

FORMES LINEAIRES DE LOGARITHMES SUR LES GROUPES ALGEBRIQUES COMMUTATIFS

PAR

PATRICE PHILIPPON ET MICHEL WALDSCHMIDT

1. Introduction

Les méthodes de transcendance permettent d'obtenir des résultats assez généraux sur l'indépendance linéaire de certains nombres. Ainsi la méthode de Baker a permis d'abord de résoudre le problème de l'indépendance linéaire, sur le corps des nombres algébriques, de logarithmes de nombres algébriques, et de plus de minorer des formes linéaires s'écrivant

$$(1.1) \quad \beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n$$

(voir [1]). Cette méthode a ensuite été développée, notamment par Baker, Coates, Masser, Lang, Anderson, Feldman, Laurent, pour l'étude de la transcendance ou de l'indépendance linéaire de périodes d'intégrales elliptiques de première, deuxième ou troisième espèce, et pour l'indépendance linéaire de logarithmes de points algébriques sur des courbes elliptiques ou des variétés abéliennes de type C-M. Le théorème de Wüstholz [13, th. 8] donne un énoncé général sur les groupes algébriques commutatifs qui contient, sous leur aspect qualitatif, les résultats précédents.

Notre but est ici de généraliser ces résultats aussi dans leur aspect quantitatif, c'est à dire d'apporter un raffinement effectif au théorème de Wüstholz, en donnant des énoncés d'approximation diophantienne sur les groupes algébriques commutatifs. Un tel raffinement a déjà été annoncé par Wüstholz, mais, si on applique directement le lemme de zéros de Wüstholz (cf. [13, th. 2]) une hypothèse indésirable apparaît; par exemple, dans le cas usuel (1.1), on doit supposer soit $\beta_0 \neq 0$, soit $1, \beta_1, \dots, \beta_n$ linéairement indépendants sur \mathbf{Q} , alors que le cas le plus important pour les applications est celui où β_0 est nul et β_1, \dots, β_n tous rationnels. Dans un des cas particuliers les plus intéressants (i.e., pour une application au théorème de Siegel sur les points entiers sur une courbe algébrique), D. Bertrand [2, prop. 8], [3, th. 2] a réussi à éliminer cette hypothèse en utilisant le lemme de zéros de [7].

Received November 5, 1986.

Dans ce travail nous éliminons cette hypothèse, et nous obtenons en même temps un énoncé plus précis que celui de Bertrand. Nous donnons même une amélioration des résultats antérieurs pour le cas usuel (1.1). Un cas particulier relativement simple de ce que nous démontrons est le suivant.

THÉORÈME 1.2. *Soit G un groupe algébrique commutatif de dimension $d \geq 2$ défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$. On note*

$$\exp_G : T_G(\mathbf{C}) \rightarrow G(\mathbf{C}),$$

l'application exponentielle de G , on choisit une base de $T_G(\mathbf{C})$ et un plongement ι de G dans un espace projectif \mathbf{P}_N , définis sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Il existe alors un réel $C > 0$ ayant la propriété suivante.

Soit K un corps de nombres sur lequel le plongement de G dans \mathbf{P}_N est défini, soit

$$L(\mathbf{z}) = \beta_1 z_1 + \cdots + \beta_d z_d$$

une forme linéaire sur $T_G(\mathbf{C})$ à coefficients dans K , et soit $\mathbf{v} \in T_G(\mathbf{C})$ tel que $\gamma = \exp_G \mathbf{v}$ appartienne à $G(K)$. On note $D = [K : \mathbf{Q}]$. Enfin soient $B \geq e$ et $V \geq e$ des nombres réels vérifiant

$$\begin{aligned} \log B &\geq h(\beta_i) \quad (1 \leq i \leq d), \\ \log V &\geq \max\{h \circ \iota(\gamma); \|\mathbf{v}\|^2\}, \end{aligned}$$

où h désigne la hauteur de Weil, logarithmique et absolue, et $\|\cdot\|$ une norme sur $T_G(\mathbf{C})$ (voir §2 pour les définitions précises).

Si $L(\mathbf{v}) \neq 0$, alors

$$\log |L(\mathbf{v})| > -CD^{2(d+1)}(\log B + \log \log V)^{d+1}(\log V)^d.$$

Les principaux outils de notre démonstration sont les suivants. D'abord le lemme de zéros de [7], qui joue évidemment un rôle crucial. L'optimalité de ce lemme nous permettra de sélectionner un sous-groupe algébrique de G , extrémal, qui nous servira, via les résultats de [5] et un théorème de Y.V. Nesterenko [6], à effectuer la construction de la fonction auxiliaire habituelle en transcendance. Cet argument simplifie la descente finale de [2], [3]. Ensuite l'extrapolation est originale, elle portera autant sur les dérivations que sur les points. C'est cet argument nouveau, qui permet d'éliminer dans le cas général l'hypothèse indésirable mentionnée plus haut.

Le texte se compose comme suit. Nous donnons au §2 le résultat précis que nous obtenons et posons les notations qui resteront valables dans toute la suite. Les §§3 et 4 rassemblent quelques lemmes auxiliaires. Au §5 nous sélectionnons notre sous-groupe algébrique \tilde{G} de G , extrémal, et distinguons alors si nous sommes dans le cas non-périodique ou dans le cas périodique. Dans ce dernier cas [5] apporte des précisions importantes sur la distance de γ

à \tilde{G} . La construction de la fonction auxiliaire est faite au §6, et nécessite le premier théorème de [6] comparant la fonction caractéristique et le polynôme de Hilbert-Samuel de l'idéal de définition de \tilde{G} dans \mathbf{P}_N . L'extrapolation du §7 est donc double, elle porte à la fois sur les points, comme dans la méthode de Baker, et sur les dérivations, comme dans la méthode de Gel'fond. L'extrapolation sur les dérivations est la clé du cas périodique. On a rappelé au §8 le lemme de zéros qui permet d'achever la démonstration. Enfin le §9 conclut par diverses remarques, notamment sur les questions d'effectivité dans le cadre des groupes algébriques commutatifs et sur l'analogie p -adique de l'étude que nous développons dans le domaine complexe.

La source de ce travail est non seulement [2] et [3], mais aussi de nombreux et fructueux échanges avec Daniel Bertrand que nous avons plaisir à remercier ici. Nous remercions également David Masser pour sa lecture minutieuse de notre manuscrit; ses nombreuses remarques et ses commentaires nous ont aidés à améliorer notre texte.

2. Notations et résultats

On considère, pour toute la suite du texte et sauf mention explicite du contraire, des groupes algébriques commutatifs connexes définis sur $\overline{\mathbf{Q}}$, que nous noterons G_0, \dots, G_k , avec $G_0 = \mathbf{G}_a$, $G_1 = \dots = G_{d_1} = \mathbf{G}_m$, et $k \geq d_1 \geq 0$. Nous noterons encore $G = G_0 \times \dots \times G_k$, δ_i la dimension de G_i et $d + 1$ celle de G :

$$\delta_0 = \delta_1 = \dots = \delta_{d_1} = 1; \quad \delta_1 + \dots + \delta_k = d.$$

Nous poserons également $d_2 = d - d_1$, ainsi que

$$\rho_0 = 0, \rho_1 = \dots = \rho_{d_1} = 1, \rho_{d_1+1} = \dots = \rho_k = 2.$$

On notera \exp_G (resp. \exp_{G_i}) l'application exponentielle de G (resp. G_i).

On fixe des plongements des G_i dans des espaces projectifs \mathbf{P}_{N_i} définis sur $\overline{\mathbf{Q}}$, et des bases des espaces tangents $T_{G_i}(\mathbf{C})$ des $G_i(\mathbf{C})$ en l'origine. On identifie $T_G(\mathbf{C})$ avec $T_{G_0}(\mathbf{C}) \oplus \dots \oplus T_{G_k}(\mathbf{C})$. Rappelons que sur les espaces projectifs $\mathbf{P}_{N_i}(\overline{\mathbf{Q}})$, la hauteur de Weil logarithmique et absolue h est définie comme suit.

Si $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{N_i}) \in \mathbf{P}_{N_i}(\overline{\mathbf{Q}})$ et si K est un corps de nombres contenant $\alpha_0, \dots, \alpha_{N_i}$, alors

$$h(\alpha) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{\nu} [K_{\nu}:\mathbf{Q}_{\nu}] \log \max\{|\alpha_j|_{\nu}; 0 \leq j \leq N_i\},$$

où ν décrit l'ensemble des places de K , et $[K_{\nu}:\mathbf{Q}_{\nu}]$ est le degré local, de sorte que la formule du produit s'écrive, pour $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$:

$$\sum_{\nu} [K_{\nu}:\mathbf{Q}_{\nu}] \log |\alpha|_{\nu} = 0.$$

Cette hauteur de Weil donne, par restriction aux G_i , une hauteur sur chaque groupe $G_i(\mathbb{Q})$ que nous noterons encore h , les plongements quasi-projectifs des G_i étant fixés une fois pour toute. Signalons que pour $\beta \in \mathbb{Q}$ on note aussi $h(\beta)$ la hauteur de Weil du point $(1, \beta) \in \mathbb{P}_1(\overline{\mathbb{Q}})$. Parallèlement les bases des espaces tangents choisies identifient chaque $T_{G_i}(\mathbb{C})$ avec \mathbb{C}^{δ_i} . Les espaces vectoriels $T_{G_i}(\mathbb{C})$ se trouvent de ce fait tous être munis de normes, et nous noterons ces normes, ainsi que celle qu'elles induisent sur $T_G(\mathbb{C})$, indifféremment $\| \cdot \|$.

Il existe alors un réel $c > 0$, dépendant des données et choix précédents, tel que le théorème suivant soit vérifié.

THÉORÈME 2.1. *Soit K un corps de nombres sur lequel les objets introduits sont définis. Soit*

$$(2.2) \quad L(z) = \beta_0 z_0 + \dots + \beta_d z_d$$

une forme linéaire non nulle sur $T_G(\mathbb{C})$, à coefficients dans K et W son noyau. Pour $1 \leq i \leq k$, soit $v_i \in T_{G_i}(\mathbb{C})$, avec $v_i \neq 0$, tel que $\gamma_i = \exp_G v_i$ appartienne à $G_i(K)$. On pose $v = (1, v_1, \dots, v_k) \in T_G(\mathbb{C})$ et $D = [K : \mathbb{Q}]$; soient B, E, V_1, \dots, V_k , des nombres réels $\geq e$ vérifiant

- (2.3) $B \geq D \log V_i, 1 \leq i \leq k,$
- (2.4) $\log B \geq h(\beta_j), 0 \leq j \leq d,$
- (2.5) $\log V_i \geq \max\{h(\gamma_i); \|v_i\|^{\rho_i}/D\}, 1 \leq i \leq k,$
- (2.6) $E \leq \min\{B^D; e(D \log V_i)^{1/\rho_i}/\|v_i\|\}, 1 \leq i \leq k.$

Si, pour tout sous-groupe algébrique G' de G tel que $T_{G'}(\mathbb{C}) \subseteq W$ on vérifie $v \notin T_{G'}(\mathbb{C})$, alors on a la minoration

$$(2.7) \quad \log|L(v)| > -c \cdot D^{d+d_2+2} \cdot (\log B)^{d_2+1} \cdot \left[\prod_{i=1}^k (\log V_i)^{\delta_i} \right] \cdot \log(DE) \cdot (\log E)^{-d-d_2-1}.$$

Remarquons que sous les hypothèses du théorème 2.1, notre conclusion (2.7) entraîne $L(v) \neq 0$, et le théorème de Wüstholz [13, th. 8] est donc contenu dans le théorème ci-dessus. Nous attirons également l'attention du lecteur sur la condition (2.3) qui a pour but de simplifier le membre de droite dans (2.7); bien entendu, on peut supprimer l'hypothèse (2.3), à condition de remplacer, dans (2.7), le terme $(\log B)^{d_2+1}$ par

$$(\log(BD \log V))^{d_2+1}, \quad \text{avec } V = \max_{1 \leq i \leq k} V_i.$$

Tout d'abord nous allons déduire du théorème ci-dessus le théorème 1.2 du paragraphe précédent.

Déduction du théorème 1.2. On prend $d_1 = 0$ et $k = 1$, le groupe G_1 correspond donc au groupe G du théorème 1.2 et $d = d_2$ à sa dimension d . On a aussi $\rho_1 = 2$ et $v_1 \in T_{G_1}(\mathbb{C})$ correspond au $v \in T_G(\mathbb{C})$ du théorème 1.2. La forme linéaire considérée dans le Théorème 1.2 est, de la même forme que celle considérée dans le théorème 2.1 ci-dessus si l'on pose $\beta_0 = 0$ dans cette dernière. Enfin on choisit $E = e\sqrt{D}$ et $V_1 = V$ ce qui permet de vérifier que les conditions du théorème 2.1 se ramènent à celles du Théorème 1.2 dans ce cas particulier. Notamment l'hypothèse $L(v) \neq 0$ intervient seulement pour dire que $v \notin T_{G'}(\mathbb{C})$ lorsque G' est un sous-groupe algébrique de G vérifiant $T_{G'} \subseteq W$. La conclusion du théorème 1.2 est alors une réécriture simplifiée de celle du théorème 2.1.

La démonstration du théorème 2.1 va se faire par l'absurde. On suppose $L(v)$ petit, et, si W désigne le noyau de la forme linéaire L , on prend w dans W proche de v . Le lemme de zéros de [7] permet (dans la situation du théorème 1.2), de majorer le degré d'une hypersurface de \mathbb{P}_N s'annulant sur les points de

$$\Gamma(S) = \{s\gamma, s \in \mathbb{Z}, 0 \leq s < S\} \subseteq G(K)$$

avec une multiplicité $\geq T$ le long de W (voir plus loin pour les définitions précises). En utilisant un théorème de Nesterenko [6] on constate que cette majoration donne une estimation presque exacte du rang du système d'équations considéré. Plus précisément, si, dans le lemme de zéros, le degré L de l'hypersurface vérifie $L^d < c'(G)T^{d-1}S$ (à la constante c' près, cela signifie qu'il y a plus d'équations que d'inconnues) alors il existe un sous-groupe algébrique propre G' de G , connexe, non nul, tel qu'en projetant la situation sur G/G' , on trouve plus d'inconnues que d'équations. Parmi tous ces G' , on en choisit un (en un sens le plus "mauvais"), disons \tilde{G} , qui nous sert à construire la fonction auxiliaire.

On est alors amené à considérer deux cas. Si la projection de γ sur G/\tilde{G} n'est pas un point de torsion (cas non-périodique), on utilise la méthode de Baker en extrapolant sur les points, quitte à perdre un peu sur les dérivées. Si γ est de torsion modulo \tilde{G} (cas périodique), on doit utiliser une variante de la méthode de Gel'fond et extrapoler sur les dérivées; pour cela on construit la fonction auxiliaire en résolvant un système d'inéquations, comme dans [11].

A ce point nous devons minorer la distance de v à $T_{G'}$ en fonction du degré de G' dans \mathbb{P}_N , et c'est là que nous utilisons les résultats de [5].

Remarques. (1) Posons $V_0 = \min\{V_i; 1 \leq i \leq k\}$; on a

$$\log E \leq C_2 D \log V_0.$$

En effet l'inégalité de Liouville montre que, pour $1 \leq i \leq k$, $v_i \neq 0$, on a $\|v_i\| \geq V_i^{-c_{20}D}$, d'où

$$E \leq (eD \log V_i)^{1/\rho_i} / \|v_i\| \leq V_i^{c_{21}D}.$$

(2) Nous établirons le théorème 2.1 pour certains choix de plongements projectifs des G_i et des bases des espaces $T_{G_i}(\mathbf{C})$; notons qu'en modifiant le réel c de façon adéquate, le théorème 2.1 sera démontré pour tout choix de plongements et de bases.

(3) Dans les paragraphes 2 à 7 nous avons noté C_2, \dots, C_7 des réels dépendant, d'une façon que nous n'avons pas explicitée, des données spécifiées dans chacun des paragraphes. D'autre part nous avons introduit la notation $c_{\lambda 0}, c_{\lambda 1}, \dots$ pour des réels > 0 intervenant dans le paragraphe λ .

3. Estimations analytiques

Dans ce paragraphe nous plongeons les groupes algébriques, sur \mathbf{C} , dans des espaces projectifs et nous étudions la représentation correspondante de la fonction exponentielle par des fonctions analytiques. Nous donnons également des estimations sur les dérivées d'une fonction en un point de l'espace tangent. Nous reprenons les notations du paragraphe 2, mais nous supposons seulement les groupes algébriques commutatifs, connexes, G_0, \dots, G_k , définis sur \mathbf{C} .

(a) **Base de $T_G(\mathbf{C})$.**

On a $G = G_0 \times \dots \times G_k$; pour $0 \leq i \leq k$, on choisit une base de $T_{G_i}(\mathbf{C})$, grâce à laquelle on identifie $T_{G_i}(\mathbf{C})$ à \mathbf{C}^{δ_i} et $T_G(\mathbf{C}) = T_{G_0}(\mathbf{C}) \oplus \dots \oplus T_{G_k}(\mathbf{C})$ à \mathbf{C}^{d+1} .

Si f est une fonction méromorphe sur \mathbf{C}^{d+1} , pour $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_d)$ dans \mathbf{C}^{d+1} on note

$$D_{\mathbf{u}}f = \sum_{i=0}^d u_i \frac{\partial f}{\partial z_i}.$$

Quand $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ engendre un sous-espace vectoriel W de \mathbf{C}^{d+1} , on dit qu'une fonction f analytique au voisinage d'un point \mathbf{z} de \mathbf{C}^{d+1} a un zéro en \mathbf{z} d'ordre $\geq T$ le long de W si

$$D_{\mathbf{u}_1}^{t_1} \circ \dots \circ D_{\mathbf{u}_n}^{t_n} f(\mathbf{z}) = 0$$

pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{Z}^n$ satisfaisant

$$t_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq n), \quad t_1 + \dots + t_n < T.$$

Cette définition ne dépend pas de $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$. Plus précisément, le lemme suivant montre que si une fonction f a ses dérivées d'ordre $\leq T$ en un point \mathbf{z} "petites" pour un système générateur de W , il en est de même pour un autre, à condition que les matrices de passage entre les deux n'aient pas des coefficients trop grands.

LEMME 3.1. Soient $a_{i,j}$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$) des nombres complexes, f_1, \dots, f_m des éléments de \mathbb{C}^{d+1} , $z \in \mathbb{C}^{d+1}$, et f une fonction complexe analytique au voisinage de z . On pose

$$u_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} f_j \quad (1 \leq i \leq n) \quad \text{et} \quad A = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \right\}.$$

Alors pour tout entier $T \geq 1$ on a

$$\max_{|t|=T} \left\{ |D_{u_1}^{t_1} \circ \dots \circ D_{u_n}^{t_n} f(z)| \right\} \leq A^T \max_{|\tau|=T} \left\{ |D_{f_1}^{\tau_1} \circ \dots \circ D_{f_m}^{\tau_m} f(z)| \right\}.$$

Démonstration. C'est évident à partir des relations

$$D_{u_i} = \sum_{j=1}^m a_{ij} D_{f_j}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

En effet

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} D_{f_j} \right)^{t_i} = \sum_{j_1=1}^m \dots \sum_{j_T=1}^m a_{i_1, j_1} \dots a_{i_T, j_T} D_{f_{j_1}} \circ \dots \circ D_{f_{j_T}},$$

avec $(i_1, \dots, i_T) = (1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots, n, \dots, n)$ où i est répété t_i fois, $1 \leq i \leq n$. Or

$$\left| \sum_{j_1=1}^m \dots \sum_{j_T=1}^m a_{i_1, j_1} \dots a_{i_T, j_T} \right| \leq A^T;$$

le lemme est donc démontré.

(b) Plongement de G dans un espace quasi-projectif.

Pour $0 \leq i \leq d_1$, on plonge G_i dans A_1 de manière naturelle. Pour $d_1 < i \leq k$, on utilise le plongement de G_i dans un espace projectif \mathbb{P}_{N_i} donné dans [9, §1]. Ainsi l'exponentielle du groupe G_i , composée à droite avec ce plongement, et à gauche avec l'isomorphisme entre \mathbb{C}^{δ_i} et $T_{G_i}(\mathbb{C})$ introduit ci-dessus, donne une application

$$\Phi_i = (\varphi_{i,0}, \dots, \varphi_{i, N_i}): \mathbb{C}^{\delta_i} \rightarrow \mathbb{C}^{N_i+1},$$

où $\varphi_{i,j}$ sont des fonctions entières, non identiquement nulles, d'ordre strict ≤ 2 (cf. [9, propositions 7 & 8]). De plus pour tout $z \in \mathbb{C}^{\delta_i}$, on a

$$\sum_{\nu=0}^{N_i} |\varphi_{i,\nu}(z)| \geq \exp(-c_{30}(\|z\| + 1)^{\rho_i}).$$

Cette relation est une conséquence classique des propriétés des fonctions thêta quand G_i est une variété abélienne; dans le cas général G_i est extension d'une variété abélienne A_i par un groupe linéaire et la série complète définissant le plongement de G_i dans \mathbf{P}_{N_i} contient les fonctions thêta associées à A_i .

Pour $d_1 < i \leq k$ et $0 \leq \nu_i \leq N_i$, on définit une application méromorphe de \mathbf{C}^{δ_i} dans \mathbf{C}^{N_i+1} par

$$\psi_{i,\nu_i} = \left[\frac{\varphi_{i,0}}{\varphi_{i,\nu_i}}, \dots, \frac{\varphi_{i,\nu_i-1}}{\varphi_{i,\nu_i}}, 1, \frac{\varphi_{i,\nu_i+1}}{\varphi_{i,\nu_i}}, \dots, \frac{\varphi_{i,N_i}}{\varphi_{i,\nu_i}} \right].$$

On prolonge ces notations à $0 \leq i \leq d_1$ en posant

$$\begin{aligned} \Phi_0(z_0) &= \varphi_0(z_0) = \psi_0(z_0) = z_0, \\ \Phi_i(z_i) &= \varphi_i(z_i) = \psi_i(z_i) = e^{z_i}, \quad 1 \leq i \leq d_1. \end{aligned}$$

On désigne par \mathbf{P} le produit $\mathbf{A}_1^{d_1+1} \times \mathbf{P}_{N_{d_1+1}} \times \dots \times \mathbf{P}_{N_k}$. Le groupe G est naturellement plongé dans \mathbf{P} , et l'application exponentielle de G est représentée par la fonction

$$\Phi: \mathbf{C}^{d+1} \rightarrow \mathbf{C}^N,$$

définie par

$$\Phi(\mathbf{z}) = (\Phi_0(z_0), \dots, \Phi_k(z_k))$$

avec $N = 1 + k + N_{d_1+1} + \dots + N_k$. Pour $\mathbf{v} = (\nu_{d_1+1}, \dots, \nu_k) \in \mathbf{Z}^{k-d_1}$ avec $0 \leq \nu_i \leq N_i$, on définit une application méromorphe de \mathbf{C}^{d+1} dans \mathbf{C}^N par

$$\Psi_{\mathbf{v}}(\mathbf{z}) = (\psi_0(z_0), \dots, \psi_{d_1}(z_{d_1}), \psi_{d_1+1,\nu_{d_1+1}}(z_{d_1+1}), \dots, \psi_{k,\nu_k}(z_k)).$$

L'algèbre des coordonnées $\mathbf{C}[\mathbf{P}]$ de \mathbf{P} est formée des polynômes en N variables

$$X_0, \dots, X_{d_1}; X_{i,\nu_i} \quad (0 \leq \nu_i \leq N_i, d_1 < i \leq k),$$

qui, pour $d_1 < i \leq k$, sont homogènes en les $N_i + 1$ variables $X_{i,0}, \dots, X_{i,N_i}$. Un tel polynôme P a donc $k + 1$ degrés partiels L_0, L_1, \dots, L_k ; on lui associe la fonction F , entière sur \mathbf{C}^{d+1} définie par $F = P(\Phi)$, et les fonctions méromorphes $Y_{\mathbf{v}}$ ($0 \leq \nu_i \leq N_i, d_1 < i \leq k$), définies par $Y_{\mathbf{v}} = P(\Psi_{\mathbf{v}})$.

Nota bene: Si $d = d_1$ il n'y a pas d'indices \mathbf{v} et on a dans ce cas $\Phi = \Psi_{\cdot}$.

(c) Polynômes de Feldman et majorations analytiques.

Pour chaque entier positif k , on définit un polynôme en une variable

$$\Delta(z; k) = (z + 1) \cdots (z + k) / k!.$$

On pose aussi $\Delta(z; 0) = 1$. Nous choisissons deux entiers $L_{-1} \geq 1$ et $L_{-2} \geq 1$, et nous posons $L_0 = L_{-1}L_{-2}$. Les polynômes 1 et $\Delta(z + \lambda_{-1}; L_{-1})^{\lambda_{-2}}$, $1 \leq \lambda_{-1} \leq L_{-1}$, $1 \leq \lambda_{-2} \leq L_{-2}$ forment une base de l'espace des polynômes de degrés $\leq L_{-1}L_{-2}$. Nous écrivons les polynômes $P \in \mathbf{C}[P]$ du (b) ci-dessus en utilisant cette base pour la variable X_0 . Par abus de langage, nous dirons que P a pour degrés

$$(L_{-2}, L_{-1}, L_1, \dots, L_k).$$

Bien entendu, quand on parlera des coefficients de P , ce sera par rapport à cette base. Ces coefficients dépendent du choix de L_{-2} et L_{-1} . Quand nous dirons que P est de degrés $\leq (L_{-2}, L_{-1}, L_1, \dots, L_k)$, cela signifiera que P est de degrés $\leq (L_0, \dots, L_k)$, et que l'on a choisi L_{-1} et L_{-2} avec $L_0 = L_{-1}L_{-2}$.

Nous utiliserons la majoration (cf. [12, lemme 2.4])

$$\left| \frac{d^t}{dz^t} (\Delta(z + \lambda_{-1}; L_{-1})^{\lambda_{-2}}) \right| \leq t! \left(\frac{|z| + 2L_{-1}}{L_{-1}} \right)^{L_0} (2e)^{L_0},$$

valable pour $1 \leq \lambda_{-1} \leq L_{-1}$, $1 \leq \lambda_{-2} \leq L_{-2}$, et tout $z \in \mathbf{C}$.

Le lemme suivant fournit une majoration des valeurs en un point des dérivées d'une fonction $F = P(\Phi)$.

LEMME 3.2. *Il existe un réel $C_3 > 0$, ne dépendant que des plongements des G_i dans \mathbf{P}_{N_i} , des bases des T_{G_i} et des applications ψ_v définies plus haut, ayant la propriété suivante.*

Soit P un élément de $\mathbf{C}[P]$ de degrés $\leq (L_{-2}, L_{-1}, L_1, \dots, L_k)$, dont les coefficients dans \mathbf{C} sont de modules $\leq H$. Soient $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ des éléments de $T_G(\mathbf{C})$ (identifié à \mathbf{C}^{d+1}). Pour $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{Z}^n$, $t_i \geq 0$, on note

$$D^{\mathbf{t}} = D_{\mathbf{u}_1}^{t_1} \circ \dots \circ D_{\mathbf{u}_n}^{t_n}, \quad \|\mathbf{u}\| = \max\{\|\mathbf{u}_j\|; 1 \leq j \leq n\}.$$

Soit $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_k) \in \mathbf{C}^{\delta_0} \times \dots \times \mathbf{C}^{\delta_k} = \mathbf{C}^{d+1}$. Enfin soit T un réel positif. Alors pour $t_1 + \dots + t_n = T$ et $F = P(\Phi)$ on a

$$\begin{aligned} & \log|D^{\mathbf{t}}F(\mathbf{v})| \\ & \leq C_3 \left(\log H + T \log(T\|\mathbf{u}\|) + L_0 \log\left(\frac{\|\mathbf{v}_0\|}{L_{-1}} + 2\right) + \sum_{i=1}^k L_i (\|\mathbf{v}_i\|^{p_i} + 1) \right). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit f une fonction analytique dans \mathbf{C}^{d+1} . Notons $\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_d$ la base canonique de \mathbf{C}^{d+1} , et

$$\mathbf{u}_i = (u_{i,0}, \dots, u_{i,d}) = \sum_{j=0}^d u_{i,j} \mathbf{e}_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Grâce au lemme 3.1 on a pour $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$, $|\mathbf{t}| = T$,

$$|D^{\mathbf{t}}f(\mathbf{0})| \leq A^T \sup_{|\tau|=T} \left\{ |D_{\mathbf{e}_0}^{\tau_0} \circ \dots \circ D_{\mathbf{e}_d}^{\tau_d} f(\mathbf{0})| \right\},$$

avec $A = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=0}^d |u_{i,j}| \right\}$.

On utilise maintenant les inégalités de Cauchy sur le polydisque $\|z_i\| = 1$, $0 \leq i \leq k$, qui fournissent

$$\left| D_{\mathbf{e}_0}^{\tau_0} \circ \dots \circ D_{\mathbf{e}_d}^{\tau_d} f(\mathbf{0}) \right| \leq T! \sup_{\|z_i\|=1} \{ |f(\mathbf{z})| \}.$$

On applique cette inégalité à $f(\mathbf{z}) = F(\mathbf{z} + \mathbf{v})$, en utilisant la majoration, pour $\|z_i\| \leq 1 + \|\mathbf{v}_i\|$ ($0 \leq i \leq k$),

$$\log |F(\mathbf{z})| \leq c_{31} \left[\log H + L_0 \log \left(\frac{\|\mathbf{v}_0\|}{L_{-1}} + 2 \right) + \sum_{i=1}^k L_i (\|\mathbf{v}_i\|^{\rho_i} + 1) \right],$$

ce qui achève d'établir le lemme 3.2.

4. Estimations arithmétiques

On reprend la situation du paragraphe 3, mais maintenant on suppose G_0, \dots, G_k définis sur un corps de nombres K_0 . On va choisir des bases des T_{G_i} , et des plongements des G_i dans \mathbf{P}_N , qui soient définis sur K_0 . Alors, dans la situation du lemme 3.2, en supposant $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ algébriques (dans T_G) et $\exp_G \mathbf{v}$ algébrique (dans G), on pourra minorer $|D^{\mathbf{t}}F(\mathbf{v})|$ quand ce nombre n'est pas nul, par l'inégalité de la taille (ou de Liouville).

(a) Plongement de G dans \mathbf{P} défini sur K_0 .

Fixons i , $d_1 < i \leq k$ (le cas $k = d_1$ est banal ici). Quitte à remplacer K_0 par une extension finie (dépendant du groupe algébrique G_i), on peut supposer que le sous-groupe linéaire connexe maximal de G_i est déployé sur K_0 , c'est-à-dire est un produit direct de groupes isomorphes à G_a et G_m . Nous sommes alors dans la situation de [9, §1], et nous pouvons choisir le plongement de G dans \mathbf{P} , introduit au §3b, de telle sorte qu'il satisfasse les propriétés indiquées dans [9, §1]. Quand K est un sous-corps de \mathbf{C} contenant K_0 , on note $K[\mathbf{P}]$ les éléments de $\mathbf{C}[\mathbf{P}]$ à coefficients dans K .

(b) Base de $T_G(\mathbf{C})$ définies sur K_0 .

L'espace tangent de G à l'origine a une K_0 -structure. On peut donc choisir une base de $T_G(\mathbf{C})$, définie sur K_0 . Cela signifie que quand $P \in K_0[\mathbf{P}]$, et si $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^{d+1}$ a aussi ses coordonnées dans K_0 , les fonctions rationnelles sur G

associées à $P : Y_v = P(\Psi_v)$ ($0 \leq v_i \leq N_i, d_1 < i \leq k$), sont telles que $D_u Y_v$ est définie sur K_0 .

LEMME 4.1. *Fixons i ($d_1 < i \leq k$), et v_i ($0 \leq v_i \leq N_i$), et écrivons pour simplifier*

$$\psi_{i, v_i} = (f_1, \dots, f_{N_i})$$

où chaque f_i est une fonction méromorphe sur \mathbf{C}^{δ_i} .

Il existe des polynômes $Q_{t, s}$ ($1 \leq t \leq \delta_i, 1 \leq s \leq N_i$), dépendant de i et v_i , à coefficients dans K_0 tels que

$$\frac{\partial}{\partial z_t} f_s = Q_{t, s}(f_1, \dots, f_{N_i})$$

pour $1 \leq t \leq \delta_i, 1 \leq s \leq N_i$.

Démonstration. C'est la proposition 1.2.3 de [10].

(c) Minorations arithmétiques.

Nous utilisons la hauteur de Weil logarithmique et absolue déjà introduite au paragraphe 2. Si $P \in K[\mathbf{P}]$ (où K est une extension finie de K_0 dans les notations précédentes) est non nul, on écrit P comme au paragraphe 3(c), en utilisant les polynômes de Feldman pour la variable X_0 ; si p_1, \dots, p_M désignent les coefficients non nuls de P dans cette écriture alors on définit $\mathbf{h}(P)$ comme la hauteur du point $(1, p_1, \dots, p_M) \in \mathbf{P}_M(K)$.

LEMME 4.2. *Il existe un réel $C_4 > 0$ ne dépendant que des G_i , des plongements des G_i dans \mathbf{P}_{N_i} , des bases des T_{G_i} , des applications ψ_v choisies au §3 représentant les exponentielles et de K_0 , ayant la propriété suivante.*

Soit K une extension finie de $K_0, D = [K : \mathbf{Q}]$. Soit $P \in K[\mathbf{P}]$, de degrés $\leq (L_{-2}, L_{-1}, L_1, \dots, L_k)$, à coefficients entiers dans K avec $\mathbf{h}(P) \leq \log H, H \geq 1$. Soient $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ des éléments de K^{d+1} et W le \mathbf{C} -espace vectoriel qu'ils engendrent dans \mathbf{C}^{d+1} . On note, comme dans le lemme 3.2:

$$D^t = D_{\mathbf{u}_1}^{t_1} \circ \dots \circ D_{\mathbf{u}_n}^{t_n}, \quad \|\mathbf{u}\| = \max\{\|\mathbf{u}_j\|; 1 \leq j \leq n\}.$$

Soit $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_k) \in \mathbf{C}^{\delta_0} \times \dots \times \mathbf{C}^{\delta_k} = \mathbf{C}^{d+1}$ avec $v_0 = 1$ tel que $\exp_G \mathbf{v} \in G(K)$. Soient B et V_0, \dots, V_k des nombres réels $\geq e$ tels que

$$\log B \geq \mathbf{h}(\mathbf{u}_j) \quad (1 \leq j \leq n)$$

$$\log V_i \geq \max\{\mathbf{h}(\exp_G v_i); \|v_i\|^{p_i}/D\} \quad (1 \leq i \leq k).$$

Enfin soient T, S deux entiers positifs, et soient t_1, \dots, t_n, s des entiers ≥ 0 avec $t_1 + \dots + t_n = T$ et $0 \leq s < S$. On suppose que la fonction $F = P(\Phi)$ a un zéro en sv d'ordre $\geq T$ le long de W , et que le nombre $D^t F(sv)$ n'est pas nul. Alors

$$\log |D^t F(sv)| \geq -C_4 D \left\{ \log H + T \log(BT + L_0 + \dots + L_k) + TL_{-1} + L_0 \log \left(\frac{S}{L_{-1}} + 2 \right) + \sum_{i=1}^k L_i S^{\rho_i} \log V_i \right\}.$$

Démonstration. Il n'y a pas de restriction à supposer que les degrés de P par rapport aux variables X_1, \dots, X_k sont exactement L_1, \dots, L_k .

Associons à chaque i , avec $d_1 \leq i \leq k$, un indice ν_i tel que

$$|\varphi_{i, \nu_i}(s\nu_i)| \geq \exp(-c_{30} \|s\nu_i\|^{\rho_i}) / (N_i + 1) \geq \exp(-c_{41} D S^{\rho_i} \log V_i),$$

et posons $\nu = (\nu_{d_1+1}, \dots, \nu_k)$.

Il résulte de [4, lemme 7] que

$$\mathbf{h}(\exp_{G_i} s\nu_i) \leq c_{42} [(S^{\rho_i} + 1) + S^{\rho_i} \mathbf{h}(\exp_{G_i} \nu_i)] \leq c_{43} S^{\rho_i} \log V_i.$$

Nous désignons par $\tau_{s\nu}$ la translation par $\exp_G s\nu$ sur G , et nous la représentons sur des cartes (indexées par un ensemble \mathcal{A}) par des opérateurs $\tau_{s\nu}^{(\alpha)}$ ($\alpha \in \mathcal{A}$). Utilisons maintenant le lemme 4.1 pour exprimer les fonctions

$$D^t \circ \tau_{s\nu}^{(\alpha)}(P \circ \Psi_\nu)$$

sous la forme $P_{t,s}^{(\alpha)}(\Psi_\nu)$ où $P_{t,s}^{(\alpha)}$ est un polynôme de $K[\mathbf{P}]$ s'écrivant

$$P_{t,s}^{(\alpha)} = \sum_{\lambda_{-1}=-1}^{L_{-1}} \sum_{\lambda_{-2}=-1}^{L_{-2}} \sum_{\tau=0}^T \frac{d^\tau}{dX_0^\tau} (\Delta(X_0 + s + \lambda_{-1}; L_{-1})^{\lambda_{-2}}) \times \sum_{i=1}^k \sum_{|\lambda_i|=-L_i} p_\lambda \cdot X_{i,0}^{\lambda_i} \dots X_{i,N_i}^{\lambda_i},$$

avec

$$\max_{\lambda} \{ \mathbf{h}(p_\lambda) \} \leq \log H + c_{45} \left[T \log(BT + L_0 + \dots + L_k) + \sum_{i=1}^k L_i S^{\rho_i} \log V_i \right],$$

et

$$L'_1 = L_1, \dots, L'_{d_1} = L_{d_1}, L'_{d_1+1} \leq c_{45} (T + L_{d_1+1}), \dots, L'_k \leq c_{45} (T + L_k).$$

Le nombre algébrique

$$D^t \circ \tau_{sv}(P \circ \Psi_v)(0) = D^t(P \circ \Psi_v)(sv),$$

est la valeur d'au moins un polynôme $P_{t,s}^{(a)}$ au point $\Psi_v(0)$; donc il appartient au corps K qui est de degré D sur \mathbf{Q} , et on peut majorer sa hauteur par

$$\log H + c_{46} \left[T \log(BT + L_0 + \dots + L_k) + \sum_{i=1}^k L_i S^{\rho_i} \log V_i + TL_{-1} + L_0 \log\left(\frac{S}{L_{-1}} + 2\right) \right].$$

Remarquons, pour cela, qu'un dénominateur commun des nombres

$$\left. \frac{d^\tau}{dX_0^\tau} (\Delta(X_0 + s + \lambda_{-1}; L_{-1})^{\lambda_{-2}}) \right|_{X_0=0} \in \mathbf{Q},$$

est la puissance τ -ième du plus petit commun multiple de $1, 2, \dots, L_{-1}$ (cf. [12, lemme 2.4]), et est donc en particulier $\leq \exp(c_{47}TL_{-1})$, tandis que les logarithmes des valeurs absolues de ces mêmes nombres rationnels sont majorées par

$$c_{47} \left[L_0 \log\left(\frac{S}{L_{-1}} + 2\right) + T \log T \right].$$

Comme $F = (P \circ \Psi_v) \times \prod_{i=d_1+1}^k (\varphi_{i,v_i})^{L_i}$ et que les fonctions φ_{i,v_i} ne s'annulent pas en sv le nombre $D^t F(sv)$ n'est pas nul si et seulement si le nombre

$$D^t(P \circ \Psi_v)(sv)$$

n'est pas nul; il résulte donc de l'inégalité de la taille

$$\begin{aligned} & \log |D^t(P \circ \Psi_v)(sv)| \\ & \geq -c_{48} D \left[\log H + T \log(BT + L_0 + \dots + L_k) + \sum_{i=1}^k L_i S^{\rho_i} \log V_i + TL_{-1} + L_0 \log\left(\frac{S}{L_{-1}} + 2\right) \right]. \end{aligned}$$

Enfin comme $\text{ord}_{sv} F = T = t_1 + \dots + t_n$ on a encore

$$D^t F(sv) = D^t(P \circ \Psi_v)(sv) \times \prod_{i=d_1+1}^k (\varphi_{i,v_i}(sv))^{L_i},$$

mais grâce au choix des ν_i fait au début de la démonstration on a

$$\prod_{i=d_1+1}^k |\varphi_{i, \nu_i}(sv)|^{L_i} \geq \exp\left(-c_{49}D \sum_{i=1}^k L_i S^{\rho_i} \log V_i\right),$$

et le lemme s'obtient en combinant les trois dernières relations.

5. Préparatifs

Soit G un groupe algébrique commutatif connexe de dimension $d + 1$, défini sur \mathbb{C} , et plongé dans un espace projectif \mathbb{P}_n . Nous reprenons, dans un premier temps, les résultats de [5] pour minorer la distance d'une période de l'application \exp_G à l'espace tangent T_G , d'un sous-groupe algébrique G' de G . Puis nous isolons, dans la situation décrite au paragraphe 3, le sous-groupe algébrique extrémal qui nous servira à construire la fonction auxiliaire au prochain numéro. Nous traduisons, enfin, la minoration de la première partie pour ce sous-groupe algébrique particulier.

(a) Périodes et approximation.

Le groupe G s'écrit comme une extension d'une variété abélienne A , de dimension g , par un groupe linéaire L , de dimension l ($d + 1 = l + g$),

$$0 \rightarrow L \rightarrow G \xrightarrow{\pi} A \rightarrow 0,$$

L est le produit d'une puissance L_a du groupe additif G_a par une puissance L_m du groupe multiplicatif G_m .

L'espace tangent T_G en l'origine à G est un \mathbb{C} -espace vectoriel isomorphe à $T_L \times T_A$ contenant le réseau $\Omega = \ker \exp_G$ des périodes de \exp_G ; fixons un tel isomorphisme identifiant l'application $d\pi$ avec la seconde projection. Le réseau $d\pi(\Omega) = \Omega_A$ (resp. $\Omega \cap T_L = \Omega_L$) est le réseau des périodes de \exp_A (resp. \exp_L), on a $T_L \simeq T_{L_a} \times T_{L_m}$ avec $T_{L_a} \simeq \mathbb{C}^a$, $T_{L_m} \simeq \mathbb{C}^m$ et $\Omega_L \simeq (2i\pi\mathbb{Z})^m \subseteq T_{L_m}$. Choisissons $\omega_1, \dots, \omega_{2g}$ (resp. ζ_1, \dots, ζ_m) une base sur \mathbb{Z} de Ω_A (resp. Ω_L) et une base τ_1, \dots, τ_{2a} du \mathbb{R} -espace vectoriel sous-jacent à T_{L_a} . Les vecteurs

$$\{\omega_1, \dots, \omega_{2g}, \zeta_1, \dots, \zeta_m, i\zeta_1, \dots, i\zeta_m, \tau_1, \dots, \tau_{2a}\} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2d+2}\}$$

forment alors une base du \mathbb{R} -espace vectoriel sous-jacent à T_G grâce à laquelle nous identifions T_G à \mathbb{R}^{2d+2} . Nous notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^{2d+2} et $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ pour $x \in \mathbb{R}^{2d+2}$; cette norme est équivalente, sur T_G , à la norme introduite au paragraphe 2 et notée aussi $\|\cdot\|$. Les constantes de comparaison de ces deux normes ne dépendant que des G_i et des bases des T_{G_i} choisies, nous ne distinguerons pas, ici, la nouvelle norme $\|\cdot\|$

de la précédente. Enfin nous noterons ι le plongement de G dans \mathbf{P}_n et $\deg X$ le degré de l'adhérence de Zariski dans \mathbf{P}_n de $X \subset \mathbf{P}_n$ (voir (b) pour une définition).

Rappelons le corollaire 2 de [5], où nous identifions T_G avec \mathbf{R}^{2d+2} comme décrit ci-dessus.

THÉORÈME 5.1. *Si G' est un sous-groupe algébrique de G de degré $\leq \Delta$ dans \mathbf{P}_n et $\omega \in \Omega$ alors, ou bien $\omega \in T_{G'}$, ou bien*

$$(5.2) \quad d(\omega, T_{G'}) =: \min\{\|\omega - u\|; u \in T_{G'}\} \geq C_5 \cdot \Delta^{-1},$$

où $C_5 \in]0, 1]$ est un réel dépendant de G , du plongement de G dans \mathbf{P}_n et du choix de la base $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2d+2}$ de T_G sur \mathbf{R} .

Démonstration. Voir [5, corollaire 2].

(b) Choix d'un sous-groupe.

Soient G_0, \dots, G_k des groupes algébriques commutatifs connexes définis sur \mathbf{C} avec $G_0 = \mathbf{G}_a$, $G_1 = \dots = G_{d_1} = \mathbf{G}_m$, $k \geq d_1 \geq 0$. On note $G = G_0 \times \dots \times G_k$, $\delta_i = \dim G_i$ ($0 \leq i \leq k$), $d + 1 = \dim G = \delta_0 + \dots + \delta_k$ et $d_2 = d - d_1$ comme au paragraphe 2. Pour $i = 0, \dots, d_1$ on plonge G_i dans \mathbf{P}_1 de manière naturelle et pour $i = d_1 + 1, \dots, k$ on plonge G_i dans un espace projectif \mathbf{P}_{N_i} "à la Serre" comme au paragraphe 3b. Soit

$$\bar{\mathbf{P}} =: (\mathbf{P}_1)^{d_1+1} \times \mathbf{P}_{N_{d_1+1}} \times \dots \times \mathbf{P}_{N_k};$$

l'algèbre des coordonnées $\mathbf{C}[\bar{\mathbf{P}}]$ de $\bar{\mathbf{P}}$ est formée des polynômes homogènes par rapport à chaque groupe de variables

$$(X_{i,0}, X_{i,1}) \quad (0 \leq i \leq d_1) \quad \text{et} \quad (X_{i,0}, \dots, X_{i,N_i}) \quad (d_1 < i \leq k).$$

Si X est une sous-variété algébrique de $\bar{\mathbf{P}}$ et si l'on note $I(X)$ son idéal de définition dans $\mathbf{C}[\bar{\mathbf{P}}]$, nous reprenons les notations introduites dans [7]. Notamment

$$\dim_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}[\bar{\mathbf{P}}]/I(X))_{(L_0, \dots, L_k)}$$

est, pour L_0, \dots, L_k assez grands, la valeur d'un polynôme, dit de Hilbert-Samuel, en L_0, \dots, L_k à coefficients rationnels dont nous notons

$$H(X; L_0, \dots, L_k) / (\dim X)!$$

la partie homogène de plus haut degré (= $\dim X$).

Utilisant les plongements de Segré nous plongeons encore \bar{P} dans un espace projectif P_n de sorte que si X est une sous-variété algébrique de \bar{P} , son degré $\deg X$ dans P_n (i.e., $(\dim X)!$ fois le coefficient dominant du polynôme de Hilbert-Samuel de X dans P_n) est égal à $H(X; 1, \dots, 1)$ (voir à ce sujet la fin de la démonstration du lemme 6.7 plus loin).

Nous reprenons maintenant les notations du paragraphe 2 et notamment la forme linéaire L sur T_G dont nous notons W le noyau dans T_G . Dans l'écriture (2.2) de la forme linéaire L il n'y a pas de restriction à supposer que $\beta_d = -1$; nous munissons alors l'hyperplan W de la base

$$e_j = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0, -\beta_{j-1}) \quad (1 \leq j \leq d).$$

Rappelons que nous avons introduit le point $v = (1, v_1, \dots, v_k)$ de $T_G(\mathbb{C})$ dans le théorème 2.1. Nous posons $V = \max\{V_i; 1 \leq i \leq k\}$.

Nous fixons un réel C_0 assez grand, beaucoup plus grands que tous les autres réels C_λ et c_{λ_i} qui vont intervenir dans la suite; ils ne dépendent pas des paramètres D, B, V_1, \dots, V_k, E . On pose

$$(5.3) \quad S = [C_0^5(D \log B)/(\log E)],$$

$$(5.4) \quad S_0 = [S/C_0^2],$$

$$(5.5)$$

$$U_0 = C_0^{4(d+1)+5d_2} \cdot D^{d+d_2+2} \cdot (\log B)^{d_2+1} \\ \cdot \prod_{i=1}^k (\log V_i)^{\delta_i} \cdot \log(DE) \cdot (\log E)^{-d-d_2-1}.$$

Comme $E \leq B^D$ et $E \leq V_0^{C_2 D}$, on a $U_0 > c_{50} C_0^{4(d+1)} D^2 \log(BV)$, et on peut choisir un nombre U_1 dans l'intervalle $U_0 \geq U_1 > C_0^4 D^2 \log(BV)$; pour chaque nombre réel $U \geq C_0$ on définit des nombres réels $U', L_0^\#, \dots, L_k^\#$ et des entiers $L_{-1}, L_{-2}, L_0, \dots, L_k, T$ et T_0 comme fonctions de U par $U' = \max\{U, U_1\}$, et

$$(5.6) \quad L_{-1} = \max\{1; \min\{[\log B]; [L_0^\#]\}\} \text{ où } L_0^\# = U/D \log(DE),$$

$$(5.7) \quad L_{-2} = [L_0^\#/L_{-1}],$$

$$(5.8) \quad L_0 = L_{-1} L_{-2},$$

$$(5.9) \quad L_i = [U/DS^{\rho_i} \log V_i] \text{ et } L_i^\# = U/DS^{\rho_i} \log V_i \quad (1 \leq i \leq k),$$

$$(5.10) \quad T = [U'/C_0 D \log B] \text{ et } T^\# = U'/C_0 D \log B,$$

$$(5.11) \quad T_0 = [T/C_0^2].$$

Remarquons tout de suite que l'on a $T > D$ et

$$L_0 \log(2 + (4ES/L_{-1})) \leq (\log C_0) U'/D.$$

Enfin rappelons que l'on note, comme dans [10],

$$\Gamma(S) = \{\exp_G(sv); s \in \mathbb{Z}, 0 \leq s < S\}.$$

PROPOSITION 5.12. *Il existe un nombre réel U , dans l'intervalle*

$$(4/C_0^2)S \log E \leq U \leq U_0,$$

ayant les propriétés suivantes.

(5.13) *Pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de G vérifiant $T_{G'} \subseteq W$ on a, en notant $r = \dim G/G'$,*

$$(T^\#)^{r-1} \text{card}((\Gamma(S) + G')/G') \cdot H(G'; L_0^\#, \dots, L_k^\#) \geq C_0 H(G; L_0^\#, \dots, L_k^\#).$$

(5.14) *Il existe un sous-groupe algébrique connexe \tilde{G} de G tel que $T_{\tilde{G}} \subseteq W$, et, en posant $\tilde{r} = \dim G/\tilde{G}$,*

$$(T^\#)^{\tilde{r}-1} \text{card}((\Gamma(S) + \tilde{G})/\tilde{G}) \cdot H(\tilde{G}; L_0^\#, \dots, L_k^\#) = C_0 H(G; L_0^\#, \dots, L_k^\#).$$

Démonstration. Remarquons d'abord que la quantité

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(G') &= C_0^{-1} (T^\#/U)^{r-1} \text{card}((\Gamma(S) + G')/G') \\ &\quad \cdot \frac{H(G'; L_0^\#/U, \dots, L_k^\#/U)}{H(G; L_0^\#/U, \dots, L_k^\#/U)} \end{aligned}$$

dépend de G' , mais pas de U .

Parmi tous les sous-groupes algébriques G' de G vérifiant $T_{G'} \subseteq W$, on en choisit un, \tilde{G} , pour lequel la quantité $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\tilde{G})$ est minimale et on pose

$$U = \mathcal{A}^{1/r} \max\{\mathcal{A}; U_1\}^{(r-1)/r}.$$

On vérifie ainsi (5.13) et (5.14) (il faut noter que le quotient des deux fonctions H est homogène de degré r). Il reste à voir que U est bien dans l'intervalle annoncé.

Si $U \leq U_1$, on a $U \leq U_0$. Sinon, d'après (5.13) pour $G' = 0$, on a

$$(T^\#)^d S \geq C_0 H(G; L_0^\#, \dots, L_k^\#) \geq C_0 (L_0^\#)^{\delta_0} \dots (L_k^\#)^{\delta_k},$$

d'où

$$U \leq C_0^{-1} \frac{(T^\#/U)^d S}{(L_0^\#/U)^{\delta_0} \dots (L_k^\#/U)^{\delta_k}} \leq U_0,$$

car $S \leq C_0^5 D(\log B)(\log E)^{-1}$.

On minore maintenant U en utilisant (5.14). On a

$$\mathcal{A} = C_0^{-1} (T^\#/U)^{\tilde{r}-1} \text{card}((\Gamma(S) + \tilde{G})/\tilde{G}) \cdot \frac{H(\tilde{G}; L_0^\#/U, \dots, L_k^\#/U)}{H(G; L_0^\#/U, \dots, L_k^\#/U)},$$

on remarque alors que, si π_0 désigne la projection de G sur G_0 ,

$$\frac{H(\tilde{G}; L_0^\# / U, \dots, L_k^\# / U)}{H(G; L_0^\# / U, \dots, L_k^\# / U)} \geq \begin{cases} c_{51}(S \log E)^{\tilde{r}} & \text{si } \pi_0(\tilde{G}) \neq \{0\} \\ c_{51}(S \log E)^{\tilde{r}-1} D \log E & \text{si } \pi_0(\tilde{G}) = \{0\}, \end{cases}$$

car $\log E \leq C_2 D \log V_i$ ($1 \leq i \leq k$). Si $\pi_0(\tilde{G}) = \{0\}$, on a aussi

$$\text{card}((\Gamma(S) + \tilde{G}) / \tilde{G}) = S;$$

donc dans tous les cas on a les minoration (en tenant compte du fait que $\tilde{r} \geq 1$),

$$\begin{aligned} U &\geq \mathcal{A} \geq C_0^{-1} (1/C_0 D \log B)^{\tilde{r}-1} (S \log E)^{\tilde{r}} \\ &\geq c_{52} C_0^{4\tilde{r}} D \log B \geq (4/C_0^2) S \log E. \end{aligned}$$

(c) Les deux cas.

Nous allons appliquer le théorème 5.1 au groupe \tilde{G} du lemme précédent. Reprenons le point $\mathbf{v} = (1, v_1, \dots, v_k) \in T_G(\mathbf{C})$, et notons que $\mathbf{v} \notin T_{\tilde{G}}$, puisque $T_{\tilde{G}} \subseteq W$. Ainsi:

—ou bien pour tout $s = 1, \dots, S - 1$, on a $s\mathbf{v} \notin \Omega + T_{\tilde{G}}$ et nous dirons que nous sommes dans le cas “non-périodique”;

—ou bien il existe $s_0 \in \{1, \dots, S - 1\}$ tel que $s_0\mathbf{v} \in \Omega + T_{\tilde{G}}$, nous dirons alors que nous sommes dans le cas “périodique”. Dans ce cas (5.2) montre que $d(s_0\mathbf{v}, T_{\tilde{G}}) \geq C_5 H(\tilde{G}; 1, \dots, 1)^{-1}$ d’où, après homothétie de rapport $1/s_0 \geq 1/S$,

$$d(\mathbf{v}, T_{\tilde{G}}) \geq d(s_0\mathbf{v}, T_{\tilde{G}}) / s_0 \geq (C_5 / S) H(\tilde{G}; 1, \dots, 1).$$

Rappelons que l’hyperplan $W = \text{Ker } L$, avec

$$L(\mathbf{z}) = \beta_0 z_0 + \dots + \beta_{d-1} z_{d-1} - z_d,$$

est muni d’une base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d)$:

$$\mathbf{e}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -\beta_{j-1}), \quad 1 \leq j \leq d,$$

grâce à laquelle nous identifions W à \mathbf{C}^d . On note (\cdot, \cdot) le produit hermitien canonique sur \mathbf{C}^d , et $|\cdot| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$ la norme associée. Cette norme $|\cdot|$ est bien sûr équivalente à la restriction à W de la norme $\|\cdot\|$ introduite au paragraphe 2, mais les constantes de comparaison de ces normes dépendent

des paramètres B et D ; plus précisément on a, pour tout $\mathbf{w} \in W$,

$$|\mathbf{w}| \leq \|\mathbf{w}\| \leq \sqrt{2} BD |\mathbf{w}|.$$

Nous choisissons une base $\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{\tilde{d}}$ (avec $\tilde{d} = d + 1 - \tilde{r} = \dim \tilde{G}$) de $T_{\tilde{G}} \subseteq W$ orthonormée par rapport à (\cdot, \cdot) . Complétons cette base en une base $\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_d$ de W orthonormée par rapport à (\cdot, \cdot) . Les coefficients des $\tilde{\mathbf{e}}_j$ dans la base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d)$ de W sont de modules ≤ 1 . Pour $\mathbf{w} \in W$, posons

$$\tilde{d}(\mathbf{w}, T_{\tilde{G}}) = \min\{|\mathbf{w} - \mathbf{u}|; \mathbf{u} \in T_{\tilde{G}}\}.$$

Si on écrit $\mathbf{w} = w_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \dots + w_d \tilde{\mathbf{e}}_d$, alors

$$\tilde{d}(\mathbf{w}, T_{\tilde{G}}) = \left[\sum_{i=\tilde{d}+1}^d |w_i|^2 \right]^{1/2}.$$

D'autre part nous avons un point $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_k)$ dans $T_G(\mathbb{C})$, avec $v_0 = 1$, $v_i \in T_{G_i}(\mathbb{C})$ ($0 \leq i \leq k$). On écrit \mathbf{v} dans \mathbb{C}^{d+1} sous la forme $\mathbf{v} = (1, v_1, \dots, v_d)$, et on pose

$$\mathbf{w} = (1, v_1, \dots, v_{d-1}, \beta_0 + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{d-1} v_{d-1}).$$

de sorte que $\mathbf{w} \in W$ et $\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| = |L(\mathbf{v})|$.

Il est utile de remarquer que l'on a

$$\|\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| \leq c_{53} \max_{1 \leq i \leq k} \{1; \|v_i\|\} + |L(\mathbf{v})| \leq c_{54} B + |L(\mathbf{v})|.$$

Dans le cas non périodique on pose $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d) = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_d)$, tandis que dans le cas périodique on prend $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d) = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{d-1}, \mathbf{w})$.

Dans le reste de ce paragraphe nous étudions plus en détail le cas périodique. Dans ce cas, si on suppose $|L(\mathbf{v})| \leq C_5/(2S \cdot H(\tilde{G}; 1, \dots, 1))$, on a

$$|L(\mathbf{v})| = \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| < d(\mathbf{v}, T_{\tilde{G}})/2$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\mathbf{w}, T_{\tilde{G}}) &\geq (d(\mathbf{v}, T_{\tilde{G}}) - \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|)/\sqrt{2} BD > d(\mathbf{v}, T_{\tilde{G}})/2\sqrt{2} BD \\ &\geq C_5/(2\sqrt{2} BDS \cdot H(\tilde{G}; 1, \dots, 1)). \end{aligned}$$

En particulier $d > \tilde{d}$, et au moins une des $d - \tilde{d}$ dernières coordonnées de \mathbf{w} dans la base $\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_d$ de W est de module $\geq C_5/(2\sqrt{2} BDS \cdot H(\tilde{G}; 1, \dots, 1))$.

Quitte à renuméroter $\tilde{\mathbf{e}}_{d+1}, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_d$ on peut supposer que l'on a

$$\mathbf{w} = w_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \dots + w_d \tilde{\mathbf{e}}_d, \quad \text{avec } |w_d| \geq C_5 / (2\sqrt{2} BDS \cdot H(\tilde{G}; 1, \dots, 1)).$$

La matrice des coordonnées de $\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_d$ dans la base $\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{d-1}, \mathbf{w}$ de W est

$$\begin{bmatrix} 1, 0, \dots, 0, & -w_1/w_d \\ 0, 1, \dots, 0, & -w_2/w_d \\ \vdots & \\ 0, \dots, 0, 1, & -w_{d-1}/w_d \\ 0, \dots, 0, 0, & +1/w_d \end{bmatrix}$$

et les modules des coefficients de cette matrice sont donc majorés par

$$2\sqrt{2} \|\mathbf{w}\| BDS \cdot H(\tilde{G}; 1, \dots, 1) / C_5.$$

Finalement la matrice des coordonnées des $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ dans la base $\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_d$ étant à coefficients de modules ≤ 1 , il en résulte:

SCOLIE 5.15. *Si $|L(\mathbf{v})| \leq C_5 / (2S \cdot H(\tilde{G}; 1, \dots, 1))$, on a, avec les notations ci-dessus, dans le cas périodique,*

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^d e_{i,j} \tilde{\mathbf{f}}_j \quad \text{pour } i = 1, \dots, d,$$

où les nombres complexes $e_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq d$, vérifient

$$\begin{aligned} \max\{|e_{i,j}|; 1 \leq i, j \leq d\} &\leq 2\sqrt{2} \|\mathbf{w}\| BDS \cdot H(\tilde{G}; 1, \dots, 1) / C_5 \\ &\leq c_{54} B^2 DS \cdot H(\tilde{G}; 1, \dots, 1). \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ 5.16. *On a, avec les notations de la Proposition 5.12,*

$$H(\tilde{G}; 1, \dots, 1) \leq c_{55} C_0 U^{d+1}.$$

Démonstration. On remarque que la fonction

$$H(\tilde{G}; L_0^\#, \dots, L_k^\#) / H(G; L_0^\#, \dots, L_k^\#)$$

est rationnelle, décroissante par rapport à chaque paramètre $L_i^\#$ et homogène par rapport à $L_0^\#, \dots, L_k^\#$. Ainsi d'après (5.14) et en posant $\tilde{L}_i = \max\{1; L_i\}$

($0 \leq i \leq k$) on a

$$\begin{aligned} \frac{H(\tilde{G}; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k)}{H(G; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k)} &\leq \frac{H(\tilde{G}; L_0^\# / 2, \dots, L_k^\# / 2)}{H(G; L_0^\# / 2, \dots, L_k^\# / 2)} \\ &\leq 2^{\tilde{r}} \cdot \frac{H(\tilde{G}; L_0^\#, \dots, L_k^\#)}{H(G; L_0^\#, \dots, L_k^\#)} \\ &\leq 2^{\tilde{r}} C_0, \end{aligned}$$

car $\tilde{L}_i \geq L_i^\# / 2$, et donc

$$H(\tilde{G}; 1, \dots, 1) \leq 2^{\tilde{r}} C_0 \cdot H(G; L_0^\#, \dots, L_k^\#) \leq c_{55} C_0 U^{d+1}.$$

6. Construction de la fonction auxiliaire

Dans ce paragraphe nous construisons la fonction auxiliaire obligée dans toute démonstration de transcendance. Nous utiliserons, pour cela, un argument de type “principe des tiroirs” pour résoudre des inéquations. Le lemme de Thue-Siegel correspondant est donné au (a). Ensuite nous reprenons le sous-groupe algébrique \tilde{G} choisi au numéro précédent pour majorer le rang du système linéaire dont nous cherchons une solution approchée. Les notations sont données au (b) et nous faisons appel au (c) au premier théorème de [6] pour comparer polynômes et fonctions de Hilbert-Samuel. Enfin au (d) nous construisons effectivement la fonction auxiliaire et donnons les estimations nécessaires pour l’extrapolation prochaine.

(a) Lemme de Thue-Siegel.

Il s’agit du lemme suivant.

LEMME 6.1. Soit $(u_{i,j})_{1 \leq i \leq \nu; 1 \leq j \leq \mu}$ une matrice de nombres complexes, de rang $\leq \rho$. Soient δ, m, μ des nombres réels positifs tels que

$$(6.2) \quad [2\mu e^{\delta+m+\mu} + 1]^{2\rho} \leq e^{\nu\delta},$$

et

$$\max_{1 \leq j \leq \mu} \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} |u_{i,j}| \right\} \leq e^m.$$

Alors il existe $(a_1, \dots, a_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu$ tel que

$$(6.3) \quad 0 < \max_{1 \leq i \leq \nu} \{|a_i|\} \leq e^\delta,$$

et

$$(6.4) \quad \max_{1 \leq j \leq \mu} \left\{ \left| \sum_{i=1}^{\nu} u_{i,j} a_i \right| \right\} \leq e^{-\lambda}.$$

Pour la démonstration de ce lemme on se ramène au cas particulier suivant.

LEMME 6.5. Soient $u_{i,j}$ ($1 \leq i \leq \nu; 1 \leq j \leq \mu$) des nombres complexes, avec

$$\max_{1 \leq j \leq \mu} \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} |u_{i,j}| \right\} \leq 1.$$

Soit ρ le rang de la matrice $(u_{i,j})$. Soient Δ et l deux entiers positifs vérifiant

$$l^{2\rho} < (\Delta + 1)^{\nu}.$$

Alors il existe des entiers rationnels a_1, \dots, a_{ν} vérifiant

$$0 < \max_{1 \leq i \leq \nu} \{|a_i|\} \leq \Delta,$$

et

$$\max_{1 \leq j \leq \mu} \left\{ \left| \sum_{i=1}^{\nu} u_{i,j} a_i \right| \right\} \leq 2\mu \Delta / l$$

Remarque. Si les $u_{i,j}$ sont réels on peut remplacer 2ρ par ρ et omettre le facteur 2.

Démonstration. On désigne par \mathcal{E} l'ensemble des $(a_1, \dots, a_{\nu}) \in \mathbf{Z}^{\nu}$ vérifiant $0 \leq a_i \leq \Delta$ ($1 \leq i \leq \nu$), et par $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{C}^{\mu}$ l'application

$$(a_1, \dots, a_{\nu}) \rightarrow \left(\sum_{i=1}^{\nu} u_{i,j} a_i \right)_{1 \leq j \leq \mu}.$$

L'image de φ est contenue dans un cube \mathcal{F} de $\mathbf{C}^{\mu} \simeq \mathbf{R}^{2\mu}$, de côté $\leq \Delta$. Elle est aussi contenue dans un sous-espace vectoriel E de \mathbf{C}^{μ} de dimension ρ sur \mathbf{C} . Comme $E \cap \mathcal{F}$ est contenu dans une boule euclidienne de rayon $\Delta\sqrt{2\mu}/2$, donc dans un cube de E ($\simeq \mathbf{R}^{2\rho}$) de côté $\Delta\sqrt{2\mu}$, on peut recouvrir $E \cap \mathcal{F}$ par $l^{2\rho}$ petits cubes de côté $\Delta\sqrt{2\mu}/l$. Comme $l^{2\rho} < (\Delta + 1)^{\nu}$, par le principe des tiroirs, il existe $\mathbf{a}' \neq \mathbf{a}''$ dans \mathcal{E} tels que $\varphi(\mathbf{a}')$ et $\varphi(\mathbf{a}'')$ appartiennent au même petit cube. Alors la différence $\mathbf{a} = \mathbf{a}' - \mathbf{a}''$ vérifie ce que l'on veut.

Démonstration du Lemme 6.1. Par homogénéité on se ramène à $m = 0$. On pose $\Delta = [e^{\delta}]$. Grâce à l'hypothèse (6.2) il existe un entier $l > 0$ tel que

$$2\mu \Delta / l \leq e^{-\lambda} \quad \text{et} \quad l^{2\rho} < (\Delta + 1)^{\nu}.$$

On peut donc appliquer le lemme 6.5.

(b) Notations

Nous reprenons les notations introduites dans les paragraphes précédents. En particulier $W = \ker L$ est un hyperplan de $T_G(\mathbf{C})$, muni de deux bases $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d)$ et $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d)$. Nous supposons désormais

$$0 < |L(\mathbf{v})| < e^{-c\delta^{1/2}U'}.$$

On désigne par K le corps de nombres engendré sur K_0 par les nombres $\beta_0, \dots, \beta_{d-1}$, et par des coordonnées projectives des points $\exp_{G'} \mathbf{v}_i, 0 \leq i \leq k$, dans $\mathbf{P}_{N_i}(\mathbf{Q})$. Désignons ces générateurs de K sur K_0 par $\beta_0, \dots, \beta_{d-1}, \dots, \beta_{M-1}$, et soit β_M un générateur de K_0 sur \mathbf{Q} . Alors on obtient un système générateur de K comme \mathbf{Q} -espace vectoriel en prenant l'ensemble

$$\{ \beta_0^{\alpha_0} \cdots \beta_M^{\alpha_M}; 0 \leq \alpha_i < [\mathbf{Q}(\beta_i) : \mathbf{Q}], \alpha_0 + \cdots + \alpha_M < [K : \mathbf{Q}] \}.$$

On choisit parmi ces éléments une base ξ_1, \dots, ξ_D du \mathbf{Q} -espace vectoriel K .

Quand P est un polynôme dont les coefficients p_λ sont des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^D p_{\lambda, i} \xi_i$ à coefficients $p_{\lambda, i}$ dans \mathbf{Z} , on a

$$\mathbf{h}(P) \leq \mathbf{h}(1, \xi_1, \dots, \xi_D) + \log D + \log \max\{|p_{\lambda, i}|; \lambda, i\},$$

et

$$\mathbf{h}(1, \xi_1, \dots, \xi_D) \leq D \max_{0 \leq i \leq M} \{ \mathbf{h}(\beta_i) \} \leq C_0 D \log(BV) \leq C_0^{-3} U' / D.$$

Rappelons que nous avons introduit les paramètres L_i, T, T_0, S, S_0 au paragraphe 5. Nous définissons un ensemble $\mathcal{E} \subseteq \mathbf{Z}^d \times \mathbf{Z}$ de la manière suivante:

— dans le cas non périodique,

$$\mathcal{E} = \{ (t, s); 0 \leq t_j < 2T, (1 \leq j \leq d); 0 \leq s < S_0 \};$$

— dans le cas périodique,

$$\mathcal{E} = \{ (t, s); 0 \leq t_j < T, (1 \leq j \leq d - 1); 0 \leq t_d < T_0; 0 \leq s < S \}.$$

Nous noterons D_t^d pour $D_1^1 \circ \cdots \circ D_d^d, \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d)$.

Posons $\mathbf{L} = (L_0, \dots, L_k)$, et choisissons un relevé \mathcal{B} , dans $\mathbf{C}[\bar{\mathbf{P}}]$, d'une base du \mathbf{C} -espace vectoriel $\{ \mathbf{C}[\bar{\mathbf{P}}] / I(G) \}_{\mathbf{L}}$ formé de polynômes de Feldman homogènes pour le facteur $G_0 = G_a$ et de monômes pour les autres facteurs. Le cardinal de \mathcal{B} satisfait, avec $\tilde{L}_i = \max\{1; L_i\}$,

$$\text{card } \mathcal{B} = \dim_{\mathbf{C}} \{ \mathbf{C}[\bar{\mathbf{P}}] / I(G) \}_{\mathbf{L}} \geq c_{60} H(G; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k).$$

En effet, on a un isomorphisme

$$\{C[\bar{\mathbf{P}}]/I(G)\}_{\mathbf{L}} \cong \bigotimes_{i=0}^k \{C[\mathbf{P}_{N_i}]/I(G_i)\}_{L_i},$$

où $I(G_i)$ est l'idéal de définition de l'adhérence de G_i dans \mathbf{P}_{N_i} , et $I(G)$ l'idéal engendré par $I(G_0), \dots, I(G_k)$. Donc

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbf{C}} \{C[\bar{\mathbf{P}}]/I(G)\}_{\mathbf{L}} &= \prod_{i=0}^k \dim_{\mathbf{C}} \{C[\mathbf{P}_{N_i}]/I(G_i)\}_{L_i} \\ &\geq c_{61} \prod_{i=0}^k \tilde{L}_i^{\delta_i} \deg I(G_i), \end{aligned}$$

et on conclut grâce au lemme 3.4 de [7].

(c) **Equations et systèmes linéaires.**

Le système d'équations linéaires que nous voulons considérer est le suivant. Soit P une combinaison linéaire générique (i.e., dont les coefficients sont des inconnues) des éléments de la base des polynômes de $K[\mathbf{P}]$ de degrés $\leq (L_{-2}, L_{-1}, L_1, \dots, L_k)$ choisie aux numéros 3c et 4c (la notation $K[\mathbf{P}]$ a été introduite au §4.a). Posons $F = P(\Phi)$, nous allons majorer le rang du système d'équations linéaires

$$(6.6) \quad D_t^i F(sv) = 0, \quad (t, s) \in \mathcal{E}.$$

Plus généralement, si G' est un sous-groupe algébrique connexe de G , Σ un sous-ensemble de cardinal fini de G et $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ une base d'un sous-C-espace vectoriel W de T_G tels que $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ forment une base de $W \cap T_{G'}$, on a le lemme suivant.

LEMME 6.7. Soient T_{m+1}, \dots, T_n des entiers ≥ 1 , on pose $\tilde{L}_i = \max\{1; L_i\}$ ($0 \leq i \leq k$). Avec les notations précédentes le rang du système

$$(6.8) \quad \{D_{\mathbf{u}}^t F(\sigma) = 0; \sigma \in \Sigma; t_1, \dots, t_n \in \mathbf{N}, t_j < T_j \ (m+1 \leq j \leq n)\}$$

est inférieur ou égal à

$$8^d T_{m+1} \cdots T_n \text{card}((\Sigma + G')/G') \cdot H(G'; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k),$$

ou d' désigne la dimension de G' .

Démonstration. On a défini dans [7, §4.1] des opérateurs algébriques représentant les dérivations et les translations sur un groupe algébrique

commutatif. Nous reprenons ici ces notations, et comme il est équivalent d'exprimer l'annulation d'un polynôme en un point dans une carte affine de G ou dans une autre, nous choisissons une fois pour toutes une carte affine de G contenant l'origine. Ainsi nous avons dans les notations de [7] les opérateurs ∂_σ^t représentant, algébriquement, la dérivée D_σ^t au point σ , et le système (6.8) peut se réécrire

$$(6.9) \quad \left\{ \partial_\sigma^t P(0) = 0; \sigma \in \Sigma; t_1, \dots, t_n \in \mathbf{N}, t_j < T_j \ (m + 1 \leq j \leq n) \right\}.$$

Notons \mathcal{S} un système de représentants dans Σ des classes de $\Sigma + G'$ modulo G' et considérons le système linéaire

$$(6.10) \quad \left\{ \begin{aligned} &\partial_{\sigma'}^t P \in I(G'); \sigma' \in \mathcal{S}; \\ &t' = (0, \dots, 0, t_{m+1}, \dots, t_n), t_j < T_j \ (m + 1 \leq j \leq n) \end{aligned} \right\}$$

où $I(G')$ est l'idéal premier de définition de G' dans $\mathbf{C}[\bar{\mathbf{P}}]$.

Montrons d'abord que le rang du système (6.9), et donc du système (6.8), est inférieur au rang du système (6.10). A cette fin il suffit de montrer que tout polynôme Q solution de (6.10) est aussi solution de (6.9). Mais on vérifie par une formule de Leibnitz (cf. [7, prop. 4.3]) que les idéaux

$$\left(\partial_{\sigma''}^{t''} \circ \partial_{\sigma'}^t Q; \sigma' \in \mathcal{S}; \sigma'' \in G'; \right. \\ \left. t' = (0, \dots, 0, t_{m+1}, \dots, t_n), t_j < T_j \ (m + 1 \leq j \leq n); t'' \in \mathbf{N}^m \right)$$

et

$$\left(\partial_\sigma^t Q; \sigma \in \Sigma + G'; t_1, \dots, t_n \in \mathbf{N}, t_j < T_j \ (m + 1 \leq j \leq n) \right)$$

ont les mêmes zéros dans G . On a $\partial_{\sigma''}^{t''}(I(G')) \subset I(G')$ pour tout $\sigma'' \in G'$ et $t'' \in \mathbf{Z}^m$ (cf. [7, p. 373]), et si Q est une solution de (6.10), le premier de ces idéaux est contenu dans $I(G')$, ainsi les polynômes $\partial_\sigma^t Q$ s'annulent en 0 montrant bien que le polynôme Q est encore solution de (6.9) et (6.8).

Comme nous avons plongé les groupes algébriques G_i "à la Serre", il suit de la remarque précédant la définition 4.1 de [7] que les polynômes $\partial_\sigma^t P$ sont de degrés $\leq (L_{-2}, L_{-1}, L_1, \dots, L_{d_1}, 2L_{d_1+1}, \dots, 2L_k)$. Posons

$$\mathcal{L} = (L_0, \dots, L_{d_1}, 2L_{d_1+1}, \dots, 2L_k);$$

le nombre de conditions à écrire pour qu'un des polynômes $\partial_\sigma^t P$ appartienne à $I(G')$ est $\leq \dim_{\mathbf{C}}\{\mathbf{C}[\bar{\mathbf{P}}]/I(G')\}_{\mathcal{L}}$. Ainsi le rang du système (6.10), et donc des systèmes (6.9) et (6.8), est majoré par

$$T_{m+1} \cdots T_n \cdot \text{card } \mathcal{S} \cdot \dim_{\mathbf{C}}\{\mathbf{C}[\bar{\mathbf{P}}]/I(G')\}_{\mathcal{L}}.$$

Pour démontrer le lemme il nous suffit de vérifier que

$$\dim_{\mathbb{C}}\{C[\bar{\mathbf{P}}]/I(G')\}_{\mathcal{L}} \leq 8^d H(G'; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k).$$

Ceci résulte du théorème 1 de [6] lorsqu'on considère le plongement de $\bar{\mathbf{P}}$ dans un espace projectif \mathbf{P}_N suivant:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}} &\rightarrow \mathbf{P}_N, \\ (X_{i, \nu_i})_{(0 \leq \nu_i \leq N_i, 0 \leq i \leq k)} &\rightarrow \left(\prod_{i, j} X_{i, j}^{\alpha_{i, j}} \right)_{(\sum \alpha_{i, j} = \tilde{L}_i, 0 \leq i \leq k)} \end{aligned}$$

Désignant par $C[\mathbf{P}_N]$ et I_N l'anneau des coordonnées de \mathbf{P}_N et l'idéal premier de définition de G' dans $C[\mathbf{P}_N]$ on a pour tout entier l ,

$$\{C[\bar{\mathbf{P}}]/I(G')\}_{l(\tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k)} \simeq \{C[\mathbf{P}_N]/I_N\}_l.$$

Il en résulte que le degré de I_N est $H(G'; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k)$ et le théorème 1 de [6] montre que

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}}\{C[\bar{\mathbf{P}}]/I(G')\}_{\mathcal{L}} &\leq \dim_{\mathbb{C}}\{C[\bar{\mathbf{P}}]/I(G')\}_{2(\tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k)} \\ &\leq \dim_{\mathbb{C}}\{C[\mathbf{P}_N]/I_N\}_2 \\ &\leq 8^d \deg I_N \\ &\leq 8^d H(G'; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k). \end{aligned}$$

Le lemme est donc établi.

Appliquant le lemme 6.7 au système (6.6) on vérifie que le rang de ce système est majoré par

$$(6.11) \quad 8^{\tilde{d}} T^{\tilde{r}-1} \text{card}((\Gamma(S_0) + \tilde{G})/\tilde{G}) \cdot H(\tilde{G}; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k),$$

dans le cas non périodique, et par

$$(6.12) \quad 8^{\tilde{d}} T^{\tilde{r}-2} T_0 \text{card}((\Gamma(S) + \tilde{G})/\tilde{G}) \cdot H(\tilde{G}; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k),$$

dans le cas périodique, car $w \notin T_{\tilde{G}}$. Rappelons que $\tilde{d} = d + 1 - \tilde{r} = \dim \tilde{G}$.

Enfin on constate que chacune des quantités (6.11) et (6.12) est majorée, grâce à (5.14) et au choix des paramètres S_0, T_0 , par $(c_{61}/C_0)H(G; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k)$ (on remarque que la fonction $H(\tilde{G}; L_0, \dots, L_k)/H(G; L_0, \dots, L_k)$ est rationnelle, décroissante par rapport à chaque paramètre L_i et homogène par rapport à L_0, \dots, L_k , enfin $\tilde{L}_i \geq L_i^*/2$). D'où

SCOLIE 6.13. *Le rang du système linéaire (6.6) est majoré par*

$$(c_{61}/C_0)H(G; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k).$$

Remarque. Nous pouvons maintenant vérifier que les paramètres L_i ($1 \leq i \leq k$) définis par (5.9) sont non nuls (i.e., $U \geq DS^{\rho_i} \log V_i$) dès que $\beta_i \neq 0$. Un polynôme combinaison linéaire des éléments de \mathcal{B} a $\text{card } \mathcal{B} \geq c_{60} H(G; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k)$ coefficients, la scolie (6.13) entraîne qu'il existe un tel polynôme P , non identiquement nul, et vérifiant avec $F = P(\Phi)$

$$D_i^! F(sv) = 0 \quad \text{pour } (t, s) \in \mathcal{E}.$$

Si $\beta_i \neq 0$ on complète la base

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d)$$

de W en une base

$$\tilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{d+1})$$

de $T_G(\mathbb{C})$ par un vecteur $\mathbf{f}_{d+1} \in T_{G_i}(\mathbb{C})$, c'est possible car alors $T_{G_i}(\mathbb{C})$ n'est pas contenu dans W . Si $L_i = 0$, le polynôme P ne dépend pas des variables associées à G_i , et on déduit des équations ci-dessus que F s'annule à l'ordre T_1 en chaque point sv ($0 \leq s \leq S_1$) le long de $T_G(\mathbb{C})$, avec

$$(S_1, T_1) = \begin{cases} (S_0, T) & \text{dans le cas non périodique,} \\ (S, T_0) & \text{dans le cas périodique.} \end{cases}$$

Le lemme de zéros de [7] conduit alors à une contradiction qui établit bien que $L_i \neq 0$. Nous n'utiliserons pas cette remarque dans la suite.

(d) Construction de F .

PROPOSITION 6.14. *Il existe une constante $C_6 > 1$, ne dépendant pas des paramètres D, B, V_1, \dots, V_k, E , et il existe un élément non nul P de $K[\mathbf{P}]$, ne s'annulant pas identiquement sur G , de degrés $\leq (L_{-2}, L_{-1}, L_1, \dots, L_k)$, vérifiant*

$$h(P) \leq C_6 C_0^{3/2} U' / D,$$

tels que la fonction $F = P(\Phi)$ satisfasse

$$|D_i^! F(sv)| < \exp(-C_0^{5/2} U' / C_6) \quad \text{pour } (t, s) \in \mathcal{E}.$$

Démonstration. On doit résoudre un système d'inéquations. On écrit, a priori, P comme déshomogénéisé d'une combinaison linéaire des éléments de \mathcal{B} , et on écrit les coefficients de P dans la base ξ_1, \dots, ξ_D de K sur \mathbb{Q} . Ainsi le nombre d'inconnues dans \mathbb{Z} est $D \text{ card } \mathcal{B} \geq c_{60} D \cdot H(G; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k)$. Grâce à (6.13), on va pouvoir utiliser le lemme 6.1 avec

$$\nu/2\rho \geq C_0 D / C_6 \quad \text{et} \quad \mu \leq T^d S / C_0^2 \leq (C_0 U')^d.$$

Pour estimer les modules des coefficients du système on applique le lemme 3.2 à chaque monôme composant éventuellement P . On vérifie alors que les logarithmes des modules de ces coefficients son majorés par

$$C_3 \left(T \log [T(\|f_1\| + \cdots + \|f_d\| + \|w\|)] + L_0 \log(2 + S/L_{-1}) + \sum_{i=1}^k L_i (S\|v_i\| + 1)^{\rho_i} \right).$$

Mais $\|f_1\|, \dots, \|f_d\| \leq dBD$ et $\|w\| \leq \|v\| + 1$ car $\|w - v\| = |L(v)| < 1$, et enfin $\|v_i\|^{\rho_i} \leq D \log V_i$ en vertu de (2.5). Reprenant les définitions des paramètres L_i, S, T on vérifie

$$\begin{aligned} T \log [T(\|f_1\| + \cdots + \|f_d\| + \|w\|)] &\leq c_{62}U'/D, \\ L_0 \log(2 + S/L_{-1}) &\leq (c_{63} \log C_0)U'/D, \\ \sum_{i=1}^k L_i S^{\rho_i} \log V_i &\leq c_{64}U'/D, \\ \max_{1 \leq i \leq D} \log |\xi_i| &\leq C_0 D^2 \log(BV) \leq C_0^{-3}U', \end{aligned}$$

et on peut appliquer le lemme (6.1), avec

$$m = \mu = C_0^{5/2}U'/C_6 \quad \text{et} \quad \delta = C_6 C_0^{3/2}U'/D$$

pour achever d'établir la proposition 6.14.

En utilisant l'hypothèse $|L(v)| < \exp(-C_0^{5/2}U')$, nous allons déduire de la proposition 6.14, l'estimation

$$(6.15) \quad |D_t^i F(sw)| < \exp(-C_0^{5/2}c_{66}U') \quad \text{pour } (t, s) \in \mathcal{E}.$$

Elle résulte de la majoration suivante, qui sera de nouveau utilisée au paragraphe 7.

PROPOSITION 6.16. *Pour $|t| < 2T$ et $0 \leq s < S$, on a*

$$|D_t^i F(sv) - D_t^i F(sw)| \leq \|v - w\| \exp((c_{67} \log C_0)U'/D).$$

Démonstration. On applique la majoration

$$|f(0) - f(1)| = \left| \int_{[0,1]} f'(z) dz \right| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|$$

à la fonction d'une variable $f(z) = D_t^t F(sv + sz(w - v))$; donc il existe un nombre réel x , $0 \leq x \leq 1$, tel que

$$|D_t^t F(sv) - D_t^t F(sw)| \leq \left| \frac{df}{dz}(x) \right|;$$

on utilise, comme précédemment, le lemme 3.2 pour achever l'estimation.

7. Extrapolation

Le but est, ici, d'établir l'énoncé suivant. On suppose dans tout le paragraphe $|L(v)| \leq \exp(-C_0^{5/2}U')$, et l'on reprend les notations des numéros précédents. En particulier, on a $|L(v)| \leq C_5/(2S \cdot H(\tilde{G}; 1, \dots, 1))$ grâce à la propriété 5.16, et nous sommes donc, dans le cas périodique, sous les hypothèses de la scolie 5.15.

PROPOSITION 7.1. *La fonction F , construite au paragraphe 6, vérifie*

$$D_e^t F(sv) = 0 \quad \text{pour } |t| < T \text{ et } 0 \leq s < S.$$

Nous utiliserons la formule d'interpolation classique suivante qu'on trouvera dans [12, lemme 2.3].

LEMME 7.2. *Soit f une fonction analytique dans le disque $|z| \leq R$ du plan complexe. Soient $2 \leq r \leq R/2$, et T_1, S_1 deux entiers positifs. Alors*

$$|f|_{2r} \leq 2|f|_R \left(\frac{4r}{R} \right)^{T_1 S_1} + 5 \left(\frac{18r}{S_1} \right)^{T_1 S_1} \cdot \max \left\{ \left| \frac{f^{(t)}(s)}{t!} \right|; 0 \leq t < T_1; 0 \leq s < S_1 \right\}.$$

On a noté

$$|f|_R = \sup_{|z|=R} \{|f(z)|\} \quad \text{et} \quad f^{(t)} = \frac{d^t f}{dz^t} \quad (t \in \mathbf{N}).$$

Nous montrons dans un premier temps une majoration.

PROPOSITION 7.3. *Il existe un réel $C_7 > 1$ tel que*

$$|D_t^t F(sv)| < e^{-C_7^2 C_7 U'} \quad \text{pour } |t| < T \text{ et } 0 \leq s < S.$$

Démonstration. Pour ce faire on introduit les notations suivantes:

— dans le cas non périodique, on fixe t_1, \dots, t_d , avec $t_j < T$ ($1 \leq j \leq d$) et on pose

$$f(z) = D_{t_1}^t F(zw), \quad S_1 = S_0 \quad \text{et} \quad T_1 = T;$$

— dans le cas périodique, on fixe t_1, \dots, t_{d-1} , avec $t_j < T$ ($1 \leq j \leq d-1$) et on pose

$$f(z) = D_{t_1}^{t_1} \circ \dots \circ D_{t_{d-1}}^{t_{d-1}} F(zw), \quad S_1 = S \quad \text{et} \quad T_1 = T_0.$$

Ainsi dans les deux cas f est une fonction entière dans \mathbf{C} qui satisfait, d'après (6.15),

$$|f^{(t)}(s)| < \exp(-C_0^{5/2} c_{66} U') \quad \text{pour} \quad 0 \leq t < T_1, \quad 0 \leq s < S_1.$$

On applique le lemme 7.2 avec $r = s$, $R = 4Er$. On a

$$(C_0^2/c_{70})U' \leq T_1 S_1 \log E \leq C_0^2 c_{70} U',$$

et, grâce au lemme 3.2,

$\log|f|_R$

$$\begin{aligned} &\leq c_{71} \left(C_0^{3/2} U' + T \log(TBD) + L_0 \log(2 + R/L_{-1}) + \sum_{i=1}^k L_i (\|v_i\| R)^{\rho_i} \right) \\ &\leq C_0^{3/2} c_{72} U', \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} T \log(TBD) &\leq c_{73} U', \\ L_0 \log(2 + R/L_{-1}) &\leq c_{73} (\log C_0) U', \\ L_i (\|v_i\| R)^{\rho_i} &\leq L_i D(R/E)^{\rho_i} \log V_i \leq c_{73} U. \end{aligned}$$

On trouve donc

$$\log|f|_{2r} \leq -C_0^2 c_{74} U'.$$

Comme $|f(s)| \leq |f|_{2r}$ pour $0 \leq s < S$, on a démontré

$$(7.4) \quad |D_{t_1}^t F(sw)| < \exp(-C_0^2 c_{75} U') \quad \text{pour} \quad |t| < T \text{ et } 0 \leq s < S,$$

dans le cas non périodique. Dans le cas périodique, (7.4) résulte des inégalités

de Cauchy,

$$\begin{aligned} |D_{\mathbf{f}}^t F(s\mathbf{w})| &= |f^{(t_d)}(s)| \\ &\leq (2t_d/r)^{t_d} |f|_{2r} \\ &\leq \exp(-C_0^2 c_{75} U'), \end{aligned}$$

car

$$t_d \log(2t_d/r) \leq T \log(2T) \leq c_{76} U'.$$

On utilise enfin le lemme 6.16 pour déduire la proposition 7.3 de (7.4).

Nota bene. Dans le cas non périodique (resp. périodique) on reconnaît la méthode de Baker (resp. Gel'fond).

Démonstration de la Proposition 7.1. Montrons que l'on a

$$(7.5) \quad |D_{\mathbf{e}}^t F(s\mathbf{v})| < \exp(-C_0^2 c_{77} U') \quad \text{pour} \quad |t| < T, 0 \leq s < S.$$

On utilise pour cela les lemmes 3.1 et 7.3. Dans le cas non périodique, la matrice de passage de la base \mathbf{f} à la base \mathbf{e} est unitaire, on peut donc majorer A par d , et $T \log d$ par $c_{78} U'$. Dans le cas périodique, on utilise la scolie 5.15, et la propriété 5.16 pour majorer $T \log(c_{54} B^2 DS \cdot H(\tilde{G}; 1, \dots, 1))$ par $c_{78} U'$, d'où (7.5) en tout cas. On termine la preuve de la proposition 7.1 en utilisant le lemme 4.2, avec les majorations

$$\begin{aligned} \log H &\leq C_0^{3/2} c_{79} U' / D, \\ T \log(BT + L_0 + \dots + L_k) &\leq c_{79} U' / D, \\ TL_{-1} &\leq c_{79} U' / D, \\ L_0 \log(2 + S/L_{-1}) &\leq (c_{79} \log C_0) U' / D, \\ \sum_{i=1}^k L_i S^{p_i} \log V_i &\leq c_{79} U' / D. \end{aligned}$$

La majoration (7.5) serait en contradiction avec la conclusion du lemme 4.2 si $D_{\mathbf{e}}^t F(s\mathbf{v}) \neq 0$ pour un couple (t, s) vérifiant $|t| < T$ et $0 \leq s < S$.

8. Le lemme de zéros et conclusion

Nous montrons finalement, grâce au lemme de zéros de [7], que les propositions 7.1 et 5.12 sont incompatibles. Ce lemme de zéros peut se réécrire, avec les notations des paragraphes précédents,

LEMME 8.1. *S'il existe un polynôme de $\mathbf{C}[P]$ de degrés $\leq \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k$, s'annulant sur $\Gamma(S)$ avec multiplicités $\geq T$ le long de W , mais ne s'annulant pas identiquement sur G , alors il existe un sous-groupe connexe G' de G , distinct de G , vérifiant $T_{G'} \subseteq W$ et*

$$T^{r-1} \text{card}((\Gamma(S/(d+1)) + G')/G') \cdot H(G'; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k) \leq (2(d+1))^{2(d+1)} H(G; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k),$$

où $r = \dim(G/G')$.

On suppose que le plongement multiprojectif de G choisi permet de prendre les constantes c_1, \dots, c_p de [7] égales à 2. Grâce à la remarque entre parenthèses précédant la scolie 6.13, le lemme 8.1 est une conséquence directe du théorème 2.1 de [7], le fait que $T_{G'} \subseteq W$ s'obtenant comme suit. Si le sous-groupe G' de la conclusion du théorème 2.1 de [7] ne satisfait pas $T_{G'} \subseteq W$ alors

$$\dim(W/(W \cap T_{G'})) = \dim(G/G') = r > 0,$$

et la conclusion de ce même théorème entraîne

$$\left(\frac{T-1}{d+1}\right)^r \text{card}((\Gamma(S/(d+1)) + G')/G') \cdot H(G'; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k) \leq 2^{d+1} r! H(G; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k).$$

On remarque alors que, si π_0 désigne la projection de G sur G_0 ,

$$\frac{H(G; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k)}{H(G'; \tilde{L}_0, \dots, \tilde{L}_k)} \leq \begin{cases} c_{80}(U/S \log E)^r & \text{si } \pi_0(G') \neq \{0\} \\ c_{80}(U/S \log E)^r S & \text{si } \pi_0(G') = \{0\}, \end{cases}$$

et si $\pi_0(G') = \{0\}$ on a aussi $\text{card}((\Gamma(S/(d+1)) + G')/G') = [S/(d+1)]$, si bien qu'en tout cas on a la majoration

$$T \leq c_{81}(U'/S \log E).$$

contredisant les définitions de S et T .

La proposition 7.1 valide les hypothèses du lemme ci-dessus, or la conclusion de cette proposition étant en contradiction avec (5.13) on en déduit que l'hypothèse $|L(\mathbf{v})| \leq \exp(-C_0^{5/2}U')$ faite pour démontrer la proposition 7.1 est fautive. Ainsi on a $|L(\mathbf{v})| > \exp(-C_0^{5/2}U')$ et comme $U' \leq U_0$ le théorème 2.1 est démontré.

9. Remarques diverses

(a) Dans la situation classique (1.1) correspondant au groupe algébrique linéaire $G = \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_m^n$ avec $n = d_1$, notre théorème 2.1 apporte un raffinement

à ce qui était connu (cf. [1], [12]): notre terme $\log(DE)$ était remplacé par

$$\log(DE \log V_{n-1}^+) \quad \text{avec } V_{n-1}^+ = \max(V_{n-1}, e) \text{ et } V_1 \leq \dots \leq V_{n-1} \leq V_n.$$

Dans un autre article [8], nous montrons comment effectuer ce raffinement sans perdre sur la constante de [12]. De manière précise, nous démontrons que dans le théorème, p. 257–8, et la proposition 3.8, p. 274, de [12], on peut remplacer le terme $\log(EDV_{n-1}^+)$ par $\log(ED)$. Nous y étudions aussi le cas “rationnel” $\beta_0 = 0$, $\beta_i \in \mathbf{Z}$ ($1 \leq i \leq n$).

(b) On peut raffiner le théorème 2.1 en considérant plusieurs formes linéaires indépendantes, c’est à dire en remplaçant l’hyperplan $W = \ker L$ par un sous-espace linéaire de codimension positive. Cela est utile pour l’application au théorème de Siegel déjà mentionnée. Nous développerons ce raffinement ailleurs, et nous déduirons aussi de ces estimations des mesures de transcendance pour la plupart des nombres dont la transcendance s’obtient par les méthodes de Gel’fond et Baker.

(c) Nous avons énoncé et démontré nos résultats dans le cas complexe, mais la traduction p -adique ne présente pas de difficulté, notamment grâce à [4]. La principale différence est que le paramètre E doit être choisi égal à e ; d’autre part il vaut mieux énoncer les résultats en terme de l’application logarithme de G , plutôt que de l’exponentielle.

(d) Nos énoncés sont “effectifs” dans le sens suivant: dans la situation du théorème 2.1, supposons que chaque groupe algébrique G_i soit convenablement plongé “à la Serre” dans un espace projectif comme sous-variété quasi-projective; on considère des équations de \bar{G}_i et de $\bar{G}_i - G_i$, ainsi que des équations analogues pour le graphe de la loi de G_i . Alors notre constante c dépend d’une manière qu’on pourrait expliciter des degrés et des hauteurs de ces équations (cf. [3]). Cette constante c dépend aussi, tout comme les réels $C_2, C_3, C_4, C_5, \dots$, de manière également explicitable du choix de bases des espaces tangents $T_{G_i}(\mathbf{C})$ des $G_i(\mathbf{C})$ en l’origine (voir [5] pour expliciter C_5). Si l’on veut expliciter c dans un cas particulier, il semble préférable de se ramener d’abord à des plongements “à la Serre” convenablement choisis et à une bonne normalisation de l’application exponentielle.

RÉFÉRENCES

1. A. BAKER, “The theory of linear forms in logarithms” dans *Transcendence theory: advances and applications*, édité par A. Baker et D.W. Masser, Academic Press, Orlando, Florida, 1977.
2. D. BERTRAND, *Lemmes de zéros et nombres transcendants*, Séminaire Bourbaki, 38ème année, 1985–86, exposé n°652; S.M.F. Astérisque, vol. 145–146 (1987), pp. 21–44.
3. ———, “La théorie de Baker revisitée” dans *Problèmes diophantiens 1984–85*, Publ. Univ. Paris, VI, vol. 73, n°2, 1985.
4. ———, “Problèmes locaux” dans *Nombres transcendants et groupes algébriques* par M. Waldschmidt, Astérisque, vol. 69–70 (1979), pp. 163–189.
5. D. BERTRAND et P. PHILIPPON, *Sous-groupes algébriques de groupes algébriques commutatifs*, Illinois J. Math., vol. 32 (1988), pp. 263–280 (ce fascicule).

6. Y.V. NESTERENKO, *Estimates for the characteristic function of a prime ideal*, Math. Sbornik, vol. 123 (165), (1984), pp. 11–34; Math. USSR. Sbornik, vol. 51 (1985), pp. 9–32.
7. P. PHILIPPON, *Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Bull. Soc. Math. France, vol. 114 (1986), pp. 355–383.
8. P. PHILIPPON et M. WALDSCHMIDT, “Lower bounds for linear forms in logarithms” dans *Proceedings Durham Conference 1986*, édité par A. Baker, Cambridge Univ. Press, à paraître.
9. J.-P. SERRE, “Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs” dans *Nombres transcendants et groupes algébriques* par M. Waldschmidt, Astérisque, vol. 69–70 (1979), pp. 191–202.
10. M. WALDSCHMIDT, *Nombres transcendants et groupes algébriques*, Astérisque, vol. 69–70 (1979).
11. _____, *Sous-groupes analytiques de groupes algébriques*, Ann. of Math., vol. 117 (1983), pp. 627–657.
12. _____, *A lower bound for linear forms in logarithms*, Acta Arithm., vol. 37 (1980), pp. 257–283.
13. G. WÜSTHOLZ, “Recent progress in transcendence theory” dans *Number theory, Proceedings Noordwijkerhout 1983*, édité par H. Jager, Springer Lecture Notes in Math., vol. 1068 (1984), pp. 280–296.

INSTITUT HENRI POINCARÉ
PARIS