

HYPERZENTRALE TORSIONSGRUPPEN, DEREN UNTERGRUPPEN ALLE SUBNORMAL SIND

VON
WALTER MÖHRES

Wir zeigen in dieser Arbeit, daß hyperzentrale Torsionsgruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind, nilpotent sind. Nach einer Arbeit von H. Heineken und I.J. Mohamed, [1] gibt es p -Gruppen mit trivialem Zentrum, deren Untergruppen alle subnormal sind. Daher ist klar, daß wir auf die Voraussetzung der Hyperzentralität nicht verzichten können. H. Smith, [7] hat eine gemischte, hyperzentrale Gruppe, deren Untergruppen alle subnormal sind, konstruiert. Also ist auch die Voraussetzung, daß die Gruppen periodisch sind, notwendig.

In Abschnitt (1) wenden wir uns zunächst dem Fall einer hyperzentralen Torsionsgruppe G zu, deren Kommutatoruntergruppe G' endlichen Exponenten hat. Unter $K_n(G)$ verstehen wir im weiteren das n -te Glied der absteigenden Zentralreihe der Gruppe G . Zunächst folgt ein Hilfssatz.

(1.1) LEMMA. *N sei ein nilpotenter Normalteiler der Gruppe G und habe als Exponenten eine p -Potenz. $G/(N'N^p)$ sei nilpotent. Dann ist auch G nilpotent.*

Beweis. Wegen [5], 5.2.10 können wir $N' = 1$ annehmen. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K_n(G) \leq N^p$. Für ein $m \in \mathbb{N}$ sei $K_{nm-m+1}(G) \leq N^{p^m}$. Dann gilt

$$K_{n(m+1)-(m+1)+1}(G) \leq [N^{p^m}, {}_{n-1}G] \leq [N, {}_{n-1}G]^{p^m} \leq K_n(G)^{p^m} \leq N^{p^{m+1}}.$$

Ist nun p^e der Exponent von N , so folgt $K_{ne-e+1}(G) \leq N^{p^e} = 1$, d.h. G ist nilpotent.

Im folgenden Satz untersuchen wir die Torsionsgruppen, die eine Engelbedingung erfüllen.

(1.2) SATZ. *Sei G eine Torsionsgruppe, die eine Engelbedingung erfüllt. G' habe endlichen Exponenten. Jede Untergruppe von G sei subnormal in G . Dann ist G nilpotent.*

Received November 28, 1988.

Beweis. Wegen [2], (2.6) können wir voraussetzen, daß G eine p -Gruppe ist für eine Primzahl p . Nach [2], (2.7) ist G' nilpotent. Wegen (1.1) können wir daher annehmen, daß G' eine elementarabelsche p -Gruppe ist. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $[x, y^{p^n}] = 1$ für alle $x, y \in G$. Dann gilt

$$[x, y^{p^n}] = \prod_{j=1}^{p^n} [x, y^{p^{j-1}}]^{p_j} = 1$$

für alle $x, y \in G$, denn p ist ein Teiler von $\binom{p^n}{j}$ für alle $j \in \langle 1, \dots, p^n - 1 \rangle$. Folglich hat $G/Z(G)$ höchstens Exponenten p^n . Nach [3], (12) ist G daher nilpotent.

Wie wir bereits im Beweis des vorhergehenden Satzes gesehen haben, genügt es aufgrund von [2], (2.6) und (1.1) statt einer Torsionsgruppe G mit einer Kommutatoruntergruppe G' von endlichem Exponenten, eine p -Gruppe G mit einem elementarabelschen G' zu betrachten. Wir wollen nun den folgenden Hilfssatz aus [3] anwenden, der dort als Lemma (3) auftritt.

(1.3) LEMMA. *Sei G eine nicht nilpotente, metabelsche Gruppe, deren Untergruppen alle subnormal sind. Dann gilt eine der beiden folgenden Aussagen:*

- (1) *Es existiert ein nicht nilpotenter Abschnitt K von G und ein $a \in C_K(K')$, so daß U/a^U nilpotent ist für alle Untergruppen U von K mit $a \in U$.*
- (2) *Es existiert ein nicht nilpotenter Abschnitt K von G und ein $n \in \mathbb{N}$, so daß jede nicht nilpotente Untergruppe von K höchstens Defekt n in K hat.*

Beweis. (2) gelte nicht. Nach [3], (2) gibt es eine nicht nilpotente Untergruppe L von G , eine endlich erzeugte Untergruppe T von L und ein $n \in \mathbb{N}$, so daß alle nicht nilpotenten U mit $T \leq U \leq L$ höchstens Defekt n in L haben. Sei \mathcal{M} die Menge aller Paare (A, B) , so daß A ein nicht nilpotenter Abschnitt von G ist, B eine endlich erzeugte Untergruppe von A ist und alle nicht nilpotenten U mit $B \leq U \leq A$ höchstens Defekt n in A haben. Dann ist \mathcal{M} nicht leer. Sei $(K, H) \in \mathcal{M}$, so daß die minimale Anzahl d der Erzeugenden von H minimal ist. Da (2) nicht gilt, ist $H \neq 1$ und daher $d \neq 0$. Es ist $N := \langle H, K' \rangle$ ein nilpotenter Normalteiler von K nach (1). Folglich ist K/N' nicht nilpotent, und wir können daher $N' = 1$ annehmen. Sei $H = \langle a_1, \dots, a_d \rangle$. Weiter sei U eine Untergruppe von K mit $a_d \in U$, und es sei $M = a_d^U$. Da N abelsch ist und $M \leq N$, ist M ein Normalteiler von $\langle U, H \rangle$. Wegen

$$HM/M = \langle a_1M, \dots, a_{d-1}M \rangle$$

und wegen der Minimalität von d ist $(\langle U, H \rangle/M, HM/M) \notin \mathcal{M}$. Folglich ist

$\langle U, H \rangle / M$ nilpotent und damit insbesondere auch $U/a_d^U = U/M$ nilpotent. Wegen $N' = 1$ ist $a_d \in C_K(K')$.

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir eine Fallunterscheidung treffen. Fall (2) aus Lemma (1.3) wird der Gegenstand von Lemma (1.6) sein. Wir benötigen jedoch noch zwei Hilfssätze als Vorbereitung. Im folgenden Lemma ist vor allem Teil (ii) interessant, der die nilpotenten Untergruppen der von uns untersuchten Gruppen beschreibt.

(1.4) LEMMA. *Sei G eine p -Gruppe, deren Untergruppen alle subnormal sind. Sei G' eine elementarabelsche p -Gruppe. Dann gilt:*

- (i) $C_G(G')/Z(G)$ ist eine elementarabelsche p -Gruppe.
- (ii) Eine Untergruppe U von G ist nilpotent genau dann, wenn $UZ(G)/Z(G)$ endlichen Exponenten hat.

Beweis. (i) Seien $a, b \in C_G(G') =: C$. Dann gilt $[a^p, x] = [a, x]^p = 1$ und

$$[a, b, x] = [b, x, a]^{-1}[x, a, b]^{-1} = 1$$

für alle $x \in G$. Folglich ist $C^p \leq Z(G)$ und $C' \leq Z(G)$. Also ist $C/Z(G)$ eine elementarabelsche p -Gruppe.

(ii) Sei $U \leq G$. Hat $UZ(G)/Z(G)$ endlichen Exponenten, so ist $UZ(G)$ und damit U nilpotent nach [3], (12).

Sei nun U nilpotent. Dann ist nach [3], (1) auch UG' nilpotent. Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $[G', {}_{p^{n-1}}U] = 1$. Für alle $x \in G$ und alle $y \in U$ gilt folglich $[x, y^{p^n}] = [x, {}_{p^n}y] = 1$. Der Exponent von $UZ(G)/Z(G) \cong U/(U \cap Z(G))$ ist deshalb höchstens p^n . \square

(1.5) LEMMA. *Sei G eine hyperzentrale p -Gruppe, deren Untergruppen alle subnormal sind. Sei N ein nilpotenter Normalteiler von G , so daß G/N eine abelsche p -Gruppe von endlichem Rang ist. Dann ist G nilpotent.*

Beweis. Nach [5], 4.3.4 hat G/N eine Basisuntergruppe B/N , d.h. B/N ist ein direktes Produkt zyklischer Gruppen und $G/B \cong (G/N)/(B/N)$ ist divisibel. Da G/N endlichen Rang hat, ist B/N endlich. Nach [3], (12) ist B nilpotent.

Sei $H = G/B'$ und $A = B/B'$. Angenommen, H ist nicht nilpotent. Dann gibt es $a \in A$ und $x \in H$ mit $[a, x] \neq 1$. Da H/A divisibel ist, gibt es eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$, so daß $x_i^p \equiv x_{i-1} \pmod{A}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, wobei $x_0 := x$. Sei p^m die Ordnung von a . Dann ist $[a, x_i]^{p^m} = [a^{p^m}, x_i] = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Also existiert

$$p^k := \max\{\text{ord}([a, x_i]) \mid i \in \mathbf{N}_0\}.$$

Sei $n \in \mathbf{N}$ mit $\text{ord}([a, x_n]) = p^k$, und sei $C = \{c \in A \mid c^{p^{k-1}} = 1\}$. Weiter sei

$$b_i = [a, {}_{p-1}x_{n+1}, \dots, {}_{p-1}x_{n+i}]$$

für alle $i \in \mathbf{N}_0$. Dann gilt

$$[b_i, x_{n+i}] = [b_{i-1}, {}_p x_{n+i}] \equiv [b_{i-1}, x_{n+i}^p] = [b_{i-1}, x_{n+i-1}] \pmod{C}$$

für alle $i \in \mathbf{N}$. Also ist

$$[b_i, x_{n+i}] \equiv [b_0, x_n] = [a, x_n] \neq 1 \pmod{C}$$

und damit insbesondere $b_i \neq 1$ für alle $i \in \mathbf{N}$. Folglich ist a nicht im Hyperzentrum von H im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist H und damit auch G nilpotent.

Wie angekündigt beweisen wir nun, daß Fall (2) aus Lemma (1.3) bei den von uns untersuchten Gruppen nicht auftreten kann.

(1.6) LEMMA. *Sei G eine hyperzentrale p -Gruppe, deren Untergruppen alle subnormal sind. Die Defekte der nicht nilpotenten Untergruppen von G seien beschränkt durch ein $n \in \mathbf{N}$. Weiter sei G' eine elementarabelsche p -Gruppe. Dann ist G nilpotent.*

Beweis. Angenommen, G ist nicht nilpotent. Sei $Z = Z(G)$. Da G nicht nilpotent ist, gilt dies auch für $H := G/Z$. Nach (1.2) erfüllt H keine Engelbedingung. Also gibt es $w, x \in H$ mit $[w, {}_{n+2}x] \neq 1$. Folglich ist

$$|[H', {}_n x]| \geq |\langle [w, {}_{n+1}x], [w, {}_{n+2}x] \rangle| = p^2 \quad \text{und} \quad |\langle x \rangle \cap H'| \leq p.$$

Also gibt es ein $a \in H'$ mit $[a, {}_n x] \notin \langle x \rangle$.

Für alle $i \in \mathbf{N}_0$ sei $C_i = \{x \in G \mid x^{p^i} \in C_G(G')\}$. Wir konstruieren nun eine Folge $(x_i)_{\mathbf{N}} \in H^{\mathbf{N}}$. Für ein $i \in \mathbf{N}$ seien x_1, \dots, x_{i-1} gegeben mit

$$[a, {}_n x] \notin \langle x, x_1, \dots, x_{i-1} \rangle.$$

Nach (1.4) ist C_{i+1}/Z nilpotent und nach (1.5) ist C_{i+1}/C_i unendlich. Nach [3], (6) gibt es folglich ein $x_i \in C_{i+1}/Z \setminus C_i/Z$ mit $[a, {}_n x] \notin \langle x, x_1, \dots, x_i \rangle$.

Sei $K = \langle x, x_i \mid i \in \mathbf{N} \rangle$. Für alle $i \in \mathbf{N}$ ist $x_i \notin C_i/Z$ und daher $\text{ord}(x_i) > p^i$. Also hat K keinen endlichen Exponenten. Nach (1.4) ist K daher nicht nilpotent. Der Defekt von K in H ist somit nach Voraussetzung höchstens

n . Folglich ist $[a, {}_n x] \in K = \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle x, x_1, \dots, x_i \rangle$ im Widerspruch zur Konstruktion von $(x_i)_N$.

Als nächstes behandeln wir Fall (1) von Lemma (1.3). Bevor wir in (1.9) zeigen, daß auch er nicht auftreten kann, benötigen wir noch zwei Hilfssätze.

(1.7) LEMMA. *Sei G eine nicht nilpotente, hyperzentrale p -Gruppe, deren Untergruppen alle subnormal sind. Sei A eine elementarabelsche p -Gruppe mit $G' \leq A \leq G$. Weiter sei V eine endliche Untergruppe von A und M eine endliche Teilmenge von A mit $V \cap M = \emptyset$. Dann existiert eine nicht nilpotente Untergruppe K von G mit $A \leq K$ und $V^K \cap M = \emptyset$.*

Beweis. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ sei $C_i = \{x \in G \mid x^{p^i} \in AZ(G)\}$. Nach [3], (12) ist C_i nilpotent und nach (1.5) ist C_i/C_{i-1} unendlich für alle $i \in \mathbb{N}$.

Sei $i \in \mathbb{N}$ und seien $x_1, \dots, x_{i-1} \in G$ gegeben mit $V^{\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle} \cap M = \emptyset$. Nach [3], (6) folgt per Induktion nach $|M|$, daß ein $x_i \in C_{i+1} \setminus C_i$ existiert mit

$$\langle V^{\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle}, x_i \rangle \cap M = \emptyset.$$

Dann ist insbesondere $V^{\langle x_1, \dots, x_i \rangle} \cap M = \emptyset$. Sei $K = \langle A, x_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$. Dann ist $A \leq K$ und

$$V^K \cap M = \bigcup_{i=1}^{\infty} (V^{\langle x_1, \dots, x_i \rangle} \cap M) = \emptyset.$$

Da $x_i \notin C_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, hat $KZ(G)/Z(G)$ keinen endlichen Exponenten. Also ist K nicht nilpotent nach (1.4).

(1.8) LEMMA. *Sei G eine nicht nilpotente p -Gruppe, deren Untergruppen alle subnormal sind. Sei A eine elementarabelsche p -Gruppe mit $G' \leq A \leq G$. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in A$. Dann existieren $x, y \in G$ mit $[x, {}_n y] \notin a^{\langle y \rangle}$.*

Beweis. Angenommen, $[x, {}_n y] \in a^{\langle y \rangle}$ für alle $x, y \in G$. Nach (1.2) erfüllt G keine Engelbedingung. Also existiert ein $y \in G$ mit $[A, {}_{np+1} y] \neq 1$. Nach Annahme ist $[A, {}_{np} y] = [A, {}_n y^p] \leq a^{\langle y^p \rangle}$. Da $\{[a, {}_j y] \mid j \in \mathbb{N}_0\} \setminus \{1\}$ unabhängig ist, erhält man folgenden Widerspruch:

$$\begin{aligned} [A, {}_{np+1} y] &\leq [a^{\langle y^p \rangle}, y] \cap a^{\langle y^p \rangle} \\ &= \langle [a, {}_{pj+1} y] \mid j \in \mathbb{N}_0 \rangle \cap \langle [a, {}_{pj} y] \mid j \in \mathbb{N}_0 \rangle = 1. \end{aligned}$$

Wie oben angekündigt zeigen wir nun, daß Fall (1) von Lemma (1.3) nicht auftreten kann.

(1.9) LEMMA. Sei G eine nicht nilpotente, hyperzentrale p -Gruppe, deren Untergruppen alle subnormal sind. G' sei eine elementarabelsche p -Gruppe. Sei V eine endliche Untergruppe von G . Dann existiert eine Untergruppe H von G , so daß $H \geq V$ und H/V^H nicht nilpotent ist.

Beweis. Angenommen, das Lemma ist falsch. Da V endlich ist, gibt es eine Ordinalzahl α mit $V \leq Z_{\alpha+1}(G)$ und $V \not\leq Z_\alpha(G)$. Sei α minimal gewählt. Nach α sei auch $|V|$ minimal gewählt.

$A := \langle V, G' \rangle$ ist nach [3], (1) ein nilpotenter Normalteiler von G . Außerdem hat A endlichen Exponenten. Wegen (1.1) können wir daher $A'A^p = 1$ annehmen.

Sei $a \in V \setminus 1$. Wir konstruieren Folgen $(c_i)_N \in A^N$ und $(x_i)_N \in G^N$. Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien $c_1, \dots, c_{n-1} \in A$ und $x_1, \dots, x_{n-1} \in G$ gegeben mit

$$[c_{i,i}, x_i] \notin a^{\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle} =: W \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Nach (1.7) existiert ein nicht nilpotentes $H \leq G$ mit $H \geq A$ und $[c_{i,i}, x_i] \notin W^H$ für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Sei $X = W \cap Z_\alpha(G)$. Wegen der Minimalität von α gibt es ein $K \leq H$ mit $K \geq X$, so daß K/X^K nicht nilpotent ist. Nach (1.8) gibt es daher $x, y \in K$ mit $[x, {}_{n+1}y] \notin a^{\langle y \rangle} X^K$. Sei $c_n = [x, y]$ und $x_n = y$. Dann ist

$$a^{\langle x_1, \dots, x_n \rangle} = W^{\langle y \rangle} = \langle a, X \rangle^{\langle y \rangle} \leq a^{\langle y \rangle} X^K$$

und deshalb $[c_n, {}_n x_n] \notin a^{\langle x_1, \dots, x_n \rangle}$. Außerdem ist $a^{\langle x_1, \dots, x_n \rangle} \leq W^H$ und daher auch

$$[c_{i,i}, x_i] \notin a^{\langle x_1, \dots, x_n \rangle} \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Sei $L = \langle A, x_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$. Dann ist

$$[c_n, {}_n x_n] \notin \bigcup_{i=n}^{\infty} a^{\langle x_1, \dots, x_n \rangle} = a^L$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist L/a^L nicht nilpotent. Aber $|Va^L/a^L| < |V|$ im Widerspruch zur Minimalität von $|V|$.

Nun können wir das Resultat von Abschnitt (1) beweisen.

(1.10) SATZ. Sei G eine hyperzentrale Torsionsgruppe, deren Untergruppen alle subnormal sind. G' habe endlichen Exponenten. Dann ist G nilpotent.

Beweis. Wegen [2], (2.6) können wir annehmen, daß G eine p -Gruppe ist für eine Primzahl p , und wegen (1.1) können wir annehmen, daß G' eine elementarabelsche p -Gruppe ist. Nach (1.6) und (1.9) treffen beide Fälle von Lemma (1.3) nicht zu. Also ist G nilpotent. \square

Wie bereits eingangs gesagt, wollen wir zeigen, daß hyperzentrale Torsionsgruppen G , deren Untergruppen alle subnormal sind, nilpotent sind. Nach [4] sind solche Gruppen auflösbar. Wir können unsere Untersuchung daher auf metabelsche Gruppen beschränken. Wegen [2], (2.6) können wir außerdem annehmen, daß G eine p -Gruppe ist. Um unseren Satz zu zeigen, wenden wir wiederum Lemma (1.3) an. Mit Hilfe von (1.10) wird uns Fall (1) dabei wenig Mühe bereiten. Zunächst wenden wir uns jedoch Fall (2) zu. Daß er nicht auftreten kann, wird das Ergebnis von Lemma (2.5) sein. Zunächst führen wir eine Funktion ein, die nach einem bekannten Satz von J.E. Roseblade, [6] existiert.

(2.1) DEFINITION. Nach [6] gibt es eine Funktion $\mu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, so daß folgendes gilt:

Ist $n \in \mathbb{N}$ und ist G eine Gruppe, deren endlich erzeugte Untergruppen alle subnormal vom Defekt höchstens n in G sind, so ist G nilpotent der Klasse höchstens $\mu(n)$.

Zur Behandlung von Fall (2) aus Lemma (1.3) müssen wir metabelsche p -Gruppen betrachten, bei denen der Defekt der nicht nilpotenten Untergruppen beschränkt ist. Für diese Gruppen verallgemeinern wir nun (1.10).

(2.2) LEMMA. Sei G eine hyperzentrale, nicht nilpotente, metabelsche p -Gruppe, deren Untergruppen alle subnormal sind. Die Defekte der nicht nilpotenten Untergruppen seien beschränkt durch ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$K_{\mu(n)+1}(G) \leq \bigcap_{i=0}^{\infty} (G')^{p^i}.$$

Beweis. Wir können voraussetzen, daß $\bigcap_{i=0}^{\infty} (G')^{p^i} = 1$. Sei $t = \mu(n)$. Angenommen, $K_{t+1}(G) \neq 1$. Nach Definition von μ existiert eine endlich erzeugte Untergruppe V von G , deren Defekt in G größer als n ist. Also gibt es ein $a \in [G, {}_n V] \setminus V$. Nach [3], (7) ist

$$V = V \cdot \bigcap_{i=0}^{\infty} (G')^{p^i} = \bigcap_{i=0}^{\infty} ((G')^{p^i} V).$$

Folglich existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a \notin (G')^{p^m} V$. Sei $N = (G')^{p^m}$. Nach (1.10) ist G/N nilpotent. Also gibt es ein $c \in \mathbb{N}$ mit $K_{p^c+1}(G) \leq N$. Seien $x, y \in G$. Dann gilt

$$[x, y^{p^{c+m}}] = \prod_{j=1}^{p^{c+m}} [x, {}_j y] \binom{p^{c+m}}{j}.$$

Für $j \in \{1, \dots, p^c - 1\}$ ist $\binom{p^{c+m}}{j}$ durch p^m teilbar. Für $j \in \{p^c, \dots, p^{c+m}\}$ ist

$$[x, {}_j y] \in K_{p^{c+1}}(G) \leq N.$$

Also ist $[x, y^{p^{c+m}}] \in N$. Es folgt

$$[G, G^{p^{c+m}}] \leq N.$$

Sei $H = \langle V, G^{p^{c+m}} \rangle$. Nach [3], (12) ist $G^{p^{c+m}}$ und damit auch H nicht nilpotent. Weiter gilt $VH' \leq V[G, G^{p^{c+m}}] \leq VN$ und somit $a \notin VH'$. Sei K eine Untergruppe von H , die maximal ist mit $a \notin K \geq VH'$. Dann hat H/K Rang 1. Also ist K nach (1.5) nicht nilpotent. Nach Voraussetzung hat K daher höchstens Defekt n in G . Folglich gilt $a \in [G, {}_n V] \leq [G, {}_n K] \leq K$ im Widerspruch zur Wahl von K .

Die entscheidende Rolle bei der Behandlung unserer Gruppen G werden die Untergruppen $L_i := \{x \in G \mid [G', x] \leq Z_i(G)\}$, $i \in \mathbb{N}$, spielen. Bevor wir sie in Lemma (2.4) einführen, benötigen wir noch einen Hilfssatz.

(2.3) LEMMA. *Sei G eine hyperzentrale, nicht nilpotente, metabelsche p -Gruppe, deren Untergruppen alle subnormal sind. Die Defekte der nicht nilpotenten Untergruppen seien beschränkt durch ein $n \in \mathbb{N}$. Sei $t = \mu(n)$, sei $x \in G$, und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $[G', {}_k x] = 1$. Für alle $i \in \{0, \dots, k-1\}$ gilt dann $[G', {}_{k-i} x] \leq Z_{it}(G)$.*

Beweis. Sei $D = \bigcap_{i=0}^{\infty} (G')^{p^i}$. Nach (2.2) ist $K_{t+1}(G) \leq D$. Sei $k \geq 2$. Angenommen, $[G', {}_{k-1} x]$ liegt nicht in $Z_t(G)$. Dann gibt es $a \in G'$ und $x_1, \dots, x_t \in G$ mit $[a, {}_{k-1} x, x_1, \dots, x_t] \neq 1$. Es ist

$$b := [a, x_1, \dots, x_t] \in K_{t+1}(G) \leq D.$$

Sei p^m die Ordnung von x . Dann gibt es ein $c \in G'$ mit $c^{p^m} = b$. Es folgt

$$1 \neq [a, {}_{k-1} x, x_1, \dots, x_t] = [b, {}_{k-1} x] = [c, {}_{k-1} x]^{p^m} = [c, {}_{k-2} x, x^{p^m}] = 1,$$

ein Widerspruch. Also ist $[G', {}_{k-1} x] \leq Z_t(G)$.

Für $i = 0$ ist die Aussage des Lemmas klar. Sei $i \in \mathbb{N}$ und sei die Behauptung für $i-1$ richtig. Sei $x \in G$ und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > i$ und $[G', {}_k x] = 1$. Dann ist

$$[G', {}_{k-1} x] \leq Z_t(G) \cap G' =: M,$$

also

$$[G'/M, {}_{k-1} xM] = 1.$$

Die Gruppe G/M erfüllt dieselben Voraussetzungen wie G , da sie insbesondere nicht nilpotent ist. Nach Induktionsannahme folgt

$$[G'/M, {}_{k-1-(i-1)}xM] \leq Z_{(i-1)t}(G/M) \cap G'/M = (Z_{it}(G) \cap G')/M$$

und damit $[G', {}_{k-i}x] \leq Z_{it}(G)$.

Nun führen wir die oben erwähnten Untergruppen L_i ein und zeigen ihre wichtigsten Eigenschaften.

(2.4) LEMMA. Sei G eine hyperzentrale, nicht nilpotente, metabelsche p -Gruppe, deren Untergruppen alle subnormal sind. Die Defekte der nicht nilpotenten Untergruppen seien beschränkt durch ein $n \in \mathbb{N}$. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ sei

$$L_i = \{x \in G \mid [G', x] \leq Z_i(G)\}.$$

Dann gilt:

- (i) Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ ist L_i ein Normalteiler von G .
- (ii) $G = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$.
- (iii) Eine Untergruppe von G ist nilpotent genau dann, wenn sie in einem der L_i steckt.
- (iv) G/L_i hat unendlichen Rang für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. (i) Sei $i \in \mathbb{N}_0$. Seien $x, y \in L_i$. Dann ist

$$[G', xy^{-1}] \leq [G', x][G', y] \leq Z_i(G),$$

d.h. $xy^{-1} \in L_i$. Also ist L_i eine Untergruppe von G . Wegen $L_i \geq G'$ ist L_i ein Normalteiler von G .

(ii) Sei $x \in G$. Da $\langle x \rangle$ subnormal in G ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $[G', {}_kx] = 1$. Nach (2.3) folgt $[G', x] \leq Z_{(k-1)t}(G)$, d.h. $x \in L_{(k-1)t}$, wobei $t = \mu(n)$.

(iii) Sei $i \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$K_{i+3}(L_i) \leq [G', {}_{i+1}L_i] \leq [Z_i(G), {}_iG] = 1.$$

Also ist L_i nilpotent.

Sei U eine nilpotente Untergruppe von G . Nach [3], (1) ist dann auch $V := UG'$ nilpotent, etwa der Klasse c . Sei $x \in V$. Dann ist

$$[G', {}_cx] \leq K_{c+1}(V) = 1.$$

Nach (2.3) folgt

$$[G', x] \leq Z_{(c-1)t}(G),$$

d.h. $x \in L_{(c-1)t}$. Also ist

$$U \leq V \leq L_{(c-1)t}.$$

(iv) Da die L_i alle nilpotent sind, folgt diese Behauptung aus (1.5). \square

Das folgende Lemma zeigt, daß Fall (2) von Lemma (1.3) nicht auftreten kann bei hyperzentralen Torsionsgruppen.

(2.5) LEMMA. *Sei G eine hyperzentrale, metabelsche p -Gruppe, deren Untergruppen alle subnormal sind. Die Defekte der nicht nilpotenten Untergruppen seien beschränkt durch ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist G nilpotent.*

Beweis. Angenommen, G ist nicht nilpotent. Dann gibt es nach [6] eine endlich erzeugte Untergruppe U von G , deren Defekt in G größer als n ist. Also existiert ein $b \in [G, {}_n U] \setminus U$. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ sei

$$L_i = \{x \in G \mid [G', x] \leq Z_i(G)\}.$$

Sei $U_0 = U$. Für ein $m \in \mathbb{N}_0$ sei die endlich erzeugte Untergruppe U_m mit $b \notin U_m$ gegeben. Sei $K = \{x \in G \mid x^p \in L_m\}$. Nach (2.4) ist K/L_m unendlich. Ebenfalls nach (2.4) ist L_m nilpotent. Also ist K nilpotent nach [3], (12). Nach [3], (6) gibt es folglich ein $x_{m+1} \in K \setminus L_m$ mit $b \notin \langle U_m, x_{m+1} \rangle =: U_{m+1}$.

Sei $V = \bigcup_{m=0}^{\infty} U_m$. Dann ist $b \notin V$ und $b \in [G, {}_n U] \leq [G, {}_n V]$. Der Defekt von V in G ist daher größer als n . Folglich ist V nilpotent. Deshalb existiert nach (2.4) ein $i \in \mathbb{N}$ mit $V \leq L_i$. Aber $x_{i+1} \in V \setminus L_i$.

Das folgende Lemma wird zur Behandlung von Fall (1) aus Lemma (1.3) gebraucht.

(2.6) LEMMA. *Sei G eine hyperzentrale, nicht nilpotente p -Gruppe, deren Untergruppen alle subnormal sind. Sei A ein abelscher Normalteiler von G mit $G' \leq A$. Weiter sei $m \in \mathbb{N}$, und es sei $B = \{a \in A \mid a^{p^m} = 1\}$. Dann ist G/B nicht nilpotent.*

Beweis. Nach (1.10) ist G/A^{p^m} nilpotent, etwa der Klasse k . Angenommen, G/B ist nilpotent der Klasse n . Dann gilt

$$K_{k+1+n}(G) \leq [A^{p^m}, {}_n G] = [A, {}_n G]^{p^m} \leq B^{p^m} = 1,$$

d.h. G ist nilpotent im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es folgt das Resultat dieser Arbeit.

(2.7) SATZ. *Sei G eine hyperzentrale Torsionsgruppe, deren Untergruppen alle subnormal sind. Dann ist G nilpotent.*

Beweis. Wegen [2], (2.6) können wir annehmen, daß G eine p -Gruppe ist mit einer Primzahl p . Nach [4] ist G auflösbar. Wir können daher annehmen, daß G metabelsch ist. Weiter nehmen wir an, daß G nicht nilpotent ist.

Sei K ein nicht nilpotenter Abschnitt von G , und sei $a \in C_K(K')$. Sei $A = \langle a, K' \rangle$, sei p^m die Ordnung von a und sei $B = \{b \in A \mid b^{p^m} = 1\}$. Nach (2.6) ist K/B nicht nilpotent. Also ist auch K/a^K nicht nilpotent. Nach Lemma (1.3) gibt es folglich einen nicht nilpotenten Abschnitt K von G und ein $n \in \mathbb{N}$, so daß jede nicht nilpotente Untergruppe von K höchstens Defekt n in K hat. Dies widerspricht (2.5).

LITERATURVERZEICHNIS

1. H. HEINEKEN and I.J. MOHAMED, *A group with trivial centre satisfying the normalizer condition*, J. Algebra, vol. 10 (1968), pp. 368–376.
2. W. MÖHRES, *Auflösbare Gruppen mit endlichem Exponenten, deren Untergruppen alle subnormal sind II*, Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università di Padova, vol. 81 (1989), pp. 269–287.
3. ———, *Torsionsgruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind*, Geometriae Dedicata, vol. 31 (1989), pp. 237–244.
4. ———, *Auflösbarkeit von Gruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind*, Archiv der Mathematik, vol. 54 (1990), pp. 232–235.
5. D.J.S. ROBINSON, *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag, New York, 1982.
6. J.E. ROSEBLADE, *On groups in which every subgroup is subnormal*, J. Algebra, vol. 2 (1965), pp. 402–412.
7. H. SMITH, *Hypercentral groups with all subgroups subnormal*, Bull. London Math. Soc., vol. 15 (1983), pp. 229–234.

BODELSCHWINGHSTR. 40

D-8782 KARLSTADT, WEST GERMANY