ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 32, Number 2, Summer 1988

SOUS-GROUPES ALGÉBRIQUES DE GROUPES ALGEBRIQUES COMMUTATIFS

PAR

DANIEL BERTRAND ET PATRICE PHILIPPON

Résumé

L'utilisation, en vue de résultats effectifs, des lemmes de zéros de la théorie des nombres transcendants sur un groupe algébrique G conduit à décrire les sous-groupes algébriques de G dont l'idéal de définition a un degré borné. Ce problème, étudié par D. W. Masser et G. Wüstholz [5] lorsque G est une puissance d'une courbe elliptique, intervient pour un group G quelconque au cours de la démonstration de [9]. Nous l'abordons ici dans le cas général en comparant le degré des sous-groupes algébriques de G au volume de la maille fondamentale du réseau de leurs périodes. Des arguments de géométrie des nombres permettent aisément d'en déduire les énoncés requis dans [9].

1. Notations et résultats

Soit G une groupe algébrique commutatif, de dimension g, défini sur $\mathbf{C}$. Pour tout sous-groupe algébrique G' de G, nous désignons par $t_{G'}$ l'espace tangent à l'origine de G' et par $\exp_{G'}$ l'application exponentielle de $t_{G'}$ dans le groupe de Lie complexe associé à G'. Le noyau $\Omega_{G'}$ de $\exp_{G'}$ est un sous-groupe discret de $t_{G'}$; le sous-espace vectoriel réel $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \Omega_{G'}$ qu'il engendre dans $t_{G'}$ sera noté $t^c_{G'}$. Le quotient $t^c_{G'}/\Omega_{G'}$ s'identifie ainsi à la composante neutre $(G'_c)^0$ du sous-groupe compact maximal G'_c du groupe de Lie réel associé à G'.

Dans ces conditions, soit ε une structure euclidienne sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel t_G. Elle induit une structure euclidienne sur les différents sous-espaces vectoriels réels de t_G, et permet donc, dans le cas de $t^c_{G'}$, de définir le volume du domaine fondamental de son réseau $\Omega_{G'}$; ce volume sera noté $\mathrm{vol}_\varepsilon(\Omega_{G'})$. C'est le volume de $(G'_c)^0$ relativement à la mesure de Haar sur G'_c associée à ε.

Soit enfin φ un plongement de G dans un espace projectif $\mathbf{P}$ (l'existence d'un tel plongement est assurée par [11]). Pour tout sous-groupe algébrique G' de G on notera $\deg_\varphi(G')$ le degré de l'adhérence de Zariski de $\varphi(G')$ dans $\mathbf{P}$.

Received November 5, 1986.

On peut alors énoncer:

THÉORÈME 1. *Il existe un nombre réel c, ne dépendant que de G, ε et φ, tel que pour tout sous-groupe algébrique G′ de G, on ait*

$$\mathrm{vol}_\varepsilon(\Omega_{G'}) \le c \deg_\varphi(G').$$

Ce théorème est démontré au paragraphe 5 par réduction aux cas, traités au paragraphe 3, où G est une variété abélienne ou un groupe linéaire. Son énoncé appelle quelques remarques.

Remarque 1. le groupe $\Omega_{G'}$ ne dépend que de la *composante neutre* $(G')^0$ de G'. On déduit donc immédiatement du Théorème 1 l'inégalité plus précise: $\mathrm{vol}_\varepsilon(\Omega_{G'}) \le c \deg_\varphi((G')^0)$. Par ailleurs, $(G')^0$ étant contenu dans G^0, on peut sans perte de généralité se restreindre à des groupes G et G' connexes.

Remarque 2. On vérifiera au paragraphe 2 (lemme 1 et proposition 2) qu'une fois l'énoncé établi pour un couple (ε, φ), il vaut pour toute structure euclidienne sur t_G et tout plongement projectif de G. On peut donc modifier à loisir ε et φ dans la démonstration du Théorème 1.

Remarque 3. La démonstration du Théorème 1 fournit, pour certains choix de ε liés à φ, une majoration effective de la constante c en fonction de g, des normes des éléments d'une base de Ω_G, et de $\mathrm{vol}(\Omega_G)$. On peut, par exemple, choisir $c = g! \cdot 6^{g+1}$ pour les choix de ε et φ décrits au paragraphe 5.a.

Remarque 4. Le Théorème 1 entraîne qu'à un facteur ne dépendant que de G, φ, et ε près, $\deg_\varphi(G')$ majore le volume de G'_c relativement à la mesure de Haar introduite plus haut. Dans le cas des variétés abéliennes et des groupes linéaires (propositions 3 et 5 du paragraphe 3), nous montrerons en fait que ces quantités sont équivalentes. Il est probable qu'à l'instar du théorème de Wirtinger, cette équivalence s'étende au cas général.

Le Théorème 1, joint au théorème de Minkowski sur les minima successifs, admet les corollaires suivants, où les C_i désignent des nombres réels > 0 effectivement calculables en fonction de c, g et des normes des éléments d'une base de Ω_G, et où les notions de norme et de distance sont relatives à ε. Par convention, la base du $\mathbf{Z}$-module 0 sera l'ensemble vide, et tout produit vide vaudra 1.

COROLLAIRE 1. *Pour tout sous-groupe algébrique G' de G, il existe une base de $\Omega_{G'}$ sur $\mathbf{Z}$ formée d'éléments de Ω_G dont le produit des normes est majoré par $C_1 \deg_\varphi(G')$. En particulier, l'un au moins des éléments non nuls de $\Omega_{G'}$ est de norme $\le C_2 \deg_\varphi(G')$.*

COROLLAIRE 2. *Pour tout sous-groupe algébrique G' de G, le produit des distances à $t_{G'}$ de tout système de représentants dans Ω_G d'une base de $\Omega_G/\Omega_{G'}$ est minoré par $(C_3 \deg_\varphi(G'))^{-1}$. En particulier, un élément de Ω_G ne peut être situé à une distance inférieure à $(C_4 \deg_\varphi(G'))^{-1}$ de $t_{G'}$ sans appartenir à $\Omega_{G'}$.*

C'est cette dernière assertion qui intervient dans [9]. Outre le théorème 1 et le théorème de Minkowski, sa démonstration (paragraphe 5.b) repose sur une décomposition naturelle du $\mathbf{R}$-espace vectoriel t_G en somme directe de son sous-espace $t_G^c = \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \Omega_G$, et d'un sous-espace t_G^+ qui, avec une autre décomposition naturelle du sous-espace t_G^c lui-même, fait l'objet du paragraphe 4.

2. Quelques rappels

(a) Rappels de géométrie des nombres

Soient n un entier > 0, et V un espace vectoriel réel euclidien de dimension n, dont on note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme associée. On suppose donnée une base orthonormée $\mathscr{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ de V, et on désigne par B le réseau qu'elle engendre dans V.

Soit par ailleurs l un entier compris entre 1 et n. L'espace vectoriel $\wedge^l V$, ne dimension $\binom{n}{l}$, est naturellement muni d'un produit scalaire, défini par la formule

$$\langle x_1 \wedge \cdots \wedge x_l, y_1 \wedge \cdots \wedge y_l \rangle = \det\big(\langle x_i, y_j \rangle ; 1 \leq i, j \leq l\big),$$

et la famille $\wedge^l \mathscr{B} = \{b_{i_1} \wedge \cdots \wedge b_{i_l};\ i_1 < i_2 < \cdots < i_l\}$ en forme une base orthonormée.

Considérons dans ces conditions un sous-groupe discret L de V, et notons $\mathscr{L}$ le sous-espace vectoriel de V, de dimension l, qu'il engendre. Si $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$ désigne une base de L sur $\mathbf{Z}$, et $\{e_1, \ldots, e_l\}$ une base orthonormée de $\mathscr{L}$ (pour la structure euclidienne induite par $\langle .,. \rangle$ sur $\mathscr{L}$), la valeur absolue de la coordonnée de $\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_l$ relativement à la base $e_1 \wedge \cdots \wedge e_l$ de $\wedge^l \mathscr{L}$ de dépend que de L (et de l'espace euclidien V). On la notera $\mathrm{vol}_V(L)$ (ou plus simplement $\mathrm{vol}(L)$). Soit alors Λ la matrice à n lignes et l colonnes représentant la famille $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$ dans la base $\mathscr{B}$: son orbite sous la multiplication à droite par les éléments de $GL_l(\mathbf{Z})$ ne dépend que de L (et de $\mathscr{B}$). Par définition du produit scalaire sur $\wedge^l V$, on a $\mathrm{vol}(L)^2 = \det({}^t\Lambda \Lambda)$. Tout élément σ de l'ensemble $\mathscr{S}_l = \mathscr{S}_{l,n}$ des suites croissantes à l éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ s'identifie à un élément β_σ de $\wedge^l \mathscr{B}$, et la coordonnée de $\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_l$ relativement à β_σ dans $\wedge^L V$ est le déterminant du mineur Λ_σ d'ordre l de Λ correspondant à σ (cf. [10, chap. IV, §6, lemme 6.A]). Sa valeur absolue, qui ne dépend que de L (et de $\mathscr{B}$), sera notée L_σ. Comme $\wedge^l \mathscr{B}$ est une base orthonormée, on a (Cauchy-Binet):

$$\mathrm{vol}(L)^2 = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_l} L_\sigma^2.$$

Pour $l = 0$, on conviendra que $\mathrm{vol}(\{0\}) = 1$.

LEMME 1. *Soient V et W deux espaces euclidiens de même dimension, et f un isomorphisme de V sur W pour les structures vectorielles sous-jacentes. Il existe un nombre réel $C_5 \geq 1$ tel que pour tout sous-groupe discret L de V, on ait*

$$C_5^{-1}\mathrm{vol}_V(L) \leq \mathrm{vol}_W(f(L)) \leq C_5\,\mathrm{vol}_V(L).$$

De plus, C_5 est effectivement calculable en fonction d'un majorant des valeurs absolues des coefficients de la matrice représentative de f dans des bases orthonormées de V et W et de l'inverse de son déterminant.

Démonstration. La norme de l'isomorphisme $\bigwedge^l f$ de $\bigwedge^l V$ sur $\bigwedge^l W$ (vus comme des espaces vectoriels normés) convient pour l'inégalité de droite. Quitte à modifier la valeur de C_5, on passe de là à l'inégalité de gauche en considérant l'isomorphisme inverse f^{-1}.

Le lemme 1, appliqué à deux structures euclidiennes sur t_G, justifie la première partie de la remarque 2 du paragraphe 1.

LEMME 2. *Soient L un sous-groupe de rang l du réseau B de V, et $\overline{L}$ l'intersection de B avec le sous-espace $\mathscr{L}$ engendré par L. On note encore $L^\perp$ l'intersection de B avec l'orthogonal de $\mathscr{L}$ dans V. Alors le groupe $\overline{L}/L$ est de torsion et*:

(i) *L coïncide avec $\overline{L}$ si et seulement si L admet un facteur direct dans B (ou de façon équivalente, si et seulement si le groupe B/L est sans torsion—on dit alors que L est un sous-groupe primitif de B)*;

(ii) *l'indice de L dans $\overline{L}$ est égal au p.g.c.d. des entiers L_σ, où σ parcourt l'ensemble $\mathscr{S}_l$*;

(iii) *le sous-groupe $L^\perp$ est de rang $n - l$ et vérifie $(L^\perp)_{\sigma'} = \overline{L}_\sigma = L_\sigma/[\overline{L} : L]$ pour tout $\sigma' \in \mathscr{S}_{n-l}$, de complémentaire $\sigma \in \mathscr{S}_l$ dans $\{1, \ldots, n\}$.*

Démonstration. Il s'agit d'énoncés classiques, valables pour tout module libre de type fini sur un anneau principal. On pourra par exemple faire appel au théorème des diviseurs élémentaires pour (i), à [2, VII, §4, n°5, prop. 4] pour (ii) et à [2, III, §11, p. 169 (formule (78)) et p. 171] pour (iii).

LEMME 3. *Soient $L \subset M$ deux sous-groupes discrets de V tels que M/L soit sans torsion, et p la projection orthogonale de V sur l'orthogonal du sous-espace*

$\mathscr{L}$ engendré par L. Alors, $p(M)$ est un sous-groupe discret de V vérifiant

$$\mathrm{vol}(M) = \mathrm{vol}(L) \times \mathrm{vol}(p(M)).$$

Démonstration. D'après le lemme 2(i), qui ne met pas en jeu la structure euclidienne de V, L coïncide avec l'intersection de M et de $\mathscr{L}$, et p établit un isomorphisme d'un supplémentaire de L dans M avec $p(M)$. Or si $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$ (resp. $(\mu_{l+1}, \ldots, \mu_m\})$ désigne une base de L (resp. de ce supplémentaire), les m-vecteurs

$$\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_l \wedge \mu_{l+1} \wedge \cdots \wedge \mu_m$$

et

$$\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_l \wedge p(\mu_{l+1}) \wedge \cdots \wedge p(\mu_m)$$

sont égaux. Le définition du produit scalaire sur $\wedge^m V$ permet de conclure.

Nous terminons ce paragraphe en rappelant le théorème de Minkowski (cf. [10, chap. IV, théorème 1.A]), en vertu duquel on peut énoncer, en notant $v_l = \pi^{l/2}/\Gamma(1 + l/2)$ le volume de la sphère unité de $\mathbf{R}^l$:

PROPOSITION 1. *Soient L un sous-groupe discret de V de rang l, et $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$ une base de L sur $\mathbf{Z}$ dont le produit des normes des éléments soit minimal. Alors*

$$\frac{2^l}{l!} \cdot \frac{\mathrm{vol}(L)}{v_l} \leq \prod_{i=1}^{l} \|\lambda_i\| \leq 2^l \cdot \frac{\mathrm{vol}(L)}{v_l}.$$

Démonstration. Munissons l'espace vectoriel $\mathscr{L}$ de la mesure de Lebesgue définie par la structure euclidienne induite de celle de V. Le corps convexe

$$S = \{x \in \mathscr{L};\ \|x\| \leq 1\}$$

a pour mesure v_l, et le théorème de Minkowski permet de conclure.

(b) Rappels sur les degrés

Les variétés considérées ici ne sont pas nécessairement irréductibles. Soient X une sous-variété quasi-projective d'un espace projectif $\mathbf{P}$ (c'est à dire un ouvert d'un fermé de $\mathbf{P}$), et $\overline{X}$ son adhérence de Zariski dans $\mathbf{P}$. On appelle degré de X, et on note $\deg_{\mathbf{P}} X$ (ou simplement $\deg X$) le degré de $\overline{X}$: si X est de dimension d, et $\mathbf{P}$ de dimension N, c'est le produit par $d!$ du coefficient du terme de plus haut degré du polynôme de Hilbert-Samuel de l'idéal homogène $I_{\overline{X}}$ de définition de $\overline{X}$ dans $\mathbf{C}[x_0, \ldots, x_N]$.

PROPOSITION 2. *Soient $X \subset \mathbf{P}$ (resp. $X' \subset \mathbf{P}'$) une variété quasi-projective de dimension d (resp. d') et φ un morphisme de X sur X'. On suppose que les fibres $\varphi^{-1}(x)$ ($x \in X'$) ont toutes même dimension δ et on désigne par Δ un minorant des degrés dans $\mathbf{P}$ de ces fibres. Alors*

$$\Delta \cdot \deg_{\mathbf{P}'} X' \leq C_6^{d-\delta} \deg_{\mathbf{P}} X,$$

où $C_6 = C_6(\varphi)$ est un majorant des degrés des formules représentant φ. De plus si X est une variété projective, si φ est la restriction à X d'une projection linéaire de $\mathbf{P}$ sur $\mathbf{P}'$ et si toutes les fibres $\varphi^{-1}(x)$ ($x \in X'$) ont même dimension $\delta = d - d'$ et même degré Δ on a

$$\Delta \deg_{\mathbf{P}'} X' = \deg_{\mathbf{P}} X.$$

Démonstration. Soient $(\mathscr{V}_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}}$ un recouvrement ouvert de X et

$$\left\{ F_j^{(\alpha)}(x_0, \dots, x_N);\ j = 0, \dots, N' \right\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$$

des familles de polynômes homogènes de degrés $\leq C_6(\varphi)$ représentant le morphisme φ sur chaque ouvert $\mathscr{V}_\alpha$. Le degré de X' est égal au cardinal de l'intersection $X' \cap L'$ (de dimension 0) de X' avec une sous-variété linéaire L' de codimension d' suffisamment générale dans $\mathbf{P}'$. Soient $L_1, \dots, L_{d'}$ des formes linéaires définissant L' dans $\mathbf{P}'$, et L la variété définie dans $\mathbf{P}$ par les polynômes homogènes

$$\left\{ L_i\left(\dots, F_j^{(\alpha)}(x_0, \dots, x_N), \dots \right);\ \alpha \in \mathscr{A},\ i = 1, \dots, d' \right\}.$$

qui sont de degrés $\leq C_6(\varphi)$. La variété $Y = X \cap L$ est ainsi définie dans X par des équations de degrés $\leq C_6(\varphi)$. On a donc en vertu de la première inégalité de la proposition 3.3 de [8]: $\deg_{\mathbf{P}} Y \leq C_6(\varphi)^{d'} \deg_{\mathbf{P}} X$. Mais $Y = \varphi^{-1}(X' \cap L')$ étant la réunion de $\deg_{\mathbf{P}'} X'$ fibres de φ, on a aussi $\deg_{\mathbf{P}} Y \geq \Delta \deg_{\mathbf{P}'} X'$, ce qui achève d'établir l'inégalité de la proposition. Si maintenant X et φ vérifient les hypothèses de la 2e partie de la proposition, on a: $C_6(\varphi) = 1$ et Y est l'intersection du fermé X avec d' hyperplans de $\mathbf{P}$, de sorte que $\deg_{\mathbf{P}} Y = \deg_{\mathbf{P}} X$ (d'après [8, lemme 3.1], par exemple). Mais Y est la réunion de $\deg_{\mathbf{P}'} X'$ fibres de φ, de degrés Δ, et on a donc: $\deg_{\mathbf{P}} Y = \Delta \deg_{\mathbf{P}'} X'$, ce qui achève d'établir la proposition.

La proposition 2, appliquée à deux plongements du groupe algébrique G dans des espaces projectifs, permet de justifier la deuxième partie de la remarque 2 du §1.

Nous serons également amenés à étudier des ouverts V de fermés du produit $\prod_{i=1}^n \mathbf{P}_{(i)}^1$ de n droites projectives. Nous reprenons dans ce cas la notion de multidegrés de [8], en indexant ces multidegrés par les éléments de $\mathscr{S}_{n-l,n} = \mathscr{S}_{n-l}$, où $l = \dim V$ (notations du paragraphe 2.a), de sorte qu'avec le lemme

3.1 de [8] on a:

SCOLIE 1. *Pour tout élément σ de $\mathcal{S}_{l,n}$ de complémentaire σ' dans $\{1,\dots,n\}$, $\deg_{\sigma'}(V)$ est égal au nombre de points de V dont l'image dans $\prod_{i\in\sigma}\mathbf{P}^1_{(i)}$ est fixée de façon suffisamment générale.*

SCOLIE 2. *Si φ désigne le plongement de Segre de $\prod_{i=1}^n\mathbf{P}^1_{(i)}$ dans $\mathbf{P}^{2^n-1}$, alors*

$$\deg_\varphi(V) = l!\sum_{\sigma'\in\mathcal{S}_{n-l,n}}\deg_{\sigma'}(V).$$

3. Démonstration du théorème 1 dans les cas abélien et linéaire

Nous traitons successivement les cas où le groupe algébrique commutatif connexe G est une variété abélienne, puis un tore (ou, plus généralement, un groupe linéaire).

(a) Le cas abélien

Soient G une variété abélienne de dimension g, définie sur $\mathbf{C}$, et D un diviseur très ample sur G. Sa classe d'équivalence linéaire permet de définir un plongement projectif φ de G, et sa classe d'équivalence algébrique une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée E sur t_G, prenant des valeurs entières sur le réseau des périodes Ω_G de t_G. Désignons par J l'automorphisme de multiplication par $i=\sqrt{-1}$ sur t_G. Comme D est ample, la forme bilinéaire symétrique à valeurs réelles définie sur t_G par

$$\varepsilon(x,y) = E(Jx,y)$$

est non dégénérée positive. On a ainsi naturellement associé au plongement φ de G une structure euclidienne $\varepsilon_\varphi=\varepsilon$ sur t_G, pour laquelle on peut énoncer, avec les notations du paragraphe 1:

PROPOSITION 3. *Pour toute sous-variété abélienne G' de G, de dimension h, on a*

$$\operatorname{vol}_\varepsilon(\Omega_{G'}) = (1/h!)\deg_\varphi(G').$$

Démonstration. Nous démontrons cette égalité à partir du théorème de Riemann-Roch sur la variété abélienne G' [7, pp. 150, 155]. Soit $\tilde{D}$ un diviseur sur G' représentant la restriction à G' de la classe de D. Le système linéaire formé par les restrictions à G' du système linéaire complet $|D|$ défini par D sur G est un sous-espace linéaire sans point de base de $|\tilde{D}|$ (sur G'; voir [4, p. 158]). Le plongement projectif qu'induit φ sur G' est donc le composé du plongement projectif $\tilde{\varphi}$ de G' associé à $\tilde{D}$ par une projection linéaire partout définie sur $\tilde{\varphi}(G')$, et la seconde partie de la proposition 2 entraîne:

$$\deg_{\tilde{\varphi}}(G') = \deg_{\varphi}(G').$$

Par ailleurs, la forme alternée $\tilde{E}$ définie par $\tilde{D}$ sur $t_{G'}$ est la restriction à $t_{G'}$ de E, et puisque J induit l'automorphisme $\tilde{J}$ de multiplication par i du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $t_{G'}$ de t_G, on a, pout tout couple (x, y) d'éléments de $t_{G'}$

$$\varepsilon(x, y) = \tilde{E}(\tilde{J}x, y).$$

Soit alors $\{\omega_1, \dots, \omega_{2h}\}$ une base de $\Omega_{G'}$ sur $\mathbf{Z}$. D'après le théorème de Riemann-Roch, $\deg_{\tilde{\varphi}}(G')$ est égal au produit par $h!$ du pfaffien de $\tilde{E}$. Or

$$\left(Pf(\tilde{E})\right)^2 = \det\left\{\tilde{E}(\omega_i, \omega_j); 1 \leq i, j \leq 2h\right\},$$

tandis que la norme $\mathrm{vol}_\varepsilon(\Omega_{G'})$ de $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{2h}$ dans l'espace euclidien $\wedge_{\mathbf{R}}^{2h} t_{G'}$ vérifie par définition:

$$\begin{aligned}(\mathrm{vol}_\varepsilon(\Omega_{G'}))^2 &= (\wedge^{2h}\tilde{E})\left(\tilde{J}\omega_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{J}\omega_{2h}, \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{2h}\right)\\ &= (\wedge^{2h}\tilde{E})\left((\wedge^{2h}\tilde{J})(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{2h}), \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{2h}\right).\end{aligned}$$

Mais le déterminant $\wedge^{2h}\tilde{J}$ de $\tilde{J}$ vaut 1, donc

$$(\mathrm{vol}_\varepsilon(\Omega_{G'}))^2 = (\wedge^{2h}\tilde{E})(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{2h}, \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{2h}) = \det\left\{\tilde{E}(\omega_i, \omega_j)\right\},$$

et la proposition 3 est démontrée.

(b) Le cas linéaire

Soit, tout d'abord, G un tore complexe de dimension g. Fixons une base $\mathscr{B}$ de son groupe des caractères $X(G)$. Elle permet d'identifier $X(G)$ à $\mathbf{Z}^g$, G à la puissance g-ième $\mathbf{G}_m^g$ du groupe multiplicatif $\mathbf{C}^\times$—d'où un plongement ξ de G dans le produit $\prod_{i=1}^g \mathbf{P}_{(i)}^1$ de n droites projectives, induit par le plongement naturel de $\mathbf{G}_m$ dans $\mathbf{P}^1$—et l'espace tangent t_G à $\mathbf{C}^g$. Nous munissons alors t_G de la structure euclidienne ε pour laquelle les $2g$ éléments $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ et $(0, \dots, 0, 2i\pi, 0, \dots, 0)$ forment une base orthonormée. Le couple (ε, ξ) étant ainsi lié, on peut énoncer, avec les notations des paragraphes 2 et 3:

PROPOSITION 4. *Soit G' un sous-groupe algébrique du tore G, de dimension h, admettant δ composantes connexes. Pour tout élément σ de $\mathscr{S}_{h,g}$, on a*

$$(\Omega_{G'})_\sigma = (1/\delta)\deg_{\sigma'}(\xi(G')).$$

Démonstration. Soient $(G')^\circ$ la composante neutre de G', et L le sous-groupe de $X(G)$ formé des caractères de G s'annulant sur G'. Le groupe $X(G')$

s'identifie alors au quotient $X(G)/L$, et G' est le sous-groupe de G tué par L. Le sous-groupe G' est connexe si et seulement si $X(G')$ est sans torsion. Plus généralement, le nombre $\delta = [G' : (G')^\circ]$ de composantes connexes de G' est égal à l'ordre du sous-groupe de torsion de $X(G')$, c'est à dire à l'indice $\delta(L)$ de L dans son saturé $\bar{L} = X(G) \cap \mathbf{Q} \cdot L$ dans $X(G)$, puisque $X(G)/\bar{L} = X((G')^\circ)$ (voir [3, cor. 8.3]). Dans ces conditions, L est libre, de rang $g - h$. Soit

$$\Lambda = \left(\lambda_{i,j};\ 1 \leq i \leq g;\ 1 \leq j \leq g - h\right)$$

une matrice à $(g - h)$ lignes et g colonnes représentant une base de L relativement à $\mathscr{B}$, de sorte que G' est défini dans $\mathbf{G}_m^g$ par les équations

$$\prod_{i=1}^{g} x_i^{\lambda_{i,j}} = 1 \quad (j = 1, \ldots, g - h).$$

et soit σ' un élément de $\mathscr{S}_{g-h,g}$, de complémentaire σ dans $\{1, \ldots, g\}$. Notons $\Lambda_{\sigma'}$ le mineur de Λ correspondant à σ'. Quitte à modifier la base de Λ choisie plus haut en multipliant à droite Λ par un élément de $GL_{g-h}(\mathbf{Z})$, on peut supposer, comme dans [5, p. 434], $\Lambda_{\sigma'}$ triangulaire (cf. [10, chap. IV]). Le nombre de points de $\xi(G')$ dont les coordonnées relatives à σ dans $\prod_{i=1}^{g} \mathbf{P}^1_{(i)}$ sont fixées arbitrairement est alors égal au produit des valeurs absolues des éléments diagonaux de $\Lambda_{\sigma'}$, c'est à dire à $|\det \lambda_{\sigma'}| = L_\sigma$, (voir notations du §3). D'après la scolie 1, on a donc

$$\deg_{\sigma'}(\xi(G')) = L_{\sigma'}.$$

Enfin le sous-espace vectoriel $t_{G'}$ de t_G, identifié à $\mathbf{C}^g$ comme plus haut, est défini par les équations

$$\sum_{i=1}^{g} \lambda_{i,j} z_i = 0 \quad (j = 1, \ldots, g - h).$$

Si on identifie $X(G) \otimes \mathbf{R}$, muni de la structure euclidienne qui fait de $\mathscr{B}$ une base orthonormée, au sous-espace euclidien $t_G^c = \Omega_g \otimes \mathbf{R}$ de t_G en associant au k-ième élément x_k de $\mathscr{B}$ la période $2i\pi$ du k-ième facteur de $\mathbf{G}_m^g$, l'intersection $\Omega_{G'}$ de $t_{G'}$ avec Ω_G coïncide donc avec l'intersection $L^\perp$ de $X(G)$ avec l'orthogonal de $L \otimes \mathbf{R}$. D'après le lemme 2, on a alors

$$(\Omega_{G'})_\sigma = L_{\sigma'}/\delta(L),$$

et la proposition 4 est démontrée.

Soit alors φ le composé de ξ par le plongement de Segre de $\prod_{i=1}^{g} \mathbf{P}^1_{(i)}$ dans $\mathbf{P}^{2^g-1}$. On déduit de la scolie 2 et de la formule de Cauchy-Binet:

COROLLAIRE 3. *Pour tout sous-groupe algébrique G', de dimension h, du tore G, on a*

$$(h!/2^g)\deg_\varphi(G') \leq [G' : (G')^\circ]\mathrm{vol}_\varepsilon(\Omega_{G'}) \leq h!\deg_\varphi(G').$$

Plus généralement, soit maintenant G un groupe linéaire commutatif connexe complexe, de dimension g. La décomposition de Jordan des matrices fournit une décomposition canonique de G en produit d'un groupe unipotent G_u par un tore G_m (voir [3, théorème 4.7]); en particulier:

LEMME 4. *Tout sous-groupe algébrique G' de G est produit direct de son intersection G'_u avec G_u et de son intersection G'_m avec G_m.*

Fixons alors un isomorphisme de G_u (resp. G_m) sur une puissance $\mathbf{G}_a^v$ (resp. $\mathbf{G}_m^s$) du groupe additif (resp. multiplicatif). On en déduit un plongement ξ de G dans un produit de droites projectives, et par composition par un plongement de Segre, un plongement φ de G dans $\mathbf{P}^{2^g-1}$. Munissons par ailleurs t_G d'une structure euclidienne ε étendant arbitrairement celle introduite plus haut sur t_{G_m} (par exemple en imposant à t_{G_m} et t_{G_u} d'être orthogonaux). Le couple (ε, φ) étant ainsi fixé, on peut énoncer, en rappelant la convention $\mathrm{vol}\{0\} = 1$:

PROPOSITION 5. *Soit G' un sous-groupe algébrique du groupe linéaire commutatif G. Alors*

$$2^{-g}\deg_\varphi(G') \leq [G' : (G')^\circ]\mathrm{vol}_\varepsilon(\Omega_{G'}) \leq g!2^g\deg_\varphi(G').$$

Démonstration. D'une part, $\Omega_{G'} = \Omega_{G'_m}$, et les nombres de composantes connexes de G' et de G'_m coïncident. D'autre part, les images par ξ des sous-groupes de G_u sont de multidegrés 0 ou 1, donc leurs images par φ sont de degrés bornés par $v!2^v$ d'après la scolie 2. On conclut en combinant le lemme 4 et le corollaire 3 au lemme 3.4 de [8].

4. Décompositions canoniques des algèbres de Lie des groupes algébriques commutatifs complexes

Soit G un groupe algébrique commutatif connexe sur $\mathbf{C}$. On dispose d'une suite exacte canonique de groupes algébriques (voir [11])

$$0 \to L \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} A \to 0,$$

où L désigne le sous-groupe linéaire connexe maximal de G, et A est une variété abélienne. Comme on l'a rappelé plus haut, la décomposition de Jordan des matrices fournit une décomposition canonique de L en produit d'un groupe unipotent L_u, isomorphe à une puissance $\mathbf{G}_a^v$ du groupe additif, et d'un tore L_m, isomorphe à une puissance $\mathbf{G}_m^s$ du groupe multiplicatif. Nous fixons désormais de tels isomorphismes et noterons π_u (resp. π_m) la projection de L sur L_u (resp. L_m) correspondante.

Le groupe de Lie réel associé à G possède un sous-groupe compact maximal, dont l'algèbre de Lie t_G^c est engendrée sur $\mathbf{R}$ par le sous-groupe discret Ω_G de t_G. Son intersection avec L est le sous-groupe compact maximal de L, c'est-à-dire le tore réel $\mathbf{U}_1^s$, dont l'algèbre de Lie $t_{L_m}^c = t_L^c = \Omega_{L_m} \otimes \mathbf{R}$ fournit un $\mathbf{R}$-espace vectoriel intrinsèque dans t_G. Ce fait va nous permettre de construire les décompositions naturelles de t_G et de t_G^c, annoncées au paragraphe 1, sur lesquelles reposent la démonstration du théorème 1 et de son corollaire 2 dans le cas général.

THÉORÈME 2. *Il existe un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* t_G^+ *de* t_G *tel que, pour tout sous-groupe algébrique* G' *de* G, *l'intersection* $t_{G'}^+$ *de* $t_{G'}$ *avec* t_G^+ *soit un supplémentaire de* $t_{G'}^c$ *dans le* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $t_{G'}$.

Démonstration. Notons $t_{L_m}^+$ l'image de $t_{L_m}^c$ par l'automorphisme de multiplication par $i = \sqrt{-1}$ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel t_{L_m}, et $t_L^+ = t_{L_u} \oplus t_{L_m}^+$ la somme directe de t_{L_u} et de $t_{L_m}^+$ dans $t_L \simeq t_{L_u} \oplus t_{L_m}$. Dans ces conditions, t_G est somme directe de t_G^c et de t_L^+: ceci résulte d'un simple calcul de dimension, puisque l'image, par la différentielle à l'origine π_* de π, de Ω_G est Ω_A, qui engendre t_A sur $\mathbf{R}$, et le noyau de la restriction de π_* à Ω_G est Ω_L, qui engendre le supplémentaire t_L^c de t_L^+ dans t_L. Nous allons montrer que le sous-espace $t_G^+ = t_L^+$ répond aux conditions du théorème 2.

Soit G' un sous-groupe algébrique de G. On dispose maintenant de la suite exacte de groupes algébriques

$$(1) \qquad 0 \to L' \xrightarrow{i} G' \xrightarrow{\pi} A' \to 0,$$

où $L' = G' \cap L$ et A' est un sous-groupe algébrique de A, et on déduit du lemme 4 que $t_{L'}$ est somme directe de son intersection $t_{L'_u}$ avec t_{L_u} et de son intersection $t_{L'_m}$ avec t_{L_m}.

L'espace vectoriel $t_{L'}^c = \Omega_{L'} \otimes \mathbf{R} = t_L^c \cap t_{L'}$ est de dimension réelle dim L'_m, de sorte que $it_{L'}^c$ en est un supplémentaire dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $t_{L'_m}$. Mais dans une base de t_{L_m} sur $\mathbf{C}$ formée par les éléments d'une base de Ω_{L_m} sur $\mathbf{Z}$, $t_{L'_m}$ est défini par un système de $w = \dim(L_m/L'_m)$ équations linéaires à coefficients dans $\mathbf{Q}$. Dans la base de $t_{L_m}^+$ formée par les images par la multiplication par i de ces éléments, $it_{L'}^c$ sera défini par les mêmes équations. Il coïncide donc avec l'intersection $t_{L'_m}^+$ de $t_{L'_m}$ avec $t_{L_m}^+$. Comme la suite

$$(2) \qquad 0 \to t_{L'}^c \to t_{G'}^c \xrightarrow{\pi_*} t_{A'} \to 0$$

est exacte, on en déduit par un calcul de dimension la décomposition

$$t_{G'} = t_{L'}^{+} \oplus t_{G'}^{c} \quad \text{où } t_{L'}^{+} = t_{L'_u} \oplus t_{L'_m}^{c} = t_{L'} \cap t_G^{+}.$$

Le théorème 2 est ainsi démontré en remarquant que $t_{G'}^{+} = t_{G'} \cap t_G^{+} = t_{L'}^{+}$.

Nous nous proposons maintenant de construire un supplémentaire naturel $\tilde{t}_A$ de t_L^c dans t_G^c, tel que le décomposition $t_G^c = t_L^c \oplus \tilde{t}_A$ soit compatible avec tous les sous-groupes algébriques G' de G. Nous reprenons les notations L', A' associées à G' au cours de la démonstration précédente.

THÉORÈME 3. *Il existe un sous-espace vectoriel $\tilde{t}_A$ du $\mathbf{R}$-espace vectoriel t_G^c tel que, pour tout sous-groupe algébrique G' de G, l'intersection $\tilde{t}_{A'}$ de $t_{G'}^c$ avec $\tilde{t}_A$ soit un supplémentaire de $t_{L'}^c$ dans $t_{G'}^c$.*

Démonstration. Nous allons construire une section $\mathbf{R}$-linéaire s de la restriction à t_G^c de la projection π_* telle que $s(t_{A'})$ soit inclus dans $t_{G'}^c$ pour tout G'. Le sous-espace $\tilde{t}_A = s(t_A)$ répondra alors à la condition recherchée. Choisissons un $\mathbf{R}$-sous-espace vectoriel de t_G de dimension $\dim G$ dont l'intersection avec t_{L_m} est égale à $it_{L_m}^c$. Ce sous-espace détermine une structure de complexifié sur t_G étendant la structure naturelle de t_{L_m}. On sait alors associer à tout vecteur u de t_G sa partie réelle $\mathrm{Re}(u)$. Choisissons également une section $\mathbf{R}$-linéaire, notée σ, de la restriction de π_* à t_G^c. On munit t_A de la structure de complexifié déduite de celle de t_G par π_*, de sorte que $\pi_*(\mathrm{Re}(v)) = \mathrm{Re}(\pi_*(v))$ pour tout v dans t_G. Si $u \in t_A$, on pose

$$s(u) = \mathrm{Re}(\sigma(u)) + i\,\mathrm{Re}(\sigma(-iu)) - i(\pi_u)_*(\mathrm{Re}(\sigma(-iu) + i\sigma(u))$$

où $(\pi_u)_*$ est la différentielle à l'origine de la projection π_u de L sur L_u. On vérifie que s ne dépend pas du choix de la section σ: en effet si σ_1 et σ_2 vérifient $\pi_* \circ \sigma_1 = \pi_* \circ \sigma_2$ on a $(\sigma_1 - \sigma_2)(t_A) \subset t_{L_m}^c$ d'où $\mathrm{Re}(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$ et $(\pi_u)_* \circ (\sigma_1 - \sigma_2) = 0$. Par ailleurs, si $u \in t_A$ on a

$$\pi_* \circ s(u) = \mathrm{Re}(u) + i\,\mathrm{Re}(-iu) = u,$$

et donc $\pi_* \circ s = \mathrm{id}_{t_A}$. Si $u \in t_{A'}$ alors $-iu \in t_{A'}$ et on peut choisir d'après (2) une section σ' de la restriction de π_* à t_G^c telle $\sigma'(u)$ et $\sigma'(-iu)$ appartiennent à $t_{G'}^c$. On calcule alors

$$s(u) - \sigma'(u) = i\,\mathrm{Re}(-iU) - i(\pi_u)_*(\mathrm{Re}(-iU)),$$

où $U = -\sigma'(u) + i\sigma'(-iu) \in t_{L'}$.

Comme $U \in t_L$ la partie réelle et la partie imaginaire de U appartiennent à t_L, d'où $s(u) - \sigma'(u) \in t_L$. Or $(\pi_u)_*(s(u) - \sigma'(u)) = 0$, donc $s(u) - \sigma'(u)$ appartient à $t_{L_m}^c$.

Mais $U \in t_{L'}$ et les équations de $t_{L'_m}$ dans t_{L_m} étant à coefficients dans $\mathbf{Q}$, à la fois la partie réelle et la partie imaginaire de U satisfont ces équations. Ainsi $s(u) - \sigma'(u) \in t^c_{L'_m}$, comme $\sigma'(u) \in t^c_{G'}$ il s'ensuit que $s(u) \in t^c_{G'}$ et ainsi $s(t_{A'}) = t^c_{G'} \cap \tilde{t}_A = \tilde{t}_{A'}$. Ce qui achève de montrer le théorème 3.

Remarque 5. Supposons que le sous-groupe linéaire connexe maximal L de G soit un tore. L'homomorphisme s que nous venons de construire est alors $\mathbf{C}$-linéaire, et c'est l'unique section $\mathbf{C}$-linéaire de la projection π_* de t_G sur t_A dont l'image soit contenue dans t^c_G. En termes de formes de troisième espèce sur A auxquelles correspond l'extension G, cela revient à choisir, parmi les formes de troisième espèce de diviseur résidu donné, l'unique forme dont toutes les périodes sont imaginaires pures. Dans le cas où L est un groupe unipotent, π_* induit un isomorphisme $\mathbf{R}$-linéaire de Ω_G sur Ω_A, et notre section s en induit l'isomorphisme inverse. Il existe alors une unique section $\mathbf{C}$-linéaire $\tilde{s}$ de la projection π_* de t_G sur t_A telle que $\tilde{s} - s$ définisse une application $\mathbf{C}$-antilinéaire de t_A dans t_L. La traduction de ce résultat en termes de périodes de formes de deuxième espèce est également classique.

Nous avons considéré jusqu'à présent le sous-groupe algébrique G' de G comme une extension d'un sous-groupe algébrique A' de A par le sous-groupe linéaire $L' = G' \cap L$, mais, lorsque G' est connexe, il est tout aussi naturel d'écrire G' comme extension d'une variété abélienne B par le sous-groupe linéaire connexe maximal M de G', ainsi que nous l'avons fait pour G lui-même. On vérifie facilement que M est la composante neutre de L', et on déduit des propriétés générales des extensions de groupe (voir [1, remarque du §2]) l'existence d'une isogénie de B sur A' dont le noyau est isomorphe au groupe L'/M. Pour l'application que nous avons en vue, cette propriété peut s'énoncer de la façon suivante.

Proposition 6. *Pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de G, l'indice de $\pi_*(\Omega_{G'})$ dans $\Omega_{A'}$ est égal au nombre de composantes connexes de L'.*

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & G' \arrow[u] \arrow[r, "\pi"] & A' \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & t_{L'} \arrow[u, "\exp_{L'}"] \arrow[r] & t_{G'} \arrow[u, "\exp_{G'}"] \arrow[r] & t_{A'} \arrow[u, "\exp_{A'}"] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega_{L'} \arrow[u] \arrow[r] & \Omega_{G'} \arrow[u] \arrow[r, "\pi_*"] & \Omega_{A'} \arrow[u] & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Puisque l'image de l'exponentielle d'une groupe de Lie complexe est sa composante neutre et que G', et donc A', sont connexes, toutes les suites qui y apparaissent sont exactes. Le lemme du serpent fournit donc un isomorphisme du conoyau $\Omega_A'/\pi_*(\Omega_{G'})$ de la dernière ligne sur le conoyau $L'/(L')^\circ$ de la première colonne.

5. Le cas général

(a) Choix d'un plongement et d'une métrique

Revenons pour conclure au groupe algébrique commutatif G, qu'en vertu des remarques 1 et 2 du paragraphe 1 nous supposons désormais connexe et muni d'une compactification lisse $\tilde{G}$ et d'un plongement projectif $\varphi : \tilde{G} \to \mathbf{P}^N$ vérifiant les conditions de [11, §1.4]. Nous construisons ici une métrique euclidienne ε sur t_G adaptée à ce choix de φ, et nous rassemblons les propriétés de ε et φ qui apparaissent dans la démonstration du théorème 1 et de ses corollaires.

Etudions tout d'abord les propriétés géométriques des sous-groupes G' de G vis à vis du plongement projectif φ. On reprend ci-dessous les notations L, A, L', A' et la suite exacte (1) associées à G et à G' au paragraphe 4.

LEMME 5. *Pour tout sous-groupe algébrique G' de G et tout élément s de G, on a* $\deg_\varphi(s + G') = \deg_\varphi(G')$.

Démonstration. (voir [6, lemme 2]). La loi de groupe de G s'étend en une action de G sur $\tilde{G}$ et fait de $G \times \tilde{G}$ une famille plate sur G. Le théorème 9.9 de [4] conduit au résultat.

Le lemme suivant permet de trouver un bon plongement projectif de la variété abélienne A.

LEMME 6. *Il existe un entier $J \leq N$ et un plongement projectif ψ: $A \to \mathbf{P}^J$ tel que le morphisme π de G sur A soit représenté par la restriction à $\varphi(G)$ de la projection linéaire*

$$j: (x_0, \ldots, x_N) \cdots \to (x_0, \ldots, x_J)$$

de $\mathbf{P}^N$ dans $\mathbf{P}^J$.

Démonstration. (voir [11, Proposition 8] pour une traduction de cet énoncé en termes de fonctions thêta). Soit $\tilde{\pi}$ le morphisme de $\tilde{G}$ sur A prolongeant π. Le diviseur D de $\tilde{G}$ qui définit le plongement φ de Serre est par définition somme d'un diviseur effectif ou nul de support G_∞ disjoint de G, et de l'image par $\tilde{\pi}^*$ d'un diviseur très ample Δ sur A (cf. [11, §1.4]). En particulier, le système linéaire complet associé à $\tilde{\pi}^*(\Delta)$ sur $\tilde{G}$ n'a pas de points de base, et définit un morphisme χ de $\tilde{G}$ dans un espace projectif $\mathbf{P}^J$. Il s'identifie par ailleurs à un sous-espace linéaire du système linéaire complet associé à D, admettant G_∞ pour ensemble de points de base. La restriction à G de χ est donc la composée de la restriction à G du plongement projectif φ par une projection linéaire j partout définie sur $\varphi(G)$. Mais χ est le composé de $\tilde{\pi}$ par le plongement projectif ψ de A dans $\mathbf{P}^J$ défini par Δ, de sorte que la restriction π de $\tilde{\pi}$ à G est bien représentée par la restriction de j à $\varphi(G)$. (Ce résultat ne s'étend pas à $\tilde{\pi}$ lui-même, ce qui interdit d'invoquer la deuxième assertion de la proposition 2 dans la démonstration qui suit.)

On fixe désormais le plongement projectif ψ de A donné par le lemme 6.

PROPOSITION 7. *Pour tout sous-groupe algébrique G' de G on a*

$$\deg_\varphi(G') \geq \deg_\varphi(L') \times \deg_\psi(A').$$

Démonstration. La projection linéaire j représente sur $\varphi(G)$, et donc sur $\varphi(G')$, le morphisme π; ainsi les fibres $j^{-1} \circ \psi(x) \cap \varphi(G')$ $(x \in A')$ sont toutes isomorphes à $\varphi(L')$ et ont même dimension et même degré, égal à $\deg_\varphi(L')$, d'après le lemme 5. La première assertion de la proposition 2 entraîne alors la proposition 7.

Nous pouvons maintenant décrire la métrique ε qui nous sera utile. Partant de la suite exacte de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels

$$0 \to t_L \to t_G \xrightarrow{\pi_*} t_A \to 0.$$

et des décompositions

$$t_G = t_G^+ \oplus t_G^c, \; t_G^c = t_L^c \oplus \tilde{t}_A$$

que fournissent les théorèmes 2 et 3, nous munissons t_G de l'unique métrique euclidienne ε vérifiant les propriétés suivantes: en premier lieu, ε induit sur t_L la métrique décrite au paragraphe 3.b à partir d'une décomposition de L en produit $\mathbf{G}_a^v \times \mathbf{G}_m^s$; en second lieu, π_* établit une isométrie de $\tilde{t}_A$, muni de la métrique induite par ε, sur t_A, muni de la métrique $\bar{\varepsilon}$ associée, comme au paragraphe 3.a, au plongement projectif ψ de A défini par le lemme 6; enfin, t_L et $\tilde{t}_A$ sont orthogonaux relativement à ε. La métrique ε est ainsi canoniquement liée au plongement projectif φ de $\tilde{G}$.

LEMME 7. *Pour tout sous-groupe algébrique G' de G, le quotient $\Omega_G/\Omega_{G'}$ est sans torsion.*

Démonstration. $\Omega_{G'}$ est le noyau de l'application exponentielle $\exp_{G'}$, qui est la restriction à $t_{G'}$ de l'application $\exp_G$, donc $\Omega_{G'} = \Omega_G \cap t_{G'}$ et on conclut par le lemme 2.

Avec les notations de la suite (1), on peut alors énoncer:

PROPOSITION 8. *Pour tout sous-groupe algébrique G' de G on a*

$$\mathrm{vol}_\varepsilon(\Omega_{G'}) = \mathrm{vol}_\varepsilon(\Omega_{L'}) \times \mathrm{vol}_{\bar\varepsilon}(\pi_*(\Omega_{G'})).$$

Démonstration. En vertue du théorème 3, le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $t_{G'}^c$ est somme directe de $t_{L'}^c = t_L^c \cap t_{G'}$ et de $\tilde t_{A'} = \tilde t_A \cap t_{G'}$. Puisque t_L^c et $\tilde t_A$ sont par définition de ε, orthogonaux, cette décomposition de $t_{G'}^c$ est de plus orthogonale. En particulier, la projection orthogonale p de $t_{G'}^c$ sur l'orthogonal $\tilde t_{A'}$ de $\Omega_{L'} \otimes \mathbf{R}$ dans $t_{G'}^c$ coïncide avec la restriction à $t_{G'}^c$ de la projection de t_G^c sur $\tilde t_A$, et on déduit du caractère isométrique de la restriction à $\tilde t_A$ de π_* l'égalité

$$\mathrm{vol}_\varepsilon(p(\Omega_{G'})) = \mathrm{vol}_{\bar\varepsilon}(\pi_*(\Omega_{G'})),$$

de sorte que le lemme 3 (et le lemme 7), appliqué aux sous-groupes $\Omega_{L'}$ et $\Omega_{G'}$ de $t_{G'}^c$ entraîne bien

$$\mathrm{vol}_\varepsilon(\Omega_{G'}) = \mathrm{vol}_\varepsilon(\Omega_{L'}) \times \mathrm{vol}_{\bar\varepsilon}(\pi_*(\Omega_{G'})).$$

(b) Fin de la démonstration

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 1 dans le cas général, sous la forme plus précise suivante, où on reprend les notations ε et φ de l'alinéa précédent, et où g désigne la dimension de G:

THÉORÈME 1. *Pour tout sous-groupe algébrique G' de G, on a*

$$\mathrm{vol}_\varepsilon(\Omega_{G'}) \le g!6^{g+1}\deg_\varphi(G').$$

Démonstration . D'après la remarque 1 on peut, sans perte de généralité, supposer G' connexe. La proposition 6 entraîne alors

$$\mathrm{vol}_{\bar\varepsilon}(\pi_*(\Omega_{G'})) = \mathrm{vol}_{\bar\varepsilon}(\Omega_{A'}) \times [\Omega_{A'} : \pi_*(\Omega_{G'})] = \mathrm{vol}_{\bar\varepsilon}(\Omega_{A'}) \times [L' : (L')^\circ].$$

Or le plongement φ de Serre induit un plongement de L analogue à celui de la fin du paragraphe 3.b (il convient de remplacer le plongement de chaque facteur $\mathbf{G}_m$ dans $\mathbf{P}^1$ par son composé avec le morphisme de Véronèse dans $\mathbf{P}^2$). Le démonstration de la proposition 5 conduit à l'inégalité

$$\mathrm{vol}_\varepsilon(\Omega_{L'}) \times [L' : (L')^\circ] \le g!6^{g+1}\deg_\varphi(L').$$

Mais d'après la proposition 3 on a aussi

$$\mathrm{vol}_{\bar\varepsilon}(\Omega_{A'}) \le \deg_\psi(A')/(\dim A')!.$$

La proposition 8 entraîne alors

$$\operatorname{vol}_\varepsilon(\Omega_{G'}) \leq \frac{g!6^{g+1}}{(\dim A')!}\deg_\varphi(L')\deg_\psi(A'),$$

et la proposition 7 permet de conclure.

Il reste à établir les corollaires 1 et 2 du paragraphe 1.

Démonstration du corollaire 1. C'est une conséquence directe du théorème 1 et de la proposition 1. On peut prendre $C_1 = C_2^l = 2^l c/v_l$ si $l \leq 2g$ désigne le rang de $\Omega_{G'}$, et remplacer $\deg_\varphi(G')$ par sa racine l-ième dans la seconde partie de l'énoncé.

Démonstration du corollaire 2. D'après le lemme 1, on peut, sans restreindre la généralité, choisir la structure euclidienne ε de t_G de sorte que les sous-espaces t_G^+ et t_G^c de la décomposition de t_G donnée par le théorème 2 soient orthogonaux. Soit alors G' un sous-groupe algébrique de G. Les sous-espaces $t_{G'}^+$ et $t_{G'}^c$ et $t_{G'}$ sont orthogonaux relativement à ε, et d'après le théorème 2, la distance de tout élément u de t_G^c à $t_{G'}$ est égale à sa distance à $t_{G'}^c$. Notons, comme dans [9], $d(u, t_{G'})$ cette fonction, et considérons, dans l'espace euclidien $V = t_G^c$, les sous-groupes discrets $\Omega_{G'} \subset \Omega_G$. Si $p_{G'}$ est la projection orthogonale de V sur l'orthogonal de $t_{G'}^c$ dans V, le lemme 3 (et le lemme 7) entraîne que $p_{G'}(\Omega_G)$ est un sous-groupe discret de V de volume $\operatorname{vol}(\Omega_G)/\operatorname{vol}(\Omega_{G'})$. D'après la proposition 1, le produit des normes des éléments de toute base de $p_{G'}(\Omega_G)$ est donc minoré par $C_3/\operatorname{vol}(\Omega_{G'})$ où on a posé $C_3 = 2^r \operatorname{vol}(\Omega_G)/r!v_r$ et où r désigne le corang de $\Omega_{G'}$ dans Ω_G. Comme $d(u, t_{G'})$ coïncide, pour tout élément u de V, avec la norme de $p_{G'}(u)$, et que $p_{G'}$ établit une bijection de $\Omega_G/\Omega_{G'}$ sur $p_{G'}(\Omega_G)$, la première partie du corollaire 2 est bien vérifiée. Quant à la seconde, elle provient alors d'une majoration du dernier des minima successifs sur Ω_G de la fonction $d(u, t_{G'})$ par celui de la fonction $\|u\|$.

Références

1. D. Bertrand, "Endomorphismes de groupes algébriques; applications arithmétiques" dans *Approximations diophantiennes et nombres transcendants*, éd. D. Bertrand et M. Waldschmidt, Birkhäuser Progress in Math. vol. 31, 1983, pp. 1–45.
2. N. Bourbaki, *Algèbre*, livres III et VII, Masson, 1980.
3. A. Borel *Linear algebraic groups*, Benjamin, Reading, Mass., 1969.
4. R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer Verlag, N.Y., 1977.
5. D. Masser et G. Wüstholz, *Fields of large transcendence degree generated by values of elliptic functions*, Inventiones Math., vol. 72 (1983), pp. 407–464.
6. J.-C. Moreau, "Démonstrations géométriques des lemmes de zéros II" dans *Approximations diophantiennes et nombres transcendants*, éd. D. Bertrand et M. Waldschmidt, Birkhäuser Progress in Math., vol. 31, 1983, pp. 191–197.

7. D. Mumford, *Abelian varieties*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1974.
8. P. Philippon, *Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Bull. Soc. Math. France, vol. 114 (1986), pp. 355–383.
9. P. Philippon et M. Waldschmidt, *Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs*, Illinois J. Math., vol. 32 (1988), pp. 281–314 (ce fascicule).
10. W. Schmidt, *Diophantine approximation*, Springer Lecture Notes in Math, vol. 785, Springer Verlag, N.Y., 1980.
11. J.-P. Serre "Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs," appendice II de *Nombres transcendants et groupes algébriques* par M. Waldschmidt, Astérisque, vol. 69–70, (1979) pp. 191–202.

Institut Henri Poincaré C.N.R.S.
Paris