VIERECKSTRANSITIVITÄT DER KLEINEN PROJEKTIVEN GRUPPE EINER MOUFANG-EBENE

VON

Helmut Salzmann

1. In der vorstehenden Arbeit hat Herr Pickert eine Bedingung dafür angegeben, daß die kleine projektive Gruppe einer Moufang-Ebene transitiv auf den nicht ausgearteten Punktquadrupeln (= Vierecken) ist. Hier soll nun der folgende allgemeinere Satz bewiesen werden:

Ist jedes Element des Koordinaten-Alternativkörpers einer Moufang-Ebene von der Form $((ab)c)((ab^{-1}a)c^{-1})$, *so ist die kleine projektive Gruppe dieser Moufang-Ebene viereckstransitiv.*

Insbesondere gilt das, wenn der Alternativkörper $\mathfrak{A}$ die Bedingung $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^3$ oder $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}^3\,(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A})$ erfüllt, wo $\mathfrak{Z}$ das Zentrum von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A}$ die Menge der multiplikativen Kommutatoren $b \circ c = bcb^{-1}c^{-1}$ bedeute. Die Beziehungen dieser Spezialfälle untereinander und zu dem Ergebnis von Herrn Pickert werden am Schluß erörtert. Für Desarguessche Ebenen wird bewiesen, daß ihre kleine projektive Gruppe genau dann viereckstransitiv ist, wenn ihr Koordinaten-Körper von seinen dritten Potenzen und multiplikativen Kommutatoren erzeugt wird. Ferner wird ein Beispiel einer Desarguesschen Ebene mit viereckstransitiver kleiner projektiver Gruppe angegeben, die jedoch nicht mit der vollen projektiven Gruppe zusammenfällt. Zur Erklärung der Bezeichnungen sei auf die vorangehende Arbeit [4] und das Buch [3] von Pickert verwiesen.

2. Die kleine projektive Gruppe einer Moufang-Ebene ist bekanntlich (Pickert [3], S. 194) stets transitiv auf der Menge der einfach ausgearteten Vierecke (d.h. der Punktquadrupel, die aus drei paarweise verschiedenen Punkten einer Geraden und einem Punkt außerhalb der Geraden bestehen). Um die volle Viereckstransitivität zu beweisen, genügt es also, eine kleine projektive Kollineation anzugeben, die bei festgehaltenem Koordinaten-Dreieck O, U, V den Einheitspunkt E in einen beliebigen anderen, auf keiner Seite des Koordinaten-Dreiecks liegenden Punkt E' der Geraden OE überführt.

Im folgenden wird gezeigt, daß sich in einer beliebigen Moufang-Ebene eine kleine projektive Kollineation finden läßt, die das Koordinaten-Dreieck fest läßt und den Punkt E auf einen vorgegebenen Punkt mit den Koordinaten

$$x = y = ((ab)c)((ab^{-1}a)c^{-1})$$

abbildet. Die gesuchte kleine projektive Kollineation wird als Produkt von höchstens 12 kleinen zentralen Kollineationen dargestellt, deren Zentrum eine

Received November 13, 1958; received in revised form January 5, 1959.

der Ecken und deren Achse eine der Seiten des Koordinaten-Dreiecks O, U, V ist. Mit $\Gamma_{P,PQ}$ wird die Gruppe der zentralen Kollineationen mit Zentrum P und Achse PQ bezeichnet. Zunächst werden nun diejenigen Kollineationen aus dem Produkt $\Gamma_{U,OU}\,\Gamma_{V,OV}\,\Gamma_{U,OU}\,\Gamma_{V,OV}$ bestimmt, die das Koordinaten-Dreieck fest lassen. In der Koordinaten-Ebene über einem Alternativkörper ist jede Kollineation aus $\Gamma_{U,OU}$ von der Form

$$\alpha(p)\colon (x, y) \to (x + py, y),$$

das soll heißen, der Punkt mit den Koordinaten x, y geht über in den Punkt mit den Koordinaten $x + py$, y; jede Kollineation aus $\Gamma_{V,OV}$ ist von der Form

$$\beta(r)\colon (x, y) \to (x, rx + y).$$

Die Hintereinander-Ausführung von $\alpha(p)$, $\beta(r)$, $\alpha(-q)$ ergibt

$$(x, y) \to (x - q(rx) + py - q(r(py)) - qy, rx + r(py) + y).$$

Soll hierbei der Punkt V fest bleiben, so muß die erste Koordinate von y unabhängig sein, d.h. es muß gelten

$$py - q(r(py)) - qy = 0$$

oder, wenn man den uninteressanten Fall $p = q = 0$ ausschließt,

$$(q^{-1} - r - p^{-1})(py) = 0, \quad \text{also} \quad q^{-1} = r + p^{-1}.$$

Dann ist

$$x - q(rx) = x - q((q^{-1} - p^{-1})x) = q(p^{-1}x)$$

und

$$r(py) + y = (r + p^{-1})(py) = q^{-1}(py).$$

Multipliziert man jetzt noch mit $\beta(q^{-1} - q^{-1}pq^{-1})$, so erhält man im ganzen die Abbildung

$$(x, y) \to (q(p^{-1}x), (q^{-1} - p^{-1})x + (q^{-1} - q^{-1}pq^{-1})(q(p^{-1}x)) + q^{-1}(py)).$$

Wegen der Gültigkeit der Moufang-Identitäten in einem Alternativkörper ist

$$(q^{-1}pq^{-1})(q(p^{-1}x)) = q^{-1}((pq^{-1}q)(p^{-1}x)) = q^{-1}x,$$

also wird die zweite Koordinate von x unabhängig und es bleibt auch der Punkt U fest. Damit hat man gefunden:

Die Kollineationen aus $\Gamma_{U,OU}\,\Gamma_{V,OV}\,\Gamma_{U,OU}\,\Gamma_{V,OV}$ mit den Fixpunkten O, U, V sind genau die Abbildungen der Form

$$(x, y) \to (q(p^{-1}x), q^{-1}(py)).$$

Eine solche Kollineation führt die durch die Gleichung $y = ux + v$ definierte Gerade $[u, v]$ in die Gerade

$$[q^{-1}(pup)q^{-1}, q^{-1}(pv)]$$

über, wie man mit Hilfe der Moufang-Identitäten folgendermaßen bestätigt, wobei man sich auf $v = 0$ beschränken kann:

$$(q^{-1}(pup)q^{-1})(q(p^{-1}x)) = q^{-1}((pup)(p^{-1}x)) = q^{-1}(p(ux)).$$

Die Dualität, welche die Gerade $[u, v]$ auf den Punkt $(u, -v)$ der Ebene über dem entgegengesetzten Alternativkörper (mit umgekehrter Multiplikations-Reihenfolge) abbildet, liefert daher aus dem letzten Ergebnis:

Die Kollineationen aus $\Gamma_{O,OV}\ \Gamma_{U,UV}\ \Gamma_{O,OV}\ \Gamma_{U,UV}$ *mit den Fixpunkten* O, U, V *sind genau die Abbildungen der Form*

$$(x, y) \to (t(sxs)t,\ (ys)t).$$

Vertauschung von x mit y (und entsprechend U mit V) zeigt nun noch:

Die Kollineationen aus $\Gamma_{O,OU}\ \Gamma_{V,VU}\ \Gamma_{O,OU}\ \Gamma_{V,VU}$ *mit den Fixpunkten* O, U, V *sind genau die Abbildungen der Form*

$$(x, y) \to ((xc)d,\ d(cyc)d).$$

Bildet man jetzt für

$$p = a^{-1}b, \qquad q = 1, \qquad s = b, \qquad t = 1$$

das Produkt der drei gefundenen Kollineationen, so ergibt sich die kleine projektive Kollineation

$$(x, y) \to (\ ((b((b^{-1}a)x)b)c)d,\ d(c(((a^{-1}b)y)b)c)d\ ).$$

Die Forderung, daß die Gerade OE in sich übergehen soll, besagt, daß die beiden Koordinaten des Bildpunktes von $(1, 1)$ übereinstimmen müssen, also

$$((ab)c)d = d(c(a^{-1}b^2)c)d.$$

Mit Hilfe der Moufang-Identitäten folgt daraus der Reihe nach

$$(ab)c = d(c(a^{-1}b^2)c) = ((dc)(a^{-1}b^2))c,$$

$$ab = (dc)(a^{-1}b^2), \qquad dc = ab^{-1}a, \qquad d = (ab^{-1}a)c^{-1}.$$

Setzt man diesen Wert für d ein, so erhält man für den Bildpunkt von E die beiden gleichen Koordinaten

$$((ab)c)((ab^{-1}a)c^{-1}).$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

3. Es soll nun gezeigt werden, wie sich der erste in der Einleitung erwähnte Spezialfall für eine echte Moufang-Ebene (d.h. eine Moufang-Ebene, in der der Desarguessche Satz nicht gültig ist) auch ohne Rechnung durch eine Abänderung des Pickertschen Beweises ergibt. (Für Desarguessche Ebenen siehe §4.) Da jedes Element des nicht assoziativen Koordinaten-Alternativkörpers $\mathfrak{A}$ einer quadratischen Gleichung über dem Zentrum $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{A}$ genügt, erzeugt jedes nicht im Zentrum liegende Element a mit dem Zentrum zusammen einen kommutativen Unterkörper $\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}a$. Daher liegt das einfach ausgeartete Fünfeck O, U, V, E, E' (genau die Punkte O, E, E' sind kollinear) in einer Pappusschen Unterebene (vgl. Moufang [2]). Nun wird aber, wie bei Pickert [4] dargetan ist, jede kleine projektive Kollineation einer Unterebene einer Moufang-Ebene von einer kleinen projektiven Kollineation der ganzen Ebene induziert. Wegen der Transitivität der kleinen projektiven Gruppe einer Moufang-Ebene auf den ausgearteten Vierecken gilt also:

Liegt jedes einfach ausgeartete Fünfeck einer Moufang-Ebene in einer Pappusschen Unterebene mit viereckstransitiver kleiner projektiver Gruppe, so ist auch die kleine projektive Gruppe dieser Moufang-Ebene viereckstransitiv.

Insbesondere zeigt diese Überlegung, daß dann auch jede maximale Pappussche Unterebene und erst recht jede maximale Desarguessche Unterebene eine viereckstransitive kleine projektive Gruppe besitzt. Nach der Spezialisierung des Satzes 1 der vorstehenden Arbeit von Herrn Pickert ist die kleine projektive Gruppe einer Pappus-Ebene genau dann (scharf) transitiv auf den nicht ausgearteten Vierecken, wenn der zugehörige Koordinaten-Körper kubisch abgeschlossen ist. Es seien jetzt die maximalen kommutativen (und assoziativen) Unterkörper von $\mathfrak{A}$ kubisch abgeschlossen. Sie sind von der Form $\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}a$ oder (nur bei Charakteristik 2) vom Rang 2 über einem Körper $\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}a$. Der Alternativkörper $\mathfrak{A}$ ist nun die Vereinigungsmenge der Körper $\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}a$ für $a \in \mathfrak{A}$, also kubisch abgeschlossen. Ist umgekehrt $\mathfrak{A}$ ein kubisch abgeschlossener Alternativkörper, a ein nicht im Zentrum $\mathfrak{Z}$ liegendes Element von $\mathfrak{A}$, so gibt es ein Element $b \in \mathfrak{A}$ mit $b^3 = a$, $b \notin \mathfrak{Z}$. Der von $\mathfrak{Z}$ und b erzeugte Körper $\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}b$ enthält den Körper $\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}a$, und wegen der Gleichheit der Ränge über $\mathfrak{Z}$ stimmen diese beiden Körper überein. Dieselbe Überlegung zeigt, daß jedes nicht zu $\mathfrak{Z}$ gehörende Element von $\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}a$ dritte Potenz eines Elementes aus $\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}a$ ist. Ist $z \in \mathfrak{Z}$, so gibt es also ein Element $c \in \mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}a$ mit $c^3 = az$, und wegen der Kommutativität von $\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}a$ ist $z = b^{-3}c^3 = (b^{-1}c)^3$, d.h. $\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}a$ ist kubisch abgeschlossen. Damit ist bewiesen:

Der Alternativkörper einer echten Moufang-Ebene ist genau dann kubisch abgeschlossen, wenn jedes einfach ausgeartete Fünfeck der Ebene in einer Pappusschen Unterebene mit viereckstransitiver kleiner projektiver Gruppe liegt.

Zusammen mit der vorigen Aussage ergibt sich daraus die Viereckstransitivität der kleinen projektiven Gruppe im Fall $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^3$. Man gewinnt auch noch ein Kriterium, das sich wie das von Herrn Pickert nur auf das Zentrum von $\mathfrak{A}$ bezieht:

Sind alle Erweiterungen vom Rang 2 über dem Zentrum des Alternativkörpers einer echten Moufang-Ebene kubisch abgeschlossen, so ist ihre kleine projektive Gruppe viereckstransitiv.

4. Im Zusammenhang mit der Arbeit [4] von Herrn Pickert ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Viereckstransitivität der kleinen projektiven Gruppe einer Desarguesschen Ebene von Interesse:

SATZ. *Eine Desarguessche Ebene besitzt genau dann eine viereckstransitive kleine projektive Gruppe, wenn ihr Koordinaten-Körper* $\mathfrak{K}$ *die Bedingung* $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^3\mathfrak{K}'$ *erfüllt, wobei* $\mathfrak{K}'$ *die Kommutatorgruppe der multiplikativen Gruppe* $\mathfrak{K}^*$ *von* $\mathfrak{K}$ *bedeute.*

Der Beweis beruht auf demselben Gedanken, wie der Beweis des Pickertschen Satzes 1. Wegen der Transitivität der kleinen projektiven Gruppe auf den ausgearteten Vierecken genügt es wieder, eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür anzugeben, daß eine kleine projektive Kollineation mit den Fixpunkten O, U, V existiert, die den Punkt E in einen beliebigen eigentlichen Punkt $E' \neq O$ der Geraden OE überführt. Nach Einführung homogener Koordinaten besagt das in Anbetracht der Eigenschaften der Dieudonnéschen Determinanten [1] gerade, daß es zu jedem $a \in \mathfrak{K}^*$ ein $c \in \mathfrak{K}^*$ gibt, so daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ac \end{pmatrix}$$

als Determinante die Kommutatorgruppe $\mathfrak{K}'$ besitzt, daß also

$$c^3a^2 \in \mathfrak{K}' \quad \text{oder} \quad a^{-1} \in \mathfrak{K}^3\mathfrak{K}'.$$

BEMERKUNG. *Es gibt Desarguessche Ebenen, deren kleine projektive Gruppe viereckstransitiv ist, aber nicht mit der vollen projektiven Gruppe zusammenfällt.*

Wegen Satz 1 von Herrn Pickert genügt es, einen Schiefkörper $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^3 \neq \mathfrak{Z}\mathfrak{K}'$ anzugeben. Zu diesem Zweck bilde ich die kubisch abgeschlossene Hülle des Hilbertschen Potenzreihenkörpers in zwei Unbestimmten über einem kubisch abgeschlossenen Körper $\mathfrak{R}$ reeller Zahlen. Diesen Körper kann man explizit folgendermaßen beschreiben: Man bildet zuerst den Körper $\mathfrak{B}$ aller Potenzreihen in x^p der Form

$$B(x) = \textstyle\sum_{i=m}^{\infty} b_i x^{pi} \qquad \text{mit } p = 3^{-e}, \quad m, e \text{ ganz}, \quad b_i \in \mathfrak{R}, \quad b_m \neq 0.$$

Für eine feste positive Zahl $r \neq 1$ aus $\mathfrak{R}$ bildet man dann über dem Körper $\mathfrak{B}$ als Koeffizientenbereich entsprechend den Schiefkörper $\mathfrak{K}$ aller Potenzreihen in y^q der Form

$$\textstyle\sum_{j=n}^{\infty} B_j(x)y^{qj} \qquad \text{mit } q = 3^{-f}, \quad n, f \text{ ganz}, \quad B_j(x) \in \mathfrak{B}, \quad B_n(x) \neq 0,$$

wobei die Vertauschungsregel

$$y^h B(x) = B(r^h x) y^h$$

gelten soll. Dieser Schiefkörper ist in jedem kubisch abgeschlossenen Oberkörper des Hilbertschen Körpers enthalten. Er ist aber auch selbst kubisch abgeschlossen, wie man so bestätigen kann:

Der Ansatz

$$\sum_{j=n}^{\infty} B_j(x)y^{qj} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k(x)y^{qk+s}\right)^3, \qquad s = 3^{-1}qn$$

in unbestimmten Koeffizienten $C_k(x)$ aus $\mathfrak{B}$ ergibt für die $C_k(x)$ die Bedingungen

$$(C_0(x)y^s)^3 = C_0(x)C_0(r^s x)C_0(r^{2s}x)y^{3s} = B_n(x)y^{qn},$$

$$\begin{aligned} C_1(x)y^{q+s}C_0(x)y^sC_0(x)y^s &+ C_0(x)y^sC_1(x)y^{q+s}C_0(x)y^s + C_0(x)y^sC_0(x)y^sC_1(x)y^{q+s} \\ &= (C_1(x)C_0(r^{q+s}x)C_0(r^{q+2s}x) + C_0(x)C_1(r^s x)C_0(r^{g+2s}x) + \\ &\qquad + C_0(x)C_0(r^s x)C_1(r^{2s}x))y^{q+3s} \\ &= B_{n+1}(x)y^{q(n+1)} \end{aligned}$$

usw. Man hat also für die $C_k(x)$ Rekursionsformeln der Gestalt

$$C_0(x)C_0(r^s x)C_0(r^{2s}x) = B_n(x),$$

$$\begin{aligned} C_k(x)C_0(r^{kq+s}x)C_0(r^{kq+2s}x) &+ C_0(x)C_k(r^s x)C_0(r^{kq+2s}x) + \\ &+ C_0(x)C_0(r^s x)C_k(r^{2s}x) + \mathfrak{P}(C_0, \cdots, C_{k-1}) = B_{n+k}(x), \qquad k > 1, \end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{P}(C_0, \cdots, C_{k-1})$ ein Ausdruck in $C_0, \cdots, C_{k-1}$ ist, der nicht von C_k abhängt. Aus diesen Formeln kann man nun wiederum rekursiv die Koeffizienten der Potenzreihen $C_k(x)$ bestimmen: Sei

$$B_n(x) = \sum_{i=m}^{\infty} b_i x^{pi}, \qquad C_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{pi+t}, \quad t = 3^{-1}pm.$$

Die Bestimmungsgleichung für $C_0(x)$ liefert

$$r^{3st}c_0^3 = b_m,$$

$$r^{3st}(1 + r^{isp} + r^{2isp})c_0^2 c_i + \mathfrak{p}(c_0, \cdots, c_{i-1}) = b_{m+i},$$

wo $\mathfrak{p}(c_0, \cdots, c_{i-1})$ ein Polynom über $\mathfrak{R}$ in $c_0, \cdots, c_{i-1}$ bedeutet. Dieses Gleichungssystem ist rekursiv lösbar, da $\mathfrak{R}$ als kubisch abgeschlossen vorausgesetzt war und wegen $b_m \neq 0$, $c_0 \neq 0$ und $r > 0$ stets

$$r^{3st}(1 + r^{isp} + r^{2isp})c_0^2 > 0$$

ist.

Die weiteren Formeln ergeben für die Koeffizienten der $C_k(x)$ lineare Gleichungssysteme mit unendlichen Dreiecksmatrizen, deren Diagonalelemente mit c_0^2 multiplizierte Potenzsummen von r sind, also nicht verschwinden. Daher lassen sich auch der Reihe nach die Koeffizienten der Potenzreihen $C_1(x)$, $C_2(x)$ usw. rekursiv bestimmen. Damit ist die kubische Abgeschlossenheit von $\mathfrak{K}$ bewiesen.

Mit der Gradbewertung bezüglich y wird der Schiefkörper $\mathfrak{K}$ ein bewerteter

Körper. Das Zentrum von $\mathfrak{K}$ besteht genau aus dem Grundkörper $\mathfrak{R}$, alle Zentrumselemente haben also den Wert 0. Ebenso haben natürlich alle Kommutatoren der multiplikativen Gruppe $\mathfrak{K}^*$ den Wert 0, also besteht auch die multiplikative Gruppe $\mathfrak{R}^*\mathfrak{K}'$ nur aus Elementen mit dem Wert 0, ist also eine echte Untergruppe von $\mathfrak{K}^*$, womit alles bewiesen ist.

5. Das Kriterium von Herrn Pickert für die Viereckstransitivität der kleinen projektiven Gruppe einer Moufang-Ebene beruht auf der Feststellung:

Eine Moufang-Ebene hat eine viereckstransitive kleine projektive Gruppe, wenn jede maximale Desarguessche Unterebene eine solche besitzt.

Diese Voraussetzung ist nach §3 jedenfalls erfüllt, wenn der zugehörige Alternativkörper $\mathfrak{A}$ kubisch abgeschlossen ist. Herr Pickert gibt bei Charakteristik $\neq 2$ eine andere hinreichende Bedingung: Jeder Quaternionen-Schiefkörper $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{A}$ über dem Zentrum $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{A}$ genügt der Forderung $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Z}^3 (\mathfrak{Q} \circ \mathfrak{Q})$; er beweist, daß diese Forderung sicher dann erfüllt ist, wenn $\mathfrak{Z}$ reell quadratisch und kubisch abgeschlossen ist.

Im allgemeinen ist nicht jede quadratische Erweiterung eines reell quadratisch und kubisch abgeschlossenen Körpers wieder kubisch abgeschlossen, wie folgendes Beispiel zeigt:

Es sei $\mathfrak{K}$ die reell quadratisch und kubisch abgeschlossene Hülle des rationalen Zahlkörpers $\mathfrak{R}$; dann entsteht $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{R}$ durch eine wohlgeordnete Folge von Erweiterungen

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{K}_\nu \subset \mathfrak{K}_{\nu+1} \subset \cdots \subset \mathfrak{K},$$

wobei $\mathfrak{K}_{\nu+1}$ durch Adjunktion einer Kubikwurzel oder einer Quadratwurzel aus einer positiven Zahl aus $\mathfrak{K}_\nu$ entsteht, und

$$\mathfrak{K}_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} \mathfrak{K}_\nu ,$$

wenn λ eine Limeszahl ist. Nun ist $\mathfrak{K}(i)$ für $i^2 = -1$ genau dann kubisch abgeschlossen, wenn über $\mathfrak{K}$ alle kubischen Gleichungen zerfallen. Betrachtet man jetzt eine über $\mathfrak{R}$ nicht zerfallende Gleichung des "casus irreducibilis", so zeigt der Beweis von van der Waerden [5], S. 189, daß die Gleichung bei keinem Schritt von $\mathfrak{K}_\nu$ zu $\mathfrak{K}_{\nu+1}$ zerfällt; sie kann aber auch für keine Limeszahl λ über $\mathfrak{K}_\lambda$ zerfallen; denn dann zerfiele sie schon für ein $\nu < \lambda$ über $\mathfrak{K}_\nu$. Daher zerfällt die betrachtete Gleichung auch nicht über $\mathfrak{K}$, d.h. $\mathfrak{K}(i)$ ist nicht kubisch abgeschlossen[1]. Der Satz von Herrn Pickert ist also keine Folge aus der letzten Aussage von §3.

Bemerkung. Gilt $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Z}^3(\mathfrak{Q} \circ \mathfrak{Q})$ für alle maximalen Schiefkörper $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{A}$, so ist auch $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}^3(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A})$, es liegt also der zweite Spezialfall der Einleitung vor.

---

[1] Den Hinweis auf dieses Beispiel verdanke ich Herrn Professor Pickert.

Literatur

1. J. Dieudonné, *La géométrie des groupes classiques*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
2. R. Moufang, *Die Schnittpunktsätze des projektiven speziellen Fünfecksnetzes in ihrer Abhängigkeit voneinander*, Math. Ann., Bd. 106 (1932), SS. 755–795.
3. G. Pickert, *Projektive Ebenen*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
4. ———, *Bemerkungen über die projektive Gruppe einer Moufang-Ebene*, Illinois J. Math., vol. 3 (1959), pp. 169–173.
5. B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra I*, 3. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1950.

Universität
Frankfurt am Main, Deutschland