ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 43, Number 2, Summer 1999

TYPES DANS LES CORPS VALUÉS MUNIS D'APPLICATIONS COEFFICIENTS

LUC BÉLAIR

ABSTRACT. We transpose Delon's analysis of types in valued fields to unramified henselian valued fields of mixed characteristic, by using coefficient maps of order n. This yields the Ax-Kochen-Ershov transfer principle for the independence property in this class of valued fields.

1. Introduction

Dans [2], l'analyse de Delon des types sur les corps valués est transposée dans le formalisme des corps valués munis d'une application coefficient, c'est-à-dire un homomorphisme du groupe multiplicatif dans le groupe multiplicatif du corps des restes, homomorphisme qui prolonge le passage au reste pour les éléments de valuation nulle. Les types sur un corps valué hensélien de caractéristique résiduelle nulle se ramènent alors à quelques données valuationnelles, un type sur le corps résiduel, et un type sur le groupe de valuation (voir le théorème 6.1 ci-dessous). Tout devient alors transparent, en particulier les cohéritiers et la propriété d'indépendance. Dans cet article, avec un formalisme analogue déjà considéré par van den Dries (définition 3.3 ci-dessous), nous traitons le cas des corps valués de caractéristique zéro avec un corps des restes de caractéristique $p > 0$, non ramifiés. Comme auparavant ([5], voir [2]), on obtient un théorème à la Ax-Kochen-Ershov pour la propriété d'indépendance: un corps valué hensélien d'inégale caractéristique non ramifié possède la propriété d'indépendance si et seulement si son corps des restes ou son groupe de valuation la possède, si et seulement si son corps des restes la possède (voir [9]). Ceci généralise le cas du corps des nombres p-adiques, obtenu par Matthews [17], qui n'a pas la propriété d'indépendance. Les résultats de cet article se transposent directement au cas de la ramification finie, en ajoutant une constante appropriée. La propriété d'indépendance suscite un nouvel intérêt particulier par son lien avec la dimension de Vapnik-Chervonenkis et les résultats de Macintyre-Sontag en intelligence artificielle (voir [15] et [16]).

Received March 3, 1998.
1991 Mathematics Subject Classification. Primary 03C60, 03C10,12J10,12L12.
I would like to repay an old debt and thank the logic group and the Department of Mathematics at the University of Illinois in Urbana for their hospitality when I was a visiting graduate student in 1984-85. Ces résultats ont été obtenus lors d'un séjour, août 95 à avril 96, dans l'Équipe de logique mathématique de l'Université Paris 7. Je tiens à remercier l'Équipe pour son hospitalité. Soutien financier CRSNG.

Au paragraphe 2, on fixe la notation et la terminologie. Au paragraphe 3, on définit les applications coefficients et on donne la propriété clé utilisée dans la suite. Au paragraphe 5, on montre un théorème d'élimination des quantificateurs par rapport aux variables du corps de base pour les corps valués henséliens d'inégale caractéristique non ramifiés, en utilisant un système dénombrable d'applications coefficients *d'ordre* n. On illustre les arguments de cette démonstration au paragraphe 4, en donnant une preuve du théorème d'élimination de Pas pour les corps valués henséliens d'égale caractéristique 0 avec une application coefficient. Au paragraphe 6, on axiomatise les types dans le formalisme des applications coefficients. Au paragraphe 7, on applique cette axiomatisation à la description des cohéritiers et à la propriété d'indépendance.

Je remercie B. Poizat de m'avoir indiqué le lien entre une application coefficient et le corpoïde de Krasner.

2. Notation et terminologie

Le langage des corps valués $\mathcal{L}$ sera le langage à trois sortes, pour le corps de base, le groupe de valuation et le corps des restes, muni d'un symbole pour la valuation et le passage au reste (toujours surjectifs), avec le langage des anneaux pour le corps de base et le corps des restes, et le langage des groupes abéliens ordonnés pour le groupe de valuation. Pour un corps k, $k^\times$ désigne son groupe multiplicatif. Pour un corps valué (K, v), vK désigne son groupe de valuation comme groupe abélien ordonné, $A_{(K,v)}$, ou A_v, son anneau de valuation, $m(K)$, ou m, l'idéal maximal de l'anneau de valuation, K_v son corps des restes et $\overline{x}$ le reste de x si $v(x) \geq 0$.

Nous dirons qu'un corps valué est de caractéristique $(0, 0)$, si le corps de base et le corps des restes sont de caractéristique 0; de caractéristique (p, p), si le corps de base et le corps des restes sont de caractéristique $p > 0$; et de caractéristique $(0, p)$, si le corps de base est de caractéristique 0 et le corps des restes de caractéristique $p > 0$.

Soit (K, v) un corps valué de caractéristique $(0, p)$ non ramifié, c'est-à-dire que $v(p)$ est l'élément positif minimum de vK. On pose $M_n(K) = M_n = \{x \in A_{(K,v)}\colon v(x) \geq (n+1)v(p)\}$, $A_n(K) = A_n = A_{(K,v)}/M_n(K)$, et $\nu_n\colon A_{(K,v)} \to A_n(K)$ désigne l'application canonique. On note que $M_0(K) = m(K)$, $A_0(K) = K_v$. Le sous-groupe $\mathbf{Z}v(p)$ est un sous-groupe convexe de vK et induit une valuation $\dot{v}\colon K^\times \to vK/\mathbf{Z}v(p)$. On pose $K^\circ = K_{\dot{v}}$, $\dot{m}(K) = \{x \in K\colon \dot{v}(x) > 0\}$ et $\dot{\overline{x}} =$ le reste de x pour $\dot{v}$; v induit une valuation sur K°, aussi notée v, dont le groupe de valuation est $\mathbf{Z}v(p)$. Soit k un corps de caractéristique $p > 0$, $W(k)$ désigne le corps des vecteurs de Witt sur k, avec la valuation naturelle. Nous allons utiliser le fait que l'anneau $W_i(k)$ des vecteurs de Witt de longueur i est défini par le produit cartésien k^i muni d'une addition et d'une multiplication définies par des identités polynomiales à coefficients dans $\mathbf{Z}$, et le fait qu'on a toujours $A_n(K) \simeq W_{n+1}(K_v)$ de façon canonique.

Pour $f\colon (K, v) \to (L, v)$ un plongement de corps valué, f_v désigne le plongement induit de vK dans vL, f_{res} le plongement induit de K_v dans L_v, et f_{res_n} le plongement induit de $A_n(K)$ dans $A_n(L)$ si les corps valués sont de caractéristiques $(0, p)$.

3. Applications coefficients

Définition 3.1. Une application coefficient d'un corps valué, disons (K, v), est un homomorphisme de $K^\times$ dans $K_v^\times$, disons co, tel que $co(u) = \overline{u}$ si $v(u) = 0$.

Exemple 3.2. (1) Soit $K = k((T))$ le corps des séries formelles sur le corps k, avec la valuation naturelle: pour $f = a_N T^{\mathrm{N}} + a_{N+1}T^{\mathrm{N+1}} + \cdots$, avec $a_N \neq 0$, $v(f) = N$. L'application définie par $co(f) = a_N$ est une application coefficient.

(2) Soit $K = \boldsymbol{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques avec la valuation p-adique, alors l'application $co(a_N p^{\mathrm{N}} + a_{N+1}p^{N+1} + \cdots) = a_N$, avec a_i des entiers $0 \leq a_i < p$ et $a_N \neq 0$, est une application coefficient.

(3) Soit (K, v) un corps valué et γ une section de la valuation, alors l'application $co(x) = \overline{x\gamma(x^{-1})}$ est une application coefficient.

Cette notion apparaît dans [6], elle est utilisée dans [18] puis [7], elle est étudiée dans [8] et [19]. Puisque le groupe multiplicatif des éléments de valuation nulle est pur dans $K^\times$ on voit qu'on aura une application coefficient dès que le groupe abélien $K_v^\times$ est pur-injectif. Il s'ensuit que tout corps valué a une extension élémentaire qui possède une application coefficient (voir [19]). En utilisant la construction de l'exemple 3.2 (3), ceci découle aussi du résultat semblable pour une section de la valuation. Denef [6] remarque que l'application coefficient ci-dessus pour les nombres p-adiques est définissable dans le langage des corps valués $\mathcal{L}$, essentiellement parce que le corps résiduel est fini. Il y a des corps valués sans application coefficient (voir [19]). Il y a des corps valués avec une application coefficient mais sans section de la valuation. En effet, on n'a qu'à faire la construction classique d'un corps de séries formelles généralisées avec une multiplication ≪ tordue ≫ (voir [11], section 2), mais en prenant un corps de coefficients k dont le groupe multiplicatif $k^\times$ est pur-injectif. De plus, Scowcroft [21] a construit des corps p-adiquement clos sans section de la valuation p-adique; ces corps, par la remarque de Denef ci-dessus, fournissent des exemples en inégale caractéristique.

Pour les corps valués de caractéristique $(0, p)$, on a besoin de plus.

Définition 3.3 [8]. Soit (K, v) un corps valué et I un idéal de l'anneau de valuation A_v. Une application coefficient d'ordre I est un homomorphisme de $K^\times$ dans $(A_v/I)^\times$, disons co, tel que $co(u) = u + I$ si $v(u) = 0$.

Exemple 3.4. (1) Si I est l'idéal maximal de A_v, alors on retrouve la notion précédente d'application coefficient.

(2) Soit $K = \boldsymbol{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques avec la valuation p-adique et $I = \{x\colon\ v(x) \geq n + 1\}$, alors l'application $co(a_N p^{\mathrm{N}} + a_{N+1}p^{N+1} + \ldots) = a_N +$

$a_{N+1}p + \cdots + a_{N+n}p^n$ est une application coefficient d'ordre I. C'est l'application $co(x) = p^{-v(x)}x \bmod I$.

Nous n'utiliserons que des applications coefficients pour les idéaux $I = \{x\colon v(x) \geq n+1\}$ comme dans l'exemple précédent. Soit (K, v) un corps valué de caractéristique $(0, p)$. Nous appellerons *application coefficient d'ordre* n, notée co_n, une application coefficient d'ordre $M_n(K)$, avec la convention $co = co_0$. On peut noter que la remarque de Denef ci-dessus s'applique aussi aux applications coefficients de l'exemple 3.4 (2): elles sont définissables dans $\mathcal{L}$. Dans l'exemple 3.4, on a en fait une suite $(co_n)_{n=0,1,\ldots}$ qui est compatible avec le système projectif naturel des anneaux résiduels $A_n(K)$, c'est-à-dire $co_{n+1}\pi_n = co_n$, où $\pi_n\colon A_{n+1}(K) \to A_n(K)$ est la surjection canonique. Nous serons amenés à considérer plutôt de telles suites d'applications coefficients. Puisque le groupe multiplicatif des éléments de valuation nulle est pur dans $K^\times$ on voit qu'on aura une application coefficient d'ordre n dès que le groupe abélien $A_n(K)^\times$ est pur-injectif. En utilisant le théorème de compacité on obtient le lemme suivant.

LEMMA 3.5. *Tout corps valué (K, v) de caractéristique $(0, p)$ a une extension élémentaire qui possède une suite d'applications coefficients, $(co_n)_{n=0,1,\ldots}$, qui est compatible avec le système projectif naturel des anneaux résiduels $A_n(K)$.*

Dans le cas des corps valués (K, v) de caractéristique $(0, p)$ non ramifiés, le lemme précédent découle aussi de l'existence d'une extension élémentaire munie d'une section normalisée γ de la valuation, c'est-à-dire $\gamma(v(p)) = p$, par une construction analogue à celle de l'exemple 3.2 (3).

Soit (K, v) un corps valué. Considérons la suite exacte

$$1 \to K_v^\times \xrightarrow{i} K^\times/1 + m(K) \xrightarrow{v} vK \to 0$$

Une application coefficient co induit la scission de cette suite par une rétraction $\overline{co}\colon K^\times/1 + m(K) \to K_v^\times$. En effet, une application coefficient co se factorise par $K^\times/1 + m(K)$, disons $\overline{co}$, et on a $\overline{co}(i(\overline{x})) = \overline{x}$, puisque $co(x) = \overline{x}$ si $v(x) = 0$; la suite exacte est donc scindée par $\overline{co}$. Et réciproquement, en composant une rétraction $\overline{co}\colon K^\times/1 + m(K) \to K_v^\times$ provenant d'une section de la suite exacte, avec l'application canonique $K^\times \to K^\times/1 + m(K)$, on obtient une application coefficient. La suite exacte ci-dessus est la structure sous-jacente au corpoïde de Krasner associé au corps valué (K, v) (voir [12]); une application coefficient correspond donc exactement à une section du corpoïde de Krasner. De même, une application coefficient d'ordre I correspond exactement à une section de la suite exacte

$$1 \to (A_v/I)^\times \to K^\times/1 + I \xrightarrow{v} vK \to 0$$

Vues sous cet angle, les applications coefficients sont à rapprocher du formalisme de Basarab dans le théorème d'élimination de [1], où les groupes $K^\times/1 + m(K)$,

$K^\times/1 + M_n(K)$ sont fondamentaux. Nous allons exploiter ce lien pour obtenir un théorème d'élimination semblable avec le formalisme des applications coefficients. Ces groupes semblent standard en théorie des nombres (voir les ≪ congruences multiplicatives ≫ de Hasse [10]).

Le lemme suivant explique la grande flexibilité d'un formalisme qui incorpore les applications coefficients.

LEMMA 3.6 [8]. *Soit $I(x)$ une formule sans quantificateurs du langage des corps valués $\mathcal{L}$, qui définit un idéal de l'anneau de valuation. Soient (E, v, co) et (F, v, co) des corps valués munis d'une application coefficient d'ordre $I(E)$ et $I(F)$, l'idéal défini par $I(x)$. Soit β un plongement de $A_v(E)/I(E)$ dans $A_v(F)/I(F)$. Soit K un sous-corps de E et i un plongement de corps valué de K dans F tel que $\beta(co(x)) = co(i(x))$, pour tout x dans K. Soit $K \subset L \subset E$ un corps intermédiaire et i_L un plongement de corps valués de L dans F qui prolonge i. Supposons qu'il existe un sous-groupe G de $L^\times$ tel que $vL = vK + vG$, et un ensemble de générateurs H de G tel que $\beta(co(h)) = co(i_L(h))$, pour tout h dans H. Alors on a $\beta(co(y)) = co(i_L(y))$, pour tout y dans L.*

Démonstration. On note qu'on a alors $\beta(co(z)) = co(i_L(z))$, pour tout $z \in G$. Ainsi tout $y \in L$ s'exprime $y = xzu$, pour un certain $x \in K$, $z \in G$ et $u \in L$ tel que $v(u) = 0$, et on conclut directement. □

Comme cas particulier du lemme précédent, on peut mentionner les extensions immédiates de corps valués.

4. Élimination avec une application coefficient

En ajoutant un nouveau symbole co au langage $\mathcal{L}$ on obtient le langage $\mathcal{L}_{\text{co}}$ des corps valués munis d'une application coefficient. Les théories de corps valués dans ce langage seront munies des axiomes pour co. Rappelons le théorème d'élimination des quantificateurs par rapport aux éléments du corps de base de Pas ([18]; voir [7], (3.5)).

THÉORÈME 4.1. *La théorie des corps valués henséliens de caractéristique* (0, 0) *admet l'élimination des quantificateurs par rapport aux éléments du corps de base dans le langage $\mathcal{L}_{co}$.*

Pas montre ce théorème essentiellement par élimination directe. Dans [8] (chap. 2, §.5), van den Dries montre un théorème de plongement qui fournit une preuve de théorie des modèles du théorème de Pas. Il se déduit aussi du théorème d'élimination de Basarab de [1]. Pour illustrer les arguments utilisés à la section suivante dans le résultat d'élimination en caractéristique $(0, p)$, nous allons déduire le théorème de

Pas de celui de Basarab. On utilise le théorème de plongement 2.1 de Basarab ([1]) qui correspond dans ce cas exactement à l'élimination ([1], th. A ou B). Nous allons énoncer succinctement ce théorème. Soit (K, v) un corps valué de caractéristique 0. Si K_v est de caractéristique $p > 0$, alors en utilisant le sous-groupe convexe H de vK engendré par $v(p)$ on obtient une valuation $\dot{v}\colon K^\times \to vK/H$. Avec la notation analogue à celle déjà utilisée, désignons par $\dot{\boldsymbol{K}}_0$ la structure

$$((K^\circ, v), K^\times/1 + \dot{m}(K), \dot{v}K, 1 \to K^{\circ\times} \to K^\times/1 + \dot{m}(K) \xrightarrow{\dot{v}} \dot{v}K \to 0)$$

Si K_v est de caractéristique 0, désignons par $\dot{\boldsymbol{K}}_0$ la structure

$$(K_v, K^\times/1 + m(K), vK, 1 \to K_v^\times \to K^\times/1 + m(K) \xrightarrow{v} vK \to 0)$$

Appelons les structures $\dot{\boldsymbol{K}}_0$ des ω-structures.

THÉORÈME 4.2 [1, th. 2.1]. *Soit* (K, v) *un corps de caractéristique* 0, *et* (L, v), (F, v) *des extensions henséliennes de* (K, v) *telles que* (F, v) *est* $|\ L\ |$*-pseudocomplet. Soit un* $\dot{\boldsymbol{K}}_0$*-plongement* $\mu\colon \dot{\boldsymbol{L}}_0 \to \dot{\boldsymbol{F}}_0$ *de* ω*-structures* (*dans un sens évident*). *Alors il existe un* (K, v)*-plongement de corps valués* $(L, v) \to (F, v)$ *qui induit le plongement* μ.

Pour le théorème d'élimination 4.1, il suffit de montrer le lemme de plongement suivant.

LEMMA 4.3. *Soit* (K, v, co) *de caractéristique* $(0, 0)$. *Soient* (L, v, co) *et* (F, v, co) *des extensions henséliennes de* (K, v, co) *tel que* (F, v, co) *est* $|\ L\ |^+$*-saturée. Soit* $\alpha\colon vL \hookrightarrow vF$ *un plongement de groupes abéliens ordonnés tel que* $\alpha|_K = id$ *et* $\beta\colon L_v \hookrightarrow F_v$ *un plongement de corps tel que* $\beta|_{K_v} = id$. *Alors il existe un plongement* $f\colon (L, v, co) \hookrightarrow (F, v, co)$ *tel que* $f|_K = id$, $f_v = \alpha$, *et* $f_{res} = \beta$.

Démonstration. On a des sections des suites exactes suivantes, au-dessus de (K, v), données par les $\overline{co}$ déjà vus

$$1 \to L_v^\times \rightleftarrows L^\times/1 + m(L) \xrightarrow{v} vL \to 0$$

$$1 \to F_v^\times \rightleftarrows F^\times/1 + m(F) \xrightarrow{v} vF \to 0$$

On obtient des isomorphismes

$$L^\times/1 + m(L) \simeq L_v \times vL$$

$$F^\times/1 + m(F) \simeq F_v \times vF$$

et via ces isomorphismes et α, β, un plongement

$$\beta\times\alpha\colon\ L^{\times}/1+m(L)\hookrightarrow F^{\times}/1+m(F)$$

tel que $\beta\times\alpha\ |_{K^{\times}/1+m(K)}=id$. Le plongement $\beta\times\alpha$ correspond à un plongement de la première suite exacte dans la deuxième, qui coïncide avec l'identité sur la suite exacte

$$1\to K_v^{\times}\to K^{\times}/1+m(K)\overset{v}{\to}vK\to 0$$

Le théorème 2.1 de [1] s'applique donc et on obtient un plongement de corps valués η: $(L, v)\hookrightarrow(F, v)$ tel que $\eta\ |_K=id$ et η induit le plongement $\beta\times\alpha$. Mais réinterprété en termes de co, cela implique que η est un plongement dans le langage L_{co}. $\square$

Le formalisme de [1] est repris par Kuhlmann dans [14] où il obtient un théorème d'élimination analogue en caractéristique (p, p) pour les corps valués de Kaplansky (c'est-à-dire vK p-divisible et K_v sans extension de degré divisible par p) algébriquement maximaux [14, th. 2.6]. La discussion ci-dessus s'applique et on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 4.4. *La théorie des corps valués de caractéristique (p, p) de Kaplansky algébriquement maximaux admet l'élimination des quantificateurs par rapport aux éléments du corps de base dans le langage $\mathcal{L}_{co}$.*

Les théorèmes ci-dessus entraînent directement les principes d'Ax-Kochen-Ershov correspondants dans le langage $\mathcal{L}_{co}$ (voir [7]). Kuhlmann [13] a montré la validité des principes d'Ax-Kochen-Ershov dans le langage des corps valués de caractéristique (p, p) pour les corps algébriquement maximaux parfaits. A-t-on l'élimination des quantificateurs par rapport aux éléments du corps de base dans le langage $\mathcal{L}_{co}$ dans ce cas?

5. Élimination en inégale caractéristique avec les applications coefficients d'ordre *n*

Introduisons le langage $\mathcal{L}_{co_\omega}$ obtenu du langage des corps valués $\mathcal{L}$ en ajoutant des symboles pour une suite compatible $(co_n)_{n=0,1,\dots}$ d'applications coefficients de chaque ordre n, et des symboles ν_n pour les applications canoniques ν_n: $A_v\to A_n$. Dans ce langage les corps valués seront des structures multisortes, notées $(K, v, (co_n))$, du type suivant

$$(K, vK, (A_n(K))_{n=0,1,\dots}, K^{\times}\overset{v}{\to}vK, (A_v\overset{\nu_n}{\to}A_n(K))_{n=0,1,\dots}, (K^{\times}\overset{co_n}{\to}A_n(K))_{n=0,1,\dots}))$$

avec les axiomes appropriés pour les co_n et la convention $\nu_0(x)=\overline{x}$.

THÉORÈME 5.1[1] *La théorie des corps valués henséliens de caractéristique* $(0, p)$ *non ramifiés admet l'élimination des quantificateurs par rapport aux éléments du corps de base dans le langage* $\mathcal{L}_{co_\omega}$.

COROLLAIRE 5.2. *Soient* $(K_i, v_i, co_n))$, $i = 1, 2$ *des corps valués henséliens de caractéristique* $(0, p)$ non ramifiés. *Alors*

(1) $(K_1, v_1, (co_n)) \equiv (K_2, v_2, (co_n))$ *si et seulement si* $vK_1 \equiv vK_2$ *et* $K_{1,v} \equiv K_{2,v}$.

(2) $(K_1, v_1, (co_n)) \preceq (K_2, v_2, (co_n))$ *si et seulement si* $vK_1 \preceq vK_2$ *et* $A_n(K_1) \preceq A_n(K_2)$, *pour tout* n.

Démonstration. La partie (2) découle directement du théorème. Pour (1), on remarque que $A_0(K_i) = K_{i,v}$ et, les corps étant non ramifiés, $A_n(K_i)$ est canoniquement isomorphe à l'anneau de vecteurs de Witt $W_{n+1}(K_{i,v})$. Or $W_{n+1}(K_{i,v})$ est uniformément définissable sans paramètre dans $K_{i,v}$. Les arguments standard permettent d'obtenir $(K_1, v_1, (co_n)) \equiv (K_2, v_2, (co_n))$ si et seulement si $vK_1 \equiv vK_2$ et $A_n(K_1) \equiv A_n(K_2)$, pour tout n, et on conclut par la remarque précédente. $\square$

Le théorème 5.1 découle de façon standard du théorème de plongement suivant.

THÉORÈME 5.3. *Soit* $(K, v, (co_n))$ *un corps valué de caractéristique* $(0, p)$ *et* $(L, v, (co_n))$, $(F, v, (co_n))$ *des extensions henséliennes non ramifiés de* $(K, v, (co_n))$, *tels que* $(F, v, (co_n))$ *est* $\mid L \mid^+$*-saturé. Soit* α: $vL \hookrightarrow vF$ *un plongement de groupes abéliens ordonnés tel que* $\alpha \mid_{vK} = id$; *soient* β_n: $A_n(L) \hookrightarrow A_n(F)$ *des plongements d'anneaux tels que* $\beta_n \mid_{A_n(K)} = id$ *et tels que les* β_n *soient compatibles avec le système projectif naturel des* A_n, *c'est-à-dire* $\beta_n\pi_n = \pi_n\beta_{n+1}$, *où* π_n: $A_{n+1} \to A_n$ *est la surjection canonique. Alors il existe un plongement* f: $(L, v, (co_n)) \hookrightarrow (F, v, (co_n))$ *tel que* $f \mid_K = id$, $f_v = \alpha$, *et* $f_{res_n} = \beta_n$ *pour tout* n.

Le théorème 5.3 se ramène au théorème 2.1 de [1], mais pas de façon aussi directe qu'en égale caractéristique 0.

Démonstration. On a des sections des suites exactes suivantes, au-dessus de (K, v), données par les $\overline{co}_n$ (comme ci-dessus)

$$1 \to A_n^\times(L) \stackrel{\swarrow\diagdown}{\rightarrow} L^\times/1 + M_n(L) \stackrel{v}{\rightarrow} vL \to 0$$

$$1 \to A_n^\times(F) \stackrel{\swarrow\diagdown}{\rightarrow} F^\times/1 + M_n(F) \stackrel{v}{\rightarrow} vF \to 0$$

[1] Ce théorème généralise le théorème 3.7 de J. Pas, *Cell decomposition and local zeta functions in a tower of unramified extensions of a p-adic field*, Proc. London Math. Soc. **65** (1990), 37–67, où il traite le cas d'une valuation discrète de rang 1.

On obtient des isomorphismes

$$L^\times/1+M_n(L)\simeq A_n^\times(L)\times vL$$

$$F^\times/1+M_n(F)\simeq A_n^\times(F)\times vF$$

et via ces isomorphismes et α, β_n, des plongements

$$\beta_n\times\alpha\colon\ L^\times/1+M_n(L)\hookrightarrow F^\times/1+M_n(F)$$

En passant à la limite on obtient des plongements

$$\beta_\omega\colon\ \varprojlim_n A_n(L)\hookrightarrow \varprojlim_n A_n(F)$$

$$\beta_\omega\times\alpha\colon\ \varprojlim_n L^\times/1+M_n(L)\hookrightarrow \varprojlim_n F^\times/1+M_n(F)$$

Notons, sur l'exemple de L, que

$$\varprojlim_n L^\times/1+M_n(L)\simeq \varprojlim_n A_n^\times(L)\times vL$$

et on a les inclusions canoniques (voir [1])

$$A^\times_{(L^\circ,v)}\hookrightarrow \varprojlim_n A_n^\times(L)$$

$$L^\times/1+\dot m(L)\hookrightarrow \varprojlim_n L^\times/1+M_n(L)$$

Or, puisque $(F,\,v,\,(co_n))$ est suffisamment saturé, on a les isomorphismes naturels (voir [1])

$$\varprojlim_n A_n(F)\simeq A_{(F^\circ,v)}$$

$$\varprojlim_n F^\times/1+M_n(F)\simeq F^\times/1+\dot m(F)$$

On obtient des plongements

$$\beta_\omega\colon\ A^\times_{(L^\circ,v)}\hookrightarrow A^\times_{(F^\circ,v)}$$

$$\beta_\omega\times\alpha\colon\ L^\times/1+\dot m(L)\hookrightarrow F^\times/1+\dot m(F)$$

au-dessus de $K^\times/1+\dot m(K)$. Or notons, par exemple, que $K^{\circ\times}=p^{\mathbf{Z}}\times A^\times_{(K^\circ,v)}$. Cela permet d'obtenir un plongement $\beta_{\omega,1}\colon\ L^{\circ\times}\hookrightarrow F^{\circ\times}$ tel que $\beta_\omega\times\alpha\,|_{L^{\circ\times}}=\beta_{\omega,1}$ et un plongement de suites exactes μ

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & L^{\circ\times} & \to & L^\times/1+\dot m(L) & \xrightarrow{\dot v} & \dot vL & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & F^{\circ\times} & \to & F^\times/1+\dot m(F) & \xrightarrow{\dot v} & \dot vF & \to & 0
\end{array}$$

qui coïncide avec l'identité sur la suite exacte

$$1 \to K^{\circ\times} \to K^{\times}/1 + \dot{m}(K) \xrightarrow{\dot{v}} \dot{v}K \to 0$$

On vérifie via les limites projectives que $\beta_{\omega,1}$: $L^\circ \to F^\circ$ est aussi un plongement de corps valués pour la valuation de départ v. Le théorème 2.1 de [1] s'applique, et on obtient un plongement de corps valués η: $(L, v) \hookrightarrow (F, v)$ qui est l'identité sur K et qui induit μ. Mais, réinterprété en termes des co_n, cela entraîne que η est un L_{co_ω}-plongement. □

6. Types à la Delon

On donne maintenant une axiomatisation des 1-types sur les modèles dans les langages $\mathcal{L}_{co}$ et $\mathcal{L}_{co_\omega}$. Cette analyse suit de près celle de Delon (voir [5]). Elle distingue trois familles de types. Considérons une extension de corps valués $(K, v) \prec (N, v)$, $x \in N \setminus K$, et soit

$$I_K(x) = \{g \in vK\colon \exists k \in K, v(x - k) = g\}$$

Le type $tp(x, K)$ se classe parmi l'une des trois familles suivantes: (1) $I_K(x) = \{v(x - k)\colon k \in K\}$ et possède un maximum; (2) $I_K(x) = \{v(x - k)\colon k \in K\}$ et ne possède pas de maximum; (3) $I_K(x) \neq \{v(x - k)\colon k \in K\}$, et alors $\{v(x - k)\colon k \in K\} = I_K(x) \cup \{g_0\}$ et $I_K(x) < g_0$.

Fixons une théorie complète T_r de corps de caractéristique 0 et une théorie complète T_g de groupes abéliens ordonnés, et considérons dans $\mathcal{L}_{co}$ la théorie complète de corps valués henséliens de caractéristique (0, 0) dont le corps de restes est modèle de T_r et le groupe de valuation modèle de T_g. De façon analogue, fixons aussi une théorie complète T_p de corps valués de Kaplansky algébriquement maximaux de caractéristique (p, p). Rappelons la description des types pour le langage $\mathcal{L}_{co}$, établie dans [2] pour les corps henséliens de caractéristique (0, 0). Compte tenu du théorème 4.4, les mêmes calculs s'appliquent pour les corps de Kaplansky algébriquement maximaux de caractéristique (p, p).

THÉORÈME 6.1. *Soit (K, v, co) un modèle de $T = T_0, T_p$ et x dans une extension élémentaire, $x \notin K$.*

(1) Si $tp(x, K)$ appartient à la première famille, alors il est complètement déterminé par deux constantes $a, b \in K$, $a \neq 0$, telles que $v(ax + b) = 0$, $\overline{ax + b} \notin K_v$, et par le type $tp(\overline{ax + b}, K_v)$.

(2) Si $tp(x, K)$ appartient à la deuxième famille, alors il est complètement déterminé par une suite $(a_\rho; \gamma_\rho)$ indexée par un ensemble bien ordonné, où $a_\rho \in K$, $\gamma_\rho = v(x - a_\rho)$ et (γ_ρ) est cofinale dans $I_K(x)$.

(3) Si $tp(x, K)$ appartient à la troisième famille, alors il est complètement déterminé par une constante $a \in K$ telle que $v(x - a) \notin vK$, par le type $tp(v(x - a), vK)$ et par le type $tp(co(x - a), K_v)$.

Fixons une théorie complète T_r de corps de caractéristique p et une théorie complète T_g de groupes abéliens ordonnés discrets, et considérons dans $\mathcal{L}_{co_\omega}$ la théorie complète de corps valués henséliens non ramifiés de caractéristique $(0, p)$ dont le corps de restes est modèle de T_r et le groupe de valuation modèle de T_g. Les anneaux $A_n(K)$, avec les applications canoniques π_n: $A_{n+1}(K) \to A_n(K)$, forment un système projectif. Nous aurons à considérer des suites de types $(q_n(z))_n$, où q_n est un type sur $A_n(K)$, qui devront être considérées comme provenant d'un élément d'une extension élémentaire via les applications ν_n: $A_v \to A_n$. Ceci équivaut à ce que ces types soient compatibles avec les systèmes d'applications $(\nu_n)_n$ et $(\pi_n)_n$ dans un sens évident. Nous allons évoquer cette situation en disant que la suite de types $(q_n)_n$ est compatible avec le système projectif des anneaux A_n, et nous allons désigner par $\lim_{\overleftarrow{n}} q_n(y)$ le système de conditions qui décrit cette compatibilité et les q_n, à toute fin pratique égal à $\{y \in A \wedge q_n(y + M_n); n \geq 0\}$, et qui est réalisé dans une certaine extension élémentaire de (K, v). On peut considérer $\lim_{\overleftarrow{n}} q_n(y)$ comme un type sur $A_{(K^\circ, v)}$ réalisé dans $W(k)$ pour un $k \succeq K_v$.

THÉORÈME 6.2. *Soit $(K, v, (co_\omega))$ un modèle de $T_{0,p}$, et x dans une extension élémentaire, $x \notin K$.*

(1) *Si $tp(x, K)$ appartient à la première famille, alors il est complètement déterminé par deux constantes $a, b \in K$, $a \neq 0$, telles que $v(ax + b) = 0$, $\overline{ax + b} \notin K_v$, et par la limite projective de types $\lim_{\overleftarrow{n}} tp(co_n(ax + b), A_n(K))$.*

(2) *Si $tp(x, K)$ appartient à la deuxième famille, alors il est complètement déterminé par une suite $(a_\rho; \gamma_\rho)$ indexée par un ensemble bien ordonné, où $a_\rho \in K$, $\gamma_\rho = v(x - a_\rho)$ et (γ_ρ) est cofinale dans $I_K(x)$.*

(3) *Si $tp(x, K)$ appartient à la troisième famille, alors il est complètement déterminé par une constante $a \in K$ telle que $v(x - a) \notin vK$, par le type $tp(v(x - a), vK)$ et par la limite projective de types $\lim_{\overleftarrow{n}} tp(co_n(x - a), A_n(K))$.*

Démonstration. Soit $(N, v, (co_n))$ une extension élémentaire assez saturée, qu'on pourra ajuster pour obtenir les automorphismes voulus. Identifions x à un élément de N.

(1) Soit $x' \in N$ tel que $tp(x', K)$ appartient aussi à la première famille et tel que $v(ax' + b) = 0$, $\overline{ax' + b} \notin K_v$, et

$$\lim_{\leftarrow n} tp(co_n(ax + b), A_n(K)) = \lim_{\leftarrow n} tp(co_n(ax' + b), A_n(K))$$

Puisque N est assez saturé, on a les identifications $(N^\circ, v) = W(N_v)$ et $A_{(N^\circ, v)} = \lim_{\overleftarrow{n}} A_n(N) = A_{W(N_v)}$ (voir [1]). Soit K_0 un relèvement de K° par une section de l'application de passage au reste pour la valuation $\dot{v}$. On a $\dot{v}\ |_{K_0(ax+b)} = 0$ et $\dot{v}\ |_{K_0(ax'+b)} = 0$, car x, x' sont transcendants sur K. Il existe donc des relèvements N_1, N_2 de N° dans N tels que $K_0(ax + b) \subset N_1$ et $K_0(ax' + b) \subset N_2$. On a $\overline{ax + b} = \lim_{\overleftarrow{n}} co_n(ax + b)$, $\overline{ax' + b} = \lim_{\overleftarrow{n}} co_n(ax' + b)$, par les identifications faites ci-dessus. Pour chaque n, il existe (en ajustant N) un automorphisme σ_n de

$A_n(N)$ tel que $\sigma_n(co_n(ax+b)) = co_n(ax'+b)$ et $\sigma_n \mid_{A_n(K)} = \mathrm{id}$. En ajustant de nouveau N il existe une famille (σ_n) compatible avec la limite projective $\lim\limits_{\overleftarrow{n}} A_n(N)$. On obtient ainsi un automorphisme d'anneaux

$$\sigma\colon A_{(N^\circ,\dot v)} \to A_{(N^\circ,\dot v)}$$

tel que $\sigma(\overline{ax+b}) = \overline{ax'+b}$ et $\sigma \mid_{\lim_{\overleftarrow{n}} A_n(K)} = id$, en particulier $\sigma \mid_{A_{(K^\circ,\dot v)}} = \mathrm{id}$ par l'inclusion $A_{(K^\circ,\dot v)} \subseteq \lim\limits_{\overleftarrow{n}} A_n(K)$. En utilisant le fait que $N^{\circ\times} = p^{\mathbf{Z}} A^{\times}_{(N^\circ,\dot v)}$, on peut prolonger à un automorphisme de corps $\sigma_1\colon N^\circ \to N^\circ$ tel que $\sigma_1 \mid_{K^\circ} = id$. Par la construction de σ, l'automorphisme σ_1 sera aussi un automorphisme de corps valués pour la valuation v. On obtient un relèvement de σ_1 en un K_0-automorphisme de corps valués $\sigma_2\colon (N_1, v) \to (N_2, v)$ tel que $\sigma_2(ax+b) = ax'+b$. Or K et N_i sont linéairement disjoints au-dessus de K_0 et on obtient (voir [4], prop. 2.15) un K-isomorphisme de corps valués $\sigma_3\colon (KN_1, v) \to (KN_2, v)$ qui prolonge σ_2 et $vKN_i = vK$, $KN_{i\,v} = N_v$. Par le lemme 3.6 avec $G = H = \{1\}$, l'isomorphisme σ_3 est aussi un $\mathcal{L}_{co_\omega}$-isomorphisme. On conclut par le théorème d'élimination 5.1 que $tp(x, K) = tp(x', K)$.

(2) Supposons $x' \in N$ tel que $tp(x', K)$ appartient aussi à la deuxième famille pour la même suite $(a_\rho; \gamma_\rho)$. On vérifie directement que la suite (a_ρ) est une suite pseudo-Cauchy de type transcendant dont x et x' sont des pseudo-limites; il existe donc un K-isomorphisme de corps valués $\varphi\colon K(x) \to K(x')$ tel que $\varphi(x) = x'$ et on a $vK(x) = vK(x') = vK$, $K(x)_v = K(x')_v = K_v$. On conclut par le lemme 3.6 et le théorème 5.1 comme en (1).

(3) Supposons $x' \in N$ tel que $tp(x', K)$ appartient aussi à la troisième famille pour le même paramètre $a \in K$ et tel que $tp(v(x-a), vK) = tp(v(x'-a), vK)$ et

$$\lim_{\overleftarrow{n}} tp(co_n(x-a), A_n(K)) = \lim_{\overleftarrow{n}} tp(co_n(x'-a), A_n(K))$$

Posons $y = x - a$, $y' = x' - a$. Il suffit de voir que $tp(y, K) = tp(y', K)$. En procédant comme en (1), il existe un relèvement N_0 de N° dans N pour $\dot v$ et un K-automorphisme de corps valués

$$\varphi\colon (KN_0, v) \to (KN_0, v)$$

tel que $\varphi_n(co_n(y)) = co_n(y')$ pour tout n, et $vKN_0 = vK$, $(KN_0)_v = N_v$. Comme $vK \prec vN$ et $v(y), v(y') \notin vK$, on a que y, y' sont transcendants sur K, $v(\sum a_i y^i) = \min_i v(a_i y^i)$, $v(\sum a_i y'^i) = \min_i v(a_i y'^i)$, pour tous $a_i \in KN_0$, $vKN_0(y) = vK \oplus \mathbf{Z}v(y)$, $vKN_0(y') = vK \oplus \mathbf{Z}v(y')$. On obtient un K-isomorphisme de corps valués $\varphi_1\colon (KN_0(y), v) \to (KN_0(y'), v)$ tel que $\varphi(y) = y'$ et $\varphi_{1,n}(co_n(y)) = co_n(y')$ pour tout n. Par le lemme 3.6 avec $H = \{y\}$, l'isomorphisme φ_1 est aussi un $\mathcal{L}_{co_\omega}$-isomorphisme, et on conclut par le théorème d'élimination 5.1 que $tp(y, K) = tp(y', K)$. □

Note. Cette démonstration indique comment procéder pour le théorème 6.1.

7. La propriété d'indépendance

Compte tenu de la caractérisation des types ci-dessus, l'analyse de Delon des cohéritiers s'applique directement (voir [5]; on trouve un exposé détaillé dans [3]). Rappelons d'abord les résultats de base.

PROPOSITION 7.1 (Delon). *Soit $(K, v) \preceq (M, v)$ une extension élémentaire de corps valués, $\pi \in S_1(K, v)$, $q \in S_1(M, v)$.*

(i) Si q cohérite de π, alors $I_M(q) \cap vK = I_K(\pi)$.

(ii) Si π n'appartient pas à la 3^e^ famille et si q cohérite de π, alors $I_K(\pi)$ est cofinal dans $I_M(q)$.

(iii) Si $\pi(x)$ appartient à la 1^re^ famille et si $q(y)$ cohérite de $\pi(x)$, alors $q(y)$ appartient aussi à la 1^re^ famille pour les mêmes paramètres $a, b \in K$ tels que $v(ax+b) = 0, \overline{ax+b} \notin K_v$.

(iv) Si $\pi(x)$ appartient à la 2^e^ famille et si $q(y)$ cohérite de $\pi(x)$:

(iv.1) Si M ne réalise pas π, alors π a un fils unique sur M, ce fils appartient à la 2^e^ famille pour les mêmes paramètres $(a_\rho; \gamma_\rho)$, $a_\rho \in K$, $\gamma_\rho \in vK$, qui donnent une suite pseudo-convergente.

(iv.2) Si M réalise π, disons par x_0, alors $q(y)$ appartient à la 3^e^ famille avec le paramètre x_0 ($v(y - x_0) \notin vM$), $I_K(\pi)$ est cofinal dans $I_M(\pi)$ et $tp(v(y - x_0), vM)$ cohérite à gauche de sa restriction à vK.

(iv.3) Soient $x_0, x_1 \in M$ deux réalisations de π et y_0, y_1 des réalisations de q dans une extension élémentaire. Alors, pour tout $m \in M$, $v(y_0 - m) = v(y_1 - m)$; en particulier, $tp(v(y_0 - x_0), vM) = tp(v(y_1 - x_1), vM)$.

(v) Si $\pi(x)$ appartient à la 3^e^ famille, alors $q(y)$ appartient aussi à la 3^e^ famille pour le même paramètre $a \in K$ tel que $v(x - a) \notin vK$.

On travaille avec les théories de corps valués T_0, T_p, $T_{0,p}$ ci-dessus. Les résultats de [2] restent valables pour T_p; rappelons-en la description des cohéritiers.

THÉORÈME 7.2. *Soit $(K, v, co) \prec (M, v, co)$ des modèles de T_0 ou T_p et soit $\pi(x)$ un 1-type sur K, non trivial.*

(1) Si π appartient à la première famille, ses cohéritiers sur M sont les types $q(y)$ tels que $q(y)$ appartient à la même famille avec les mêmes paramètres a, b dans K et $tp(\overline{ay+b}, M_v)$ cohérite de $tp(\overline{ax+b}, K_v)$.

(2) Si π appartient à la deuxième famille on a deux cas:

(2.1) Si M ne réalise pas π, alors π possède un fils unique sur M, ce fils appartient aussi à la deuxième famille et est déterminé par la même suite $(a_\rho; \gamma_\rho)$ que π.

(2.2) Si M réalise π en x_0, les cohéritiers de π sont les types $q(y)$ tels que $q(y)$ appartient à la troisième famille pour le paramètre x_0, $I_K(\pi)$ est cofinal dans $I_M(q)$, $tp(v(y - x_0), vM)$ cohérite à gauche de sa restriction à vK, et $tp(co(y - x_0), M_v)$ cohérite de sa restriction à K_v.

(3) Si π appartient à la troisième famille, ses cohéritiers sur M sont les types $q(y)$ tels que $q(y)$ appartient à la même famille avec le même paramètre a dans K,

$tp(v(y-a), vM)$ cohérite de $tp(v(x-a), vK)$ et $tp(co(y-a), M_v)$ cohérite de $tp(co(x-a), K_v)$.

Pour $T_{0,p}$, on obtient l'analogue suivant.

THÉORÈME 7.3. *Soit $(K, v, (co_n)) \prec (M, v, (co)_n)$ des modèles de $T_{0,p}$ et soit $\pi(x)$ un 1-type sur K, non trivial.*

(1) Si π appartient à la première famille, ses cohéritiers sur M sont les types $q(y)$ tels que $q(y)$ appartient à la même famille avec les mêmes paramètres a, b dans K et la limite projective de types $\lim_{\overleftarrow{n}} tp(co_n(ay+b), A_n(M))$ cohérite de sa restriction à K.

(2) Si π appartient à la deuxième famille on a deux cas:

(2.1) Si M ne réalise pas π, alors π possède un fils unique sur M, ce fils appartient aussi à la deuxième famille et est déterminé par la même suite $(a_\rho; \gamma_\rho)$ que π.

(2.2) Si $x_0 \in M$ réalise π, les cohéritiers de π sont les types $q(y)$ tels que $q(y)$ appartient à la troisième famille pour le paramètre x_0, $I_K(\pi)$ est cofinal dans $I_M(q)$, $tp(v(y-x_0), vM)$ cohérite à gauche de sa restriction à vK, et la limite projective de types $\lim_{\overleftarrow{n}} tp(co_n(y-x_0), A_n(M))$ cohérite de sa restriction à K.

(3) Si π appartient à la troisième famille, ses cohéritiers sur M sont les types $q(y)$ tels que $q(y)$ appartient à la même famille avec le même paramètre a dans K, $tp(v(y-a), vM)$ cohérite de $tp(v(x-a), vK)$ et la limite projective de types $\lim_{\overleftarrow{n}} tp(co_n(y-a), A_n(M))$ cohérite de sa restriction à K.

Rappelons le critère de Poizat pour la propriété d'indépendance.

THÉORÈME 7.4 [20]. Soit T une théorie complète dans un langage L. Si T a la propriété d'indépendance, alors pour tout cardinal $\lambda \geq |L|$, il existe un type sur un modèle $\mathcal{M}$ de T de cardinal $|M| = \lambda$, qui a 2^{2^λ} cohéritiers. Si T n'a pas la propriété d'indépendance, alors pour tout cardinal $\lambda \geq |L|$, le nombre de cohéritiers d'un type sur un modèle M de T de cardinal $|M| = \lambda$ est majoré par 2^λ.

En appliquant le critère de Poizat, on obtient le transfert à la Ax-Kochen-Ershov, qui se ramène aux seuls corps par [9].

THÉORÈME 7.4. (1) *Dans le langage $\mathcal{L}_{co}$, $T = T_0, T_p$ possède la propriété d'indépendance si et seulement si T_r la possède.*

(2) *Dans le langage $\mathcal{L}_{co_\omega}$, $T = T_{0,p}$ possède la propriété d'indépendance si et seulement si T_r la possède.*

Démonstration. (2) ($\Rightarrow$) On sait par [9] qu'aucune théorie de groupes abéliens ordonnés n'a la propriété d'indépendance. Supposons que T_r n'a pas la propriété d'indépendance. Alors, pour tout $(K, v, (co_n)) \models T_{0,p}$ et $n = 0, 1, \ldots, Th(A_n(K))$

n'a pas non plus la propriété d'indépendance, puisque l'anneau $A_n(K)$ est canoniquement isomorphe à l'anneau $W_{n+1}(K_v)$ des vecteurs de Witt de longueur $n+1$ sur K_v et que cet anneau est uniformément définissable sans paramètre dans K_v. Un type $\pi \in S_1(K)$ n'aura, par le théorème 7.3 et le critère de Poizat appliqué aux groupes abéliens ordonnés, qu'au plus

$$2^{|vK|} \cdot (2^{|K_v|})^{\aleph_0} \leq 2^{|K|} \cdot 2^{|K| \cdot \aleph_0} = 2^{|K|}$$

cohéritiers, d'où le résultat. □

Comme on obtient des applications coefficients en passant d'un corps valué à une extension élémentaire assez saturée, on peut redescendre au langage $\mathcal{L}$.

COROLLAIRE 7.5. *Dans le langage des corps valués, une théorie de corps valués henséliens T_0, T_p ou $T_{0,p}$ possède la propriété d'indépendance si et seulement si la théorie de corps associée au corps de restes la possède.*

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. S. Basarab, *Relative elimination of quantifiers for henselian valued fields*, Ann. Pure Appl. Logic **53** (1991), 51–74.
2. L. Bélair et M. Bousquet, *Types dans les corps valués*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **323** (1996), 841–844.
3. M. Bousquet, *Propriété d'indépendance dans les corps valués*, Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal, 1995.
4. F. Delon, *Quelques propriétés des corps valués en théorie des modèles*, Thèse d'état, Université Paris VII, 1981.
5. F. Delon, "Types sur $C((X))$" in *Groupe d'Etude de Théories Stables, année* 78-79, Secrétariat mathématique, Institut Henri-Poincaré, Université Pierre et Marie Curie, 1981.
6. J. Denef, *P-adic semi-algebraic sets and cell decomposition*, J. Reine Angew. Math. **369** (1986), 154–166.
7. L. van den Dries, *Analytic Ax-Kochen-Ershov theorems*, Contemp. Math. **131** (1992), 379–398.
8. L. van den Dries, *The logic of local fields*, notes d'une série d'exposés lors du congrès Logic, local fields and subanalytic sets, AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conferences, Amherst, du 28 juin au 4 juillet 1990.
9. Y. Gurevich et P. Schmitt, *Ordered abelian groups do not have the independence property*, Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), 171–182.
10. H. Hasse, *Number theory*, Springer-Verlag, 1980.
11. S. Kochen, *The model theory of local fields*, Logic Conference, Kiel 1974, Lecture Notes in Mathematics, n^o 499, Springer-Verlag, 1975, pp. 324–425.
12. M. Krasner, *Une généralisation de la notion de corps: corpoïde. Un corpoïde remarquable de la théorie des corps valués*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **219** (1944), 345–347.
13. F.-V. Kuhlmann, *Henselian function fields*, thèse, Heidelberg, 1989.
14. ———, *Quantifier elimination for henselian fields relative to additive and multiplicative congruences*, Israel J. Math. **85** (1994), 277–306.
15. M.C. Laskowski, *Vapnik-Chervonenkis classes of definable sets*, J. London Math. Soc. **45** (1992), 377–384.
16. A.J. Macintyre et E.D. Sontag, *Finiteness results for sigmoidal neural networks*, Proc. 25th ACM STOC, 1993, pp. 325–334.

17. L. Matthews, *The independence property in unstable algebraic structures I: p-adically closed fields*, 1993, prépublication.
18. J. Pas, *Uniform p-adic cell decomposition and local zeta function*, J. Reine Angew. Math. **399** (1989), 137–172.
19. ________, *On the angular component map modulo p*, J. Symbolic Logic **55** (1990), 1125–1129.
20. B. Poizat, *Théories instables*, J. Symbolic Logic **46** (1981), 513–522.
21. P. Scowcroft, *Cross-sections for p-adically closed fields*, J. Algebra **183** (1996), 913–928.

Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec, H3C 3P8, Canada
belair@math.uqam.ca