Sur le volume arithmétique sur les schémas torique lisses

Mounir Hajli

Résumé Soit X un schéma torique projective lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Si $\bar{D}$ est un fibré en droites équivariant sur X, muni d'une métrique continue et invariante par l'action du tore compact de $X(\mathbb{C})$, nous montrons que son volume arithmétique s'exprime en fonction de la transformée de Fenchel–Legendre associée à sa métrique. Lorsque $\bar{D}$ est en plus admissible, nous montrons que le fait que $\bar{D}$ soit arithmétiquement ample, nef, ou gros est caractérisé par des objets issus de la géométrie convexe.

Abstract Let X be a smooth projective toric scheme over $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Let $\bar{D}$ be an equivariant line bundle on X, endowed with a continuous Hermitian metric which is invariant by the action of the compact torus of $X(\mathbb{C})$. We show that its arithmetic volume is given in terms of the Legendre–Fenchel transform associated to the metric. When $\bar{D}$ is supposed admissible, we characterize when it is arithmetically ample, nef, or big in terms of combinatorial date.

0. Introduction

Soit X une variété arithmétique de dimension relative d sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, c'est à dire un schéma projectif, intègre, plat sur $\mathbb{Z}$ et de fibre générique lisse. Soit $\bar{L}$ un fibré en droites muni d'une métrique hermitienne continue. On dit que $\bar{L}$ est admissible, si L est relativement nef et sa métrique est limite uniforme d'une suite de métriques de classe $\mathcal{C}^\infty$ et semi-positives. On considère les différentes notions de positivité arithmétique suivantes.

1. $\bar{L}$ est *ample* si le courant de Chern $c_1(\bar{L})$ est semi-positif sur $X(\mathbb{C})$, et pour tout l assez grand, l'espace des sections globales $H^0(X, L^{\otimes l})$ est engendré comme un $\mathbb{Z}$-module par l'ensemble :

$$\left\{ s \in H^0(X, L^{\otimes l}) \;\middle|\; \|s\|_{\sup} < 1 \right\}.$$

2. $\bar{L}$ est *nef* si L est relativement nef, le courant de Chern $c_1(\bar{L})$ est semi-positif sur $X(\mathbb{C})$ et pour tout $P \in X(\bar{\mathbb{Q}})$ la hauteur de P par rapport à $\bar{L}$ est positive :

Kyoto Journal of Mathematics, Vol. 54, No. 4 (2014), 819–840
DOI 10.1215/21562261-2801831,
Received January 9, 2013. Revised October 9, 2013. Accepted October 9, 2013.
2010 Mathematics Subject Classification: Primary 14G40; Secondary 11G50.

$$h_{\bar{L}}(P) \geq 0^{\dagger}.$$

3. $\bar{L}$ est *gros* si L restreint à la fibre générique de X est gros et qu'il existe l un entier positif non nul et s une section globale non nulle de $L^{\otimes l}$ tels que $\|s\|_{\bar{L}^{\otimes l}}(x) < 1$ pour tout $x \in X(\mathbb{C})$.

En plus, le volume arithmétique de $\bar{L}$ est défini comme suit :

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\bar{L}) = \limsup_{l \mapsto \infty} \frac{\widehat{h}^0(X, \bar{L}^{\otimes l})}{l^{d+1}/(d+1)!}$$

où $\widehat{h}^0(X, \bar{L}^{\otimes l}) := \log \# \widehat{H}^0(X, L^{\otimes l})$ et $\widehat{H}^0(X, L^{\otimes l}) := \{s \in H^0(X, L^{\otimes l}) \mid \|s\|_{\sup} \leq 1\}$. C'est un analogue arithmétique du volume géométrique pour les fibrés en droites sur une variété projective définie sur un corps.

Dans cet article nous étudions les propriétés ci-dessus dans le cadre de la géométrie torique. La géométrie arithmétique des variétés toriques a été étudié de manière intense par Burgos, Moriwaki, Phillipon et Sombra dans [2], [3] et [13]. Comme dans le cas géométrique, il s'avère qu'il est possible de décrire certaines propriétés arithmétiques de ces variétés en termes d'objets issus de la géométrie convexe.

Commençons tout d'abord par faire un bref rappel sur la construction des schémas toriques. Soit Q un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini et P son dual. On considère un éventail Σ sur $Q_{\mathbb{R}} = Q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et on note par $X = X_{\Sigma}$ le schéma torique sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ associé. On suppose en plus que X est projectif et lisse. Le tore $\mathbb{T} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P])$ (où $\mathbb{Z}[P]$ est la $\mathbb{Z}$-algèbre associée au group abelien P) s'identifie naturellement à un ouvert de X et son action s'étend à une action sur X entier.

Soit D un diviseur de Cartier équivariant sur X, c'est à dire, un diviseur de Cartier invariant par l'action du tore $\mathbb{T}$. Le diviseur D correspond une « fonction support virtuelle » ψ_D sur l'éventail Σ qui permet de définir le polytope convexe :

$$\Delta_D = \big\{x \in P_{\mathbb{R}} \mid \langle x, u\rangle \geq \psi_D(u), \forall u \in Q_R\big\},$$

où $P_{\mathbb{R}} := P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Supposons que le fibré en droites $\mathcal{O}(D)$ est muni d'une métrique continue $\|\cdot\|_{\bar{D}}$ invariante par l'action de S_Q le tore compact de $\mathbb{T}(\mathbb{C})$. On note par $\bar{D} = (D, \|\cdot\|_{\bar{D}})$ le fibré hermitien obtenu. Si s_D désigne la section rationnelle du fibré en droites $\mathcal{O}(D)$ associée à D, on considère la fonction $g_{\bar{D}} : Q_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ définie comme

$\dagger$ La hauteur d'un point $P \in X(\bar{\mathbb{Q}})$ par rapport à $\bar{L}$ est définie comme suit : Soit K un corps de nombres dans lequel P est défini et $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers. Le point P correspond à un unique morphisme de schémas $\varepsilon_P : \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) \to X$. Soit s un élément non nul du $\mathcal{O}_K$-module $\varepsilon_P^* L$. La hauteur de P est le réel suivant :

$$h_{\bar{L}}(P) := \frac{1}{[K:Q]}\Big(\log \#\big(\varepsilon_P^* L/(\mathcal{O}_K \cdot s)\big) - \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \log \|s\|_{L,\sigma}(P)\Big).$$

suit :

$$g_D(u) := \log\big\|s_D\big(\exp(-u)\big)\big\|_{\bar{D}},$$

où $\exp(-(\cdot)) : Q_{\mathbb{R}} \longrightarrow X(\mathbb{C})$ est l'application exponentielle associée.

On note par $\check{g}_{\bar{D}} : P_{\mathbb{R}} \to [-\infty, +\infty[$ la transformée de Legendre–Fenchel de $g_{\bar{D}}$, c'est à dire la fonction définie pour tout $x \in P_{\mathbb{R}}$ par

$$\check{g}_{\bar{D}}(x) := \inf_{x \in Q_{\mathbb{R}}} \big(\langle x, u\rangle - g_{\bar{D}}(u)\big).$$

On montre que $\check{g}_{\bar{D}}(x)$ est finie si et seulement si $x \in \Delta_D$ et que $\check{g}_{\bar{D}}$ est concave sur Δ_D.

Principaux résultats

Comme premier résultat, nous établissons que la géométrie torique nous fournit des exemples de fibrés hermitiens nef mais qui ne sont pas gros.

PROPOSITION 0.1 (CF. PROPOSITION 1.5)

Soit X une variété torique lisse de dimension relative d sur Spec($\mathbb{Z}$)*. Soit $\bar{D}_\infty$ un fibré en droites équivariant engendré par ses sections globales et muni de sa métrique canonique. On a pour tout $l \in \mathbb{N}^*$*

$$\widehat{H}^0(X, l\bar{D}_\infty) = \{\pm\chi^m \mid m \in l\Delta_D \cap P\} \cup \{0\}.$$

En particulier, $l\bar{D}_\infty$ est nef mais il n'est pas gros.

En s'inspirant de [11], nous étendons certaines de ses résultats aux variétés toriques lisses. Cet article contient donc deux résultats majeurs : Théorèmes 0.2 et 0.3. Nous établissons une formule intègrale pour le volume arithmétique de $\bar{D}$, un fibré en droites hermitien muni d'une métrique continue et invariante par l'action du tore compact, c'est l'objet du théorème 0.2. Le théorème 0.3 donne une interprétation de la positivité arithmétique en termes de la géométrie convexe lorsqu'on suppose en plus que $\bar{D}$ est admissible.

THÉORÈME 0.2 (CF. THÉORÈME 2.6)

Soit X une variété torique lisse. Soit $\bar{D} = (D, \|\cdot\|_{\bar{D}})$ un fibré en droites équivariant muni d'une métrique $\|\cdot\|_{\bar{D}}$, continue et invariante par l'action du tore compact de $X(\mathbb{C})$. On a,

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\bar{D}) = (d+1)! \int_{\Theta_{\bar{D}}} \check{g}_{\bar{D}}(x)\, dx$$

où $\Theta_{\bar{D}} := \{x \in \Delta_D \mid \check{g}_{\bar{D}}(x) \geq 0\}$.

Si l'on suppose en plus que $\bar{D}$ est admissible, alors nous décrivons les différents notions de la positivité arithmétique en termes de la combinatoire associée.

THÉORÈME 0.3 (CF. THÉORÈME 2.1)

Soit X une variété torique lisse sur Spec($\mathbb{Z}$) *et $\bar{D} = (D, \|\cdot\|_{\bar{D}})$ un fibré équivariant* *et admissible sur X tel que h est invariante par l'action du tore compact de $X(\mathbb{C})$. On a*

1. *$\bar{D}$ est ample si et seulement si $\check{g}_{\bar{D}}(\mathbf{e}) > 0$, $\forall \mathbf{e} \in \Delta_D \cap P$ et ψ_D est strictement concave.*
2. *$\bar{D}$ est nef si et seulement si $\check{g}_{\bar{D}}(\mathbf{e}) \geq 0$, $\forall \mathbf{e} \in \Delta_D \cap P$ et ψ_D est concave.*
3. *$\bar{D}$ est gros si et seulement si $g_{\bar{D}}(0) < 0$.*

Notre approche suit de près celle de Moriwaki dans [11]. En effet, étant donné un fibré en droites équivariant $\bar{D}$ muni d'une métrique continue et invariante par l'action du tore compact de $X(\mathbb{C})$, notre stratégie repose sur la comparaison de la norme-sup avec la norme L^2 en utilisant une variante faible de l'inégalité Gromov (voir proposition 1.6) et sur le lemme 2.3. Notons que Moriwaki utilise un cas particulier de l'inégalité de Gromov (voir [11, Lemma 1.4]) afin d'établir une formule intégrale pour le volume arithmétique (voir [11, Theorem 2.3(1)]). Remarquons que notre lemme 2.3 peut être vu comme une version faible du [11, Lemma 2.1], étape aussi cruciale dans la preuve du [11, Theorem 2.3].

Dans [11], Moriwaki considère le diviseur arithmétique $\bar{D}_{\mathbf{a}}$ sur $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Proj}(\mathbb{Z}[T_0, \ldots, T_n])$ et étudie ses propriétés arithmétiques. Ce fibré hermitien est défini comme suit $\bar{D}_{\mathbf{a}} = (H_0, g_{\mathbf{a}})$ où $H_0 = \{T_0 = 0\}$ et $g_{\mathbf{a}}(z) = \log(a_0 + a_1|z_1|^2 + \cdots + a_n|z_n|^2)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ avec $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels strictement positifs, aussi il introduit la fonction réelle $\varphi_{\mathbf{a}}$ sur $\mathbb{R}^{n+1}_{\geq 0}$ donnée par $\varphi_{\mathbf{a}}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = -\sum_{i=0}^n x_i \log x_i + \sum_{i=0}^n x_i \log a_i$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1}_{\geq 0}$. Avec les notations de [11, Theorem 2.3], on a $\bar{D}_{\mathbf{a}}$ est ample (resp. nef) si et seulement si $a_i > 1$ (resp. $a_i \geq 1$) pour tout $i = 0, \ldots, n$. Avec les notations de notre article, nous vérifions que $g_{\bar{D}_{\mathbf{a}}}(u) = -g_{\mathbf{a}}(\exp(-u))$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ et que $\check{g}_{\bar{D}_{\mathbf{a}}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_{\mathbf{a}}(1 - \sum_{i=1}^n x_i, x_1, \ldots, x_n)$ pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Delta_n$ (le polytope standard de $\mathbb{R}^n$). Ainsi, nous retrouvons le résultat de Moriwaki.

Dans un travail récent de Burgos, Moriwaki, Philippon et Sombra (voir [2]). Ils établissent, sous des hypothèses plus générales, deux résultats analogues aux théorèmes 0.2 et 0.3, voir [2, Theorems 5.6, 6.1]. Dans leur article, le schéma torique peut être singulier. Mais nous pensons que ce cas peut se déduire du cas lisse à l'aide d'une résolution de singularités équivariante et en utilisant le fait que le volume arithmétique est un invariant birationel.

Signalons au passage que les auteurs dans [2] procédent différemment (voir [2, Remark 5.7]). Notre approche fournit une nouvelle preuve pour certains résultats du [2] en particulier pour [2, Theorems 5.6, 6.1]. Observons que la propriété de concavité de la fonction $\psi_{\bar{D},v}$ dans [2, Theorem 6.1] est automatique puisque le fibré hermitien est supposé admissible. Notons que dans [2] un fibré admissible est dit semi-positif (voir [2, Definition 3.2]).

Organisation de l'article

La section (1) est formée de deux parties. La première partie contient un survol de la géométrie des schémas toriques, suivi d'un résultat décrivant l'image d'une variété torique par un morphisme équivariant dans un espace projectif (voir proposition 1.3). Ce résultat sera utile pour la suite. La deuxème partie regroupe les définitions des différents objets et notions qui seront étudiés dans ce texte. Dans cette deuxième partie, nous décrivons l'ensemble des sections petites d'un fibré en droites équivariant muni d'une métrique continue et invariante par l'action du tore compact. Pour cela, nous commençons par déterminer l'ensemble des sections petites pour la métrique L^2 pour les différentes puissances du fibré en droites hermitien en question, et à l'aide d'une variante faible de l'inégalité de Gromov nous déduisons celles de normes sup inférieure à 1. C'est l'objet de la proposition 1.7.

Dans la section 2 nous établissons les théorèmes 0.2 et 0.3. Notre démonstration s'inspire de l'article [11] et utilise de manière cruciale la variante faible de l'inégalité de Gromov (voir (8)).

1. Sur la géométrie des schémas toriques

Dans ce paragraphe, nous ferons un bref rappel sur la construction des schémas toriques. On peut consulter les références suivantes [4], [5] et [12] pour une introduction détaillée.

Soit Q un $\mathbb{Z}$-module libre de rang d et P son $\mathbb{Z}$-module dual. On pose $Q_{\mathbb{R}} = Q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $P_{\mathbb{R}} = P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On appelle cône strict dans Q tout ensemble $\sigma \subseteq Q_{\mathbb{R}}$ de la forme $\sigma = \Sigma_{i\in I}\mathbb{R}^+ n_i$ qui ne contient aucune droite réelle où $\{n_i, i \in I\}$ est une famille finie d'éléments de Q. On définit le dual σ^* en posant $\sigma^* = \{v \in P_{\mathbb{R}} \mid \langle v, x\rangle \geq 0, \forall x \in \sigma\}$. On dit que $\tau \subset \sigma$ est une face de σ si l'on peut trouver $v \in \sigma^*$ tel que $\tau = \sigma \cap \{v\}^{\perp}$. Un éventail de $Q_{\mathbb{R}}$ est une famille finie Σ de cônes stricts de Q tels que :

- Si $\sigma \in \Sigma$ alors toute face τ de σ appartient à Σ.
- Si σ, $\sigma' \in \Sigma$, alors $\sigma \cap \sigma'$ est une face à la fois de σ et de σ'.

La réunion $|\Sigma| = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \sigma$ est appelée le support de Σ.

Grâce à Demazure [4], on peut associer à tout éventail Σ sur Q un schéma $\pi : X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Ce schéma est obtenu comme recollement d'une famille d'ouverts indexée par Σ où chaque ouvert est le spectre de $\mathbb{Z}[P \cap \sigma^*]$ pour $\sigma \in \Sigma$ (où $\mathbb{Z}[P\cap\sigma^*]$ est la $\mathbb{Z}$-algèbre associée au semi-groupe $P\cap\sigma^*$). Le tore $\mathbb{T} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P])$ s'identifie naturellement à un ouvert de X dont son action s'étend à X entier. On montre que X est plat sur $\mathbb{Z}$, normal, séparé, de dimension absolue $d + 1$, à fibres géométriquement inègres, voir [4, paragraphe 4 Lemme 1]. Dans la suite, toutes les variétés toriques provenant d'un éventail seront supposées propres.

Soient (Q, Σ) et (Q', Σ') deux éventails. Un morphisme d'éventails $\varphi : (Q', \Sigma') \to (Q, \Sigma)$ est un morphisme de $\mathbb{Z}$-modules $\varphi : Q' \to Q$ telle que l'application induite $\varphi_{\mathbb{R}} : Q'_{\mathbb{R}} \to Q_{\mathbb{R}}$ définie par extension des scalaires vérifie pour tout $\sigma' \in \Sigma'$, il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que $\varphi(\sigma') \subseteq \sigma$. On note ${}^t\varphi : P \to P'$ la transposée de φ et ${}^t\varphi_{\mathbb{R}}$ l'application définie par extension des scalaires. La proposition suivante affirme qu'on peut recoller ces constructions locales pour obtenir un morphisme globale équivariant φ_* et donne une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que φ_* soit propre.

PROPOSITION 1.1

Soit un morphisme d'éventails $\varphi : (Q', \Sigma') \to (Q, \Sigma)$. Le morphisme de tores algébriques $\varphi_* : \mathbb{T}' = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P']) \to \mathbb{T} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P])$, induit par l'application duale ${}^t\varphi_{\mathbb{R}} : P_{\mathbb{R}} \to P'_{\mathbb{R}}$, se prolonge en un morphisme :

$$\varphi_* : X' \to X.$$

Le morphisme φ_* est équivariant sous l'action de $\mathbb{T}'$ et $\mathbb{T}$. De plus, φ_* est propre si et seulement si $\varphi_{\mathbb{R}}^{-1}(|\Sigma|) = |\Sigma'|)$.

Démonstration

On peut consulter [12, Propositions 1.13 et 1.15]. □

Un diviseur de Cartier équivariant D sur X, est un diviseur de Cartier invariant par l'action du tore $\mathbb{T}$. À D on lui associe une fonction support virtuelle $\psi_D : Q_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ continue et linéaire par morceaux sur Σ, voir [12, Proposition 2.1] et [5, p. 66]. Cette fonction permet de définir le polytope convexe suivant

$$\Delta_D = \left\{x \in P_{\mathbb{R}} \;\middle|\; \langle x, u\rangle \geq \psi_D(u), \forall u \in Q_R\right\},$$

où $P_{\mathbb{R}} := P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

La fonction ψ_D et le polytope Δ_D codent plusieurs informations sur la positivité de D. Par exemple, le diviseur D est généré par ses sections globales (resp. ample) si et seulement si ψ_D est concave (resp. strictement concave).

PROPOSITION 1.2

Soit D un diviseur de Cartier horizontal $\mathbb{T}$-invariant et $\mathcal{O}(D)$ le faisceau inversible associé à D. Le $\mathbb{Z}$-module des sections globales de $\mathcal{O}(D)$ est donné par :

$$H^0\big(X, \mathcal{O}(D)\big) = \bigoplus_{m \in \Delta_D \cap P} \mathbb{Z}\chi^m,$$

où χ^m est le caractère associé à m.

Démonstration

On peut consulter [12, Lemma 2.3] et [5, p. 66], les arguments donnés sur $\mathbb{C}$ s'étendent immédiatement à la situation sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. □

Soit D un diviseur de Cartier équivariant sur X et $\mathcal{O}(D)$ le fibré en droites associé qu'on suppose engendré par ses sections globales. Il définit alors un morphisme équivariant de X vers l'espace projectif de dimension $\#(\Delta_D \cap P) - 1$. Nous allons décrire l'image de X par ce morphisme, c'est l'objet de la proposition 1.3. Ce résultat nous servira dans la suite pour étudier le volume arithmétique associée à un fibré en droites équivariant muni d'une métrique continue et invariante par l'action de S_Q.

On note par k, un corps algébriquement clos. Soit $T^d = (k^{\times})^d$ le tore algébrique et $\mathbb{P}^n(k)$ l'espace projectif de dimension d et n respectivement. Soit $\mathcal{A} = \{a_0, \ldots, a_n\}$ une suite de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{Z}^d$.

L'ensemble $\mathcal{A}$ définit une action de T^d sur $\mathbb{P}^n(k)$:

$$*_{\mathcal{A}} : T^d \times \mathbb{P}^n(k) \longrightarrow \mathbb{P}^n(k), \qquad (s,x) \to (s^{a_0}x_0 : \cdots : s^{a_n}x_n).$$

On note par $X_{\mathcal{A},1}$ l'adhérence de Zariski de l'image de l'application monomiale :

$$*_{\mathcal{A},1} := *_{\mathcal{A}}|_1 : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{P}^n(k), \qquad s \to (s^{a_0} : \cdots : s^{a_n}). \tag{1}$$

C'est une variété torique projective au sens de Gelfand, Kapranov et Zelevinsky (cf. [6]), c'est à dire une sous-variété de $\mathbb{P}^n(k)$ stable par rapport à l'action de T^d, avec une orbite dense $X^{\circ}_{\mathcal{A},1} := T^d *_{\mathcal{A}} 1$.

PROPOSITION 1.3

Soit X une variété torique de dimension d provenant d'un éventail et D un diviseur de Cartier équivariant. Soit $\mathcal{O}(D)$ le fibré en droites associé qu'on suppose engendré par ses sections globales. On définit un morphisme équivariant associé à D, qu'on le note ϕ_D, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \phi_D : X &\longrightarrow \mathbb{P}^{k_D}_{\mathbb{Z}}, \\ x &\longmapsto \big(\chi^m(x)\big)_{m\in\Delta_D\cap P} \end{aligned}$$

où on a choisit un ordre sur les éléments $\Delta_D \cap P$, $k_D = \#(\Delta_D \cap P) - 1$.

Alors il existe $\mathcal{B}$ un sous ensemble fini de vecteurs de $\mathbb{Z}^d$, tel que l'image de $X(k)$ par ϕ_D coïncide avec $X_{\mathcal{B},1}$.

Démonstration

D'après la proposition 1.1, ϕ_D provient d'un morphisme d'éventails

$$\phi : (\mathbb{Z}^d, \Sigma_X) \longrightarrow (\mathbb{Z}^n, \Sigma_{\mathbb{P}^n})$$

où Σ_X est l'éventail de X et $\Sigma_{\mathbb{P}^n}$ celui de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$.

On pose $c_k = \varphi(e^{(d)}_k)$ pour $k = 1,\ldots,d$ (où $e^{(d)}_k$ désigne le k-ème vecteur de la base usuelle de $\mathbb{Z}^d$) et on note par B la matrice d'ordre $n \times d$ qui a pour colonnes $c_1, c_2, \ldots, c_d$. Si l'on note par b_j avec $j = 1,\ldots,n$ les lignes de B alors ${}^t\varphi$ (le morphisme dual de φ) s'écrit

$$\begin{aligned} {}^t\phi : \mathbb{Z}^n &\longrightarrow \mathbb{Z}^d, \\ m &\longmapsto {}^tB \cdot m, \end{aligned}$$

où ${}^tB$ est la matrice transposée de B. Le morphisme ${}^t\varphi$ induit l'homomorphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}^n] &\longrightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}^d], \\ \chi^m &\longmapsto \chi^{{}^t\phi(m)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Comme

$${}^t\phi(e^{(n)}_j) = {}^tB \cdot e^{(n)}_j = \sum_{j=1}^{d} b_{k,j} e^{(d)}_j,$$

alors (2) devient

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^n] &\longrightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}^d],\\ \chi^{e_j^{(n)}} &\longmapsto \chi^{\sum_{j=1}^d b_{k,j} e_j^{(d)}}.\end{aligned}\tag{3}$$

Soit $s \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^d])(k) = (k^\times)^d$, on a

$$s = (s_1, \ldots, s_d) = \bigl(X^{e_1^{(d)}}(s), \ldots, X^{e_d^{(d)}}(s)\bigr).$$

Ce point s'envoie par ϕ_D sur

$$\begin{aligned}&\bigl(1, X^{\sum_{j=1}^d b_{1,j} e_j^{(d)}}(s), \ldots, X^{\sum_{j=1}^d b_{n,j} e_j^{(d)}}(s)\bigr)\\ &= \Bigl(1, \prod_{j=1}^d X^{b_{1,j} e_j^{(d)}}(s), \ldots, \prod_{j=1}^d X^{b_{n,j} e_j^{(d)}}(s)\Bigr)\\ &= (1, s^{b_1}, \ldots, s^{b_n})\end{aligned}$$

(puisque $X^{b_{k,j} e_j^{(d)}}(s) = s_j^{b_{k,j}}$ pour $j = 1, \ldots, d$).

On conclut que le morphisme ϕ_D coïncide sur $(k^\times)^d$ avec :

$$\begin{aligned}(k^\times)^d &\longrightarrow \mathbb{P}^n(k)\\ s &\longrightarrow (1, s^{b_1}, \ldots, s^{b_n}).\end{aligned}$$

On termine la démonstration en rappelant que $\chi^{{}^t\phi(e_j^{(n)})}$ sont les sections globales de $\mathcal{O}(D)$ qui correspondent à l'ensemble $\Delta_D \cap P$ (cf. proposition 1.2). □

On suppose que X est projective et lisse dans la suite. Soit D un diviseur de Cartier équivariant sur X et on suppose que $\mathcal{O}(D)$ est engendré par ses sections globales sur X. Soient ψ_D la fonction support et Δ_D le polytope associés à D.

On munit $\mathcal{O}(D)(\mathbb{C})$ d'une métrique hermitienne continue $\|\cdot\|_{\bar{D}}$, qu'on suppose invariante par l'action du sous-tore compact $S_Q := \{t \in \mathbb{T}(\mathbb{C}) \mid |t| = 1\}$. Dans la suite, on notera le fibré hermitien $(D, \|\cdot\|_{\bar{D}})$ par $\bar{D}$.

Le quotient de $X(\mathbb{C})$ par le sous-tore compact S_Q est la variété à coins associée, notée $X_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$. On montre que $\operatorname{Hom}(P, \mathbb{R}_{\geq 0})$ (l'ensemble des morphismes de semi-groupe avec élément neutre de P vers $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \times)$) s'identifie un ouvert dense de $X_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ notée $X^\circ_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ (voir [5, paragraphe 4] pour la construction). Comme $Q_{\mathbb{R}} \simeq \operatorname{Hom}(P, \mathbb{R})$ alors on a la paramétrisation suivante donnée par l'exponentielle usuelle :

$$\begin{aligned}Q_{\mathbb{R}} &\longrightarrow X^\circ_{\mathbb{R}_{\geq 0}},\\ u &\longmapsto \exp(-u).\end{aligned}$$

Soit s_D la section rationnelle équivariante de $\mathcal{O}(D)$ associée à D. On pose

$$g_{\bar{D}}(u) := \log\bigl\|s_D\bigl(\exp(-u)\bigr)\bigr\|_{\bar{D}} \quad \forall u \in Q_{\mathbb{R}},$$

et on note par $\check{g}_{\bar{D}}$, la transformée de Legendre–Fenchel de $g_{\bar{D}}$, qui est par définition :

$$\check{g}_{\bar{D}}(x) := \inf_{u \in Q_{\mathbb{R}}} \big(\langle x, u \rangle - g_{\bar{D}}(u) \big), \quad \forall x \in P_{\mathbb{R}}.$$

On montre que $\check{g}_{\bar{D}}$ est finie si et seulement si $x \in \Delta_D$ et qu'elle est concave sur cet ensemble. On pose

$$\Theta_{\bar{D}} := \big\{ x \in \Delta_D \,\big|\, \check{g}_{\bar{D}}(x) \geq 0 \big\}. \tag{4}$$

On munit $X(\mathbb{C})$ d'une forme volume Ω, de classe $\mathcal{C}^\infty$, invariante par l'action de S_Q et telle que $\int_X \Omega = 1$.[†] Soit $h_{\bar{D}}$ une métrique hermitienne continue sur $\mathcal{O}(D)(\mathbb{C})$. On pose $\bar{D} := (D, \|\cdot\|_{\bar{D}})$. Pour $s, t \in H^0(X, \mathcal{O}(D))$, on pose

$$\langle s, t \rangle_{\bar{D},\Omega} = \int_{X(\mathbb{C})} h_{\bar{D}}(s,t)\Omega \qquad \text{et} \qquad \|s\|_{L^2,\bar{D},\Omega} := \sqrt{\langle s, s \rangle}_{\bar{D},\Omega}.$$

On peut aussi munir $H^0(X, \mathcal{O}(D))$ de la norme-sup :

$$\|s\|_{\bar{D},\sup} := \sup_{x \in X(\mathbb{C})} \|s\|_{\bar{D}}(x), \quad \text{pour } s \in H^0\big(X, \mathcal{O}(D)\big).$$

On pose

$$\widehat{H}^0_{L^2}(X, \bar{D}) := \big\{ s \in H^0\big(X, \mathcal{O}(D)\big) \mid \|s\|_{L^2,\bar{D},\Omega} \leq 1 \big\},$$

et

$$\widehat{H}^0(X, \bar{D}) := \big\{ s \in H^0\big(X, \mathcal{O}(D)\big) \mid \|s\|_{\bar{D},\sup} \leq 1 \big\},$$

$\widehat{H}^0(X, \bar{D})$ est appelé l'ensemble des sections petites de $\bar{D}$. Notons que $\widehat{H}^0(X, \bar{D}) \subseteq \widehat{H}^0_{L^2}(X, \bar{D})$. On note par $\langle \widehat{H}^0(X, l\bar{D}) \rangle_{\mathbb{Z}}$ le $\mathbb{Z}$-module engendré par $\widehat{H}^0(X, l\bar{D})$ et par $\langle \{ s \in H^0(X, \mathcal{O}(lD)) \mid \|s\|_{l\bar{D},\sup} < 1 \} \rangle_{\mathbb{Z}}$ le $\mathbb{Z}$-module engendré par $\{ s \in H^0(X, \mathcal{O}(lD)) \mid \|s\|_{l\bar{D},\sup} < 1 \}$.

D'après [15], [9], on dit que $\bar{D}$ est admissible si $\mathcal{O}(D)$ est relativement nef et sa métrique $\|\cdot\|$ est limite uniforme d'une suite de métriques $(\|\cdot\|_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et semi-positives sur $\mathcal{O}(D)(\mathbb{C})$.

REMARQUE 1.4

Notons que la notion de métrique admissible correspond à la notion de métrique semi-positive considérée par Burgos, Moriwaki, Philippon et Sombra, voir [3, Definition 1.4.1] et [2, p. 15].

Dans [10] Moriwaki introduit trois notions de positivité arithmétique. La géométrie d'Arakelov développée dans [9] permet d'étendre ces trois notions de positivité aux fibrés en droites admissibles. Plus précisément, soit X une variété

[†] On peut construire Ω de la manière suivante : Soit A un fibré en droites équivariant et très ample sur $X(\mathbb{C})$. On considère h_0 l'image réciproque de la métrique de Fubini–Study par le morphisme équivariant défini par A, c'est à dire $X(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^{\dim H^0(X,A)}, x \longmapsto (\chi^m(x))_{m \in \Delta_A \cap M}$, alors on vérifie que h_0 est une métrique hermitienne sur A, de classe $\mathcal{C}^\infty$, définie positive et invariante par l'action du tore compact de $X(\mathbb{C})$. On pose alors $\Omega := c_1(A, h_0)^d / \int_X c_1(A, h_0)^d$.

arithmétique projective et $\bar{D}$ un fibré en droites hermitien muni d'une métrique continue sur X. On considère les différentes notions de positivité arithmétique suivantes :

1. $\bar{D}$ est *ample* si le courant de Chern $c_1(\bar{D})$ est semi-positif sur $X(\mathbb{C})$, et pour tout l assez grand, l'espace des sections globales $H^0(X, \mathcal{O}(lD))$ est engendré comme un $\mathbb{Z}$-module par l'ensemble :

$$\{s \in H^0(X, l\bar{D}) \mid \|s\|_{\sup} < 1\}.$$

2. $\bar{D}$ est *nef* si $\mathcal{O}(D)$ est relativement nef, le courant de Chern $c_1(\bar{D})$ est semi-positif sur $X(\mathbb{C})$ et pour tout $P \in X(\bar{\mathbb{Q}})$ la hauteur de P par rapport à $\bar{D}$ est positive :

$$h_{\bar{D}}(P) \geq 0.$$

3. $\bar{D}$ est *gros* si $\mathcal{O}(D)$ restreint à la fibre générique de X est gros et qu'il existe l un entier positif non nul et s une section globale non nulle de $\mathcal{O}(lD)$ tels que $\|s\|_{l\bar{D}}(x) < 1$ pour tout $x \in X(\mathbb{C})$.

Un exemple intéressant de métrique admissible est celui de métrique canonique sur un fibré en droites équivariant $\mathcal{O}(D)$ au-dessus d'une variété torique projective non-singulière X. On établit qu'on peut associer à D, de maniére canonique, une métrique continue notée par $\|\cdot\|_{D,\infty}$, décrite uniquement par la combinatoire de la variété X. En plus, on peut montrer que $\|\cdot\|_{D,\infty}$ est admissible lorsque $\mathcal{O}(D)$ est engendré par ses sections globales. Il existe trois constructions équivalentes : La construction due à Batyrev et Tschinkel [1, Section 2.1], celle de Zhang [15, Theorem 2.2] et la construction par image inverse, voir par exemple [9, paragraphe 3.3]. On va décrire ici la troisième construction qui nous sera utile pour la suite : Soit D un diviseur de Cartier équivariant et $\mathcal{O}(D)$ le fibré en droites associé qu'on suppose engendré par ses sections globales. On définit un morphisme équivariant ϕ_D associé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \phi_D : X &\longrightarrow \mathbb{P}^{k_D}, \\ x &\longmapsto \big(\chi^m(x)\big)_{m \in \Delta_D \cap P} \end{aligned}$$

où $k_D = \#(\Delta_D \cap P) - 1$. On note par $\bar{\mathcal{O}(1)}_\infty$ le fibré de Serre sur $\mathbb{P}^{k_D}$ muni de la métrique définie pour toute section méromorphe de $\mathcal{O}(1)$ par :

$$\|s(x)\|_\infty = \frac{|s(x)|}{\sup_{0 \leq i \leq k_D} |x_i|}.$$

Cette métrique est la métrique de Batyrev et Tschinkel ou de Zhang pour le faisceau $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}^{k_D}$ considérée comme variété torique. En posant $\|\cdot\|_{D,\infty} = \phi_D^* \|\cdot\|_\infty$, alors on établit que cette métrique est la métrique de Batyrev et Tschinkel ou de Zhang pour le faisceau $\mathcal{O}(D)$ sur X, voir [9, théorème 3.3.10].

Ces fibrés hermitiens fournissent des exemples de fibrés hermitiens nef qui ne sont pas gros sur tout schéma torique lisse, comme le montre la proposition suivante.

PROPOSITION 1.5

Soit X une variété torique lisse de dimension relative d sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. *Soit $\bar{D}_\infty$ un fibré en droites équivariant engendré par ses sections globales et muni de sa métrique canonique. On a pour tout $l \in \mathbb{N}^*$*

$$\widehat{H}^0(X, l\bar{D}_\infty) = \{\pm\chi^m \mid m \in l\Delta_D \cap \mathbb{Z}^d\} \cup \{0\}. \tag{5}$$

En particulier, $l\bar{D}_\infty$ est nef mais il n'est pas gros.

Démonstration

On note par S_Q le tore compact de $X(\mathbb{C})$. On fixe un entier positif non nul l et soit $s \in \widehat{H}^0(X, \bar{D}_\infty) \setminus \{0\}$. En particulier, on a $\|s\|_{D,\infty}(x) = |s(x)| \leq 1$ pour tout $x \in S_Q$† et s n'est pas identiquement nul sur S_Q (Cela résulte du fait que le tore compact S_Q est Zariski-dense dans $X(\mathbb{C})$). Par conséquent l'intégrale suivante est finie et elle est négative :

$$M(s) := \int_{S_Q} \log\bigl|s(x)\bigr|\, d\mu \leq 0$$

($d\mu$ désigne la mesure de Haar normalisée sur S_Q). D'après [9, paragraphe 7.3.] la hauteur canonique $h_{\bar{D}_\infty}(\mathrm{div}(s))$ du cycle $\mathrm{div}(s)$ est donnée par la formule suivante :

$$h_{\bar{D}_\infty}\bigl(\mathrm{div}(s)\bigr) = \deg(D) M(s).$$

Or, cette quantité est positive d'après [9, Proposition 5.5.7]. On déduit que

$$M(s) = 0.$$

Par l'inégalité de Jensen et comme $|s(x)| \leq 1$ pour tout $x \in S_Q$ on a

$$0 = \int_{S_Q} \log\bigl|s(x)\bigr|\, d\mu \leq \log\Bigl(\int_{S_Q} \bigl|s(x)\bigr|\, d\mu\Bigr) \leq 0.$$

Par continuité de $|s|$, on obtient que $|s| = 1$ sur S_Q. Si l'on écrit $s = \sum_{m \in l\Delta_D \cap P} a_m \chi^m$, avec a_m sont des entiers pour tout $m \in l\Delta_D \cap P$, alors $1 = |s(x)|^2 = \sum_{m,m' \in l\Delta_D \cap P} a_m a_{m'} \chi^{m-m'}(x)$ pour tout $x \in S_Q$. En intégrant sur S_Q on obtient

$$\sum_{m \in l\Delta_D \cap P} a_m^2 = 1.$$

Comme tous les a_ν sont des entiers, on en déduit qu'il existe $m_0 \in l\Delta_D \cap P$, tel que $a_m = 0$ si $m \neq m_0$ et $|a_{m_0}| = 1$. Par suite,

$$s = \pm\chi^{m_0} \qquad \text{et} \qquad \|s\|_{\infty,\sup} = 1.$$

† Si l'on considère le morphsime ϕ_D défini par D :

$$\begin{aligned} \phi_D : X &\longrightarrow \mathbb{P}^{k_D}, \\ x &\longmapsto \bigl(\chi^m(x)\bigr)_{m \in \Delta_D \cap P}. \end{aligned}$$

Soit $s \in \widehat{H}^0(X, l\bar{D}_\infty)$. Comme $\|\cdot\|_{D,\infty} = \phi^*\|\cdot\|_\infty$ et que ϕ_D envoie le tore compact X sur celui de $\mathbb{P}^{k_D}$, alors $\|s(x)\|_{D,\infty} = |s(x)|$ pour tout $x \in S_Q$ et $s \in H^0(X, l\bar{D}_\infty)$.

Donc $\bar{D}_\infty$ n'est pas gros, et on a :

$$\widehat{H}^0(X, \bar{D}_\infty) = \{\pm\chi^m \mid m \in l\Delta_D \cap P\} \cup \{0\}.$$

De cette égalité et puisque $\bar{D}_\infty$ est admissible on conclut à l'aide de [9, Proposition 5.5.7] que $\bar{D}_\infty$ est nef. □

Dans la suite, nous allons établir un résultat qui généralise la proposition 1.5. Plus précisément, nous allons décrire l'ensemble des sections petites d'un fibré en droites hermitien muni d'une métrique hermitienne continue et invariante par le tore compact de la variété torique, en fonction de la transformée de Fenchel–Legendre associée. C'est l'objet de la proposition 1.7. La preuve suivra le raisonnement fait dans [11, Proposition 1.5] et nous utiliserons de manière cruciale une variante faible de l'inégalité de Gromov (voir proposition 1.6).

L'ensemble des sections petites

Lorsqu'on est dans la situation où la métrique est de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors un moyen pratique pour le calcul du volume arithmétique consiste à comparer la norm-sup avec la norme L^2 moyennant l'inégalité de Gromov, et d'utiliser le fait que la norme L^2 est hermitienne, voir par exemple [7]. Malheureusement cette inégalité n'est plus valable lorsqu'on suppose que la métrique est uniquement continue.

Dans [2], les auteurs évitent le recours à cette technique, ils montrent que la base des sections toriques est orthogonale pour la norme-sup, voir [2, Proposition 5.2] et [2, Remark 5.7].

Notre approche ici repose sur une variante faible de l'inégalité de Gromov (voir proposition 1.6). Nous utilisons cette inégalité pour comparer la norm-sup avec la norme L^2, et nous verrons que cela est suffisant pour établir une formule intégrale pour le volume arithmétique.

PROPOSITION 1.6

Soit Y une variété différentielle compacte complexe munie de Ω, une forme volume de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $\bar{L}$ un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique hermitienne continue. On a, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $k > 0$ et pour toute section holomorphe s de kL, on ait

$$\|s\|_{k\bar{L},\sup} \leq Ce^{\varepsilon k}\|s\|_{L^2,k\bar{L},\Omega}. \tag{6}$$

Démonstration

Voir par exemple [7, lemme 3.2]. □

Comme première application de cette inégalité, nous allons décrire l'ensemble des sections petites de $\bar{D}$.

PROPOSITION 1.7

Soit $\bar{D}$ un fibré en droites muni d'une métrique continue et invariante par l'action de S_Q. On fixe l, un entier positif non nul. On a :

1. $\widehat{H}^0(X, l\bar{D}) \neq \{0\}$ *si et seulement si* $l\Theta_{\bar{D}} \cap P \neq \emptyset$.
2. *Si* $l\Theta_{\bar{D}} \cap P \neq \emptyset$, *alors* $\langle \widehat{H}^0(X, l\bar{D}) \rangle_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{\mathbf{e} \in l\Theta_{\bar{D}} \cap P} \mathbb{Z}\chi^{\mathbf{e}}$.

LEMME 1.8
Soit $\phi \in \widehat{H}^0_{L^2}(X, l\bar{D})$, *si l'on écrit*

$$\phi = \sum_{\mathbf{e} \in l\Delta_D \cap P} c_{\mathbf{e}} \chi^{\mathbf{e}},$$

alors $\{\mathbf{e} \mid c_{\mathbf{e}} \neq 0\} \subset l\Theta_{\bar{D}}$.

Démonstration
On peut supposer $\phi \neq 0$, Posons $\{\mathbf{e} \mid c_{\mathbf{e}} \neq 0\} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$, avec $\mathbf{e}_i \neq \mathbf{e}_j$, si $i \neq j$. Soit $\mathbf{e}_i$ un point extrémal de $\mathrm{Conv}\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$. Montrons que $\mathbf{e}_i \in l\Theta_{\bar{D}}$. On peut supposer que $i = 1$.

On a, pour tout $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$,

$$\phi^k = c_{\mathbf{e}_1}^k \chi^{k\mathbf{e}_1} + \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ k_1 + \cdots + k_m = k, k_1 \neq k}} \frac{k!}{k_1! \cdots k_m!} c_{\mathbf{e}_1}^{k_1} \cdots c_{\mathbf{e}_m}^{k_m} \chi^{k_1 \mathbf{e}_1} \cdots \chi^{k_m \mathbf{e}_m}.$$

On vérifie que $k\mathbf{e}_1 \neq k_1\mathbf{e}_1 + \cdots + k_m\mathbf{e}_m$, pour tout $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $k_1 + \cdots + k_m = k$ et $k_1 \neq k$. Sinon, $\mathbf{e}_1 = (\frac{k_2}{k - k_1})\mathbf{e}_2 + \cdots + (\frac{k_m}{k - k_1})\mathbf{e}_m$. Cela contredit le fait que $\mathbf{e}_1$ est un point extrémal de $\mathrm{Conv}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$, par suite on peut écrire

$$\phi^k = c_{\mathbf{e}_1}^k \chi^{k\mathbf{e}_1} + \sum_{\mathbf{e}' \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}, \mathbf{e}' \neq k\mathbf{e}_1} c'_{\mathbf{e}'} \chi^{\mathbf{e}'},$$

cela implique que

$$\langle \phi^k, \phi^k \rangle_{kl\bar{D}, \Omega} = c_{\mathbf{e}_1}^{2k} \langle \chi^{k\mathbf{e}_1}, \chi^{k\mathbf{e}_1} \rangle_{kl\bar{D}, \Omega} + (\text{réel positif})$$

(l'invariance de Ω et de h par l'action du tore compact de $X(\mathbb{C})$, implique que $\langle \chi^{\mathbf{e}_1} \cdots \chi^{\mathbf{e}_r}, \chi^{\mathbf{e}'_1} \cdots \chi^{\mathbf{e}'_r} \rangle_{kl\bar{D}, \Omega} = 0$, dès que $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r) \neq (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_r)$).

On en déduit que

$$\langle \chi^{k\mathbf{e}_1}, \chi^{k\mathbf{e}_1} \rangle_{kl\bar{D}, \Omega} \leq 1 \quad (\text{rappelons que} c_{\mathbf{e}_1}^{2k} \in \mathbb{Z}).$$

Notons par $s_0, \ldots, s_n$ les sommets du polytope Δ_D, où $n = \#(\Delta_D \cap P) - 1$.

D'après proposition 1.3, il existe $\mathcal{B} = \{b_0, \ldots, b_n\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d$ tel que (Quitte à réordonner les indices) on a :

$$\chi^{s_i}(t) = t^{b_i} \quad \forall t \in \mathbb{T}_P \ \forall i = 0, \ldots, n.$$

On peut supposer que $e_0 = 0$ et $s_0 = 0$.

Par hypothèse $\mathbf{e}_1 \in (l\Delta_D) \cap P$. Il existe donc des rationnels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1$, tels que

$$\frac{\mathbf{e}_1}{l} = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i.$$

Posons $\beta_i := \lambda_i l$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $\beta := (\beta_1, \ldots, \beta_n))$. Alors

$$\chi^{k\mathbf{e}_1} = \prod_{i=1}^{n} \chi^{\beta_i k s_i} = \prod_{i=1}^{n} t^{k\beta_i b_i} \quad \forall t \in \mathbb{T}(\mathbb{C}), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Comme $\|\cdot\|_{\bar{D}}$ est invariante par l'action de S_Q, soit $t \in \mathbb{T}(\mathbb{C})$ et u est l'élément de $Q_{\mathbb{R}}$ vérifiant $\exp(-u) = |t|$, alors

$$\begin{aligned}
\log \|\chi^{k\mathbf{e}_1}\|_{kl\bar{D}}(t) &= \log \|\chi^{k\mathbf{e}_1}\|_{kl\bar{D}}\big(\exp(-u)\big) \\
&= -\Big(\sum_i k\beta_i \langle b_i, u\rangle - klg_{\bar{D}}(u)\Big) \\
&= -kl\Big(\Big\langle \sum_i \frac{\beta_i b_i}{l}, u\Big\rangle - g_{\bar{D}}(u)\Big) \\
&= -kl\Big(\Big\langle \frac{{}^tB\cdot\beta}{l}, u\Big\rangle - g_{\bar{D}}(u)\Big),
\end{aligned}$$

où on a noté par ${}^tB$ la transposée de la matrice B, dont ses lignes sont $b_1, b_2, \ldots, b_n$. B définie alors un homomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules de Q vers $\mathbb{Z}^d$ associée au morphisme Φ_D, voir proposition 1.3.

On a donc,

$$\|\chi^{k\mathbf{e}_1}\|_{kl\bar{D},\sup} = \exp\Big(-kl\check{g}_{\bar{D}}\Big(\frac{{}^tB\cdot\beta}{l}\Big)\Big). \tag{7}$$

On fixe $\varepsilon > 0$. D'après la proposition 1.6, il existe une constante $C > 0$, telle que

$$\|\chi^{k\mathbf{e}_1}\|_{kl\bar{D},\sup} \leq Ce^{\varepsilon k}\|\chi^{k\mathbf{e}_1}\|_{L^2,kl\bar{D},\Omega} \quad \forall k \gg 1. \tag{8}$$

Comme on a montré que

$$\|\chi^{k\mathbf{e}_1}\|_{L^2,kl\bar{D},\Omega} \leq 1, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

alors,

$$\exp\Big(-l\check{g}_{\bar{D}}\Big(\frac{{}^tB\cdot\beta}{l}\Big)\Big) = \|\chi^{k\mathbf{e}_1}\|_{kl\bar{D},\sup}^{\frac{1}{k}} \leq C^{\frac{1}{k}} e^{\frac{\varepsilon}{2}} \quad \forall k \in \mathbb{N}_{\geq 1}.$$

En faisant tendre k vers l'infini, on obtient :

$$\check{g}_{\bar{D}}\Big(\frac{{}^tB\cdot\beta}{l}\Big) \geq -\frac{\varepsilon}{2l},$$

et puisque ε est arbitraire, alors on déduit

$$\check{g}_{\bar{D}}\Big(\frac{{}^tB\cdot\beta}{l}\Big) \geq 0. \tag{9}$$

Comme $s_i = ({}^t\varphi)(e_i^{(n)})$ pour $i = 0, \ldots, n$ (où $\{e_1^{(n)}, \ldots, e_n^{(n)}\}$ désigne la base standard de $\mathbb{R}^n$) alors $\mathbf{e}_1 = l\sum_{i=1}^n \lambda_i s_i = ({}^t\varphi)(\sum_{i=1}^n l\lambda e_i^{(n)}) = {}^tB\cdot\beta$), c'est à dire $\mathbf{e}_1 = {}^tB\cdot\beta$. Donc (9) devient

$$\check{g}_{\bar{D}}\Big(\frac{\mathbf{e}_1}{l}\Big) \geq 0,$$

c'est à dire

$$\mathbf{e}_1 \in (l\Theta_{\bar{D}}) \cap P. \qquad \square$$

Soit $\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_q}$ les points extrémaux de $\mathrm{Conv}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$, alors

$$\mathrm{Conv}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m) = \mathrm{Conv}(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_q}) \subseteq l\Theta_{\bar{D}}.$$

Ce qui termine la preuve de la proposition 1.7.

2. Preuve des théorèmes 0.2 et 0.3

La positivié arithmétique

Nous décrivons les différentes notions de positivité arithmétique en termes de la combinatoire.

THÉORÈME 2.1

Soit X une variété torique lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ *et $\bar{D} = (D, \|\cdot\|_{\bar{D}})$ un fibré admissible sur X telle que $\|\cdot\|_{\bar{D}}$ est invariante par l'action du tore compact de $X(\mathbb{C})$. On a*

1. *$\bar{D}$ est ample si et seulement si $\breve{g}_{\bar{D}}(\mathbf{e}) > 0$, $\forall \mathbf{e} \in \Delta_D \cap P$ et ψ_D est strictement concave.*
2. *$\bar{D}$ est nef si et seulement si $\breve{g}_{\bar{D}}(\mathbf{e}) \geq 0$, $\forall \mathbf{e} \in \Delta_D \cap P$ et ψ_D est concave.*
3. *$\bar{D}$ est gros si et seulement si $g_{\bar{D}}(0) < 0$.*

Démonstration

1. Si $\breve{g}_{\bar{D}}(\mathbf{e}) > 0$ pour tout $\forall \mathbf{e} \in \Delta_D \cap P$, alors $\|\chi^{\mathbf{e}}\|_{\sup} < 1$, $\forall \mathbf{e} \in \Delta_D \cap P$. Cela implique que $(l\Delta_D) \cap P \subseteq (l\Theta_{\bar{D}}) \cap P$ pour tout $l \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Par suite

$$\big\langle \big\{ s \in H^0\big(X, \mathcal{O}(lD)\big) \,\big|\, \|s\|_{l\bar{D},\sup} < 1 \big\} \big\rangle_{\mathbb{Z}} = H^0\big(X, \mathcal{O}(lD)\big) \quad \forall l \in \mathbb{N}_{\geq 1},$$

et puisque ψ_D ests strictement concave alors D est ample. On conclut que $\bar{D}$ est ample.

Réciproquement, supposons que $\bar{D}$ est ample. Alors ψ_D est strictement concave puisque par hypothèse D est ample et il existe $l \gg 1$, tel que $H^0(X, \mathcal{O}(lD))$ est engendré comme $\mathbb{Z}$-module, par l'ensemble :

$$\big\{ \phi \in H^0\big(X, \mathcal{O}(lD)\big) \,\big|\, \|\phi\|_{\sup} < 1 \big\}.$$

Soit ϕ un élément non nul de cet ensemble. Il existe des entiers $c_{\mathbf{e}}$, où $\mathbf{e} \in l\Delta_D \cap P$, tels que :

$$\phi = \sum_{\mathbf{e} \in l\Delta_D \cap P} c_{\mathbf{e}} \chi^{\mathbf{e}}.$$

Soit Ω une forme de volume de classe $\mathcal{C}^\infty$ et invariante par l'action du tore compact de $X(\mathbb{C})$ avec $\int_{X(\mathbb{C})} \Omega = 1$. Comme dans la preuve du lemme 1.8, on pose $\{\mathbf{e} \mid c_{\mathbf{e}} \neq 0\} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ et on choisit un point extrémal de $\mathrm{Conv}\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$, qu'on peut supposer égal à $\mathbf{e}_1$. On a, pour tout $k\in\mathbb{N}_{\geq 1}$,

$$\phi^k = c_{\mathbf{e}_1}^k \chi^{k\mathbf{e}_1} + \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\\ k_1+\cdots+k_m=k, k_1\neq k}} \frac{k!}{k_1!\cdots k_m!} c_{\mathbf{e}_1}^{k_1}\cdots c_{\mathbf{e}_m}^{k_m}\chi^{k_1\mathbf{e}_1}\cdots\chi^{k_m\mathbf{e}_m}.$$

On vérifie que $k\mathbf{e}_1\neq k_1\mathbf{e}_1+\cdots+k_m\mathbf{e}_m$, pour tout $k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $k_1+\cdots+k_m=k$ et $k_1\neq k$. Sinon, $\mathbf{e}_1=(\frac{k_2}{k-k_1})\mathbf{e}_2+\cdots+(\frac{k_m}{k-k_1})\mathbf{e}_m$. Cela contredit le fait que $\mathbf{e}_1$ est un point extrémal de $\mathrm{Conv}(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m)$, par suite on peut écrire

$$\phi^k = c_{\mathbf{e}_1}^k\chi^{k\mathbf{e}_1} + \sum_{\mathbf{e}'\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0},\mathbf{e}'\neq k\mathbf{e}_1} c'_{\mathbf{e}'}\chi^{\mathbf{e}'},$$

cela implique que

$$\langle\phi^k,\phi^k\rangle_{kl\bar{D},\Omega} = c_{\mathbf{e}_1}^{2k}\langle\chi^{k\mathbf{e}_1},\chi^{k\mathbf{e}_1}\rangle_{kl\bar{D},\Omega} + (\text{réel positif})$$

(on a vérifié que $\langle\chi^{\mathbf{e}_1}\cdots\chi^{\mathbf{e}_r},\chi^{\mathbf{e}'_1}\cdots\chi^{\mathbf{e}'_r}\rangle_{kl\bar{D},\Omega}=0$, si $(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_r)\neq(\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_r)$).

On en déduit que

$$\langle\chi^{k\mathbf{e}_1},\chi^{k\mathbf{e}_1}\rangle_{kl\bar{D},\Omega}\leq\langle\phi^k,\phi^k\rangle_{kl\bar{D},\Omega} \quad (\text{rappelons que } c_{\mathbf{e}_1}^{2k}\in\mathbb{Z})$$

et donc (on a supposé $\int_{X(\mathbb{C})}\Omega=1$)

$$\langle\chi^{k\mathbf{e}_1},\chi^{k\mathbf{e}_1}\rangle_{kl\bar{D},\Omega}\leq\langle\phi^k,\phi^k\rangle_{kl\bar{D},\Omega}\leq\|\phi^k\|^2_{kl\bar{D},\sup}\leq\|\phi\|^{2k}_{kl\bar{D},\sup} \quad \forall k\in\mathbb{N}_{\geq 1}.$$

D'après (7) et (8), on déduit

$$\exp\Big(-l\breve{g}_{\bar{D}}\Big(\frac{\mathbf{e}_1}{l}\Big)\Big)\leq C^{\frac{1}{k}}e^{\varepsilon}\|\phi\|_{\bar{D},\sup} \quad \forall k\in\mathbb{N}_{\geq 1}.$$

En prenant $k\mapsto\infty$, on obtient

$$l\breve{g}_{\bar{D}}\Big(\frac{\mathbf{e}_1}{l}\Big)\geq-\log\|\phi\|_{\bar{D},\sup}-\varepsilon.$$

Cette inégalité est valable pour tout $\varepsilon>0$. Donc,

$$\breve{g}_{\bar{D}}\Big(\frac{\mathbf{e}_1}{l}\Big)\geq-\frac{1}{l}\log\|\phi\|_{\bar{D},\sup}>0.$$

On conclut que, pour tout $c_{\mathbf{e}}\neq 0$, on a

$$\breve{g}_{\bar{D}}\Big(\frac{\mathbf{e}}{l}\Big)>0.$$

Par hypothèse $\{\phi\in H^0(X,\mathcal{O}(lD))\mid\|\phi\|_{\bar{D},\sup}<1\}$ engendre $H^0(X,\mathcal{O}(lD))$. Donc pour tout $\mathbf{e}\in l\Delta_D\cap P$, on peut trouver $\phi\in\{\phi'\in H^0(X,\mathcal{O}(lD))\mid\|\phi'\|_{\bar{D},\sup}<1\}$ tel que $c_{\mathbf{e}}\neq 0$. Cela permet de conclure que

$$\breve{g}_{\bar{D}}(\mathbf{e})>0 \quad \forall\mathbf{e}\in\Delta_D\cap P.$$

2. On suppose que $\breve{g}_{\bar{D}}(\mathbf{e})\geq 0$ pour tout $\mathbf{e}\in\Delta_D\cap P$. Donc, par concavité de $\breve{g}_{\bar{D}}$, on a $\breve{g}_{\bar{D}}(m)\geq 0$ $\forall m\in l\Delta_D\cap P$ et $\forall l\in\mathbb{N}_{\geq 1}$. Par conséquent, pour tout $l\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ l'espace $H^0(X,\mathcal{O}(lD))$ est engendré par des sections globales de normes sup inférieure ou égale à 1. D'aprés [9, Proposition 5.5.7], on déduit que $h_{\bar{D}}(P)\geq 0$ pour tout $P\in X(\bar{\mathbb{Q}})$. On conclut que $\bar{D}$ est nef.

Réciproquement si $\bar{D}$ est nef. Donc $h_{\bar{D}}(P) \geq 0$ pour tout $P \in X(\bar{\mathbb{Q}})$, en particulier pour tout $P \in (X \setminus \mathrm{div}(\chi^{\mathbf{e}}))(\bar{\mathbb{Q}})$ avec $\mathbf{e} \in \Delta_D \cap P$. Or, si l'on considère $P \in (\mathbb{Q}^*)^d$ alors on a $h_{\bar{D}}(P) = -\log \|\chi^{\mathbf{e}}\|_{\bar{D}}(P)$. Par conséquent, on aura $\|\chi^{\mathbf{e}}\|_{\bar{D}}(P) \leq 1$. Par invariance de la métrique par l'action de S_Q et par densité, on déduit que $\|\chi^{\mathbf{e}}\|_{\bar{D}}(x) \leq 1$ pour tout $x \in X(\mathbb{C})$. Par suite,

$$\check{g}_{\bar{D}}(\mathbf{e}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{e} \in \Delta_D \cap P.$$

3. Si $\bar{D}$ est gros. Par définition, il existe une section $\phi \in H^0(X, \mathcal{O}(lD))$ pour un certain $l \gg 1$, avec $\|\phi\|_{\sup} < 1$. Alors comme dans le cas ample, on montre qu'il existe $\mathbf{e} \in l\Delta_D \cap P$ tel que :

$$l\check{g}_{\bar{D}}\left(\frac{\mathbf{e}}{l}\right) \geq -2\log \|\phi\|_{\sup} > 0,$$

et comme $-g_{\bar{D}}(0) \geq \min_{u \in \mathbb{R}^d}(\langle \frac{\mathbf{e}}{l}, u\rangle - g_{\bar{D}}(u)) = \check{g}_{\bar{D}}(\frac{\mathbf{e}}{l})$ donc,

$$g_{\bar{D}}(0) < 0.$$

Réciproquement, on suppose que $g_{\bar{D}}(0) < 0$. Comme $g_{\bar{D}}$ est concave alors d'après [14, p. 218] il existe $x \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$g_{\bar{D}}(u) - g_{\bar{D}}(0) \leq \langle x, u\rangle \quad \forall u \in \mathbb{R}^d.$$

On a par suite

$$0 < -g_{\bar{D}}(0) \leq \check{g}_{\bar{D}}(x).$$

On peut supposer que $x \in \mathrm{Int}(\Delta_D)$. En effet, si l'on considère $p \in \mathrm{Int}(\Delta_D)$ alors $tx + (1-t)p \in \mathrm{Int}(\Delta_D)$ dès que $t \in [0,1[$ (rappelons que Δ_D est défini par un nombre fini d'inégalités, voir la proposition 1.2) et par concavité de $\check{g}$, on peut trouver $t \in [0,1[$ tel que $\check{g}_{\bar{D}}(tx + (1-t)p) < 0$.

Comme $\check{g}_{\bar{D}}$ est concave, alors on montre que $\check{g}_{\bar{D}}$ est continue sur $\mathrm{Int}(\Delta_D)$, voir par exemple [8, Theorem 2.2]. On peut donc supposer que $x \in \Theta_{\bar{D}} \cap \mathbb{Q}^d$. Il existe alors l, un entier positif non nul tel que $lx \in l\Delta_D \cap P$. Si l'on pose $\mathbf{e} := lx$, alors d'après ce qui précède la section globale $\chi^{\mathbf{e}}$ vérifie :

$$\|\chi^{\mathbf{e}}\|_{\bar{D},\sup} = \exp\Big(-l\check{g}_{\bar{D}}\Big(\frac{\mathbf{e}}{l}\Big)\Big) = \exp\big(-l\check{g}_{\bar{D}}(x)\big) < 1,$$

donc, $\bar{D}$ est gros. □

Le volume arithmétique

Soit $\bar{D}$ un fibré en droites hermitien muni d'une métrique continue sur X. Le volume $\widehat{\mathrm{vol}}(\bar{D})$ de $\bar{D}$ est défini comme suit :

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\bar{D}) = \limsup_{l \to \infty} \frac{\log \# \widehat{H}^0(X, l\bar{D}))}{l^{d+1}/(d+1)!}.$$

C'est l'analogue arithmétique du volume d'un fibré en droites sur une variété projective sur un corps.

EXEMPLE 2.2

Si X est une variété torique lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et $\bar{D}_\infty$ est un fibré en droites équivriant sur X muni de sa métrique canonique, alors

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\bar{D}_\infty) = 0.$$

En effet, d'après (5) il suffit de noter qu'on a pour tout $l \gg 1$, $\#\widehat{H}^0(X, l\bar{D}_\infty) = 2\#(l\Delta_D \cap P) + 1 \simeq 2\,\mathrm{vol}(\Delta_D) l^d$.

La suite de cette section est consacrée à la preuve du théorème 0.2 (voir le théorème 2.6). Nous adopterons la preuve du [11, Theorem 2.3] dans le cas torique.

Nous commençons par établir un résultat qui permet d'approximer le volume arithmétique par une quantité plus flexible, définie en terme de la norme L^2, c'est l'objet du lemme 2.3. Notons que ce lemme peut être vue comme une version faible du [11, Lemma 2.1].

LEMME 2.3

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\bar{D}) \leq \liminf_{l \mapsto \infty} \frac{\log \#\widehat{H}^0_{L^2}(X, l\bar{D})}{l^{d+1}/(d+1)!} \leq \limsup_{l \mapsto \infty} \frac{\log \#\widehat{H}^0_{L^2}(X, l\bar{D})}{l^{d+1}/(d+1)!} \leq \widehat{\mathrm{vol}}(\bar{D}_\varepsilon),$$

avec $\bar{D}_\varepsilon := (D, e^{-\varepsilon}\|\cdot\|_{\bar{D}})$.

Démonstration

Puisque $\widehat{H}^0(X, l\bar{D}) \subset \widehat{H}^0_{L^2}(X, l\bar{D})$, alors

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\bar{D}) \leq \liminf_{l \mapsto \infty} \frac{\log \#\widehat{H}^0_{L^2}(X, l\bar{D})}{l^{d+1}/(d+1)!}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, d'après (1.6), il existe une constante C tel que $\|\cdot\|_{\sup} \leq C e^{\varepsilon l}\|\cdot\|_{L^2}$ sur $H^0(X, \mathcal{O}(lD))$. On peut supposer que $\|\cdot\|_{\sup} \leq e^{2\varepsilon l}\|\cdot\|_{L^2}$ pour $l \gg 1$. Cela donne

$$\widehat{H}^0_{L^2}(X, l\bar{D}) \subset \widehat{H}^0(X, l\bar{D}_{4\varepsilon}) \quad \forall l \gg 1.$$

Donc,

$$\limsup_{l \mapsto \infty} \frac{\log \#\widehat{H}^0_{L^2}(X, l\bar{D})}{l^{d+1}/(d+1)!} \leq \widehat{\mathrm{vol}}(\bar{D}_{4\varepsilon}). \qquad \square$$

REMARQUE 2.4

Dans [11, Lemma 2.1], Moriwaki a montré une inégalité semblable à celle du lemme précédent, et par contuité de $\widehat{\mathrm{vol}}$, il a pu conclure que $\widehat{\mathrm{vol}}(\bar{D}) = \lim_{l \mapsto \infty} \frac{\log \#\widehat{H}^0_{L^2}(X, l\bar{D})}{l^{d+1}/(d+1)!}$. Malheureusement, la continuité de $\widehat{\mathrm{vol}}$ est établie uniquement dans le cas des métriques de classe $\mathcal{C}^\infty$ (voir [10, Theorem B]).

LEMME 2.5

Soit Θ un sous-ensemble convexe compact de $\mathbb{R}^d$ tel que $\mathrm{Vol}(\Theta) > 0$ *(*Vol *désigne le volume induit par la mesure de Lebesgue dx standard de $\mathbb{R}^d$). Pour tour l un* *entier positif non nul, soit* $A_l=(a_{\mathbf{e},\mathbf{e}'})_{\mathbf{e},\mathbf{e}'\in l\Theta\cap P}$ *une matrice réelle symétrique définie positive indexée par* $l\Theta\cap P$*, et soit* K_l *le sous-ensemble de* $\mathbb{R}^{l\Theta\cap P}\simeq\mathbb{R}^{\#(l\Theta\cap P)}$ *donné par*

$$K_l=\Big\{(x_{\mathbf{e}})\in\mathbb{R}^{l\Theta\cap P}\;\Big|\;\sum_{\mathbf{e},\mathbf{e}'\in l\Theta\cap P}a_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}x_{\mathbf{e}}x_{\mathbf{e}'}\leq 1\Big\}.$$

On suppose qu'il existe une fonction continue $\varphi:\Theta\longrightarrow\mathbb{R}$ *tel que pour tout* $\varepsilon>0$*, il existe une constante* D *vérifiant*

$$\Big|\log\Big(\frac{1}{a_{\mathbf{e},\mathbf{e}}}\Big)-l\varphi\Big(\frac{\mathbf{e}}{l}\Big)\Big|\leq D+\varepsilon l,$$

pour tout l *un entier positif assez grand et* $\mathbf{e}\in l\Theta\cap P$*. Alors on a*

$$\liminf_{l\mapsto\infty}\frac{\log\#(K_l\cap\mathbb{Z}^{l\Theta\cap P})}{l^{d+1}}\geq\frac{1}{2}\int_\Theta\varphi(x)\,dx.$$

En plus, si A_l *est diagonal et* $a_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}\leq 1$ $\forall\mathbf{e},\mathbf{e}'\in l\Theta\cap P$ *pour tout* l*, on a*

$$\lim_{l\mapsto\infty}\frac{\log\#(K_l\cap\mathbb{Z}^{l\Theta\cap P})}{l^{d+1}}=\frac{1}{2}\int_\Theta\varphi(x)\,dx.$$

Démonstration
La preuve de ce lemme est une légère modification de la preuve du [11, Lemma 2.2]. Soit $\varepsilon>0$, par hypothèse il existe une constante D telle que

$$\Big|\log\Big(\frac{1}{a_{\mathbf{e},\mathbf{e}}}\Big)-l\varphi\Big(\frac{\mathbf{e}}{l}\Big)\Big|\leq D+\varepsilon l\quad\forall l\gg 1\ \mathbf{e}\in l\Theta\cap P.$$

D'après [11, p. 514], on a

$$\log\#(K_l\cap\mathbb{Z}^{l\Theta\cap P})\geq\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{e}\in l\Theta\cap P}\log\Big(\frac{1}{a_{\mathbf{e},\mathbf{e}}}\Big)+\log V_{m_l}-m_l\log 2,\tag{10}$$

où $m_l=\#(l\Theta\cap P)$, et V_{m_l} est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^{m_l}$ muni de la métrique standard.

Par hypothèse,

$$\varphi\Big(\frac{\mathbf{e}}{l}\Big)-\frac{1}{l}D-\varepsilon\leq\frac{1}{l}\log\Big(\frac{1}{a_{\mathbf{e},\mathbf{e}}}\Big)\leq\varphi\Big(\frac{\mathbf{e}}{l}\Big)+\frac{1}{l}D+\varepsilon\quad\forall l\gg 1\ \forall\mathbf{e}\in l\Theta\cap P.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{1}{l^d}\sum_{\mathbf{e}\in l\Theta\cap P}\varphi\Big(\frac{\mathbf{e}}{l}\Big)-\frac{m_l}{l^{d+1}}D-\frac{m_l}{l^d}\varepsilon&\leq\frac{1}{l^{d+1}}\sum_{\mathbf{e}\in l\Theta\cap P}\log\Big(\frac{1}{a_{\mathbf{e},\mathbf{e}}}\Big)\\&\leq\frac{1}{l^d}\sum_{\mathbf{e}\in l\Theta\cap P}\varphi\Big(\frac{\mathbf{e}}{l}\Big)+\frac{m_l}{l^{d+1}}D+\frac{m_l}{l^d}\varepsilon\quad\forall l\gg 1.\end{aligned}$$

Notons que

$$\lim_{l\mapsto\infty}\frac{1}{l^d}\sum_{\mathbf{e}\in l\Theta\cap P}\varphi\Big(\frac{\mathbf{e}}{l}\Big)=\lim_{l\mapsto\infty}\sum_{x\in\Theta\cap(1/l)P}\varphi(x)=\int_\Theta\varphi(x)\,dx.$$

Alors, on peut trouver $l_0 \gg 1$ tel que

$$\Big|\frac{1}{l^{d+1}}\sum_{\mathbf{e}\in l\Theta\cap P}\log\Big(\frac{1}{a_{\mathbf{e},\mathbf{e}}}\Big)-\int_\Theta \varphi(x)\,dx\Big|\leq \varepsilon+\frac{m_l}{l^{d+1}}D+\frac{m_l}{l^d}\varepsilon\quad \forall l\geq l_0.$$

Comme il existe une constante c telle que $m_l \leq l^d$. Alors, on peut supposer que,

$$\Big|\frac{1}{l^{d+1}}\sum_{\mathbf{e}\in l\Theta\cap P}\log\Big(\frac{1}{a_{\mathbf{e},\mathbf{e}}}\Big)-\int_\Theta \varphi(x)\,dx\Big|\leq (2+c_1)\varepsilon\quad \forall l\geq l_0.$$

Par suite,

$$\lim_{l\mapsto\infty}\frac{1}{l^{d+1}}\sum_{\mathbf{e}\in l\Theta\cap P}\log\Big(\frac{1}{a_{\mathbf{e},\mathbf{e}}}\Big)=\int_\Theta \varphi(x)\,dx.$$

En utilisant (10), on déduit de ce qui précède

$$\liminf_{l\mapsto\infty}\frac{1}{l^{d+1}}\log\#(K_l\cap \mathbb{Z}^{l\Theta_{\bar{D}}\cap P})\geq \frac{1}{2}\int_\Theta \varphi(x)\,dx.$$

La preuve de la deuxième assertion est identique à celle de la deuxième partie du [11, Lemma 2.2]. □

THÉORÈME 2.6

Soit X une variété torique lisse. Soit $\bar{D}=(D,\|\cdot\|_{\bar{D}})$ un fibré en droites équivariant muni d'une métrique $\|\cdot\|_{\bar{D}}$, continue et invariante par l'action de tore compact de $X(\mathbb{C})$. On a,

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\bar{D})=(d+1)!\int_{\Theta_{\bar{D}}}\check{g}_{\bar{D}}(x)\,dx.$$

Démonstration

On considère Ω une forme volume de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $X(\mathbb{C})$, invariante par l'action du tore compact de $X(\mathbb{C})$ et telle que $\int_{X(\mathbb{C})}\Omega=1$. Soit l un entier positif non nul. Posons $A_l=(a_{\mathbf{e},\mathbf{e}'})_{\mathbf{e},\mathbf{e}'\in l\Theta\cap P}$ avec $a_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}=\langle\chi^{\mathbf{e}},\chi^{\mathbf{e}'}\rangle_{l\bar{D},\Omega}$. On a, $\Theta_{\bar{D}}$ est un ensemble compact et convexe. On considére la fonction $\check{g}_{\bar{D}}:\Theta_{\bar{D}}\longrightarrow\mathbb{R}$ et K_l l'ensemble donné par

$$K_l=\Big\{(x_{\mathbf{e}})\in\mathbb{R}^{l\Theta\cap P}\,\Big|\,\sum_{\mathbf{e},\mathbf{e}'\in l\Theta\cap P}a_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}x_{\mathbf{e}}x_{\mathbf{e}'}\leq 1\Big\}.$$

Soit $e\in l\Theta_{\bar{D}}\cap P$ et $\chi^{\mathbf{e}}$ la section globale de $\mathcal{O}(lD)$ associée. D'après la proposition 1.6, on a pour tout $\varepsilon>0$, il existe une constante C telle que

$$\|\chi^{\mathbf{e}}\|_{l\bar{D},\sup}\leq Ce^{\varepsilon l}\|\chi^{\mathbf{e}}\|_{L^2,l\bar{D}}\quad \forall l\gg 1.$$

On a aussi,

$$\|\chi^{\mathbf{e}}\|_{L^2,l\bar{D}}\leq\|\chi^{\mathbf{e}}\|_{l\bar{D},\sup}\int_X\Omega=\|\chi^{\mathbf{e}}\|_{l\bar{D},\sup}.$$

Avec les notations introduites et la formule (7), les deux inégalités précédentes deviennent :

$$\exp\Big(-l\check{g}_{\bar{D}}\Big(\frac{\mathbf{e}}{l}\Big)\Big)\leq Ce^{\varepsilon l}\sqrt{a_{\mathbf{e},\mathbf{e}}},$$

et

$$\sqrt{a_{\mathbf{e},\mathbf{e}}} \leq \exp\Big(-l\breve{g}_{\bar{D}}\Big(\frac{\mathbf{e}}{l}\Big)\Big).$$

On en déduit

$$0 \leq \log\Big(\frac{1}{a_{\mathbf{e},\mathbf{e}}}\Big) - 2l\breve{g}_{\bar{D}}\Big(\frac{\mathbf{e}}{l}\Big) \leq 2\log C + \varepsilon l \quad \forall l \gg 1.$$

Puisque $\mathbf{e} \in l\Theta_{\bar{D}} \cap P$, et $\sqrt{a_{\mathbf{e},\mathbf{e}}} \leq \exp(-l\breve{g}(\frac{\mathbf{e}}{l}))$ alors

$$a_{\mathbf{e},\mathbf{e}} \leq 1.$$

Comme $\|\cdot\|_{\bar{D}}$ est invariante par l'action du tore compact, alors la matrice A_l est diagonale. Maintenant on peut appliquer le lemme 2.5 et nous obtenons

$$\lim_{l\mapsto\infty} \frac{\log \#(K_l \cap \mathbb{Z}^{l\Theta_{\bar{D}}\cap P})}{l^{d+1}} = \int_{\Theta_{\bar{D}}} \breve{g}_{\bar{D}}(x)\,dx.$$

En remarquant que

$$\widehat{H}^0_{L^2}(X, l\bar{D}) = K_l \cap \mathbb{Z}^{l\Theta_{\bar{D}}\cap P},$$

alors

$$\liminf_{l\mapsto\infty} \frac{\log \#\widehat{H}^0_{L^2}(X, l\bar{D})}{l^{d+1}/(d+1)!} = \limsup_{l\mapsto\infty} \frac{\log \#\widehat{H}^0_{L^2}(X, l\bar{D})}{l^{d+1}/(d+1)!} = \int_{\Theta_{\bar{D}}} \breve{g}_{\bar{D}}(x)\,dx.$$

Et d'après le lemme 2.3, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\bar{D}) \leq (d+1)! \int_{\Theta_{\bar{D}}} \breve{g}_{\bar{D}}(x)\,dx \leq \widehat{\mathrm{vol}}(\bar{D}_\varepsilon).$$

Si l'on remplace $\bar{D}$ par $\bar{D}_{-\varepsilon}$, on obtient que

$$(d+1)! \int_{\Theta_{\bar{D}_{-\varepsilon}}} \breve{g}_{\bar{D}_{-\varepsilon}}(x)\,dx \leq \widehat{\mathrm{vol}}(\bar{D}).$$

Or, $\breve{g}_{\bar{D}_{-\varepsilon}}(x) = \breve{g}_{\bar{D}}(x) - 2\varepsilon$ et $\Theta_{\bar{D}_{-\varepsilon}} = \{x \in \Delta_D \mid \breve{g}_{\bar{D}}(x) \geq 2\varepsilon\}$. Par conséquent, $\int_{\Theta_{\bar{D}_{-\varepsilon}}} \breve{g}_{\bar{D}_{-\varepsilon}}(x)\,dx = \int_{\Theta_{\bar{D}}} \breve{g}_{\bar{D}}(x)\,dx + \int_{\Theta_{\bar{D}} \setminus \Theta_{\bar{D}_{-\varepsilon}}} \breve{g}_{\bar{D}}(x)\,dx - 2\varepsilon\Theta_{\bar{D}_{-\varepsilon}} = \int_{\Theta_{\bar{D}}} \breve{g}_{\bar{D}}(x)\,dx + O(\varepsilon)$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$(d+1)! \int_{\Theta_{\bar{D}}} \breve{g}_{\bar{D}}(x)\,dx \leq \widehat{\mathrm{vol}}(\bar{D}).$$

On conclut que,

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\bar{D}) = (d+1)! \int_{\Theta_{\bar{D}}} \breve{g}_{\bar{D}}(x)\,dx. \qquad \square$$

Remerciements. Je tiens à remercier Vincent Maillot pour ses conseils et ses remarques autour de ce travail. Je tiens aussi à remercier le referee pour ses remarques pertinentes.

Références

[1] V. V. Batyrev et Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori*, Intl. Math. Res. Not. IMRN **12** (1995), 591–635. MR 1369408. DOI 10.1155/S1073792895000365.

[2] J. I. Burgos Gil, A. Moriwaki, P. Philippon, et M. Sombra, *Arithmetic positivity on toric varieties*, to appear in J. Algebr. Geometry prépublication, arXiv:1210.7692 [math.AG].

[3] J. I. Burgos Gil, P. Philippon, et M. Sombra, *Arithmetic geometry of toric varieties. Metrics, measures and heights*, Astérisque **360**, Soc. Math. France, 2014.

[4] M. Demazure, *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **3** (1970), 507–588. MR 0284446.

[5] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Ann. of Math. Stud. **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993. MR 1234037.

[6] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, et A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, reprint of the 1994 edition, Birkhäuser, Boston, 2008. MR 2394437.

[7] H. Gillet et C. Soulé, *Amplitude arithmétique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **307** (1988), 887–890. MR 0974432.

[8] P. M. Gruber, *Convex and Discrete Geometry*, Grundlehren Math. Wiss. **336**, Springer, Berlin, 2007. MR 2335496.

[9] V. Maillot, *Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.), 2000. MR 1775582.

[10] A. Moriwaki, *Continuity of volumes on arithmetic varieties*, J. Algebraic Geom. **18** (2009), 407–457. MR 2496453. DOI 10.1090/S1056-3911-08-00500-6.

[11] ———, *Big arithmetic divisors on the projective spaces over* $\mathbb{Z}$, Kyoto J. Math. **51** (2011), 503–534. MR 2823999. DOI 10.1215/21562261-1299882.

[12] T. Oda, "Convex bodies and algebraic geometry—toric varieties and applications, I" in *Algebraic Geometry Seminar (Singapore, 1987)*, World Sci., Singapore, 1988, 89–94. MR 0966447.

[13] P. Philippon et M. Sombra, *Hauteur normalisée des variétés toriques projectives*, J. Inst. Math. Jussieu **7** (2008), 327–373. MR 2400725. DOI 10.1017/S1474748007000138.

[14] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, reprint of the 1970 original, Princeton Landmarks in Math., Princeton Univ. Press, Princeton, 1997. MR 1451876.

[15] S. Zhang, *Small points and adelic metrics*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), 281–300. MR 1311351.

National Center for Theoretical Sciences (Taipei Office), National Taiwan University, Taipei 106, Taiwan; hajli@math.jussieu.fr ; hajlimounir@gmail.com