklassen von G', deren Zentralisatoren isomorph zu H sind, vertauscht, zentralisiert r in G' nur Involutionen aus D und $C_S(r)$ ist eine TI-Gruppe in $C_{G'}(r)$. Da $C_{G'}(s)$ von r normalisiert wird und $C_{G'}(s)$ isomorph zu $S_4(q^{1/2})$ ist, normalisiert r nach Induktion über q mehr als eine 2-Sylowgruppe von G, weshalb $C_{G'}(r)$ wegen [13] nur isomorph zu $L_2(q)$, $Sz(q)$ oder $U_3(q)$ sein kann. Nach Induktion ist aber $C_{C_{G'}(s)}(r)$ isomorph zu $Sz(q^{1/2})$, weshalb $\exp\,(C_S(r)) > 2$ und $C_{G'}(r)$ nicht nicht isomorph zu $L_2(q)$ ist. Wäre $C_{G'}(r)$ isomorph zu $U_3(q)$, so wäre $C_{G'}(x) \neq S$ für eine Involution $x \in C_S(r)$, was nicht sein kann. Schließlich kann $C_{G'}(r)$ auch nicht isomorph zu $Sz(q)$ sein, da n gerade ist. Angenommen, $M^t = N$. Dann ist also n ungerade, und es folgt ähnlich wie oben, daß $C_{G'}(t)$ isomorph zu $Sz(q)$ ist. Da jede Involution aus tS eine in LS zu L konjugierte Gruppe normalisiert, sind alle Involutionen von $G \setminus G'$ konjugiert. Nun folgt die Behauptung für $G' \cong S_4(2^n)$.

Sei schließlich G' isomorph zu $L_3(q)$ mit $q = 2^n > 2$. Wegen [10, §1] ist auch dann $S = MN$ mit elementar-abelschen Gruppen maximaler Ordnung von S, deren Vereinigung sämtliche Involutionen aus S enthält. Ferner ist D die einzige Konjugiertenklasse von Involutionen in G'. Sei t so ausgewählt, daß $t \in N_G(L) \cap N_G(S)$ gilt, und $Y = [t, L]$. Ist $Y \neq 1$, so ist $C_S(Y) = 1$. Nun ist L ein direktes Produkt einer zyklischen Gruppe der Ordnung $q - 1$ und einer zyklischen Gruppe der Ordnung $(q-1)(3, q-1)^{-1}$. Angenommen, $q > 4$. Ist $Y = 1$, so erhält man $[t, N_{G'}(M)'] \leq M$ und $[t, N_{G'}(N)'] \leq N$ und damit wie oben einen Widerspruch. Daher ist $Y \neq 1$. Ist $t \in N_G(M) \cap N_G(N)$, so induziert t Körperautomorphismen auf den wegen [10, Proposition 3] zu $L_2(q)$ isomorphen Gruppen $N_{G'}(M)'/M$ und $N_{G'}(N)'/N$, woraus sogar $|Y| > 3$ folgt. Aus

$$O_{2,2'}(N_G(M)) \cap O_{2,2'}(N_G(N)) \cap L = 1$$

folgt dann aber ein Widerspruch. Daher ist $M^t = N$ und $C_S(t)$ eine TI-Gruppe von $C_{G'}(t)$. Ähnlich wie oben folgt, daß dann $C_{G'}(t)$ nur isomorph zu $U_3(q^{1/2})$ sein kann. Daher ist

$$|C_{C_{L}(t)}(Z(S))| = (q^{1/2} + 1)(3, q^{1/2} + 1)^{-1}.$$

Aus $|C_L(Z(S))| = (q-1)(3, q-1)^{-1}$ und $[t, C_L(Z(S))] = 1$ folgt nun $q = 16$. Ist $q = 4$, so ist $C_G(x)$ für $x \in D$ eine 2-Gruppe, und es können sämtliche involutorischen Autormorphismen von $G' \cong L_3(4)$ induziert werden. Damit folgt die Behauptung auch für $G' \cong L_3(2^n)$ sowie (2.10).

Section 3

In diesem Abschnitt sei V ein endlicher $F_2 G$-Modul. Für $X \subseteq G$ und einen X-invarianten Faktormodul Y/Z sei dann

$$[Y/Z, X] = \langle y + y^x + Z/Z \mid x \in X, y \in Y \rangle.$$

Ferner sei

$W = \{A \leq G \mid A$ ist elementar-abelsche 2-Gruppe mit $1 \neq |V : C_V(A)| \leq |A|\}$

und $W^* = \{A \in W \mid A$ ist minimal (bzgl. Inklusion)$\}$. Dann folgt $[[V, A], A] = 0$ für $A \in W^*$ entsprechend wie in [5] auf S. 272 f. Schließlich seien die folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) $O_2(G) = 1$,
(b) es gibt ein $v \in V$ mit $O_2(C_G(v)) \in \mathrm{Syl}_2\,(G)$,
(c) $W \neq \emptyset$,
(d) $C_V(\langle W \rangle) = 0$.

Mit diesen Bezeichnungen und Voraussetzungen gilt:

(i) *$\langle W \rangle$ ist ein direktes Produkt von zu $L_2(2^{n_i})$ isomorphen Gruppen.*

(ii) *Ist $\langle W \rangle = XE_i$, wobei E_i isomorph zu $L_2(2^{n_i})$ ist, so gilt $V = \bigoplus_i [V, E_i]$, und $[V, E_i]$ läßt sich als zweidimensionaler $F_{2^{n_i}}E_i$-Modul auffassen, auf dem E_i dessen spezielle Gruppe induziert.*

Der Beweis hiervon erfolgt in mehreren Schritten. Dazu sei G ein minimales Gegenbeispiel. Eine Untergruppe H von G erfülle die Eigenschaft (*), falls H isomorph zu $L_2(|H|_2)$ ist und $V/C_V(H)$ sich als zweidimensionaler $F_{|H|_2}$ H-Modul auffassen läßt, auf dem H dessen spezielle Gruppe induziert (d.h. H induziert eine natürliche Darstellung von $L_2(|H|_2)$ auf $V/C_V(H)$).

(3.1) *Erfüllt die Untergruppe H von G die Eigenschaft* (*), *so gilt* $\mathrm{Syl}_2\,(H) \subseteq W^*$.

Beweis. Aus (b) folgt $v^G \cap C_V(H) = \emptyset$ und die Existenz von $w \in v^G$ mit $w \in C_V(T)$ für $T \in \mathrm{Syl}_2\,(H)$. Aus der natürlichen Darstellung von H auf $V/C_V(H)$ erhält man $|V : \langle w^{N_H(T)} \rangle C_V(H)| = |H|_2$ und (3.1).

(3.2) (Glauberman) *Gibt es ein $A \in W$ und eine maximale Untergruppe M von G mit $\langle A, g \rangle = G$ für $g \in G \setminus M$, so erfüllt G die Eigenschaft* (*).

Beweis. S. [3, Corollary 1].

(3.3) *$|C_G(V)|$ ist ungerade.*

Beweis. Wäre $|C_G(V)|$ gerade, so wäre wegen (b)

$$1 \neq O_2(C_G(V)) \in \mathrm{Syl}_2\,(C_G(V))$$

im Widerspruch zu (a).

(3.4) *Sei $U \leq G$, $\bar{V} = V/C_V(U)$, $L \subseteq W \cap U$ und $w \in V$ mit $L^U = L$, $L \cap O_2(U) = \emptyset$, $P = O_2(C_U(w)) \in \mathrm{Syl}_2\,(U)$ sowie $\bar{w}^{\langle A,B \rangle} = \bar{w}^U$, sofern $A, B \in L$*

und $\langle A, B\rangle$ *keine 2-Gruppe ist. Dann gilt:*

(1) $P \cap L$ *ist eine TI-Menge bezüglich* U.
(2) *Ist* $\bar{V} = \langle \bar{w}^U\rangle$, *erfüllt* $H = \langle A, B\rangle$ *mit* $A, B \in L$ *die Eigenschaft* (*) *und ist* $C_V(H) = C_V(U)$ *oder* A *eine TI-Gruppe von* U, *so ist* $\langle L\rangle = H$.

Beweis. (1) Sei $R = P \cap L$. Wegen $O_2(U) \cap L = \emptyset$ gibt es ein $u \in U \setminus N_U(R)$, das so ausgewählt sei, daß $n = |R \cap R^u|$ maximal ist. Dann folgt aus $R \neq R \cap R^u \neq R^u$ und (2.6) die Existenz von

$$X \in N_R(R \cap R^u) \setminus (R \cap R^u) \quad \text{und} \quad Y \in N_{R^u}(R \cap R^u) \setminus (R \cap R^u).$$

Wäre $\langle X, Y\rangle$ eine 2-Gruppe, so wäre nach Sylows Satz $\langle X, Y, R \cap R^g\rangle$ eine 2-Gruppe, was der Maximalität von n widerspricht. Daher ist $\langle X, Y\rangle$ keine 2-Gruppe, nach Voraussetzung also $\bar{w}^{\langle X,Y\rangle} = \bar{w}^U$. Da $\langle R \cap R^u\rangle$ eine 2-Gruppe ist, kann man nun w so wählen, daß $[w, R \cap R^u] = 0$ gilt. Aus X, $Y \in N_R(R \cap R^u)$ folgt dann $[w^{\langle X,Y\rangle}, R \cap R^u] = 0$ und damit

$$[w^U, \langle (R \cap R^u)^U\rangle] = [w^U, R \cap R^u] = 0,$$

wegen $O_2(C_U(w)) \in \mathrm{Syl}_2\,(U)$ also $R \cap R^u \subseteq 0_2(U) \cap L = \emptyset$.

(2) Sei $A \leq P$ und $R = \langle L \cap P\rangle$. Wegen $\bar{w}^U = \bar{w}^H$ ist $U = HC_U(\bar{w})$. Ist $u \in U$ mit $\bar{w}^u \in C_{\bar{V}}(A)$, so ist $A \in L \cap P^u$. Da $P \cap L$ wegen (1) eine TI-Menge ist, gilt daher $R = R^u \leq C_G(\bar{w}^u)$. Also ist

$$\Delta = \bar{w}^U \cap C_{\bar{V}}(A) = \bar{w}^U \cap C_{\bar{V}}(R),$$

und wegen $R^u \cap P = R$ ist Δ eine TI-Menge bezüglich U. Sei $\Gamma = \Delta^U$. Wegen $U = HC_U(\bar{w})$, der 2-Abgeschlossenheit von $C_U(\bar{w})$ und der Treue von H auf Γ gilt $O_2(U) \leq U_\Gamma \leq O_{2,2'}(U)$, wobei U_Γ der Kern von U auf Γ ist. Aus $V = \langle w^U, C_V(U)\rangle$ folgt $O_2(U) \leq C_U(V)$, wegen (3.3) also $O_2(U) = 1$. Daher ist $U_\Gamma \leq O_{2'}(U)$. Da A regulär auf $\Gamma \setminus \{\Delta\}$ operiert, erhält man $C_P(A) = A$. Mit 2.5 folgt dann $R = A$, falls A eine TI-Gruppe ist. Für $C_V(H) = C_V(U)$ ist $C_V(A) = C_V(R)$ und $v^A = v^R$ für $v \in \bar{V} \setminus \Delta$. Hieraus erhält man $|R : R \cap U_\Gamma| = |A|$ und damit erneut $R = A$. Wegen $\Delta^U = \Delta^H$ und $A = A^U \cap N_U(\Delta)$ ist $L = A^U = A^H$ sowie $\langle L\rangle = H$.

(3.5) *Ist* $\langle A, B\rangle$ *eine 2-Gruppe oder* $\langle A, B\rangle = G$ *für* $A, B \in W^*$, *so erfüllt* G *die Eigenschaft* (*).

Beweis. Für $S \in \mathrm{Syl}_2\,(G)$ ist $R = S \cap W^*$ nach Voraussetzung wegen (3.4) eine TI-Menge. Daher ist $\langle X, X^g\rangle$ für $X \in R$ und $g \in G \setminus N_G(R)$ niemals eine 2-Gruppe, also $\langle X, X^g\rangle = G$. Mit (3.2) erhält man nun (3.5).

(3.6) *Für* A, $B \in W^*$ *ist* $\langle A, B\rangle$ *eine 2-Gruppe oder* $\langle A, B\rangle$ *erfüllt die Eigenschaft* (*).

Beweis. Ist (3.6) falsch, so lassen sich wegen (3.5) A, $B \in W^*$ finden, so daß $\langle A, B\rangle$ weder eine 2-Gruppe noch $\langle A, B\rangle = G$ ist. Sei $H = \langle A, B\rangle$.

(3.6.1) *Sei $M = C_V(O_2(H))$. Dann gilt*

$$|A:A \cap O_2(H)| \geq |M:C_M(A)|.$$

Beweis. Sei $X = A \cap O_2(H)$. Angenommen, (3.6.1) ist falsch. Ist $X = 1$, so ist dann $|A| < |M:C_M(A)| \leq |V:C_V(A)|$ im Widerspruch zu $A \in W$. Daher ist $X \neq 1$, und aus der Minimalität von $A \in W^*$ folgt $|X| < |V:C_V(X)|$. Wegen $M \leq C_V(X)$ ist außerdem

$$|A:X| < |M:C_M(A)| \leq |C_V(X):C_V(A)|,$$

insgesamt also

$$|A| = |A:X|\,|X| < |C_V(X):C_V(A)|\,|V:C_V(X)| = |V:C_V(A)| \leq |A|,$$

was nicht sein kann.

(3.6.2) *H erfüllt die Eigenschaft* (*).

Beweis. Sei $M = C_V(O_2(H))$. Dann ist $M/C_M(O^2(H))$ ein

$$F_2(H/O_2(H))\text{-Modul},$$

für den wegen (3.6.1) die Voraussetzungen (a)–(d) sinngemäß zutreffen. Nach Induktion und wegen $A, B \in W^*$ ist $H/O_2(H)$ isomorph zu $L_2(r)$ mit $r = |A:X|$ und $X = A \cap O_2(H)$. Außerdem läßt sich $M/C_V(H)$ als zweidimensionaler $F_r(H/O_2(H))$-Modul auffassen, woraus $|M:C_M(A)| = r$ und $|M:C_V(H)| = r^2$ folgt. Die Minimalität von $A \in W^*$ besagt dann $X = 1$ sowie $|V:C_V(A)| = r$ und

$$r^2 = |M:C_V(H)| \leq |V:C_V(H)| = |V:C_V(A) \cap C_V(B)| \leq r^2,$$

also $M = V$ und $[V, O_2(H)] = 0$, woraus mit (3.3) $O_2(H) = 1$ und (3.6.2) folgt.

(3.6.3) $C_V(G) < C_V(H)$.

Beweis. Ist $C_V(G) = C_V(H)$, so folgt aus (3.4) (2) für $U = G$ und $L = W^*$ dann $\langle W^* \rangle = H$, was nicht sein kann.

(3.6.4) Sind $X, Y \in W^*$, so folgt

$$|V:C_V(\langle X, Y \rangle)| \leq |A|^2 < |V:C_V(G)|$$

aus (3.6.2) und (3.6.3). Dann ist aber $\langle X, Y \rangle$ eine echte Untergruppe von G, und (3.6) folgt aus (3.6.2).

(3.7) *Sei $A, B, C \in W^*$. Erfüllen $\langle A, B \rangle$ und $\langle A, C \rangle$ die Eigenschaft* (*), *so gilt $\langle A, B \rangle = \langle A, C \rangle$.*

Beweis. Angenommen, (3.7) ist falsch. Seien A, B und C so gewählt, daß $U = \langle A, B, C \rangle$ minimal ist. Ferner sei $H = \langle A, B \rangle$ und $A \leq P \in \mathrm{Syl}_2\,(U)$

sowie $M = V/C_V(U)$, $m = v + C_V(U) \subseteq C_V(P)$ und $N_H(A) = AK$ mit einer Gruppe K der Ordnung $q - 1 = |A| - 1$.

(3.7.1) *M ist ein $F_2 U$-Modul mit $q^2 < |M| \leq q^3$.*

Beweis. Ist $C_V(U) = C_V(H)$, so ist wegen (3.4) $U = H$, was nicht sein kann. Daher ist $q^2 < |M|$. Wegen $|V : C_V(A)| = q$ ist

$$|V : C_V(A) \cap C_V(B) \cap C_V(C)| \leq q^3$$

und aus $U = \langle A, B, C \rangle$ folgt dann $|V : C_V(U)| \leq q^3$.

(3.7.2) $q > 2$.

Beweis. Angenommen, $q = 2$. Wegen (3.7.1) ist dann $|M| = 8$, und U ist isomorph zu einer Untergruppe von $L_3(2)$, also isomorph zu Σ_4 oder $L_3(2)$. Ist U isomorph zu $L_3(2)$, so ist $C_U(v)$ isomorph zu Σ_4 im Widerspruch zu (b). Daher ist U isomorph zu Σ_4. Dann ist aber $[v^G, O_2(U)] = 0$, wegen (b) also $O_2(U) \leq O_2(G)$ im Widerspruch zu (a).

(3.7.3) *A ist eine TI-Gruppe von U.*

Beweis. Angenommen, es gibt ein $u \in U$ mit $A \neq A \cap A^u \neq 1$. Dann ist $\langle A \cap A^u, B \rangle = H \neq \langle A^u, B \rangle$ im Widerspruch zu (3.6).

(3.7.4) *Es gibt ein $X \in A^U$ mit $[X, A] = 1 = X \cap A$.*

Beweis. Sei $X \in A^U$ mit $X \not\leq H$. Aus $M = \bigcup_{h \in H} C_M(A)^h$ folgt die Existenz von $Y \in A^H$ mit $C_{m^U}(Y) \cap C_{m^U}(X) \neq \emptyset$. Wegen (b) ist dann $\langle X, Y \rangle$ eine 2-Gruppe, woraus (3.7.4) mit Hilfe von (3.7.3) und (2.6) folgt.

(3.7.5) $[C_M(A), K] = O \cup C_{m^U}(A)$.

Beweis. Wegen (3.7.4) gibt es ein $X \in A^U$ mit $[X, A] = 1 = X \cap A$. Gibt es ein $x \in X^\#$ mit $C_M(H) \cap C_M(H)^x \neq 0$, so folgt $X \leq N_G(H)$ aus der Minimalität von U und dann $[X, H] = 1$ aus (3.6). O.B. d.A. kann man $[m, X] = 0$ annehmen. Aus $[M, H] \leq \langle m^H \rangle$ erhält man dann $[M, H] \leq C_M(X)$. Außerdem ist $C_{C_M(H)}(X) \neq 0$. Damit ist $|C_M(X)| > q^2$. Wegen (3.7.1) ist aber $|M| \leq q^3$, also $|M : C_M(A)| < q$ im Widerspruch zu (3.6). Es gilt also $C_M(H) \cap C_M(H)^x = 0$ für $x \in X^\#$.

Nun ist $|C_M(A)| = rq$ mit $r = |C_M(H)| \leq q$. Aus (b) folgt ferner $m^U \cap C_M(H) = \emptyset$ also $m^U \cap (\bigcup_{x \in X} C_M(H)^x) = \emptyset$. Wegen

$$\left| C_M(A) \setminus \bigcup_{x \in X} C_M(H)^x \right| = rq - 1 - q(r - 1) = q - 1$$

ist $|C_{m^U}(A)| = q - 1$ und $q \leq |\langle m^K \rangle| \leq 2q$. Ist $|\langle m^K \rangle| = 2q$, so ist

$$m[C_M(A), K] \setminus m^U \subseteq C_M(X),$$

was nicht sein kann.

(3.7.6) $m^H = m^U$.

Beweis. Sei $L = [C_M(A), K]$, $y \in L^{\#}$ und $r = |C_M(H)|$. Dann ist $|y^H| = q^2 - 1$ und wegen (3.7.5) gilt $y^H \subseteq m^U$ und $m^U \cap (C_M(A) \setminus L) = \emptyset$, also

$$\left|\bigcup_{h \in H} (C_M(A) \setminus (C_M(H) \cup L))^h\right| = (qr - q - r + 1)(q + 1)$$

$$= q^2 r - q^2 + 1 - r$$

$$= |M| - |y^H| - |C_M(H)|$$

und (3.7.6).

(3.7.7) Wegen (3.7.3), (3.7.6) und (3.4) ist $U = H$, was ein Widerspruch ist.

(3.8) *H erfülle die Eigenschaft* (*), *und es sei $X \in W^*$ mit $X \nleq H$. Dann gilt* $[H, X] = 1$.

Beweis. Wegen (3.6) und (3.7) ist $\langle Y, X \rangle$ eine 2-Gruppe für alle $Y \in W^* \cap H$. Sei $A, B \in W^*$ mit $\langle A, B \rangle = H$ und $A \leq P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ sowie $X \leq P$. Insbesondere ist dann $N_G(A) \leq N_G(H)$. Sei $A \leq R = \langle R \cap W^* \rangle \leq P$, so daß R abelsch und maximal mit diesen Eigenschaften ist. Dann gilt also $R \leq C_G(A) \leq N_G(H)$.

Gilt $X \leq N_G(A)$, so folgt $[X, H] = 1$ aus der Struktur von Aut H, da $\langle X, Y \rangle$ für $Y \in H \cap W^*$ eine 2-Gruppe ist. Daher kann man $X \nleq N_G(A)$ also $X \nleq R$ annehmen. Wegen 2.6 läßt sich $X \leq N_G(R)$ wählen. Für $x \in X \quad N_X(A)$ ist dann $[A^x, H] = 1$, also $[Y, H^x] = 1$ für $Y \in H \cap W^*$ und $[H, H^x] = 1$. Insbesondere ist $\langle X^H \rangle$ keine 2-Gruppe. Aus $X \nleq \langle X, H \rangle'$ und (3.6) folgt dann $|X| = 2$, und H ist isomorph zu $L_2(2)$. Da H die Eigenschaft (*) erfüllt, operiert H irreduzibel auf $V/C_V(H)$, woraus $[V, H, H^x] = 0$ sowie $[V, H] \cap [V, H]^x \leq C_V(H)$ folgt. Dann ist aber

$$2 = |X| \geq |V : C_V(X)| \geq |[V, H]/C_{[V,H]}(X)| \geq |[V, H] : C_{[V,H]}(H)| = 4.$$

Dieser Widerspruch ergab sich aus $X \nleq N_G(A)$, woraus (3.8) folgt.

(3.9) Aus (3.6) und (3.8) folgt die Behauptung für W^* an Stelle von W. Zu zeigen ist noch $\langle W \rangle \leq \langle W^* \rangle$. Dazu sei $X \in W$ und $\langle W^* \rangle = \times_i E_i$ wobei E_i isomorph zu $L_2(2^{n_i})$ ist. Ist $X \cap E_i \in \mathrm{Syl}_2(E_i)$, so erhält man $|X : C_X(E_i)| = 2^{n_i}$ und $C_X(E_i) \in W$. Ist $X \nleq \langle W^* \rangle$, so kann man also $|X \cap E_i| < 2^{n_i}$ für alle i annehmen. Dann gibt es aber kein $Y \leq X$ mit $Y \in W^*$, was nicht sein kann.

Section 4

In Section 4–6 sei G ein minimales Gegenbeispiel zum Satz und $D = \{x \in G \mid x^2 = 1 \neq x,\ O_2(C_G(x)) \in \mathrm{Syl}_2(G)\}$. Dann ist $D \neq \emptyset$. Wie bereits erwähnt, wird der Satz nur unter der folgenden Annahme (4.1) bewiesen.

(4.1) *$C_G(O_2(M)) \leq O_2(M)$ für jede 2-lokale Untergruppe $M < G$.*

(4.2) *G' ist eine nichtauflösbare einfache Gruppe, und es gilt $G = G'$ für $D \cap G' \neq \emptyset$ und $|G:G'| = 2$ für $D \cap G' = \emptyset$.*

Beweis. Nach Voraussetzung des Satzes besitzt G keinen nichttrivialen auflösbaren Normalteiler. Ist N das Produkt aller minimalen Normalteiler von G, so ist daher N ein direktes Produkt von nichtauflösbaren einfachen Gruppen (gerader Ordnung). Für einen solchen einfachen direkten Faktor E von N und $d \in D$ muß dann $E^d = E$ gelten, da andernfalls $C_{EE^d}(d)$ nicht 2-abgeschlossen wäre. Ist $\langle d\rangle E$ eine echte Untergruppe von G, so ist E nach Induktion bekannt. Aus (2.10) folgt dann, daß d einen inneren Automorphismus auf E induziert. Daher gilt $d \in N$, und wegen (2.9) (f) ist D eine Konjugiertenklasse von N, also $G = NC_G(d)$. Da $C_G(d)$ 2-abgeschlossen ist, erhält man die Aussage des Satzes, und G ist kein Gegenbeispiel. Also gilt $\langle d\rangle E = G$ und (4.2).

(4.3) *Sei U eine 2-lokale Untergruppe von G, $S \in \mathrm{Syl}_2\,(U)$ mit*

$$J(S) \not\leq O_2(U), \quad W = \langle C_S(\Omega_1(Z(J(S))))^U\rangle \quad \textit{und} \quad Z = \Omega_1(Z(O_2(W))).$$

Dann gilt:

(a) *$W/O_2(W)$ ist isomorph zu $\times_i L_2(2^{n_i})$.*
(b) *Ist $W/O_2(W) = \ {}_i\, E_i$, wobei E_i isomorph zu $L_2(2^{n_i})$ ist, so gilt*

$$Z/\Omega_1(Z(W)) = \underset{i}{\times}\ [Z, E_i]\Omega_1(Z(W))/\Omega_1(Z(W)),$$

und E_i induziert eine natürliche Darstellung auf $[Z, E_i]\Omega_1(Z(W))/\Omega_1(Z(W))$.
(c) *$Z = \bigcup_{w \in W} \Omega_1(Z(J(S)))^w$.*
(d) *$C_S(\Omega_1(Z(J(S)))) \in \mathrm{Syl}_2\,(W)$.*
(e) *$U = WN_U(\Omega_1(Z(J(S))))$.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein $A \in A(S) \setminus A(O_2(W))$. Daher ist

$$R = \{A \leq W \mid AO_2(W)/O_2(W) \text{ ist elementar-abelsche 2-Gruppe mit}$$
$$1 \neq |Z:C_Z(A)| \leq |AO_2(U)/O_2(U)|\} \neq \emptyset.$$

Damit sind für $W/O_2(W)$ und $Z/Z \cap N$, wobei N das Hyperzentrum von $\langle R\rangle$ ist, die Voraussetzungen von Section 3 erfüllt, und man erhält (a) und (b).

Aus (a) folgt die Existenz von $P_1 = C_S(\Omega_1(Z(J(S))))$ und $P_2 \in P_1^W$ mit $W = \langle P_1, P_2\rangle$. Sei $Z_i = \Omega_1(Z(P_i))$ und $\hat{Z} = Z_1 Z_2$ sowie $A \in A(P_1) \setminus A(O_2(W))$ mit $AO_2(W) \in \mathrm{Syl}_2\,(W)$. Wegen (b) gilt dann $Z \leq \hat{Z}$. Außerdem ist

$$(A \cap O_2(W))Z = (A \cap O_2(W))\hat{Z} \in A(P_1) \cap A(P_2) = A(O_2(W)).$$

Insbesondere ist $|Z:Z \cap Z(W)| = |\hat{Z}:Z_1 \cap Z_2| = \prod_i 2^{2n_i}$. Aus $Z_1 \cap Z_2 \leq Z \cap Z(W)$ folgt dann $Z = \hat{Z}$ sowie (d). Aus (b) folgt weiterhin

$\langle Z_1^{E_i}\rangle \subseteq \bigcup_{e \in E_i} Z_1^e$, woraus auch (c) folgt. Wegen $Z_1 \cap D \neq \emptyset$ ist schließlich $P_1 \leq O_2(N_U(Z_1))$, woraus mit dem Frattini-Argument auch (e) folgt.

(4.4) *Sei U eine 2-lokale Untergruppe von G und $P = C_S(\Omega_1(Z(J(S))))$ für eine 2-Sylowgruppe S von U. Ist E eine Untergruppe von U mit $E = \langle P^E\rangle$ und $J(S) \nleq O_2(E)$ so ist $O^2(E)$ ein Normalteiler von $\langle P^U\rangle$.*

Beweis. Sei $H = \langle P^U\rangle$ und $\bar{H} = H/O_2(U)$. Wegen (4.3) ist dann $\bar{H}$ ein direktes Produkt von 2-dimensionlen Gruppen. Seien $E_1, \ldots, E_n$ die maximalen Urbilder dieser direkten Faktoren von $\bar{H}$. Wegen $\bar{P} \in \mathrm{Syl}_2(\bar{H}) \cap \mathrm{Syl}_2(\bar{E})$ erhält man nach eventuellem Umnumerieren $\bar{E} \cap \bar{E}_j = \bar{E}_j \cap P$ für $j = m+1, \ldots, n$ und $\bar{E} \cap \bar{E}_j = \bar{E}_j$ für $j = 1, \ldots, m$. Daher ist $O^2(\bar{E}) = O^2(\bar{F})$ mit $F = \prod_1^m E_j$ und damit $O^2(F) = O^2(E)$. Da F ein Normalteiler von H ist, ist $O^2(E)$ ein Normalteiler von H.

Section 5

Sei S eine 2-Sylowgruppe von G, $Z = \Omega_1(Z(J(S)))$ und $P = C_S(Z)$. In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß P in genau einer maximalen 2-lokalen Untergruppe enthalten ist. Um einen Widerspruch zu erhalten, wird also angenommen, daß es verschiedene maximale 2-lokale Untergruppen U und H von G mit $P \leq U \cap H$ gibt. Ist $J(S) \leq O_2(U)$, so ist wegen $D \cap Z \neq \emptyset$ auch $P \leq O_2(U)$, also $U = N_G(P)$. Daher gibt es ein $u \in U \setminus H$ mit $P \leq H \cap H^u \neq H$. Da dann außerdem $U = N_G(J(S))$ gilt, ist $O_2(H) \ngeq J(S) \nleq O_2(H^u)$. Indem man gegebenenfalls H^u durch U ersetzt, kann man also annehmen, daß $O_2(H) \ngeq J(S) \nleq O_2(U)$ gilt. Außerdem seien U und H möglichst so ausgewählt, daß U und H in G konjugiert sind. Ist dies dann nicht der Fall, so gilt offenbar $N_G(P) \leq U \cap H$. Für $X \in U^G \cup H^G$ sei $X_0 = \langle P^X\rangle$, $X_1 = O_2(X_0)$, $X_2 = \Omega_1(Z(X_1))$, $X_3 = \Omega_1(Z(X_0))$, $X_4 = [X_0, X_2]$ und $\tilde{x} = |X_0/X_1|_2$.

(5.1) *U_0/U_1* bzw. *H_0/H_1 ist isomorph zu $L_2(\tilde{u})$* bzw. *$L_2(\tilde{h})$ und induziert eine natürliche Darstellung auf U_2/U_3* bzw. *H_2/H_3.*

Beweis. Wegen (4.3) ist $U_0 = \prod_{i=1}^m E_i$ und $H_0 = \prod_{i=1}^n F_i$, wobei E_i/U_1 bzw. F_i/H_1 eine 2-dimensionale lineare Gruppe mit $[E_i, E_j] \leq U_1$ bzw. $[F_i, F_j] \leq H_1$ für $i \neq j$ ist und eine natürliche Darstellung auf $U_2/C_{U_2}(E_i)$ bzw. $H_2/C_{H_2}(E_i)$ induziert. Insbesondere ist $C_{U_2}(P) = C_{H_2}(P) = Z$. Angenommen, $m > 1$. Sei

$$E \in \{E_1, \ldots, E_m\} \quad \text{und} \quad F \in \{F_1, \ldots, F_n\}.$$

Ist $L = C_Z(E) \cap C_Z(F) \neq 1$, so ist $\langle P, E, F\rangle \leq C_G(L) \leq G$. Anwendung von (4.4) ergibt dann zunächst $F \leq N_G(O^2(E)) \geq U_0$, anschließend $U_0 \leq N_G(O^2(F)) \geq H_0$ und endlich $U_0 \leq N_G(O^2(H_0)) = H$ sowie $H_0 \leq U$. Aus $U_0 = \langle P^{U_0}\rangle \leq H_0 = \langle P^{H_0}\rangle \leq U_0$ folgt $U_0 = H_0$ und $U = H$, was nach Voraussetzung nicht sein kann. Daher ist $L = 1$.

Sind U und H in G konjugiert, so folgt bei minimaler Wahl von $|E/U_1|_2 = |F/H_1|_2$ und aus $L = 1$ dann

$$|Z|/|E/U_1|_2 = |C_Z(E)| = |C_Z(F)| = \sqrt{|Z|}$$

und damit $n = m = 2$. Dann ist $Z \cap D = Z \setminus (C_Z(E_1) \cup C_Z(E_2))$ und für $\{E_1, E_2\} = \{E, X\}$ muß $C_Z(F) = C_Z(X)$ gelten, was nicht sein kann. Daher ist in diesem Fall $n = m = 1$.

Angenommen, U und H sind in G nicht konjugiert, also $N_G(P) \leq U \cap H$. Ist $n, m \geq 2$, so folgt wie oben $n = m = 2$ und ein entsprechender Widerspruch. Daher ist $n = 1$ und H_0/H_1 isomorph zu $L_2(2^t)$. Ist dann $t = 1$, so ist $|Z : C_Z(H_0)| = 2$ und wegen $L = 1$ damit $|Z| = 4$ sowie $H_3^{\#} \subseteq D$, was nicht sein kann. Daher ist $t > 1$ und $N_{H_0}(P) = PK$ mit einer zyklischen Gruppe K der Ordnung $2^t - 1 > 1$. Ist U_0/U_1 ein direktes Produkt von zu $L_2(2)$ isomorphen Gruppen, so ist $|[P, Z_2]| = 2^m$ und $z \in C_Z(K)$ für $z = z_1 \cdots z_m$ und $\langle z_i \rangle = [E_i, U_2] \cap Z$, wegen $C_Z(K) \leq C_{H_2}(K) = H_3$ also $z \notin D$. Hieraus folgt $1 \neq U_3 \leq [K, Z]$ und aus $[K, Z]^{\#} = x^K$ für $x \in [K, Z]^{\#}$ dann $U_3 = [K, Z]$ sowie $[[P, U_2], K] = 1$, was wegen $L = 1$ nicht sein kann. Daher ist $N_{U_0}(P) = PR$ mit einer Gruppe $R \neq 1$ ungerader Ordnung. Aus

$$K, R \leq U \cap H \leq N_G(U_0) \cap N_G(H_0)$$

erhält man nun $[PR, PK] \leq PR \cap PK$. Ist $PR \cap PK > P$, so bekommt man wegen $C_Z(k) = H_3$ bzw. $C_Z(E_i)$ für $k \in K^{\#}$ bzw. $(E_i \cap R)^{\#}$ einen Widerspruch zu $L = 1$. Daher kann man K und R so wählen, daß $[R, K] = 1$ gilt. Ist $R \cap E_i \neq 1$, so ist $[R \cap E_i, Z] = [K, Z]$ und damit

$$[E_j, U_2] \cap Z \leq C_Z(K) \cap C_Z(E_i) \quad \text{für } j \neq i,$$

was nicht sein kann. Daher ist $n = m = 1$.

(5.2) *Genau dann ist $U_3 = 1$, wenn $H_3 = 1$ ist.*

Beweis. Ist $U_3 = 1$ so folgt $U_2^{\#} \subseteq D$ aus (5.1). Wegen $H_3 \cap D = \emptyset$ und $H_3 \leq Z \leq U_2$ erhält man daher (5.2).

(5.3) *U_3 und H_3 sind TI-Gruppen. Für $X \in \{U, H\}$ und $x \in X^{\#}$ gilt insbesondere $C_G(x) \leq X$.*

Beweis. Ist $X \in \{U, H\}$, $g \in G$ und $x \in (X_3 \cap X_3^g)^{\#}$, so ist, wegen (4.4), $\langle X_0^g \rangle \leq N_G(O^2(X_0))$. Aus $X = N_G(X_0)$ folgt $g \in X$.

(5.4) $[U_2, H_2] = 1$.

Der Beweis von (5.4) erfolgt in mehreren Schritten. Angenommen, $[U_2, H_2] \neq 1$.

(5.4.1) *$U_1 = U_2$, $H_1 = H_2$ und $\tilde{h} = \tilde{u}$. Ferner sind U_1 und H_1 die einzigen elementar-abelschen Untergruppen maximaler Ordnung von P, und sämtliche Involutionen aus P sind in $U_1 \cup H_1$ enthalten.*

Beweis. Aus $[U_2, H_2] \neq 1$ folgt $U_2 \nleq H_1$ und $H_2 \nleq U_2$. Wegen (5.1) gilt $C_P(X_2) = C_P(x) = X_1$ für $X \in \{U, H\}$ und $x \in X_2 \setminus Z$. Daher ist $U_2 \cap H_1 = Z = H_2 \cap U_1$. Mit $|U_2 : Z| = \tilde{u}$ und $|H_2 : Z| = \tilde{h}$ erhält man insbesondere $\tilde{h} = \tilde{u}$ sowie $U_1 = U_2(H_1 \cap U_1)$ und $H_1 = H_2(U_1 \cap H_1)$, wegen (2.7) daher $\Phi(U_1) = \Phi(U_1 \cap H_1) = \Phi(H_1) = 1$ und (5.4.1).

(5.4.2) $2 < \tilde{u}, \tilde{h}$.

Beweis. Ist $\tilde{u} = \tilde{h} = 2$, so sind wegen (5.1) U_0/U_1 und H_0/H_1 isomorph zu Σ_3 sowie U_2/U_3 und H_2/H_3 elementar-abelsche Gruppen der Ordnung 4. Dann ist $|Z : U_3| = |Z : H_3| = 2$, weshalb wegen $H_3 \cap U_3 = 1$ dann $|Z| \leq 4$, mit (5.2) also $|U_3| = |H_3| \leq 2$ folgt, und U_2 und H_2 sind elementar-abelsche Gruppen mit $|U_2| = |H_2| \leq 8$. Wegen (5.4.1) ist aber $U_1 = U_2$ sowie $H_1 = H_2$. Daher sind U_0 und H_0 entweder zu Σ_4 oder zu $\Sigma_4 \times \Sigma_2$ isomorph. Nun ist $Z = U_3 \cup H_3 \cup (Z \cap D)$, also $|\langle H_1 \cap D \rangle| = |\langle U_1 \cap D \rangle| = 4$ und $\langle P \cap D \rangle$ eine Diedergruppe der Ordnung 8. Daher sind in jedem Fall $\langle U_0 \cap D \rangle$ und $\langle H_0 \cap D \rangle$ isomorph zu Σ_4. Da Σ_4 keine äußeren Automorphismen zuläßt, ist somit $U_0 = U$ und $H_0 = H$. Außerdem ist G wegen (4.2) einfach. Ist H isomorph zu Σ_4, so ist $|C_S(x)| = 4$ für $x \in H_1 \setminus Z$ und S eine Gruppe aus (2.2). Da G einfach ist, sind dann wegen (2.3) alle Involutionen von G konjugiert im Widerspruch zu (2.1). Daher ist H isomorph zu $\Sigma_4 \times \Sigma_2$, also $P = H_3 \times Q$ mit einer Diedergruppe $Q = \langle P \cap D \rangle$ der Ordnung 8, deren sämtliche Involutionen in D enthalten sind. Wegen $|A(P)| = 2$ und (2.3) gilt nun $|S : P| = 2$, und es gibt ein $s \in S \setminus P$. Dann ist $H_2^s = U_2$, also S/Z eine Diedergruppe der Ordnung 8 und $U_3^s = H_3$. Daher läßt sich s mit $s^2 \in Z$ wählen, und es ist $\langle s, Z \rangle$ ebenfalls eine Diedergruppe der Ordnung 8, weshalb man $\langle s^2 \rangle = Z(Q)$ annehmen kann. Entsprechend ist $Q\langle s \rangle / Z(Q)$ eine Diedergruppe, also $Q\langle s \rangle$ eine Quasidiedergruppe, und alle Involutionen von $Q\langle s \rangle$ sind in D enthalten. Da G einfach ist, folgt $H_3^{\#} \subseteq D$ aus (2.3), was nicht sein kann.

(5.4.3) *Für $X \in \{U, H\}$ sind* 1, X_3, X_1 *die einzigen 2-Normalteiler von X.*

Beweis. Aus (5.4.2) folgt die Existenz zyklischer Gruppen K und R ungerader Ordnung mit $N_{U_0}(P) = PR \neq P$ und $N_{H_0}(P) = PK \neq P$. Wegen (5.4.1) gilt dann $K, R \leq U \cap H$. Ist (5.4.3) falsch, so ist $H_3 \neq 1 \neq U_3$, und man kann wegen $C_Z(k) = H_3$ für $k \in K^{\#}$ und $C_Z(r) = U_3$ für $r \in R^{\#}$ sowie $H_3 \cap U_3 = 1$ dann K und R so wählen, daß $[K, R] = 1 = K \cap R$ gilt. Dann folgt $H_3 = [R, Z]$ und $U_3 = [K, Z]$ sowie $Z = U_3 H_3 = \Phi(P)$ und (5.4.3).

(5.4.4) $P \in \mathrm{Syl}_2\,(G)$.

Beweis. Sei zunächst $Q \in \mathrm{Syl}_2\,(C_G(X_0/X_1))$ für $X \in \{U, H\}$. Sei $d \in Z(Q) \cap D$. Wegen (5.4.3) gilt $X_1 = \langle d^{X_0} \rangle$, also $Q \leq C_X(X_1)$ und $X_1 = Q$. Da die äußere Automorphismengruppe von X_0/X_1 zyklisch ist, besitzt deshalb

$N_X(P)/P$ ein normales 2-Komplement. Sei K eine 2'-Hallgruppe von $N_X(P)$. Dann besagt (5.4.2) $C_Z(K) \leq C_Z(U_0) \cap C_Z(H_0) = 1$ und damit $C_P(K) = 1$. Angenommen, $|X : X_0|$ ist gerade. Das Frattini-Argument liefert dann die Existenz einer Involution $x \in U \cap H \cap S \setminus P$. Dann inudziert x auf X_0/X_1 einen Körperautomorphismus, und es gilt $|C_{X_1}(x)| = \sqrt{|X_1|}$. Insbesondere ist

$$P \cap D \cap O_2(\langle C_{U_0}(x), C_{H_0}(x)\rangle) = \emptyset.$$

Wegen (4.1) gibt es ein $d \in O_2(C_G(x)) \cap D$ mit $C_S(x) \leq C_S(d)$. Nun ist $Z(S) \leq C_S(x)$, also $d \in S$, und aus (5.4.1) folgt $U_1^d = H_1$ somit $C_{U_1}(x)^d = C_{H_1}(x)$ im Widerspruch zu $C_S(x) \leq C_S(d)$. Daher ist $P = \mathrm{Syl}_2\ (U) \cap \mathrm{Syl}_2\ (H)$. Ist $P \neq S$, so ist also $|S : P| = 2$, und es gibt eine Involution $x \in S \setminus P$ mit $U^x = H$. Nach (2.3) und (4.1) ist x zu einem Element aus Z konjugiert. Aus (2.1) folgt dann $U_3 \neq 1 \neq H_3$ und $Z(S)^\# \subseteq D$. Wegen (4.1) kann man $T \in \mathrm{Syl}_2\ (C_G(x))$ mit $C_S(x) < T$ wählen. Dann gibt es ein $t \in N_T(C_S(x)) \setminus S$ mit $C_{Z(S)}(t) \neq 1$, was nicht sein kann.

(5.4.5) $U_3 \neq 1 \neq H_3$.

Beweis. Andernfalls sind alle Involutionen aus G konjugiert im Widerspruch zu (2.1).

(5.4.6) *G enthält genau drei Konjugiertenklassen von Involutionen.*

Beweis. Wegen (5.4.4) ist jede Involution zu einem Element aus Z konjugiert.

(5.4.7) $H_3^G \cap H_1 = H_3$ *und* $U_3^G \cap U_1 = U_3$.

Beweis. Aus $Z = U_3 \cup H_3 \cup (Z \cap D)$ und $H_1 = \bigcup_{x \in H_0} Z^x$ erhält man (5.4.7) für H und analog für U.

(5.4.8) *Sei $Y \in H_3^G \setminus H_0$, $M = \langle Y, H_3\rangle$, $K = \langle Y^G \cap C_G(M)\rangle$. Dann gilt:*

(1) *M und K sind isomorph zu $L_2(\tilde{h})$.*
(2) $|Y^G \cap H| = \tilde{h}^2 + \tilde{h} + 1$.
(3) $|K^H| = \tilde{h}^2$.
(4) *H_1 operiert als reguläre Permutationsgruppe der Ordnung $\tilde{h}^3$ auf $Y^G \setminus H_0$.*

Beweis. Seien $I, J \in Y^G \cap H$ mit $[I, J] \neq 1$. Aus (5.4.3) folgt die Existenz einer Untergruppe E der Ordnung $\tilde{h} - 1$ von $N_U(P)H_0$ mit $[E, H_0] \leq H_1$. Dann ist $F = C_{H_0}(E)$ isomorph zu $L_2(\tilde{h})$. Da $P \cap F$ von $EN_F(P)$ normalisiert wird, ist $(P \cap F)U_3$ in U_0 zu Z konjugiert. Aus $Z = U_3 \cup H_3 \cup (Z \cap D)$ folgt, daß $P \cap F$ in U_0 zu H_3 konjugiert ist. Da die unter H_0 zu U_1 konjugierten Gruppen alle Involutionen aus $H_0 \setminus H_1$ enthalten und P transitiv auf

$(U_1 \cap H_3^G) \setminus H_1$ ist, hat $Y^G \cap H_0 = H_3 \cup (P \cap F)^{H_0}$ die Ordnung $1 + \tilde{h}(\tilde{h} + 1)$, und es gilt (2). Außerdem kann man $I = P \cap F$ wählen. Da I mit genau $\tilde{h}^2 = |H_0 : N_{H_0}(F)| = \tilde{h}|N_H(I) : N_{N_H(I)}(F)|$ Elementen aus I^H nicht vertauschbar ist, ist $\langle I, J\rangle$ zu F konjugiert. Man kann also $F = \langle I, J\rangle$ annehmen. Außerdem erhält man (3), sobald $K \in F^H$ gezeigt ist.

Aus der Struktur von F folgt die Existenz einer Gruppe V der Ordnung $\tilde{h} - 1$ in $N_F(I) \cap N_F(J)$. Wegen $[V, H_3] = 1$ gibt es

$$F_1 \in C_G(I) \cap F^G \quad \text{und} \quad F_2 \in C_G(J) \cap F^G$$

mit $[V, F_1] = 1 = [V, F_2]$ und $F_1 \geq H_3 \leq F_2$. Da H_3 eine 2-Sylowgruppe von $C_G(VH_3)$ und eine TI-Gruppe von G ist, ist auch $H_3 \in \mathrm{Syl}_2\,(C_G(V))$, und $\langle H_3^{C_G(V)}\rangle$ ist wegen [13] isomorph zu $L_2(\tilde{h})$. Dann ist aber $F_1 = F_2 = F_3 \leq C_G(F)$ und $F_1 = \langle Y^G \cap C_G(F)\rangle$. Wegen (5.4.7) gilt nun $\langle Y^G \cap P\rangle = \langle Y^G \cap U\rangle = U_1$. Hieraus folgt $[X, Y] = 1$ für $X, Y \in Y^G$ mit $\langle X, Y\rangle \leq C_G(t)$ und $t \in D$ oder $t^G \cap U_3^\# \neq \emptyset$. Da wegen (5.4.6) jede Involution aus G zu einem Element aus H_3, U_3 oder D konjugiert ist, folgt, daß $C_G(M)$ ungerade Ordnung hat sofern M ein Gegenbeispiel zu (1) ist. Da jedoch $y \in Y^\#$ und $d \in Z \cap D$ nicht-konjugierte Involutionen sind, enthält $Z(\langle x, d\rangle)$ eine Involution z, für die dann $z \in C_G(d) = P \leq H_0 \leq C_G(H_3)$ gilt. Wegen $z \in O^{2'}(C_G(y)) \leq C_G(y)$ erhält man dann (1). Dann ist also $\langle Y^G \cap C(\langle Y_1, H_3\rangle)\rangle \in K^H$ für $Y_1 \in Y^G \setminus H$ und damit $Y_1 \in Y^H$. Aus $H = H_1 N_H(K)$, $Y^H = Y^{H_1}$ und $N_{H_1}(Y) = 1$ erhält man schließlich $|Y^H| = |H_1| = \tilde{h}_3$ sowie (3).

(5.4.9) $|H_3^G| = \tilde{h}^3 + \tilde{h}^2 + \tilde{h} + 1.$

Beweis. Sei $Y \in H_3^G \setminus H_0$. Aus (5.4.8) erhält man dann $|N : N_H(Y)| = \tilde{h}^2$, also $|H_3^G \setminus H_0| = |\langle Y, H_3\rangle \setminus H_0|\tilde{h}^2 = \tilde{h}^3$ und die Behauptung.

(5.4.10) *G ist isomorph zu* $S_4(\tilde{h})$.

Beweis. Sei $\Phi = H_3^G$. Für $A, B \in \Phi$ mit $A \neq B$ sei ferner $A + B = C_\Phi(\langle A, B\rangle)$, falls $[A, B] = 1$ ist, und $A + B = \langle A, B\rangle \cap \Phi$, falls $[A, B] \neq 1$ ist, sowie $\Sigma = \{A + B \mid A, B \in \Phi \text{ mit } A \neq B\}$.

Seien $A, B \in \Phi$ mit $A \neq B$. Ist $\langle A, B\rangle$ isomorph zu $L_2(\tilde{h})$, so ist wegen (5.4.8) $\langle C_\Phi(\langle A, B\rangle)\rangle$ isomorph zu $L_2(\tilde{h})$ und wegen

$$|A + B| = |C_\Phi(\langle A, B\rangle)| = \tilde{h} + 1 \quad \text{und} \quad |C_\Phi(A)| = \tilde{h}^2 + \tilde{h} + 1$$

dann

$$\left|\bigcup_{Y \in A+B} C_\Phi(Y)\right| = (\tilde{h}^2 + \tilde{h} + 1)(\tilde{h} + 1) - (h + 1) = \tilde{h}^3 + \tilde{h}^2 + \tilde{h} + 1 = |\Phi|.$$

Zu jedem $C \in \Phi$ erhält man daher ein $E \in A + B$ und ein $F \in C_\Phi(A + B)$ mit $\langle C, E, F\rangle' = 1$, also $C \in E + F$, sowie

$$\langle A + B, C\rangle \leq C_G((E + F) \cap C_\Phi(A + B)).$$

Ist $[A, B] = 1$ und $C \in A + B$, so ist $|C_\Phi(C) \setminus (A + B)| = \tilde{h}^2$ und damit

$$\left| \bigcup_{C \in A+B} C_\Phi(C) \right| = (\tilde{h} + 1)\tilde{h} + |A + B| = \tilde{h}^3 + \tilde{h}^2 + \tilde{h} + 1 = |\Phi|.$$

Daher gibt es dann für $E \in \Phi$ ein $C \in A + B$ mit $\langle E, A + B\rangle \leq C_G(C)$. Insgesamt erhält man nun für $A, B, C \in \Phi$ ein $E \in \Phi$ mit $A, B, C \leq C_\Phi(E)$. Da $(C_\Phi(E), \Sigma \cap C_\Phi(E))$ eine projektive Ebene mit $A, B, C \in C_\Phi(E)$ ist, ist (Φ, Σ) wegen (2.5) ein 3-dimensionaler projektiver Raum. Ferner ist die involutorische Abbildung f mit $f(R) = C_\Phi(R)$ für Teilräume R von (Φ, Σ) eine symplektische Polarität, die von G invariant gelassen wird, weshalb wegen (2.5) die Behauptung gilt.

(5.4.11) (5.4.10) steht im Widerspruch dazu, daß G ein Gegenbeispiel zum Satz ist. Dieser Widerspruch folgte aus $[U_2, H_2] \neq 1$. Daher gilt (5.4).

(5.5) $U_3 \neq 1 \neq H_3$.

Beweis. Angenommen, $U_3 = H_3 = 1$. Dann ist $U_2^\# \subseteq D \supseteq H_2^\#$. Sei

$$u \in U_0 \setminus N_{U_0}(P) \quad \text{und} \quad |Z| = q.$$

Ist $J(H_1) \leq U_1 \cap H_1 \geq J(U_1)$, so ist $J(H_1) = J(U_1 \cap H_1) = J(U_1)$ und damit $\langle U, H\rangle \leq N_G(J(U_1 \cap H_1))$ im Widerspruch zur Maximalität von U und H. Daher erhält man gegebenenfalls durch Vertauschen von U und H ein $A \in A(H_1) \setminus A(U_1)$. Wegen $|U_2 : A \cap U_2| = q$ ist dann $|A : A \cap U_1| = q$. Sei $W = \langle H_2^{uA}\rangle$, $K = \langle H_1, H_1^u\rangle$. Dann ist $U_0 = KU_1$ und H_1 und H_1^u werden von U_1 normalisiert, weshalb $O^2(U_0) \leq K$ und K ein Normalteiler von U_0 ist. Dann ist wegen $U_3 = 1$ auch $Z(K) = 1$, also $H_2 \cap H_2^u = 1 = W'$ und wegen $K = \langle A, H_1^u\rangle$ auch $A \cap H_2^u = 1$. Nun ist $B = (A \cap U_1)U_2 \in A(P^u)$ und wegen $A \cap H_2^u = 1$ dann $B \not\leq H_1^u$ sowie $|B : B \cap H_1^u| = q$ und $[B, H_2^u] = Z^u$. Damit folgt

$$|A : A \cap H_1^u| = q^2 \quad \text{und} \quad Z^u = [A \cap U_1, H_2^u].$$

Aus $A \cap H_1^u \leq C_G(W)$ erhält man

$$q^2 |A \cap H_1^u| = |A| \geq |(A \cap H_1^u)W| = |(A \cap H_1^u)|\,|W : W \cap A|$$

und damit $A \cap H_2^u = 1$ dann $|W : W \cap A| \geq |H_2^u| = q^2$ und $W = (A \cap W)H_2^u$. Dann normalisiert A aber

$$[A \cap U_1, W] = [A \cap U_1, (A \cap W)H_2^u] = [A \cap U_1, H_2^u] = Z^u$$

im Widerspruch zur Operation von A auf U_2.

(5.6) *P ist in genau einer maximalen 2-lokalen Untergruppe von G enthalten.*

Beweis. Zunächst gilt (i) oder (ii):

(i) $Z = U_3 \cup H_3 \cup (Z \cap D)$, $H_3 = [N_{U_0}(P), Z]$ für $\tilde{u} > 2$ und $U_3 = [N_{H_0}(P), Z]$ für $\tilde{h} > 2$.

(ii) $[N_{U_0}(P), Z]^{\#} = [N_{H_0}(P), Z]^{\#} = Z \cap D$, $U_3 \in H_3^{N_G(P)}$ und

$$\langle Z \cap D\rangle \cup H_3^{N(P)}$$

ist eine Partition von Z.

(i) gilt für $N_G(P) \leq U \cap H$, da für $\tilde{h} > 2$ die einzigen echten $N_{H_0}(P)$-invarianten Untergruppen von Z dann $[N_{H_0}(P), Z]$ oder in H_3 enthalten sind. Für $N_G(P) \nleq U \cap H$ gilt $U_3 \in H_3^{N_G(P)}$ nach Wahl von U und H. Wegen (2.4) gilt daher (i) oder (ii).

Wäre $H_2^G \cap P \leq H_1 \cap U_1$, so erhielte man wegen $H_1 \cap U_1 \cap H_2^G \neq \emptyset$ einen Widerspruch zur Maximalität von U und H. Daher gibt es ein $X \in \{U, H\}$ und $Y \in Z^G$ mit $P \geq Y \nleq X_1$. Wegen (5.5) ist $Y \cap X_1 \neq 1$. Angenommen, $Y \cap X_1 \cap D \neq \emptyset$. Wegen $C_G(d) \leq N_G(S) \leq N_G(Z)$ für $d \in Z \cap D$ sind $Z \cap D$ und $Y \cap D$ TI-Mengen, weshalb aus $X_1 \leq C_G(X_2)$ dann $X_2 \leq N_G(Y \cap D)$ folgt. Es ist aber $P \leq O_2(C_G(Z \cap D))$, also $N_G(Y \cap D) \leq N_G(Y)$ und damit $[Y, X_2] \leq Y \cap X_2 \leq Y \cap Z$. Ist $Y \cap Z \cap D \neq \emptyset$ so ist $Y = Z$ im Widerspruch zu $Y \nleq X_1$. Nach obiger Vorbemerkung ist daher $Y \cap Z = L_3$ und $YZ = L_2$ für ein $L \in U^G \cup H^G$. Aus $X_2 \leq L_0$ und $X_2 \nleq L_1$ folgt dann $X_2 \nleq N_G(Y)$, was ein Widerspruch ist. Daher ist $Y \cap X_1 \cap D = \emptyset$, und wegen der Vorbemerkung gibt es ein $L \in U^G \cup H^G$ mit $[L_3, X_2] \leq L_3 \cap X_2$ und $L_2 = \langle Y^{X_2}\rangle$, also auch $[L_2, X_2] \leq [L_2, X_2] \leq L_2 \cap X_2 \leq Z$. Ist $L_2 \cap X_2 \cap D \neq \emptyset$, so ist $[P, L_2] \leq L_2$ und $[P, X_2] \leq X_2$, was wegen $[X_2, L_2] \neq 1$ ein Widerspruch zu (5.4) ist. Daher ist $L_2 \cap X_2 \cap D = \emptyset$ und es gibt wegen der Vorbemerkung ein $w \in U^G \cup H^G$ mit $L_2 \cap X_2 = W_3$. Insbesondere ist $L_2 = L_3 \times L_4$ und $X_2 = X_3 \times X_4$ und $W_3 = [L_4, X_4] = L_4 \cap X_4$ sowie

$$Z = U_3 \cup H_3 \cup (Z \cap D) \quad \text{und} \quad |N_G(P){:}N_{U \cap H}(P)| \leq 2.$$

Aus $C_{L_0}(W_3) \in \mathrm{Syl}_2(L_0)$ und $C_{X_0}(W_3) \in \mathrm{Syl}_2(X_0)$ folgt

$$\mathrm{Syl}_2(W_0) \cap \mathrm{Syl}_2(L_0) \neq \emptyset \neq \mathrm{Syl}_2(W_0) \cap \mathrm{Syl}_2(X_0).$$

Daher sind X_4 und L_4 in W_0 konjugiert, und W_0 ist zweifach transitiv auf $X_4^{W_0}$. Da $[L_4, X_4] \neq 1$ ist, erhält man mit (5.7) einen Widerspruch, der (5.6) beweist.

(5.7) $\langle X_4^{W_0}\rangle' = 1$.

Beweis. Sei $T = O_2(N_{W_0}(L_4)) \in \mathrm{Syl}_2(W_0)$, $x \in T \setminus W_1$ und $Q = L_4 X_4 X_4^x$ sowie $R = Z(Q)$ und $r = |T{:}W_1|$. Wegen $x^2 \in W_1$ ist dann

$$|T{:}N_T(R)| < |T{:}W_1| = r.$$

Für $Q_1, Q_2 \in \{L_4, X_4, X_4^x\}$ mit $Q_1 \neq Q_2$ sind dann Q_1 und Q_2 die einzigen elementar-abelschen Untergruppen maximaler Ordnung von $Q_1 Q_2$ und sämtliche Involutionen von $Q_1 Q_2$ sind in $Q_1 \cup Q_2$ enthalten. Ferner ist $|Q| = |W_3|^4$ und $|Q{:}C_Q(Q_1)| = |W_3|$, weshalb es $x_1 \in L_4 \setminus R$, $x_2 \in X_4 \setminus R$ und $x_3 \in X_4^x \setminus R$ mit $x_1 x_2 \in C_Q(x_3)$ und $x_1 x_3 \in C_Q(x_2)$ gibt. Dann ist

$$(x_1 x_2)^{x_1 x_3} = x_1^{x_1 x_3} x_2 = x_1^{x_3} x_2 = x_3 x_1 x_3 x_2 = x_3 x_2 x_1 x_3 = x_2 x_1$$

und wegen $\langle x_1, x_2\rangle = \langle x_1 x_2, x_2\rangle$ daher $x_1 x_3 \in N_Q(\langle x_1, x_2\rangle)$ sowie

$$x_3 \in N_Q(\langle x_1, x_2\rangle).$$

Dann ist aber $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ eine Gruppe der Ordnung 16 mit einem zyklischen Zentrum $\langle x_1 x_2 x_3\rangle$ der Ordnung 4. Wegen $C_Q(x_1) = C_Q(L_4)$ folgt $\langle x_1 x_2 x_3\rangle \leq R$, also $R \neq W_3$. Angenommen, es gibt eine Involution $z \in R \setminus W_3$. Dann ist $z = abc$ mit $a \in L_4 \setminus R$, $b \in X_4 \setminus R$ und $z \in X_4^x \setminus R$. Dann ist aber auch $zc = ab$ eine Involution, was nicht sein kann. Daher ist $\Omega_1(R) = W_3$. Nun ist wegen $|T : N_T(R)| < r$ auch $|L_1 : N_{L_1}(R)| < r$ sowie $|L_1 : N_{L_1}(R^g)| < r$ für $g \in L_0 \quad N_G(T)$ und $|W_4 : N_{W_4}(R^g)| < r$. Aus $\Omega_1(R^g) \leq L_4$ und $L_4 \cap W_4 = 1$ folgt $[R^g, N_{W_4}(R^g)] = 1$ und wegen $C_T(v) = C_T(W_4) = W_1$ für $v \in W_4 \setminus L_3$ dann $[R^g, W_4] = 1$, also $[R^g, W_4] = 1$, also $R^g \leq W_1$. Mit $\Omega_1(R^g)^{\#} \subseteq L_4 \setminus W_3$ und $[L_2, X_2] = W_3$ erhält man $R^g \cap X_1 = 1$ und $R^g X_1/X_1$ ist nicht elementar-abelsch, was wegen $R^g X_1 \in \mathrm{Syl}_2(X_0)$ einen Widerspruch liefert, der (5.7) beweist.

Section 6

In diesem Abschnitt sei S eine 2-Sylowgruppe von G und U die wegen (5.6) eindeutig bestimmte maximale 2-lokale Untergruppe von G mit $C_S(\Omega_1(Z(J(S)))) \leq U$. Aus (2.8) und (2.1) folgt nun die Existenz von $g \in G$ mit $1 \neq |S \cap U^g| \neq |S|$. Wählt man g so, daß $|S \cap U^g|$ maximal ist, so ist

$$N_G(S \cap U^g) \nleq U \quad \text{und} \quad |N_U(S \cap U^g)|_2 = |N_G(S \cap U^g)|_2.$$

Daher gilt:

(6.1) *Es gibt eine 2-lokale Untergruppe H von G mit $H \nleq U$ und $P = H \cap S \in \mathrm{Syl}_2(H)$.*

Diese Gruppe H sei so ausgewählt, daß P maximal ist (d.h.: ist L eine 2-lokale Untergruppe von G mit $P < L \cap S \in \mathrm{Syl}_2(L)$, so ist $L \leq U$) und H eine maximale 2-lokale Untergruppe ist. Gibt es eine Involution t mit

$$C_S(t) \in \mathrm{Syl}_2(C_G(t)) \quad \text{und} \quad C_G(t) \nleq U,$$

so seien t und H außerdem so ausgewählt, daß zunächst $|A|$ für $A \in A(C_S(t))$ und dann $C_S(\Omega_1(Z(J(C_S(t)))))$ maximal ist und $C_S(t) \leq P$ gilt. Sei $Q = C_P(\Omega_1(Z(J(P))))$, $W = \langle Q^H\rangle$, $Z = \langle d^W\rangle$ und $T = \langle d^{N_H(Q)}\rangle$ für $d \in Z(S) \cap D$. Aus $P < S$ folgt $N_G(P) \nleq H$ und aus der Maximalität von P dann $J(P) \nleq O_2(H)$, weshalb wegen (4.3) $W/O_2(W)$ ein direktes Produkt von n 2-dimensionalen Gruppen ist.

(6.2) $T^{\#} \subset D$.

Beweis. Gibt es ein $x \in T^{\#} \setminus D$, so kann man wegen (4.3) x so wählen, daß $C_W(x) \nleq U$ gilt. Ist nun $J(S) \leq O_2(U)$, so folgt $x \in \Omega_1(Z(J(S)))$ aus $N_G(Q) \leq U$. Dann ist aber $C_S(\Omega_1(Z(J(S)))) \leq C_G(x)$ im Widerspruch zu (5.6).

Ist $J(S) \not\leq O_2(U)$, so erhält man, mit (4.3)

$$x \in \Omega_1(Z(O_2(U))) \subseteq \bigcup_{u \in U} \Omega_1(Z(J(S)))^u,$$

also $x^U \cap Z(J(S)) \neq \emptyset$, was erneut mit (5.6) einen Widerspruch liefert, und es folgt (6.2).

(6.3) $n = 1$.

Beweis. Angenommen, $n > 1$. Dann folgt $|T| = 2$ aus (6.2) und der Darstellung von $W/O_2(W)$ auf $\Omega_1(Z(O_2(W)))$, und $W/O_2(W)$ ist ein direktes Produkt von n zu Σ_3 isomorphen Gruppen. Sei V eine 2-lokale Untergruppe von G mit $C_X(\Omega_1(Z(J(X)))) = Q$ für $X \in \mathrm{Syl}_2\,(V)$ und $W \cap V > Q$. Aus (4.4) folgt $\langle W, Q^V \rangle \leq N_G(O^2(W \cap V))$ und dann $V \leq N_G(W) = H$. Nach Wahl von H erhält man damit $C_G(x) \leq H$ für alle $x \in \Omega_1(Z(Q))^\#$ mit $C_W(x) > Q$. Sei $R \leq W$, so daß $R/O_2(W)$ ein direkter zu Σ_3 isomorpher Faktor von $W/O_2(W)$ ist, und $L = C_{\Omega_1(Z(Q))}(R)$. Dann ist $|\Omega_1(Z(Q)) : L| = 2$. Für $y \in N_S(P) \setminus P$ folgt dann mit (4.4) $L \cap L^y = 1$, $n = 2$ und $|\Omega_1(Z(Q))| = 4$. Dann ist aber ebenfalls $C_G(L^y) \leq H$, was nicht sein kann, und es folgt (6.3).

(6.4) Sei $y \in N_S(P) \setminus P$ mit $y^2 \in P$, $M = O_2(W)$, $M_1 = M^y$, $E = \Omega_1(Z(M))$, $Z_1 = E^y$ und $M_2 = M_1^w$ sowie $Z_2 = Z_1^w$ für $w \in W \setminus N_W(P \cap W)$. Ferner sei $A \in A(M_1) \setminus A(M)$, $M_0 = \bigcap_{a \in A} M_2^a$ und $Z_0 = \langle Z_1^A \rangle$. Wegen (6.3) ist $W/O_2(W)$ isomorph zu $L_2(q)$ und induziert eine natürliche Darstellung auf $E/\Omega_1(Z(W))$. Insbesondere ist $\Omega_1(Z(J(P))) = \Omega_1(Z(W))T$. Angenommen, $Z_1 \leq M$. Ist $\Omega_1(Z(W)) \neq Z_1 \cap Z_2$, so folgt $D \cap Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$ aus

$$\Omega_1(Z(W)) \leq Z_1 \cap Z_2 \leq \Omega_1(Z(J(P^w)) = \Omega_1(Z(W))T^w.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, da $\langle M_1, M_2 \rangle$ keine 2-Gruppe ist und

$$\langle M_1, M_2 \rangle \leq C_G(Z_1 \cap Z_2)$$

gilt. Daher ist $Z_1 \cap Z_2 = \Omega_1(Z(W)) = A \cap Z_2$. Wegen $T^\# \subseteq D$ und $n = 1$ ist $\langle T^\# \rangle = [E, P \cap W]$. Da Z_1 und Z_2 Normalteiler von M sind, ist

$$[Z_1, Z_2] \leq Z_1 \cap Z_2 = \Omega_1(Z(W)).$$

Aus $Z_1 \leq C_P(J(P))^w$ und $T^w \cap Z(W) = 1$ folgt $[Z_1, Z_2] = 1$ und Z_0 ist abelsch.

Nun ist $(A \cap M)Z \in A(P^w)$. Ist $Z_2 \leq (A \cap M)Z$ so gilt

$$W = \langle A, M_1^w \rangle M \leq N_G(Z_2 Z)$$

und $\langle W, y \rangle$ normalisiert $Z_2 Z = Z_1 Z$, was nicht sein kann. Daher ist $Z_2 \not\leq (A \cap M)Z$ und

$$((A \cap M)Z \cap M_2)Z_2 = (A \cap M_2)ZZ_2 = (A \cap M_2)Z_2 \in A(P)$$

sowie

$$|Z_2 : A \cap Z_2| = |A : A \cap M_2| = q^2 \quad \text{und} \quad [A \cap M, Z_2] = T^w.$$

Da $A \cap M_2$ die elementar-abelsche Gruppe Z_0 zentralisiert, ist

$$q^2 |A \cap M_2| = |A| \geq |(A \cap M_2)Z_0| = |(A \cap M_2)| \, |Z_0 : Z_0 \cap A|.$$

Wegen $|Z_2 : A \cap Z_2| = q^2$ ist $Z_0 = (A \cap Z_0)Z_2$. Dann normalisiert A aber

$$[A \cap M, Z_0] = [A \cap M, (A \cap M)Z_2] = [A \cap M, Z_2] = T^w,$$

was ein Widerspruch ist.

Daher ist $Z_1 \not\leq M$, $M = (M \cap M_1)E$ und $M_1 = (M \cap M_1)Z_1$. Wegen 2.7 ist $\Phi(M) = \Phi(M_1) = 1$. Dann ist $A(P) = \{E, Z_1\}$ und $|N_G(P) : N_H(P)| = 2$. Ferner ist $C_P(W/E) = E$, und $P/P \cap W$ ist zyklisch. Dann ist $J(N_S(P)) = J(P)$ oder $|E| = 4$. Im ersten Fall ist $J(S) = J(P)$, was (5.6) widerspricht. Im zweiten Fall folgt ein Widerspruch aus (2.1)–(2.3).

LITERATUR

1. M. ASCHBACHER, *On finite groups of component type*, Illinois J. Math., vol. 19 (1975), pp. 87–115.
2. P. DEMBOWSKI, *Finite geometries*, Springer-Verlag, New York, 1968.
3. G. GLAUBERMAN, *Weakly closed elements of Sylow subgroups*, Math. Zeitschr., vol. 107 (1968), pp. 1–20.
4. D. GOLDSCHMIDT, *2-signalizer functors of finite groups*, J. Algebra, vol. 21 (1972), pp. 321–340.
5. D. GORENSTEIN, *Finite groups*, Harper and Row, New York, 1968.
6. D. HIGMAN AND J. MCLAUGHLIN, *Rank 3 subgroups of finite symplectic and unitary groups*, J. Reine Angew. Math., vol. 218 (1965), pp. 174–189.
7. B. HUPPERT, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, New York, 1967.
8. D. PASSMAN, *Permutation groups*, Benjamin, New York, 1968.
9. M. SUZUKI, *A characterization of simple groups LF(2, p)*, J. Fac. Univ. Tokyo, Sect. I, vol. 6 (1951), pp. 259–293.
10. ———, *On characterizations of linear groups II*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 92 (1959), pp. 191–219.
11. ———, *A new type of simple groups of finite order*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 46 (1960), pp. 868–870.
12. ———, *On characterizations of linear groups III*, Nagoya Math. J., vol. 21 (1962), pp. 159–183.
13. ———, *Finite groups of even order in which Sylow 2-subgroups are independent*, Ann. of Math., vol. 80 (1964), pp. 58–77.
14. ———, *Finite groups in which the centralizer of any element of order 2 is 2-closed*, Ann. of Math., vol. 82 (1965), pp. 191–212.
15. ———, *Characterizations of linear groups*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 75 (1969), pp. 1043–1091.
16. F. TIMMESFELD, *Groups with weakly closed TI-subgroups*, Math. Zeitschr., vol. 143 (1975), pp. 243–278.
17. J. THOMPSON, *A special class of nonsolvable groups*, Math. Zeitschr., vol. 72 (1960), pp. 458–462.

UNIVERSITÄT BIELEFELD
BIELEFELD, DEUTSCHLAND