AUTOMORPHISMEN VON GRUPPEN UND ENDOISOMORPHISMEN FREIER GRUPPEN

G. A. Miller zum Gedächtnis

VON

OTTO GRÜN

Man kann bekanntlich jede endlich erzeugbare Gruppe $\mathfrak{G}$ als Faktorgruppe einer freien Gruppe $\mathfrak{F}$ darstellen. Wird $\mathfrak{G}$ von den unabhängigen Elementen $s_1, s_2, \cdots, s_\alpha$ erzeugt, so kann man in der freien Gruppe $\mathfrak{F} = \{t_1, \cdots, t_\alpha\}$ vom Rang α einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ so bestimmen, daß $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ mit der Zuordnung $t_i \mathfrak{N} \rightarrow s_i$, $i = 1, \cdots, \alpha$ isomorph mit $\mathfrak{G}$ ist. Ist $R_1(s_1, \cdots, s_\alpha) = 1, \cdots, R_n(s_1, \cdots, s_\alpha) = 1$ ein System unabhängiger 1-Relationen von $\mathfrak{G}$, so erzeugen die Elemente $R_1(t_1, \cdots, t_\alpha), \cdots, R_n(t_1, \cdots, t_\alpha)$ mit all ihren in $\mathfrak{F}$ Konjugierten zusammen gerade den obigen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{F}$. Jeder Automorphismus von $\mathfrak{F}$, der $\mathfrak{N}$ invariant läßt, induziert einen Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Aber nicht immer läßt sich jeder Automorphismus von $\mathfrak{G}$ auf diese Art aus einem Automorphismus von $\mathfrak{F}$ herleiten. Z.B. wenn $\mathfrak{G}$ eine zyklische Gruppe $\{s\}$ von der endlichen Ordnung m ist, so ist jede Zuordnung $s \rightarrow s^k$, $(k, m) = 1$ ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Aber $\mathfrak{G} = \{t\}/\{t^m\}$ und es gibt keinen Automorphismus der freien zyklischen Gruppe $\{t\}$, der $t\{t^m\}$ auf $t^k\{t^m\}$ abbildet, wenn $k \neq \pm 1$ ist. Hier soll nun gezeigt werden: Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ so gibt es zu jedem Automorphismus ϑ von G einen Endoisomorphismus σ von $\mathfrak{F}$ mit den Eigenschaften: Ist $s_i \rightarrow t_i \mathfrak{N}$ so $s_i^\vartheta = t_i^\sigma \mathfrak{N}$, die Zuordnung $s_i \rightarrow t_i^\sigma \mathfrak{N}$ ergibt den Automorphismus $s_i \rightarrow s_i^\vartheta$ von $\mathfrak{G}$. Z.B. in der obigen zyklischen Gruppe $\{s\}$ von der Ordnung m kann der Automorphismus ϑ, $s^\vartheta = s^k$ durch den Endoisomorphismus σ der zyklischen freien Gruppe $\{t\}$ induziert werden: $t^\sigma = t^k$, $\{t^k\} \subset \{t\}$, $\{t^m\}^\sigma = \{t^{km}\} \subset \{t^m\}$, $\{t^\sigma\}\{t^m\} = \{t\}$ da $(k, m) = 1$ ist, also $\{s\} = \{t\}/\{t^m\} = \{t^\sigma\}\{t^m\}/\{t^m\} \cong \{t^\sigma\}/\{t^\sigma\} \cap \{t^m\} = \{t^k\}/\{t^{km}\}$, und die Zuordnung $t^\sigma\{t^m\} = t^k\{t^m\} \rightarrow t\{t^m\}$ definiert einen Automorphismus von $\{t\}/\{t^m\} = \{s\}$. Dies läßt sich allgemein für jede Gruppe $\mathfrak{G}$ durchführen, die als Faktorgruppe $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ einer freien Gruppe dargestellt ist wenn $\mathfrak{G}$ endlich erzeugbar und nicht isomorph mit einer echten Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Die letztgenannten Voraussetzungen sollen im Folgenden durchweg gelten.

I. Es sei $\mathfrak{F} = \{t_1, \cdots, t_\alpha\}$ die t_μ freie Erzeugende von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$. Es bedeutet offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir voraussetzen, daß die $t_\mu \mathfrak{N}$, $\mu = 1, \cdots, \alpha$, ein System von unabhängigen Erzeugenden von $\mathfrak{G}$ bilden. Die Gruppe aller Automorphismen ϑ von $\mathfrak{F}$, die $\mathfrak{N}$ invariant lassen, induziert offenbar eine Gruppe von

Received January 9, 1959.

Automorphismen von $\mathfrak{G}$: $(t\mathfrak{N})^{\vartheta} = t^{\vartheta}\mathfrak{N} \rightarrow t\mathfrak{N}$. Denn wenn

$$R(t_1\mathfrak{N}, \cdots, t_\alpha\mathfrak{N}) \in \mathfrak{N}$$

eine 1-Relation von $\mathfrak{G}$ ist, so ist $R(t_1^{\vartheta}\mathfrak{N}, \cdots, t_\alpha^{\vartheta}\mathfrak{N}) \in \mathfrak{N}^{\vartheta} = \mathfrak{N}$; also erfüllen die $t_\mu^{\vartheta}\mathfrak{N}$ genau die gleichen Relationen wie die $t_\mu\mathfrak{N}$ mit der Zuordnung $t_\mu^{\vartheta}\mathfrak{N} \rightarrow t_\mu\mathfrak{N}$, daher induziert ϑ einen Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Aber in vielen Fällen können nicht alle Automorphismen von $\mathfrak{G}$ aus Automorphismen von $\mathfrak{F}$ abgeleitet werden. Es sei $\mathfrak{G} = \{s_1, \cdots, s_\alpha\}$, $s_\mu = t_\mu\mathfrak{N}$, $\mu = 1, \cdots, \alpha$, und τ ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$: $s_\mu^{\tau} = \prod_\nu s_\nu^{\alpha_{\mu,\nu}}$, dann existiert τ^{-1}, $s_\mu^{\tau^{-1}} = \prod_\nu s_\nu^{\beta_{\mu,\nu}}$ und es ist:

$$s_\mu = s_\mu^{\tau\tau^{-1}} = s_\mu^{\tau^{-1}\tau} = \prod_\nu(\prod_\lambda s_\lambda^{\alpha_{\nu,\lambda}})^{\beta_{\mu,\nu}} = \prod_\nu(\prod_\lambda t_\lambda^{\alpha_{\nu,\lambda}})^{\beta_{\mu,\nu}}\mathfrak{N} = t_\mu\mathfrak{N}.$$

Es seien $N_1, \cdots, N_\alpha$ beliebige Elemente $\in \mathfrak{N}$ und

1. $$t_\mu^{\sigma} = \prod_\nu t_\nu^{\alpha} N_\mu, \qquad \mu = 1, \cdots, \alpha.$$

Es wird

$$t_\mu^{\sigma}\mathfrak{N} = \prod_\nu t_\nu^{\alpha}\mathfrak{N} = s_\mu^{\tau} \quad \text{und} \quad \prod_\nu(t_\nu^{\sigma})^{\beta_{\mu,\nu}}\mathfrak{N} = \prod_\nu(\prod_\lambda t_\lambda^{\alpha_{\nu,\lambda}})^{\beta_{\mu,\nu}}\mathfrak{N};$$

also

2. $$\prod_\nu(t_\nu^{\sigma})^{\beta_{\mu,\nu}}\mathfrak{N} = t_\mu\mathfrak{N}.$$

Daraus folgt:

$$\mathfrak{F}^{\sigma}\mathfrak{N} = \{t_1^{\sigma}, \cdots, t_\alpha^{\sigma}\}\mathfrak{N} = \mathfrak{F}.$$

Denn nach 2 kann man jedes erzeugende Element t_μ von $\mathfrak{F}$ als Produkt von Potenzen der t_μ^{σ} und Elementen aus $\mathfrak{N}$ ausdrücken. Aus der vorausgesetzten Unabhängigkeit der $s_\mu = t_\mu\mathfrak{N}$ folgt auch die Unabhängigkeit der t_μ^{σ}; mithin ist $\mathfrak{F}^{\sigma} = \{t_1^{\sigma}, \cdots, t_\alpha^{\sigma}\}$ eine freie Gruppe vom Rang α und es ist

3a. $$\mathfrak{F}^{\sigma}\mathfrak{N} = \mathfrak{F}.$$

Also

3b. $$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}/\mathfrak{N} = \mathfrak{F}^{\sigma}\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{F}^{\sigma}/\mathfrak{F}^{\sigma} \cap \mathfrak{N}.$$

Nun ist $\mathfrak{N}^{\sigma} \in \mathfrak{N}$. Denn für alle $t \in \mathfrak{N}$: $t^{\sigma}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$; also

4. $$\mathfrak{N}^{\sigma} \in \mathfrak{N}.$$

Aus der Isomorphie $\mathfrak{F}^{\sigma} \cong \mathfrak{F}$ mit der Zuordnung $t_\mu^{\sigma} \rightarrow t_\mu$ folgt nun, daß die $R(t_1, \cdots, t_\alpha)^{\sigma}$ mit ihren in $\mathfrak{F}^{\sigma}$ Konjugierten gerade $\mathfrak{N}^{\sigma}$ erzeugen und es ergibt 4.

5. $$\mathfrak{F}^{\sigma} \cap \mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{N}^{\sigma}.$$

Angenommen, es sei $\mathfrak{F}^{\sigma} \cap \mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}^{\sigma}$; dann wäre die Faktorgruppe $\mathfrak{F}^{\sigma}/\mathfrak{F}^{\sigma} \cap \mathfrak{N} = (\mathfrak{F}^{\sigma}/\mathfrak{N}^{\sigma})/(\mathfrak{F}^{\sigma} \cap \mathfrak{N}/\mathfrak{N}^{\sigma})$ eine echte Faktorgruppe von $\mathfrak{F}^{\sigma}/\mathfrak{N}^{\sigma} \cong \mathfrak{G}$, aber nach 3b ist auch $\mathfrak{F}^{\sigma}/\mathfrak{F}^{\sigma} \cap \mathfrak{N} \cong \mathfrak{G}$. Da nach Voraussetzung $\mathfrak{G}$ nicht mit einer echten

Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ isomorph ist, ergibt sich also

6. Daher: $\mathfrak{F}^\sigma \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}^\sigma$.

SATZ 1. *Mit der Zuordnung $t^\sigma \to t$ für alle $t \in \mathfrak{F}$ ist*

$$t^\sigma\mathfrak{N} \to t\mathfrak{N}$$

der durch τ bewirkte Isomorphismus von $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ mit sich selbst. Man kann also jeden Automorphismus von $\mathfrak{G}$ aus einem Endoisomorphismus von $\mathfrak{F}$ ableiten. Wenn man hierbei $\mathfrak{F}^\sigma = \mathfrak{F}$ wählen kann, so kann man den betr. Automorphismus von $\mathfrak{G}$ aus einem Automorphismus von $\mathfrak{F}$ herleiten. Offenbar kann man auch umgekehrt Endoisomorphismen σ von $\mathfrak{F}$ benutzen, um Automorphismen von $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ zu finden.

SATZ 2. *Es sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$, σ ein Endoisomorphismus von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}^\sigma\mathfrak{N} = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{N}^\sigma \in \mathfrak{N}$. Dann definiert die Zuordnung $t^\sigma\mathfrak{N} \to t\mathfrak{N}$ für alle $t \in \mathfrak{F}$ einen Automorphismus von $\mathfrak{G}$.*

Beweis. $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}/\mathfrak{N} = \mathfrak{F}^\sigma\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{F}^\sigma/\mathfrak{F}^\sigma \cap \mathfrak{N}$. Es folgt, wie oben, aus $\mathfrak{N}^\sigma \in \mathfrak{N}$: $\mathfrak{F}^\sigma \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}^\sigma$. Die Zuordnung $t^\sigma(\mathfrak{F}^\sigma \cap \mathfrak{N}) = t^\sigma\mathfrak{N}^\sigma \to t\mathfrak{N}$ ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{F}^\sigma/\mathfrak{N}^\sigma$. Da $\mathfrak{F}^\sigma \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}^\sigma$ ist, folgt: die Zuordnung $t^\sigma\mathfrak{N} \to t\mathfrak{N}$ ist ein Automorphismus von $\mathfrak{F}/\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$.

II. Wenn der Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{F}$ eine Wortgruppe von $\mathfrak{F}$ ist, so ist für jeden Endoisomorphismus σ von $\mathfrak{F}$: $\mathfrak{N}^\sigma \in \mathfrak{N}$. Speziell ist die von den m^{ten} Potenzen der Elemente $\in \mathfrak{F}$ erzeugte Gruppe $\mathfrak{F}(m)$ für jede natürliche Zahl m eine Wortgruppe von $\mathfrak{F}$. Wir wollen hier ohne Beweis voraussetzen, daß eine endlich erzeugbare Gruppe von Exponenten m nicht mit einer ihrer echten Faktorgruppen isomorph sein könne.

Es sei $\mathfrak{F} = \{t_1, \cdots, t_\alpha\}$, $\mathfrak{F}(m)$ die mit dem Wort x^m gebildete Wortgruppe von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}/\mathfrak{F}(m)$. Jeder Automorphismus von $\mathfrak{F}$ induziert einen Automorphismus von $\mathfrak{G}$, da $\mathfrak{F}(m)$ charakteristisch in $\mathfrak{F}$ ist. Die Gruppe aller Automorphismen von $\mathfrak{F}$, die jedes Element von $\mathfrak{F}$ mod $\mathfrak{F}(m)$ invariant lassen, bildet einen Normalteiler der Gruppe aller Automorphismen von $\mathfrak{F}$ und alle und nur die Automorphismen aus diesem Normalteiler induzieren den identischen Automorphismus von $\mathfrak{G}$.

Mit Hilfe von I, Satz 2 können wir für $m > 4$ Automorphismen von $\mathfrak{G}$ bestimmen, die nicht durch Automorphismen von $\mathfrak{F}$ induziert werden können.

SATZ 1. *Es seien $k_1, \cdots, k_\alpha$ beliebige zu m prime natürliche Zahlen' $\mathfrak{G} = \{s_1, \cdots, s_\alpha\}$, $s_\mu = t_\mu\,\mathfrak{F}(m)$. Dann ist durch die Zuordnung $s_\mu^{k_\mu} \to s_\mu$, $\mu = 1, \cdots, \alpha$, ein Automorphismus ϑ, $s_\mu^\vartheta = s_\mu^{k_\mu}$ von $\mathfrak{G}$ bestimmt.*

Beweis. Es sei $t_\mu^\sigma = t_\mu^{k_\mu}$, $\mu = 1, \cdots, \alpha$. Wenn die k_μ nur die Werte ± 1 haben, so wird $t_\mu^\sigma = t_\mu^{\pm 1}$ ein Automorphismus von $\mathfrak{F}$, also wird dann ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$ definiert, der nur dann der identische Automorphismus von

$\mathfrak{G}$ ist, wenn alle $k_\mu = 1$ sind, also σ der identische Automorphismus von $\mathfrak{F}$ ist. Wenn aber nicht alle $k_\mu = \pm 1$ sind, ist $\mathfrak{F}^\sigma = \{\cdots, t_\mu^{k_\mu}, \cdots\}$ eine echte Untergruppe von $\mathfrak{F}$. Es ist $\mathfrak{F}^\sigma\mathfrak{F}(m) = \mathfrak{F}$ denn $(k_\mu, m) = 1$ und $\mathfrak{F}^\sigma\mathfrak{F}(m)$ enthält $t_\mu^{k_\mu}$ und t_μ^m also auch t_μ, $\mu = 1, \cdots, \alpha$. Ferner $\mathfrak{F}(m)^\sigma \in \mathfrak{F}(m)$ also ist nach I, Satz 2 durch die Zuordnung $t_\mu^\sigma\, \mathfrak{F}(m) \rightarrow t_\mu\, \mathfrak{F}(m)$ ein Automorphismus von $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}(m)$ bestimmt.

Satz 2. *Die Menge aller Automorphismen ϑ von $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}/\mathfrak{F}(m)$ von der Form $s_\mu^\vartheta = s_\mu^{k_\mu}$, $\mu = 1, \cdots, \alpha$, $(k_\mu, m) = 1$ bildet eine abelsche Untergruppe $\mathfrak{A}$ der Gruppe aller Automorphismen von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{A}$ hat die Ordnung $\varphi(m)^\alpha$ und ist isomorph mit dem direkten Produkt von α mit der multiplikativen Gruppe der rationalen primen Restklassen* mod *m isomorphen Gruppen.*

Beweis. Für irgendein $\mu = 1, \cdots, \alpha$ bildet die Menge aller Automorphismen ϑ, $s_\mu^\vartheta = s_\mu^k$, $s_\nu^\vartheta = s_\nu$, $\nu \neq \mu$, $(k, m) = 1$ eine Untergruppe $\mathfrak{A}_\mu$ von $\mathfrak{A}$, die offensichtlich isomorph ist mit der multiplikativen Gruppe $\bar{\mathfrak{A}}$ der primen rationalen Restklassen mod m. Denn sind $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathfrak{A}_\mu$ und $s_\mu^{\vartheta_1} = s_\mu^{k_1}$, $s_\mu^{\vartheta_2} = s_\mu^{k_2}$, so folgt $s_\mu^{\vartheta_1\vartheta_2} = s_\mu^{\vartheta_2\vartheta_1}$ und $s_\nu^{\vartheta_1\vartheta_2} = s_\nu = s_\nu^{\vartheta_2\vartheta_1}$. Bilden die natürlichen Zahlen $a_1, \cdots, a_n$ eine Basis der Gruppe $\bar{\mathfrak{A}}$ und wird $s_\mu^{\vartheta_1} = s_\mu^{a_1}, \cdots, s_\mu^{\vartheta_n} = s_\mu^{a_n}$ gesetzt, so folgt aus $s_\mu^m = 1$, daß die Gruppe $\{\vartheta_1, \cdots, \vartheta_n\} = \mathfrak{A}_\mu$ isomorph mit $\bar{\mathfrak{A}}$ ist. Das gilt nun für jedes $\mu = 1, \cdots, \alpha$ und offensichtlich ist $\mathfrak{A}_\mu \cap \mathfrak{A}_\nu = 1$, $\mu \neq \nu$. Ferner sind alle $\mathfrak{A}_\mu$, $\mu = 1, \cdots, \alpha$, miteinander vertauschbar: Denn $\vartheta_1 \in \mathfrak{A}_\mu$, $\vartheta_2 \in \mathfrak{A}_\nu$ ergibt:

$$(s_\mu\, s_\nu)^{\vartheta_1\vartheta_2} = s_\mu^{\vartheta_1} s_\nu^{\vartheta_2} = (s_\mu\, s_\nu)^{\vartheta_2\vartheta_1} = s_\mu^{\vartheta_1} s_\nu^{\vartheta_2}.$$

Nun kann man jeden Automorphismus $\vartheta \in \mathfrak{A}$, der bewirkt: $s_1^\vartheta = s_1^{k_1}, \cdots, s_\alpha^\vartheta = s_\alpha^{k_\alpha}$ als Produkt der Automorphismen $\vartheta_1 \in \mathfrak{A}_1, \cdots, \vartheta_\alpha \in \mathfrak{A}_\alpha$ mit: $s_1^{\vartheta_1} = s_1^{k_1}, \cdots, s_\alpha^{\vartheta_\alpha} = s_\alpha^{k_\alpha}$, darstellen. Denn für $\mu = 1, \cdots, \alpha$ ergibt sich $s_\mu^{\vartheta_1 \cdots \vartheta_\alpha} = s_\mu^{\vartheta_\mu} = s_\mu^{k_\mu}$, also ist der obige Automorphismus ϑ der Automorphismus $\vartheta_1\, \vartheta_2\, \cdots\, \vartheta_\alpha$; d.h. jeder Automorphismus $\vartheta \in \mathfrak{A}$ ist eindeutig ein Produkt von vertauschbaren Automorphismen aus den Gruppen $\mathfrak{A}_\mu$, $\mu = 1, \cdots, \alpha$, die zu je zweien den Durchschnitt 1 haben. Also ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_\alpha .$$

Satz 3. *Die Gruppe $\mathfrak{A}$ aus Satz 2 hat mit der Gruppe der durch Automorphismen von $\mathfrak{F}$ induzierten Automorphismen von $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe von der Ordnung 2^α gemein, die das direkte Produkt von α zykl. Gruppen der Ordnung 2 ist.*

Beweis. $\mathfrak{A}_\mu$ hat die zykl. Untergruppe $s_\mu^\vartheta = s_\mu^{m-1} = s_\mu^{-1}$, $\mu = 1, \cdots, \alpha$. Dazu hat man den Automorphismus ϑ_μ von $\mathfrak{F}$:

$$t_\mu^{\vartheta_\mu} = t_\mu^{-1}, \qquad t_\nu^{\vartheta_\mu} = t_\nu, \quad \nu \neq \mu, \qquad (t_\mu\, \mathfrak{F}(m))^{\vartheta_\mu} = t_\mu^{-1}\mathfrak{F}(m).$$

Die Gruppe der Automorphismen von $\mathfrak{F}$ enthält eine mit der symmetr. Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_\alpha$ isomorphe Untergruppe, nämlich die Gruppe derjenigen Automorphismen von $\mathfrak{F}$, die durch eine Permutation der Erzeugenden bewirkt werden. Diese Gruppe induziert eine mit $\mathfrak{S}_\alpha$ isomorphe Untergruppe der Automorphismengruppe von $\mathfrak{G}$: Die auf die Erzeugenden von $\mathfrak{G}$ angewendete Permutation

$$\begin{pmatrix} s_1, & \cdots, & s_\alpha \\ s_{\mu_1}, & \cdots, & s_{\mu_\alpha} \end{pmatrix}$$

ergibt einen Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Bezeichnen wir auch diese Automorphismengruppe mit $\mathfrak{S}_\alpha$ so gilt:

SATZ 4. *Die Untergruppe* $\mathfrak{A}$ *aus Satz* 2 *ist bei Transformationen mit Elementen* $\mathfrak{S}_\alpha$ *invariant.*

Beweis. Ist ϑ_1 irgendein Automorphismus von $\mathfrak{G}$, ϑ ein Automorphismus $\epsilon\ \mathfrak{A}$ und etwa $s_\mu^\vartheta = s_\mu^k$, so $s_\mu^{\vartheta\vartheta_1} = (s_\mu^k)^{\vartheta_1} = (s_\mu^{\vartheta_1})^k$. Ist ϑ_1 eine Permutation, $s_\mu^{\vartheta_1} = s_\nu$, so $s_\nu^{\vartheta_1^{-1}\vartheta\vartheta_1} = s_\mu^{\vartheta\vartheta_1} = s_\mu^{k\vartheta_1} = (s_\mu^{\vartheta_1})^k = s_\nu^k$. Die direkten Faktoren $\mathfrak{A}_\mu$ von $\mathfrak{A}$ werden also bei Transformation mit Elementen $\mathfrak{S}_\alpha$ nur permutiert, $\mathfrak{A}$ bleibt also dabei invariant.

WÜRZBURG, DEUTSCHLAND