ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 34, Number 3, Fall 1990

NON COHERENCE DE CERTAINS ANNEAUX DE FONCTIONS HOLOMORPHES

PAR

M. HICKEL

I. Introduction

Soit A un anneau et $u_1, \dots, u_k$ des éléments de A. On note $R(u_1, \dots, u_k; A)$ le module des relations à coefficients dans A entre les u_i; i.e.,

$$R(u_1, \dots, u_k; A) = \left\{ (f_1, \dots, f_k) \in A^k \text{ tel que } \sum_{i=1}^{k} f_i u_i = 0 \right\}.$$

Un anneau A est dit cohérent si pour tout k-uplet $(u_1, \dots, u_k) \in A^k$ le module des relations $R(u_1, \dots, u_k; A)$ est un A-module de type fini. Une propriété équivalente à la cohérence de A est la suivante:

"L'intersection de deux idéaux de type fini de A est encore un idéal de type fini de A".

L'étude de la cohérence de certains anneaux de fonctions holomorphes a été entreprise: W. McVoy et L. A. Rubel [7] ont montré que l'anneau $H^\infty(D)$ des fonctions holomorphes et bornées dans le disque unité de $\mathbf{C}$ est cohérent, J. P. Rosay [9] a montré qu'il en était de même pour l'anneau des fonctions holomorphes et bornées dans un domaine borné de $\mathbf{C}$ de connectivité finie, E. Amar a montré que l'anneau $H^\infty(\mathbf{B})$ des fonctions holomorphes et bornées dans la boule unité de $\mathbf{C}^n$ $n \geq 3$ n'est pas cohérent et qu'il en est de même pour l'anneau $A^k(\mathbf{B})$ des fonctions holomorphes dans $\mathbf{B}$ et c^k dans $\overline{\mathbf{B}}$ $(n \geq 3)$.

La question de savoir si les anneaux $A^\infty(\Omega)$ des fonctions holomorphes dans un domaine Ω de $\mathbf{C}^p$ $(p \geq 1)$ et indéfiniment différentiable dans $\overline{\Omega}$ sont cohérents ou non semble ouverte [1]. Nous nous proposons d'apporter quelques éléments de réponse à cette question. A cette fin, étant donné un ouvert Ω de $\mathbf{C}^p$ et $\xi \in \partial\Omega$ on notera:

$A^\infty(\Omega)$ l'anneau des fonctions holomorphes dans Ω et c^∞ dans $\overline{\Omega}$.

$A(\Omega)$ l'anneau des fonctions holomorphes dans Ω et continues dans $\overline{\Omega}$.

A^∞_ξ l'anneau des germes de fonctions holomorphes et c^∞ au voisinage de ξ dans $\overline{\Omega}$.

Received Feb. 28, 1988.

A_ξ l'anneau des germes de fonctions holomorphes et continues au voisinage de ξ dans $\overline{\Omega}$.

$P_\xi^\infty = \{f \in A^\infty(\Omega)$ tq $D^\alpha f(\xi) = 0\ \forall \alpha \in \mathbf{N}^p\}$; i.e., les $f \in A^\infty(\Omega)$ qui sont plates in ξ.

$P_\xi = \{f \in A(\Omega)$ tq $f(\xi) = 0\}$; i.e., les $f \in A(\Omega)$ qui sont nulles en ξ.

On obtient alors les résultats suivants:

THÉORÈME 1. *Soit D le disque unité de* $\mathbf{C}$, *et* Π *le demi-plan* $\{z \in \mathbf{C}$ tq Ré $z > 0\}$.

(i) *$A^\infty(D)$ et $A^\infty(\Pi)$ ne sont pas cohérents.*

(ii) *$A(D)$ et $A(\Pi)$ ne sont pas cohérents.*

THÉORÈME 2. *Soit Ω un ouvert strictement pseudo-convexe borné à bord lisse c^∞ de $\mathbf{C}^p$ $(p \geq 2)$. $A^\infty(\Omega)$ et $A(\Omega)$ ne sont pas cohérents.*

THÉORÈME 3. *Soit Ω comme dan les Théorèmes* 1 *ou* 2 *et $\xi \in \partial\Omega$. A_ξ^∞ et A_ξ ne sont pas cohérents.*

II. Demonstration des resultats

II.1. *Le lemme de base.*

Les théorèmes 1, 2 et 3 se déduiront d'un même lemme qui est une conséquence facile du théorème suivant, qui est un cas très particulier de résultats obtenus par J. Bruna et J.M. Ortéga [3] et J. Chaumat et A.M. Chollet [4], [5], [6].

THÉORÈME ([3] ou [4], [5]). *Soient $\Omega = D$ ou Π ou bien un ouvert strictement pseudo-convexe borné à bord lisse c^∞ de $\mathbf{C}^p$ $(p \geq 2)$ et $\xi \in \partial\Omega$:*

(i) *Soit $(b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de P_ξ^∞; il existe $g \in P_\xi^\infty$ et $(h_i)_{i\in\mathbf{N}}$, $h_i \in P_\xi^\infty$ telle que $\forall i$, $f_i = gh_i$.*

(ii) *Soit $(b_i)_{i\in F}$ une famille finie d'éléments de P_ξ; il existe $g \in P_\xi$ et $(h_i)_{i\in F}$, $h_i \in P_\xi$ telle que $\forall i \in F$, $f_i = gh_i$.*

LEMME 1. *Soit Ω comme dans le théorème ci-dessus et soient $(f_1, \ldots, f_k)$ des éléments de $A^\infty(\Omega)$ (resp de $A(\Omega)$) tels qu'il existe $\xi \in \partial\Omega$ satisfaisant:*

Pour tout

$$G = (g_1, \ldots, g_k) \in R(f_1, \ldots, f_k; A^\infty(\Omega))$$

(resp $\in R(f_1, \ldots, f_k; A(\Omega))$ *on a*

$$g_i \in P_\zeta^\infty \big(\textit{resp}\ g_i \in P_\zeta \big).$$

Alors $R(f_1, \ldots, f_k; A^\infty(\Omega))$ *(resp* $R(f_1, \ldots, f_k; A(\Omega))$ *n'est pas de type fini.*

Preuve. La preuve pour la classe $A(\Omega)$ étant identique à celle de $A^\infty(\Omega)$ nous ne rédigeons que cette dernière. Constatons d'abord que

$$R(f_1, \ldots, f_k; A^\infty(\Omega)) = P_\zeta^\infty \cdot R(f_1, \ldots, f_k; A^\infty(\Omega)). \tag{2.1}$$

En effet soit $G = (g_1, \ldots, g_k) \in R(f_1, \ldots, f_k; A^\infty(\Omega))$. Comme par hypothèse les g_i sont plates en ζ il existe d'après le Théorème précédent $g \in P_\zeta^\infty$ et $(h_1, \ldots, h_k) \in (A^\infty(\Omega))^k$ tels que

$$(g_1, \ldots, g_k) = g(h_1, \ldots, h_k).$$

Maintenant

$$\sum_{i=1}^{k} B_i g_i = g\left(\sum_{i=1}^{k} B_i h_i \right) = 0$$

et comme $A^\infty(\Omega)$ est intègre on a donc $\sum_{i=1}^{k} b_i h_i = 0$. Donc

$$(h_1, \ldots, h_k) \in R(f_1, \ldots, f_k, A^\infty(\Omega))$$

et par suite $G \in P_\zeta^\infty \cdot R(f_1, \ldots, f_k; A^\infty(\Omega))$.

Considérons maintenant R le sous-module de $(A_\zeta^\infty)^k$ engendré par

$$R(f_1, \ldots, f_k; A^\infty(\Omega)),$$

i.e., le sous-module de $(A_\zeta^\infty)^k$ engendré par les germes en ζ des éléments de $R(f_1, \ldots, f_k; A^\infty(\Omega))$ de (2.1). On déduit de (2.1)

$$R = \tilde{P}_\zeta^\infty \cdot R \tag{2.2}$$

où $\tilde{P}_\zeta^\infty$ est l'idéal de A_ζ^∞ engendré par les germes en ζ des éléments de P_ζ^∞.

Supposons que $R(f_1, \ldots, f_k; A^\infty(\Omega))$ soit $A^\infty(\Omega)$ de type fini. Il en résulterait immédiatement que R est A_ζ^∞ de type fini et comme A_ζ^∞ est un anneau local dont l'idéal maximal contient $\tilde{P}_\zeta^\infty$, (2.2) et le lemme de Nakayama [8] nous donnerait $R = \{0\}$. Autrement dit tout élément de $R(f_1, \ldots, f_k; A^\infty(\Omega))$ a son germe en ζ nul; i.e., tout élément de $R(f_1, \ldots, f_k; A^\infty(\Omega))$ est nul sur un voisinage de ζ dans $\overline{\Omega}$ et par conséquent est nul sur $\overline{\Omega}$. Donc

$$R(f_1,\ldots,f_k;A^\infty(\Omega)) = \{0\}$$

ce qui est absurde. Donc $R(f_1,\ldots,f_k;A^\infty(\Omega))$ n'est pas de type fini.

Ainsi d'après le Lemme 1 pour prouver les résultats annoncés il suffit dans chacun des cas de construire des éléments $f_1,\ldots,f_k$ de $A^\infty(\Omega)$ (resp de $A(\Omega)$) tels qu'il existe $\zeta \in \partial\Omega$ où toute relation entre les f_i est plate (resp nulle en ζ); c'est ce que nous allons faire maintenant.

II.2. *Preuve du Théorème 1.*

La preuve du théorème pour le disque unité de **C** étant identique à celle pour le demi-plan nous ne rédigeons que cette dernière.

Soit $\chi \in c^\infty(\mathbf{R})$ telle que $0 \le \chi \le 1$ $\chi(t) = 1$ si $|t| \le 1$ et $\chi(t) = 0$ si $|t| \le 2$. Définissons alors deux fonctions α et β sur **R** de la manière suivante:

si $t > 0$,

$$\alpha(t) = \chi(t)\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{t}}\right) + (1-\chi(t))$$

et

$$\beta(t) = \chi(t)\left[\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right]^2 + (1-\chi(t));$$

si $t < 0$,

$$\alpha(t) = \chi(t)\left[\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{-t}}\right)\right]^2 + 1 - \chi(t)$$

et

$$\beta(t) = \chi(t)\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{-t}}\right) + (1-\chi(t)),$$

$\alpha(0) = \beta(0) = 0.$

α et β satisfont alors:

$$
(2.3)\qquad
\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \alpha \text{ et } \beta \text{ sont } c^\infty \text{ sur } \mathbf{R}. \\
\text{(b)} & 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ et } 0 \leq \beta \leq 1. \\
\text{(c)} & \operatorname{Log} \alpha \text{ et } \operatorname{Log} \beta \in L^1(\mathbf{R}). \\
\text{(d)} & \forall k \in \mathbf{N}, \text{ les quotients } t^k\alpha(t)/\beta(t) \text{ et} \\
& t^k\beta(t)/\alpha(t) \text{ ne sont pas bornés au} \\
& \text{voisinage de } 0.
\end{array}
$$

Considérons alors les fonctions extérieures associées à α et β, i.e., soient

$$f_1(z) = \exp\left(\frac{1}{\Pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-itz}{z-it}\operatorname{Log}\alpha(t)\frac{dt}{1+t^2}\right), \quad z \in \Pi,$$

$$f_2(z) = \exp\left(\frac{1}{\Pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-itz}{z-it}\operatorname{Log}\beta(t)\frac{dt}{1+t^2}\right), \quad z \in \Pi.$$

f_1 et f_2 sont des fonctions extérieures dont le module au bord est dans $c^\infty(\mathbf{R})$, elles sont donc dans $A^\infty(\Pi)$ (cf. [2], p. 156). On a alors:

Lemme 2. *Soit* $(a, b) \in R(f_1, f_2; A^\infty(\Pi))$ (*resp.* $\in R(f_1, f_2; A(\Pi))$). *Alors* a *et* b *sont plates en* 0 (*resp nulles en* 0).

Preuve. Soient pour $t \in \mathbf{R}$, $u(t) = a(it)$ et $v(t) = b(it)$, u et v sont dans $c^\infty(\mathbf{R})$ (resp dans $c(\mathbf{R})$). Pour voir que $a(z)$ et $b(z)$ sont plates en 0 (resp nulles en 0) il suffit de voir que $u(t)$ et $v(t)$ sont plates en 0 (resp nulles en 0); en effet si par exemple $a(z)$ n'était pas plate en 0, comme $a \in A^\infty(\Pi)$ on a

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial z^\alpha\, \partial \bar{z}^\beta}a(0) = 0 \quad \text{si } \beta > 0.$$

On aurait donc au voisinage de 0 pour un $k \in \mathbf{N}$,

$$a(z) = a_k z^k + O\left(|z|^{k+1}\right)$$

avec $a_k \in \mathbf{C}$ $a_k \neq 0$ et donc pour $t \in \mathbf{R}$ voisin de 0,

$$u(t) = a_k(i)^k t^k + O\left(|t|^{k+1}\right).$$

Comme $a_k(i)^k \neq 0$, u ne serait pas plate en 0. Montrons donc que u et v sont plates en 0:

on a $\forall t \in \mathbf{R}$,

$$|f_1(it)| = \alpha(t), \quad |f_2(it)| = \beta(t)$$

et de

$$a(z)f_1(z) + b(z)f_2(z) = 0, \quad \forall z \in \overline{\Pi}$$

on déduit $\forall t \in \mathbf{R}$,

$$|u(t)|\alpha(t) = |v(t)|\beta(t). \tag{2.4}$$

Si u n'était pas plate en 0, il existerait $k \in \mathbf{N}$ tel que au voisinage de 0 on ait $|u(t)| \simeq |t|^k$ et donc $|t|^k\alpha(t)$ serait équivalent au voisinage de 0 à $|v(t)|\beta(t)$. Donc en particulier il existerait $c > 0$, telle que au voisinage de 0, $|t|^k\alpha(t) \leq c\beta(t)$, ce qui n'est pas le cas d'après (2.3). Donc u est plate en 0 (resp nulle en 0) de même pour v. Le lemme 2 est donc prouvé, le théorème 1 s'en déduit grâce au lemme 1.

II.3. *Preuve du Théorème 2*

Nous allons construire f_1 et $f_2 \in A^\infty(\Omega)$ telles que les conditions du lemme 1 soient satisfaites. Notre construction se fera facilement à partir d'un résultat de J. Chaumat et A.M. Chollet que nous rappelons. Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^p$ un ouvert strictement pseudo-convexe à frontière c^∞ lisse. Ω est donc défini par la donnée d'une fonction r de classe c^∞ au voisinage de $\overline{\Omega}$ et strictement plurisousharmonique dans un voisinage de $\partial\Omega$ telle que

(i) $\Omega = \{z \in \mathbf{C}^p \,|\, r(z) < 0\}$,
(ii) grad $r \neq 0$ sur $\partial\Omega$.

Soit alors $z \in \partial\Omega$. On notera:

ν_z le vecteur unitaire de la normale en z à $\partial\Omega$ orienté vers l'extérieur.
$T_z(\partial\Omega)$ l'espace tangent en z à $\partial\Omega$.
$T_z^{\mathbf{C}}(\partial\Omega)$ l'espace tangent complexe en z à $\partial\Omega$.

On a la décomposition orthogonale réelle

$$T_z(\partial\Omega) = \mathbf{R}(i\nu_z) \oplus T_z^{\mathbf{C}}(\partial\Omega)$$

et la décomposition orthogonale complexe

$$\mathbf{C}^n = \mathbf{C} \cdot \nu_Z \oplus T_Z^{\mathbf{C}}(\partial\Omega)$$

Soit maintenant Π_Z la projection orthogonale complexe sur $\mathbf{C} \cdot \nu_Z$. Pour tout couple $(z, w) \in \partial\Omega \times \partial\Omega$ on pose

$$\rho(z,w) = |\Pi_z(z-w)| + |\Pi_w(w-z)| + |z-w|^2.$$

Alors ρ est une pseudo-distance sur $\partial\Omega$; i.e.,

(a) $\rho(z,w) = 0 \Leftrightarrow z = w$,

(b) $\rho(z,w) = \rho(w,z)$,

(c) $\exists K > 0$ telle que $\forall z, w, t \in \partial\Omega$ on ait

$$\rho(z,w) \leq K(\rho(z,t) + \rho(t,w)).$$

Soit $B_r(z) = \{w \in \partial\Omega \text{ tq } \rho(z,w) < r\}$, la boule de centre z et de rayon r pour cette pseudo-distance. Soit E un sous-ensemble fermé de $\partial\Omega$ et $\varepsilon > 0$ on désigne par $N_\varepsilon(E)$ le nombre minimal de boules de rayon ε centrées sur E dont la réunion recouvre E. On a alors le résultat suivant dû à J. Chaumat et A.M. Chollet [4], [5].

THÉORÈME. *Soit $E \subset \partial\Omega$ un sous-ensemble fermé d'une courbe dont la tangente en chaque point n'est pas dans $T^{\mathbf{C}}(\partial\Omega)$ et vérifiant il existe $c_1, c_2 > 0$, telle que $\forall r$, $0 < r < 1$, et toute boule B_r de rayon r centrée sur $\partial\Omega$ on a*

$$(\mathrm{c}_2) \qquad \int_0^r N_\varepsilon(B_r \cap E)\, d\varepsilon \leq c_1 r \log 1/r + c_2 r.$$

Alors E est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(\Omega)$.

Maintenant on peut toujours supposer que $0 \in \partial\Omega$ et que

$$\frac{\partial r}{\partial z_1}(0) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial r}{\partial z_i}(0) = 0 \quad \text{si } i \geq 2.$$

Ainsi il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbf{C}^p$ et une fonction $R(\operatorname{Im} z_1, z_2, \ldots, z_p)$ c^∞ dans V avec $R(0) = dR(0) = 0$ telle que

$$\Omega \cap V = \{(z_2, \ldots, z_p) \in V \text{ tels que } 2\,\text{Ré}\, z_1 - R(\operatorname{Im} z_1, z_2, \ldots, z_p) < 0\}.$$

Soit alors

$$\Gamma = \{z \in V \text{ avec } z_2 = \cdots = z_p = 0 \text{ et } 2\,\text{Ré}\, z_1 - R(\operatorname{Im} z_1, 0, \ldots, 0) = 0\}.$$

Il est alors facile de vérifier que quitte à restreindre V on a:

Γ est courbe c^∞ de $\partial\Omega$, pour $p \in \Gamma$ la tangente en p à Γ est la droite

$$\mathbf{R} \cdot \left(i \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_1}(p), 0, \ldots, 0\right)$$

et donc celle-ci n'est pas dans $T_p^{\mathbf{C}}(\partial\Omega)$.

$$\forall z, w \in \Gamma\, \rho(z,w) \simeq |z-w| \simeq |\operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} w_1|.$$

Soit alors $(w^k)_{k \geq n_0}$ la suite de points de Γ définie (pour $k \geq n_0$) par

$$w^{2k} = \left(w_1^{2k}, w_2^{2k}, \ldots, w_p^{2k}\right)$$

avec

$$w_1^{2k} = \frac{1}{2} R\left(\frac{1}{2^{2k}}, 0, \ldots, 0\right) + \frac{i}{2^{2k}}$$

et $w_j^{2k} = 0$ si $j \geq 2$;

$$w^{2k+1} = \left(w_1^{2k+1}, w_2^{2k+1}, \ldots, w_p^{2k+1}\right)$$

avec

$$w_1^{2k+1} = \frac{1}{2} R\left(-\frac{1}{2^{2k+1}}, 0, \ldots, 0\right) - \frac{i}{2^{2k+1}}$$

et $w_j^{2k+1} = 0$ si $j \geq 2$.

Posons alors

$$E_1 = \{0\} \cup \left\{(w^{2k})|_{k \geq k_0}\right\},$$
$$E_2 = \{0\} \cup \left\{(w^{2k+1})_{k \geq k_0}\right\}$$

et

$$E = E_1 \cup E_2.$$

LEMME 3. *E_1 et E_2 sont régulièrement situés (déf cf.* [10]). *E vérifie la condition* (c_2).

Preuve. On a $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et si $z \in E_1$, $w \in E_2$ on a

$$|z-w| \simeq |\operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} w_1| \simeq |\operatorname{Im} z_1| + |\operatorname{Im} w_1| \simeq |z| + |w|$$

car $\operatorname{Im} z_1 \geq 0$ et $\operatorname{Im} w_1 \leq 0$, par suite,

$$|z-w| \geq |z| = d(z, E_1 \cap E_2) \quad \forall z \in E_1, w \in E_2.$$

Donc $\forall z \in E_1$, $d(z, E_2) \geq d(z, E_1 \cap E_2)$ et donc E_1 et E_2 sont régulièrement situés.

Soit r $0 < r < 1$ et B_r une boule de rayon r centrée sur $\partial\Omega$, et soit $\varepsilon > 0$. On a

$$E \cap B_r = E \cap B_r \cap B(0, \varepsilon/K) \cup (E \cap B_r \setminus B(0, \varepsilon/K)).$$

$E \cap B_r \cap B(0, \varepsilon/K)$ est recouvert par toute boule centrée sur

$$E \cap B_r \cap B(0, \varepsilon/K)$$

et de rayon ε et $E \cap B_r \setminus B(0, \varepsilon/K)$ contient au plus un nombre de points $< \operatorname{Log}(1/\varepsilon) + \operatorname{Log} K$ car pour $w^k \in E$ $\rho(w^k, 0) < 1/2^k$. Par suite $N_\varepsilon(B_r \cap E) \leq 1 + \operatorname{Log}(1/\varepsilon) + \operatorname{Log} K$ et donc

$$\int_0^r N_\varepsilon(B_r \cap E)\, d\varepsilon < r \log 1/r + r$$

et donc (c_2).

D'après [4] il existe $H \in A^\infty(\Omega)$ telle que H est plate en 0 et $H(z) \neq 0$ si $z \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$. Soient alors G_1 et G_2 les jets de withney sur E (cf. [10]) définis par

$$G_1 = \text{le jet nul sur} E_1 \text{ et } G_1 = \text{le jet de } H \text{ sur } E_2$$
$$G_2 = \text{le jet de } H \text{ sur } E_1 \text{ et } G_2 = \text{le jet nul sur } E_2.$$

(La définition est cohérente car $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et H est plate en 0. Maintenant G_1 (resp. G_2) est c^∞ au sens de withney sur E_1 et sur E_2, et E_1 et E_2 sont régulièrement situés. On en déduit d'après [10] que G_1 (resp G_2) est c^∞ au sens de withney sur $E_1 \cup E_2 = E$. D'autre part G_1 et G_2 sont à $\bar\partial$ plat sur E et comme d'après le lemme 3 et le théorème de [4], E est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(\Omega)$ on en déduit qu'il existe f_1 et $f_2 \in A^\infty(\Omega)$ telles que le jet de f_1 sur E soit égal à G_1 et le jet de f_2 sur E soit égal à G_2.

On a alors

LEMME 4. *Soit $(a, b) \in R(f_1, f_2; A^\infty(\Omega))$ (resp. $\in R(f_1, f_2; A(\Omega))$. Alors a et b sont plates en 0 (resp. nulles en 0).*

Preuve. Soit $(a, b) \in R(f_1, f_2; A^\infty(\Omega)$. On a $\forall z$,

$$a(z) f_1(z) + b(z) f_2(z) = 0$$

et donc $\forall z \in \overline{\Omega}$, $T_z a T_z f_1 + T_z b T_z f_2 = 0$ où $T_z u$ désigne la série de Taylor en z de u.

Donc en particulier pour les $k \geq k_0$ on a

$$\begin{aligned} T_{w^{2k}} a T_{w^{2k}} f_1 + T_{w^{2k}} b T_{w^{2k}} f_2 &= 0 \\ T_{w^{2k+1}} a T_{w^{2k+1}} f_1 + T_{w^{2k+1}} b T_{w^{2k+1}} f_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Or par construction de f_1 et f_2 on a $T_{w^{2k}} f_1 = 0$ et $T_{w^{2k}} f_2 = T_{w^{2k}} H$, $T_{w^{2k+1}} f_1 = T_{w^{2k+1}} H$ et $T_{w^{2k+1}} f_2 = 0$.

Ainsi (3.2) devient $T_{w^{2k}} b T_{w^{2k}} H = 0$ et $T_{w^{2k+1}} a T_{w^{2k+1}} H = 0$ or $T_{w^{2k}} H$ et $T_{w^{2k+1}} H$ sont différents de 0 car $H(w^{2k})$ et $H(w^{2k+1})$ sont non nuls, on en déduit $T_{w^{2k}} b = 0$ et $T_{w^{2k+1}} a = 0$; i.e., b est plate en w^{2k} et a est plate en w^{2k+1}. Comme w^{2k} tend vers 0 et w^{2k+1} tend vers 0 on en déduit que a et b sont plates en 0 et donc le lemme 4 pour $R(f_1, f_2; A^\infty(\Omega))$. La preuve pour $R(f_1, f_2; A(\Omega))$ est similaire.

Le théorème 2 se déduit du lemme 4 grâce au lemme 1.

Remarques. (i) La preuve du théorème 2 que nous venons de donner s'applique aussi au cas du disque unité de $\mathbf{C}$.

(ii) Aussi bien dans la preuve du Théorème 1 ou 2 nous avons construit f_1 et $f_2 \in A^\infty(\Omega)$ tels que $f_1 A^\infty(\Omega) \cap f_2 A^\infty(\Omega)$ n'est pas un idéal de type fini de $A^\infty(\Omega)$ et $f_1 A(\Omega) \cap f_2 A(\Omega)$ n'est pas un idéal de type fini de $A(\Omega)$. Ainsi l'intersection de deux idéaux principaux de $A^\infty(\Omega)$ (resp. de $A(\Omega)$) peut ne pas être de type fini.

II.4. *Preuve du Théorème 3.*

Les énoncés et les preuves des lemmes 2 et 4 subsistent si l'on remplace $R(f_1, f_2; A^\infty(\Omega))$ (Resp. $R(f_1, f_2, A(\Omega))$ par $R(f_1, f_2, A_0^\infty)$ (Resp. $R(f_1, f_2; A_0)$. Pour conclure il suffit d'avoir l'analogue du lemme 1 pour A_0^∞ et A_0 et pour cela il suffit d'avoir l'analogue du théorème de [3], [4], [5] "en germe" or ceci est immédiat si l'on regarde les preuves de ce théorème et si l'on se limite à prendre un nombre fini de fonctions $(f_i)_{i \in I}$, ce qui est suffisant pour la preuve du lemme 1.

Bibliographie

1. E. Amar, *Non cohérence de certains anneaux de fonctions holomorphes*, Illinois J. Math., vol. 25 (1981), pp. 68–73.
2. J. Brennan, *Approximation in the mean by polynomials on non-Carathéodory domains*, Ark. Mat., vol. 15 (1977), pp. 117–168.
3. J. Bruna et J.M. Ortega, *Closed finitely generated ideals in algebras of holomorphic functions and smooth to the boundary in strictly pseudo-convex domains*, Math. Ann., vol. 268 (1984), pp. 137–157.
4. J. Chaumat et A.M. Chollet, *Propriétés de division par des fonctions de $A^\infty(D)$*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 300, série I, n° 13 (1985), pp. 419–422.
5. ______, *Propriétés de division par des fonctions de $A^\infty(D)$*, Prépublication d'ORSAY 1985.

6. ______, *Dimension de Hausdorff des ensembles de zéros et d'interpolation pour $A^\infty(\Omega)$*, a paraître.
7. W. McVoy et L.A. Rubel, *Cohérence of some rings of functions*, J. Functional Anal. vol. 21 (1976), pp. 76–87.
8. J.P. Lafon, *Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative et algèbre commutative langages géométrique et algébrique*, Hermann collection enseignement des sciences.
9. J.P. Rosay, *Sur la cohérence de certains anneaux de fonctions holomorphes*, Illinois J. Math., vol. 21 (1977), pp. 895–897.
10. J.C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Ergebnisse der Mathematik, Band 71, Springer, New York, 1972.

Université de Bordeaux I
Talence, France