

UNE THÉORIE DE LA DUALITÉ À ENSEMBLE POLAIRE PRÈS II

PAR M. A. GARCIA ALVAREZ

CIMAS: Universidad Nacional Autónoma de México

In 1972, starting from a transient Markov process with a nice semigroup satisfying the absolute continuity hypothesis, P. A. Meyer and I built a nice dual semigroup and then obtained a Martin compactification modulo a polar set. Now, in this paper, we start from this Martin space and study the behavior of the sample paths. We prove that the Martin boundary so constructed appears in the classical form which allows one to describe the final behavior of the sample paths. We also prove that the Martin boundary we construct is an "entrance boundary" such as the Ray boundary. Finally we study a class of additive functionals which ignore the discontinuities of the process in the Martin space and which constitute a nice class of "natural" additive functionals. From all this we conclude that our Martin space is better suited for the study of the process than either the Ray space or the original space.

Etant donné un ensemble borélien E d'un espace métrique compact et un processus de Markov transient (X_t) a valeurs dans $E \cup \{\partial\}$ admettant un semi-groupe (P_t) qui satisfait aux hypothèses droites de la théorie des processus de Markov et à l'hypothèse de continuité absolue, nous avons démontré, dans la partie I de ce travail [6], le "théorème du support fin." Pour faire cela nous nous sommes permis d'effectuer deux opérations sur le processus: (1) enlever à l'espace E un ensemble borélien polaire, (2) effectuer le changement de temps associé à une fonctionnelle additive de la forme $A_t = \int_0^t a \circ X_s d_s$, où a est une fonction borélienne, $0 < a \leq 1$ sur E . Nous sommes alors arrivés à démontrer l'existence d'une résolvante, en dualité avec la résolvante du semi-groupe (P_t) , qui a des propriétés permettant de compactifier l'espace d'états avec les techniques usuelles de compactification par rapport à une résolvante. On obtient ainsi une compactification du type de Martin et une "dualité à ensemble polaire près."

Comme nous l'avons annoncé dans la partie I, maintenant nous allons étudier cette dualité plus à fond. Notre but n'est pas d'avoir des représentations des fonctions excessives, mais de comprendre la structure du processus (X_t) tout au long de son évolution.

Nous commençons par montrer que, comme dans les études précédentes sur la compactification de Martin, celle-ci apparaît sous la forme de "frontière de Martin," c'est à dire d'un procédé permettant de décrire le comportement final des trajectoires. Ceci nous donne d'ailleurs, les résultats les plus importants de la théorie de dualité classique, à savoir: la représentation de Martin, les formules

Received November 17, 1975.

AMS 1970 subject classifications. Primary 60J45; Secondary 60J50, 60J55.

Key words and phrases. Martin space, reversed process, co-branching points, behavior at infinity of the sample paths, exit boundary, entrance boundary, conatural additive functionals.

de Hunt sur la représentation des réduites et des réduites extérieures et une forme de l'hypothèse (B).

Ensuite, nous allons étudier les limites à gauche du processus (X_t) dans l'espace de Martin. Nous montrerons que notre compactification, qui est une "compactification, de sortie," sert à interpréter beaucoup de difficultés dans l'étude du processus au moyen du processus des limites à gauche et de son passage en certains points singuliers (points de branchement). Ainsi la "compactification de sortie" que l'on a introduite a aussi les propriétés d'une compactification de Ray, c'est à dire d'une "compactification d'entrée."

L'espace d'états du processus se trouve muni ainsi de 3 topologies: l'originale, celle de Ray et celle de Martin. Nous nous posons alors une dernière question: laquelle des ces 3 topologies est la mieux adaptée au processus?

Si l'on considère que la topologie de l'espace d'états n'est utilisée que dans l'étude du processus des limites à gauche, il s'agit de savoir quelles sont les bonnes limites à gauche du processus. Pour répondre à cette question nous allons adapter un théorème d'Azema pour obtenir des représentations des noyaux excessifs, ce qui va nous permettre d'étudier une classe de fonctionnelles additives qui ignorent les discontinuités du processus dans l'espace de Martin. Nous montrerons que ces fonctionnelles ne présentent pas les pathologies présentées par les fonctionnelles additives qui ignorent les discontinuités du processus dans l'espace original (ou bien celui de Ray). En étudiant un exemple, nous en verrons la raison, à savoir, qu'il y a certains temps "singuliers" pour le processus qui ne sont pas des temps de discontinuité des trajectoires dans la topologie originale ou bien celle de Ray, alors que la topologie de Martin transforme tous ces temps singuliers en temps de discontinuité. Notre conclusion est donc que les "bonnes" limites à gauche sont celles que l'on obtient dans le compactifié de Martin.

1. Rappels. Dans [6] nous considérons un ensemble borélien E d'un espace métrique compact et nous nous donnons un semi-groupe sous-markovien (P_t) de noyaux sur E , qui satisfait aux hypothèses droites de la théorie des processus de Markov. Nous considérons la réalisation continue à droite canonique de ce semi-groupe et nous désignons celle-ci par les notations de [7]: $\Omega, X_t, \theta_t, \zeta, \mathcal{F}^\circ, \mathcal{F}_t^\circ$ (tribus non complétées), $\mathcal{F}, \mathcal{F}_t$ (tribus complétées). Nous désignons par (U_p) , U la résolvante et le potentiel de (P_t) et nous supposons U propre. Enfin nous supposons que (P_t) satisfait à l'hypothèse de continuité absolue et nous notons par λ une mesure de référence qui est aussi une mesure de probabilité.

Nous nous permettons d'effectuer deux opérations sur le processus:

(I) Enlever à l'espace E un ensemble borélien polaire.

(II) Remplacer (sans changer de notation) l'opérateur potentiel U par l'opérateur $f \rightarrow U(af)$, où a est une fonction borélienne, partout positive sur E et ≤ 1 . Cela revient à remplacer le processus (X_t) par le processus (X_{T_t}) , où

$$(1) \quad T_t = \inf \{h : \int_0^h a \circ X_s ds \geq t\},$$

nous démontrons alors le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *A l'aide des opérations (I) et (II) nous pouvons nous ramener à la situation suivante:*

(i) *Toute fonction excessive sur E est borélienne sur $F = E \setminus N$, où N est un ensemble polaire fixe.*

(ii) *U est un noyau compact (i.e., il transforme la boule unité de l'espace des fonctions universellement mesurables et bornées sur E en un ensemble compact pour la convergence uniforme).*

(iii) *Il existe un semi-groupe sous-markovien (\hat{P}_t) sur E , transformant les fonctions boréliennes en fonctions boréliennes, possédant les propriétés suivantes:*

(a) *Si l'on munit Ω de la loi P^λ , le processus (\hat{X}_t) retourné de (X_t) à ζ , est modérément markovien par rapport à la famille de tribus retournées $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ et admet (\hat{P}_t) comme semi-groupe de transition.*

(b) *La résolvente (\hat{U}_p) de (\hat{P}_t) est en dualité avec (U_p) par rapport à $m = \lambda U$.*

(c) *Le potentiel \hat{U} de (\hat{P}_t) est un noyau compact.*

(d) *Si f est universellement mesurable et bornée, alors Uf est continue à droite et pourvue de limites à gauche sur les trajectoires du processus (X_t) .*

(e) *Il existe une suite de fonctions positives bornées, surmédianes par rapport au semi-groupe (\hat{P}_t) , boréliennes et finement continues sur F , séparant F .*

(iv) *Notons par F^m (\bar{F} dans la notation de [6]) une compactification de Ray de F par rapport à la résolvente (\hat{U}_p) . Alors F est borélien dans F^m et pour toute loi $p^x(x \in F)$ le processus (X_t) , comme processus à valeurs dans F^m , est continu à droite sur $[0, \zeta]$ et pourvu des limites à gauche sur $]0, \zeta]$.*

(v) *La résolvente (\hat{U}_p) se prolonge par continuité en une résolvente de Ray sur F^m de base m , dont les fonctions co-surmédianes (i.e., surmédianes par rapport à (\hat{U}_p)) séparent F^m .*

On a ainsi un noyau de Martin $k_p(x, y)$ ($g_p(x, y)$ dans la notation de [6]) sur $E \times F^m$ tel que pour tout $y \in F^m$, $k_p(\cdot, y)$ soit p -excessive (par rapport à (U_p)) et pour tout $x \in E$, $k_p(x, \cdot)$ soit p -coexcessive (i.e., p -excessive par rapport à (\hat{U}_p)).

2. Un choix initial. Il sera convenable dans la suite d'avoir une mesure de référence λ telle que si u est une fonction excessive λ -intégrable, alors $P_t u \rightarrow_{t \rightarrow \infty} 0$ p.p. Une telle mesure existe toujours: Soit λ_0 une mesure de référence telle que $\lambda_0 U$ soit une mesure de probabilité. Posons

$$\lambda = \lambda_0 U.$$

Soit u une fonction excessive λ -intégrable et soit v la régularisée excessive de la fonction surmédiane $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t u$. C'est une fonction invariante λ -intégrable. On a $Uv = U(pU_p v) = Uv - U_p v$ là où $Uv < \infty$, donc $U_p v = 0$ sur $\{Uv < \infty\}$, et finalement $v = 0$ sur $\{Uv < \infty\}$ car v est excessive. Mais v est λ -intégrable, donc $Uv < \infty$ λ_0 -p.p., par conséquent $v = 0$ λ_0 -p.p. et enfin $v = 0$ partout car λ_0 est une mesure de référence.

Remarquons que nous pouvons faire ce choix de λ tout de suite après avoir transformé le noyau u en un noyau borné par une opération du type (II) car la propriété de λ reste vraie pour toutes les opérations ultérieures du type (II). En effet, le théorème d'arrêt des martingales entraîne la propriété suivante: toute fonction invariante pour le processus changé de temps $(Y_t = X_{T_t})$ de la formule (1) est invariante pour (X_t) , du fait que $a \leq 1$.

3. Points de cobranchement. Appellons points de cobranchement les points de branchement de la résolvante (\hat{U}_p) sur F^m . Notons par \hat{B}^m l'ensemble de ces points et posons $\hat{B} = \hat{B}^m \cap F$. Nous avons

$$\hat{B} = \{x \in F : \varepsilon_x \hat{P}_0 \neq \varepsilon_x\} = \{x \in F : \lim \text{ vague } p\varepsilon_x \hat{U}_p \neq \varepsilon_x\}.$$

LEMME 1. *L'ensemble \hat{B} est borélien et semi-polaire pour le processus (X_t) .*

DÉMONSTRATION. Il est facile de voir que \hat{B} est borélien, démontrons qu'il est semi-polaire. Soit $h \in \mathcal{C}(F^m)$, alors le processus $(h \circ \hat{X}_t)$ est continu à gauche et pourvu de limites à droite. Le raisonnement utilisé dans la démonstration du Lemme 1 de [6] démontre que $\lim_{p \rightarrow \infty} p\hat{U}_p h = h$ sur F , sauf sur un ensemble semi-polaire. \hat{B} étant la réunion de ces ensembles lorsque h parcourt une suite dense dans $\mathcal{C}(F^m)$ pour la convergence uniforme, le lemme est démontré.

4. Comportement à l'infini des u -processus. Dans toute la suite nous parlerons du retourné d'un processus. Nous posons donc une définition générale.

DÉFINITION 1. Soit $(Z_t)_{t \geq 0}$ (resp. $(Z_t)_{t > 0}$) un processus réel, alors son retourné $(\hat{Z}_t)_{t > 0}$ (resp. $(\hat{Z}_t)_{t \geq 0}$) est défini de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_t(\omega) &= Z_{\zeta(\omega)-t}(\omega)I_{]0, \zeta(\omega)]}(t) && \text{pour } t > 0 \\ \text{[resp. } \hat{Z}_t(\omega) &= Z_{\zeta(\omega)-t}(\omega)I_{[0, \zeta(\omega)]}(t) && \text{pour } t \geq 0] \end{aligned}$$

lorsque (Z_t) est un processus à valeurs dans $F^m \cup \{\partial\}$, son retourné est défini comme le seul processus (\hat{Z}_t) à valeurs dans $F^m \cup \{\partial\}$, tel que pour toute fonction $h \in \mathcal{C}(F^m)^1$, le retourné du processus $(h \circ Z_t)$ soit $(h \circ \hat{Z}_t)$. Par exemple, le retourné du processus $(X_t^m)_{t > 0}$ est le processus $(\hat{X}_t^m)_{t \geq 0}$.

Maintenant, soit u une fonction excessive et λ -intégrable. Construisons le semi-groupe $(P_t^{(u)})$, sa résolvante $(U_p^{(u)})$ et la loi $P^{u \cdot \lambda / u}$ sur Ω telle que, Ω étant muni de cette loi, le processus (X_t) admette $(P_t^{(u)})$ comme semi-groupe, $u \cdot \lambda$ comme loi initiale. Notez que $u \cdot \lambda$ est portée par $F_u = \{0 < u < \infty\}$, ainsi que le processus X_t : considéré comme processus à valeurs dans F ou F^m , il reste dans F_u .

Rappelons que, pour toute loi P^x ($x \in F$) le processus (X_t) , comme processus à valeurs dans F^m , est continu à droite sur $[0, \zeta]$ et pourvu de limites à gauche sur $]0, \zeta]$. Un raisonnement connu ([7], chapitre I, Théorème 21) montre alors que le u -processus, comme processus à valeurs dans F^m , est continu à droite sur

¹ Dans cet article, si E est un espace topologique, nous notons par $\mathcal{C}(E)$ l'espace des fonctions boréliennes bornées sur E .

[0, ζ] et admet des limites à gauche sur]0, ζ[. Par contre, l'existence des limites à gauche en ζ n'est pas évidente.

Voici donc l'un des résultats principaux de cet article. (\hat{P}_t^m) (resp. (\hat{P}_{t-}^m)) dénote le semi-groupe vaguement continu à droite (resp. vaguement continu à gauche) associé à la résolvante de Ray (\hat{U}_p) sur F^m [11].

THÉORÈME 2. *Munissons Ω de la loi $P^{u \cdot \lambda/u}$. Alors le processus (X_t) admet des limites à gauche dans F^m , $(X_{t-}^m)_{t>0}$. Si l'on note μ_0 la loi de X_{t-}^m , μ_0 est portée par l'ensemble des points de non-cobranchement et le processus retourné $(\hat{X}_{t+}^m)_{t \geq 0}$ est fortement markovien, admet (\hat{P}_t^m) comme semi-groupe et μ_0 comme loi initiale.*

DÉMONSTRATION. Le choix que nous avons fait de la mesure λ nous permet d'affirmer que la durée de vie du u -processus est finie. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Chung et Walsh ([6], Théorème 2):

Désignons par $\mathcal{F}_t^{(u)}$ la tribu complétée de \mathcal{F}_t° , et par $\hat{\mathcal{F}}_t^{(u)}$ la tribu

$$\{A \in \mathcal{F}_t^{(u)} : \text{pour tout } s \geq 0, A \cap \{\zeta > t + s\} = \theta_s^{-1}(A) \cap \{\zeta > t + s\}\}$$

à laquelle on adjoint les ensembles $P^{u \cdot \lambda/u}$ -négligeables. Alors il existe un semi-groupe sous-markovien $(\hat{P}_t^{(u)})$ sur F , transformant les fonctions boréliennes en fonctions boréliennes, possédant les propriétés suivantes:

(a) Le processus $(\hat{X}_t)_{t>0}$ est modérément markovien par rapport à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t^{(u)})$, avec $(\hat{P}_t^{(u)})$ comme semi-groupe de transition.

(b) La résolvante $(\hat{U}_p^{(u)})$ de $(\hat{P}_t^{(u)})$ est en dualité avec $(U_p^{(u)})$ relativement à $u \cdot m = (u \cdot \lambda)U^{(u)}$:

$$\langle f, U_p^{(u)}g \rangle_{u \cdot m} = \langle \hat{U}_p^{(u)}f, g \rangle_{u \cdot m} \quad f, g \in \mathcal{G}^+(F)$$

Notons par μ_t la loi de (\hat{X}_t) , c'est-à-dire

$$\mu_t(f) = E^{u \cdot \lambda/u}[f \circ \hat{X}_t] \quad f \in \mathcal{G}(F).$$

Démontrons alors le lemme suivant.

LEMME 2. *Les μ_t , considérées comme mesures sur F^m , ont des limites vagues à droite sur \mathbb{R}_+^* et celles-ci s'écrivent de manière unique sous la forme $\mu_0 \hat{P}_t^m$, où μ_0 est une mesure sur F^m portée par l'ensemble des points de non-cobranchement.*

DÉMONSTRATION. Remarquons que la résolvante (\hat{U}_p) est elle aussi en dualité avec $(U_p^{(u)})$ relativement à $u \cdot m$. Par conséquent, l'ensemble

$$A = \{x \in F : \hat{U}_p(x, \cdot) \neq \hat{U}_p^{(u)}(x, \cdot)\}$$

est $u \cdot m$ -négligeable, donc il existe un ensemble T de mesure pleine dans \mathbb{R}_+ tel que pour tout $t \in T$ on ait $\mu_t(A) = 0$. Ceci entraîne que pour $t \in T$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{G}(F)$ on a

$$\hat{U}_p^{(u)}f(\hat{X}_t) = \hat{U}_p f(\hat{X}_t) \quad \text{P}^{u \cdot \lambda/u}\text{-p.s.}$$

et comme le processus (\hat{X}_t) admet $(\hat{U}_p^{(u)})$ comme résolvante, on obtient

$$(2) \quad E^{u \cdot \lambda/u}[\int_0^\infty e^{-ps} f \circ \hat{X}_{t+s} ds | \hat{\mathcal{F}}_t^{(u)}] = \hat{U}_p f(\hat{X}_t).$$

La même relation étant vraie pour toute fonction $h \in \mathcal{C}(F^m)$ et (\hat{X}_t) étant continu à gauche comme processus à valeurs dans F^m , on conclut finalement, par une inversion de transformation de Laplace

$$E^{u\lambda/u}[h \circ X_{t+s} | \mathcal{F}_t^{(u)}] = \hat{P}_{s-}^m h(\hat{X}_t) \quad \text{pour tout } s > 0.$$

Il en résulte que la famille $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$ forme une loi d'entrée pour le semi-groupe (\hat{P}_{t-}^m) , de masse ≤ 1 . Mais alors, considérées comme mesures sur F^m , elles admettent des limites vagues à droite sur \mathbb{R}_+^* , qui forment une loi d'entrée $(\tilde{\mu}_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$ pour le semi-groupe (\hat{P}_t^m) . Or toute loi d'entrée pour (\hat{P}_t^m) s'écrit de manière unique sous la forme $\mu_0 \hat{P}_t^m$, où μ_0 est une mesure sur F^m portée par l'ensemble des points de non-cobranchement ([12], Théorème 9). Le lemme est établi.

Passons maintenant à la démonstration du théorème. Construisons le processus (\hat{Y}_t) continu à gauche à valeurs dans F^m , admettant (\hat{P}_{t-}^m) comme semi-groupe, $(\mu_0 \hat{P}_{t-}^m)_{t>0}$ comme loi d'entrée. Il admet des limites à droite dans F^m . Les processus (\hat{Y}_t) et (\hat{X}_t) sont identiques en loi sur T , donc identiques en loi car ils sont continus à gauche. Donc le processus (\hat{X}_t) lui aussi admet des limites à droite dans F^m , \hat{X}_{t+}^m .

D'après la relation (2) et en inversant la transformation de Laplace, on conclut que le processus (\hat{X}_{t+}^m) admet (\hat{P}_t^m) comme semi-groupe (il est donc fortement markovien) et μ_0 comme loi initiale.

Evidemment, le Théorème 2 entraîne le résultat suivant.

COROLLAIRE 1. *Munissons Ω de la loi $P^{u \cdot \lambda/u}$. Alors le processus $(\hat{X}_t)_{t>0}$, considéré comme processus à valeurs dans F^m , est modérément markovien, admet (\hat{P}_{t-}^m) comme semi-groupe de transition et $(\mu_0 \hat{P}_{t-}^m)_{t>0}$ comme loi d'entrée.*

5. Représentations integrales. Nous donnons maintenant les résultats concernant la représentation des fonctions excessives ainsi que celle des réduites et des réduites extérieures (formules de dualité de Hunt).

THÉORÈME 3. *Soit u une fonction excessive λ -intégrable. Alors, il existe une mesure unique μ_0 sur F^m , portée par l'ensemble des points de non-cobranchement, telle que $u = K\mu_0^2$. Cette mesure est la loi de $X_{\zeta-}^m$, Ω étant muni de la loi $P^{u \cdot \lambda/u}$.*

DÉMONSTRATION. Construisons le u -processus admettant $u \cdot \lambda$ comme loi initiale et notons par μ_0 la loi de $X_{\zeta-}^m$. C'est une mesure sur F^m portée par l'ensemble des points de non-cobranchement d'après le Théorème 2. La relation (2) montre que pour toute fonction $f \in \mathcal{G}(F)$, on a:

$$\mu_0 \hat{U}(f) = E^{u\lambda/u} \int_0^\infty f \circ \hat{X}_{s+}^m ds = E^{u\lambda/u} \int_0^\infty f \circ X_s ds = (u\lambda)U(f);$$

c'est-à-dire $\mu_0 \hat{U} = u \cdot m$, soit en prenant des densités

$$u = K\mu_0 \lambda\text{-p.p.}$$

donc partout puisque les deux membres sont des fonctions excessives.

² Nous appellerons cette mesure, la "mesure représentative de u ."

Démontrons l'unicité: remarquons qu'une mesure μ sur F^m satisfait à l'énoncé du théorème si et seulement si elle ne charge pas l'ensemble des point de cobranchement et satisfait à $\mu\hat{U} = u \cdot m$. Si μ est une telle mesure, on a alors, pour toute fonction $h \in \mathcal{C}(F^m)$

$$\begin{aligned} \langle \mu, h \rangle &= \langle \mu, \lim_p p\hat{U}_p h \rangle = \lim_p \langle \mu, \hat{U}h - p\hat{U}\hat{U}_p h \rangle \\ &= \lim_p \langle \mu\hat{U}, h - p\hat{U}_p h \rangle = \lim_p \langle u \cdot m, h - p\hat{U}_p h \rangle, \end{aligned}$$

expression qui ne dépend que de u .

Nous passons maintenant à la représentation des réduites et des réduites extérieures.

DÉFINITION 2. Si A est un ensemble borélien de F^m et $h \in \mathcal{C}(F^m)$, nous posons

$$\begin{aligned} L_A &= \sup \{t < \zeta : X_t \in A\} & S_A &= \sup \{t \leq \zeta : X_{t-}^m \in A\} \\ \hat{L}_A &= \inf \{t > 0 : \hat{X}_t \in A\} & \hat{S}_A &= \inf \{t \geq 0 : \hat{X}_{t+}^m \in A\} \\ \hat{J}_A h &= \hat{E}^*[h \circ \hat{X}_{\hat{L}_A+}^m] & \hat{R}_A h &= \hat{E}^*[h \circ X_{\hat{S}_A+}^m]. \end{aligned}$$

Rappelons ce qu'est la réduite extérieure sur un espace de Martin ([8], pages 78-83). Nous appelons co-ouverts (resp. cocompacts, coboréliens), les ouverts (resp. compacts, boréliens) de F^m . Si A est un coborélien, nous notons par $P_A u$ la fonction excessive $P_{A \cap F} u$, u étant excessive.

Soit alors u une fonction excessive. Pour tout co-ouvert G on pose:

$$\bar{P}_G u = P_G u.$$

Notez que $G \cap F$ est un ouvert fin. C'est une fonction d'ouvert croissante, fortement sous-additive et continue à gauche. La fonction d'ensemble

$$A \rightarrow \Pi_A u = \inf_{G \text{ co-ouvert}; G \supset A} \bar{P}_G u$$

est donc une capacité sur F^m . Pour tout A , coborélien ou non, $\Pi_A u$ ne diffère d'une fonction excessive que sur un ensemble semi-polaire: cette fonction excessive, nous la notons $\bar{P}_A u$. Noter que \bar{P}_A n'est pas un noyau. $A \mapsto P_A u^x$ est croissante, fortement sous-additive, passe au sup. Si A est coborélien, il existe des cocompacts $K_n \subset A$ croissants tels que $\bar{P}_{K_n} u \uparrow \bar{P}_A u$, des co-ouverts $G_n \supset A$ décroissants tels que $\bar{P}_{G_n} u \downarrow \bar{P}_A u$ p.p. sur F .

THÉORÈME 4. Soit u une fonction λ -intégrable. Munissons Ω de la loi $P^{u\lambda/u}$; soient μ_0 la loi représentative de u , A un coborélien. On a alors:

(a) $P_A u$ est représenté par la loi de $X_{L_A-}^m$. Soit en retournant le temps:

$$P_A u = K(\mu_0 \hat{J}_A);$$

(b) Si A est disjoint de \hat{B} , $\bar{P}_A u$ est représenté par la loi de $X_{S_A-}^m$. Soit en retournant le temps:

$$\bar{P}_A u = K(\mu_0 \hat{R}_A).$$

DÉMONSTRATION. Considérons le processus (Y_t) obtenu en tuant (X_t) à L_A . Notons L_A par L , \hat{L}_A par M . Le retourné continu à droite de (Y_t) est le processus $(\hat{X}_{(M+t)_+}^m)$. Or M est un temps d'arrêt de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t^{(u)})$ et la propriété de Markov forte du processus $(\hat{X}_{t_+}^m)$, nous dit alors que $(\hat{X}_{(M+t)_+}^m)$ est un processus de Markov admettant (\hat{P}_t^m) comme semi-groupe et comme loi initiale, la loi de $\hat{X}_{M_+}^m$, i.e., $\mu_0 \hat{J}_A$.

D'autre part, notons par c la fonction u -excessive $P^{u/L}\{L > 0\}$, et par v la fonction excessive $P_B u$. Nous avons $u \cdot c = P_B u$ sur E_u , et il est connu que le processus (Y_t) est un c -processus du u -processus, admettant $c \cdot u \cdot \lambda$ comme loi initiale. Autrement dit, c'est le v -processus admettant $v \cdot \lambda$ comme loi initiale. Donc, d'après le Théorème 3, la mesure représentative de v est la loi initiale du retourné continu à droite de (Y_t) , i.e., $\mu_0 \hat{J}_A$ d'après la première partie de la démonstration. Ceci démontre (a). Pour (b), démontrons d'abord un lemme.

LEMME 3. Soit G un co-ouvert. Alors on a

$$L_G = S_G.$$

DÉMONSTRATION. Si $X_t \in G$, $X_s \in G$ sur tout un intervalle $[t, t + \varepsilon[$, car (X_s) est continu à droite sur F^m . Donc $X_{s-}^m \in G$ pour des $s \in [t, t + \varepsilon[$. Donc, $L_G \leq S_G$. D'autre part, (X_{s-}^m) étant continu à gauche sur F^m , un raisonnement du même type démontre que $S_G \leq L_G$.

Démontrons maintenant (b). D'après le lemme et la partie (a), on a (b) lorsque A est un co-ouvert non nécessairement disjoint de \hat{B} . Supposons que A est un cocompact disjoint de \hat{B} et choisissons une suite décroissante (G_n) de co-ouverts contenant A telle que $A = \bigcap_n \bar{G}_n$ et telle que $\bar{P}_{G_n} u \downarrow \bar{P}_A u$ p.p. D'après la "quasi-continuité à gauche," sur l'ensemble des points de non-cobranchement, du processus de Ray $(\hat{X}_{t_+}^m)$, on a

$$\lim_n \hat{X}_{\hat{S}_{G_n}^+}^m = \hat{X}_{\hat{S}_A^+}^m \quad \text{p.s.}$$

Donc, la suite des mesures $(\mu_0 \hat{R}_{G_n})$ converge vaguement vers $\mu_0 \hat{R}_A$. Or nous savons que $\bar{P}_{G_n} u = K(\mu_0 \hat{R}_{G_n})$ et alors le Lemme 4 de [6] démontre que $\bar{P}_A u = K(\mu_0 \hat{R}_A)$.

Finalement si A est un borélien disjoint de \hat{B} , on choisit une suite croissante (K_n) de cocompacts contenus dans A telle que $\bar{P}_{K_n} u \uparrow \bar{P}_A u$ et telle que $\hat{S}_{K_n} \downarrow \hat{S}_A$ p.s., une telle suite existe d'après un théorème de Dellacherie ([9], page 274). On applique donc le raisonnement ci-dessus et on obtient le résultat.

Il faut remarquer que la représentation de la réduite $P_A u$, donnée par le Théorème 4, n'est pas la même que celle que nous avons obtenu dans [6], Théorème 4. Nous montrerons ceci dans les exemples du paragraphe 12. L'idée est que la mesure représentative de $P_A u$ donnée par le Théorème 4 de [6] est portée par \bar{A} . Donc, si par exemple, l'on prend $A = \hat{B}$, cette mesure peut charger \hat{B} , tandis que celle qui est donnée par le Théorème 4 ne le charge pas. On voit du même coup que la mesure du Théorème 4 n'est pas nécessairement portée par

\bar{A} . Or, il faut noter aussi que si A est un cocompact disjoint de \hat{B}^m , alors l'unicité de la représentation de Martin montre que les mesures données par les deux théorèmes, sont les mêmes. En plus, si A est un coborélien disjoint de \hat{B} , alors la mesure $\mu_0 J_A$ est aussi portée par \bar{A} . Démontrons cette dernière affirmation.

Comme dans la démonstration du théorème, notons \hat{L}_A par M . Définissons un temps d'arrêt T de la façon suivante:

$$T = M \quad \text{si } M > 0, \hat{X}_M \in A, \\ = \infty \quad \text{sinon.}$$

(X_t) étant un processus prévisible de la famille (\mathcal{F}_t) , on conclut que T est un temps d'arrêt prévisible de cette famille. La "quasi-continuité à gauche" du processus (\hat{X}_{t+}^m) et le fait que $\hat{X}_T \notin \hat{B}^m$ p.s., entraînent alors $\hat{X}_T = \hat{X}_{T+}^m$ p.s.

On conclut que $\hat{X}_M = \hat{X}_{M+}^m$, donc $\hat{X}_{M+}^m \in A$, p.s. sur l'ensemble où $M > 0$ et $\hat{X}_M \in A$. D'autre part, il est clair que si $M = 0$ ou $\hat{X}_M \notin A$ alors $\hat{X}_{M+}^m \in \bar{A}$. L'affirmation est donc démontrée.

En ce qui concerne la réduite extérieure, il est évident que si A est un coborélien disjoint de \hat{B} , alors la mesure représentative de $\bar{P}_A u$ est portée par \bar{A} . De même, d'après le Lemme 3, si G est un co-ouvert alors la mesure représentative de $\bar{P}_G u = P_G u$ est portée par \bar{G} .

6. L'hypothèse (B) de Hunt.

LEMME 4. Soit G un co-ouvert et soient w_1, w_2 deux fonctions co-excessives sur F^m , égales p.p. sur $G \cap F$. Alors $w_1 = w_2$ sur $G \setminus \hat{B}^m$.

DÉMONSTRATION. Soit w une fonction co-excessive et soit $y \in G \setminus \hat{B}^m$.

Alors la mesure $p\hat{U}_p(\cdot, y)$ converge vaguement vers ε_y . La fonction $w \cdot I_G$ étant s.c.i., on a

$$w(y) \leq \liminf_{p \rightarrow \infty} p\hat{U}_p(w \cdot I_G)(y),$$

w étant co-excessive, on a l'autre inégalité et on obtient

$$w(y) = \liminf_{p \rightarrow \infty} p\hat{U}_p(w I_G)(y) \quad \text{pour tout } y \in G \setminus \hat{B}^m.$$

Or d'après les hypothèses, on a $\hat{U}_p(w_1 \cdot I_G) = \hat{U}_p(w_2 \cdot I_G)$ pour tout $p > 0$. Le lemme est donc démontré.

COROLLAIRE 2. Soient G un co-ouvert, μ une mesure sur F^m portée par $G \setminus \hat{B}^m$. Alors on a $P_G K\mu = K\mu$.

DÉMONSTRATION. Pour toute fonction $f \in \mathcal{G}(F)$, nulle hors de G , on a $P_G Uf = Uf$. On conclut donc que $P_G k_y = k_y$ pour m -presque tout $y \in G$. Les deux fonctions étant co-excessives comme fonctions en y , on a d'après le lemme, $P_G k_y = k_y$ pour tout $y \in G \setminus \hat{B}^m$. Comme μ est portée par cet ensemble, on obtient le résultat.

THÉORÈME 5. Soit u une fonction excessive λ -intégrable et soit A un coborélien

disjoint de \hat{B} . Alors, on a:

- (a) $P_G P_A u = P_A u$ pour tout co-ouvert G contenant A ;
- (b) $\bar{P}_B \bar{P}_A u = \bar{P}_A u$ pour tout coborélien B contenant A .

DÉMONSTRATION. Nous ne démontrerons que (a), (b) est obtenu par un raisonnement du même type. Supposons d'abord que A soit cocompact, alors la mesure représentative de $P_A u$ est portée par $A \setminus \hat{B}^m$, donc on obtient (a) d'après la Corollaire 2. Pour un coborélien A , il suffit de remarquer qu'il existe une suite croissante (K_n) de cocompacts contenus dans A telle que $P_{K_n} u \uparrow P_A u$ et on obtient le résultat en appliquant le début de la démonstration.

On a donc obtenu une forme de l'hypothèse (B) de Hunt qui pour nous sera suffisante pour tirer quelques conséquences. Nous finissons ce chapitre par un corollaire du Théorème 5.

THÉORÈME 6. Soit A un ensemble borélien (de F) semi-polaire et disjoint de \hat{B} . On a alors:

- (a) $P^x\{X_{T_G} \in A\} = 0$ pour tout co-ouvert G contenant A et pour tout $x \in F \setminus A$;
- (b) $P^\lambda\{X_T \in A\} = 0$ pour tout temps d'arrêt totalement inaccessible de la famille (\mathcal{F}_t) .

DÉMONSTRATION. Il suffit de traiter le cas où A est un borélien sans points réguliers. Pour (a) il suffit de démontrer $P^x\{X_{T_G} \in A\} = 0$ pour tout $x \notin \text{reg}(G)$. Supposons donc que $x \notin \text{reg}(G)$; d'après (a) du Théorème 5 on a $P_A U1 - P_G P_A U1 = 0$, autrement dit

$$E^*[\int_{T_A}^{T_G + T_A \circ \theta_{T_G}} ds] = 0.$$

Or on a $T_G + T_A \circ \theta_{T_G} > T_A$ P^x -p.s. sur l'ensemble $\{X_{T_G} \in A\}$, donc cet ensemble est P^x -négligeable.

Pour démontrer (b), nous utiliserons un résultat qui sera démontré plus tard (Théorème 9), à savoir, si T est un temps d'arrêt totalement inaccessible de la famille (\mathcal{F}_t) , on a $X_{T-}^m \neq X_T$ P^λ -p.s.

Supposons alors qu'il existe un temps d'arrêt totalement inaccessible à T tel que $P^\lambda\{X_T \in A\} > 0$. Soit d une distance définissant la cotopologie, alors comme $X_{T-}^m \neq X_T$ P^λ -p.s., on peut trouver un $\varepsilon > 0$ et un cocompact K contenu dans A , de diamètre $\leq \varepsilon$ tel que l'ensemble

$$W = \{\omega : d(X_{T-}^m(\omega), X_T(\omega)) > 2\varepsilon, X_T(\omega) \in K\}$$

ne soit pas P^λ -négligeable. Choisissons une variable aléatoire $S < T$ sur W et égale à ∞ sur W^c telle que l'on ait $d(X_t, K) > \varepsilon$ pour tout $t \in [S, T]$ P^λ -p.s. Alors si G est le voisinage d'ordre ε de K et μ la loi de X_S , on a

$$P^\mu\{X_{T_G} \in K\} = P^\lambda(W) > 0$$

et comme μ ne charge pas K , ceci contredit le résultat de la partie (a).

7. Propriétés de Ray de "L'espace de Martin." Nous considérons dans ce

paragraphe la compactification de Ray F^r de F par rapport au processus (X_t) ; et nous démontrons que nous pouvons transporter les propriétés de F^r sur F^m à l'aide d'un noyau de F^m dans F^r . Pour les résultats concernant les résolvantes de Ray nos références sont [11] et [12].

Nous avons un compactifié de Ray F^r , du processus (X_t) , qui admet F comme sous-ensemble borélien dense. Sur F^r nous avons une résolvante de Ray (U_p) . Notons par $(P_t^r)_{t \geq 0}$ (resp. $(P_{t-}^r)_{t \geq 0}$) le semi-groupe vaguement continu à droite (resp. vaguement continu à gauche) associé à (U_p) . Pour toute loi initiale μ sur F , munissons Ω de la loi P^μ , alors le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ considéré comme processus à valeurs dans F^r est fortement markovien et admet (P_t^r) comme semi-groupe de transition. Le processus $(X_{t-}^r)_{t \geq 0}$, à valeurs dans F^r , est modérément markovien et admet (P_{t-}^r) comme semi-groupe de transition.

Nous posons maintenant une définition qui sera très utilisée dans la suite.

DÉFINITION 3. Un sous-ensemble borélien A de F^m est dit λ -polaire à gauche si P^λ -p.s. il n'est pas rencontré sur $]0, \zeta]$ par les trajectoires du processus (X_t^m) .

Notons par $\hat{\lambda}$ la mesure initiale du processus (\hat{X}_{t+}^m) pour la loi P^λ , alors un ensemble λ -polaire à gauche n'est pas autre chose qu'un ensemble λ -copolaire (i.e., un ensemble λ -polaire pour le processus (\hat{X}_{t+}^m)) et $\hat{\lambda}$ -négligeable.

Si h_1 et h_2 sont deux fonctions boréliennes sur F^m égales, sauf sur un ensemble λ -polaire à gauche, nous écrirons $h_1 = h_2$ \hat{q} .p.

Voici alors le deuxième des résultats principaux de cet article.

LEMME 5. Soit $g \in \mathcal{G}(F^r)$. Alors il existe une fonction $\tilde{g} \in \mathcal{G}(F^m)$ définie à un ensemble λ -polaire à gauche près, telle que les processus $(g \circ X_{t-}^r)_{t > 0}$ et $(\tilde{g} \circ X_{t-}^m)_{t > 0}$ soient P^λ -indistingables.

DÉMONSTRATION. Si nous démontrons le lemme pour toute fonction $g \in \mathcal{G}(F^r)$, alors on le démontre pour $g \in \mathcal{G}(F^r)$ par un argument de classes monotones. Supposons donc que $g \in \mathcal{G}(F^r)$. Le processus $(g \circ X_t)$ est continu à droite et pourvu de limites à gauche, de sorte que le processus $(g \circ \hat{X}_t)$ est continu à gauche, et pourvu de limites à droite. Démontrons d'abord que $\lim_p p\hat{U}_p g$ existe \hat{q} .p. En effet, le processus (\hat{X}_t) admet (\hat{U}_p) comme résolvante et alors on a pour tout $t, s > 0$

$$p\hat{U}_p g(\hat{X}_s) = E^\lambda[p \int_0^\infty e^{-pt} g \circ \hat{X}_{t+s} dt | \hat{\mathcal{F}}_s] \quad P^\lambda\text{-p.s.}$$

Prenant des limites à droite en la variable s , on obtient

$$(3) \quad p\hat{U}_p g(\hat{X}_{s+}^m) = E^\lambda[p \int_0^\infty e^{-pt} (g \circ \hat{X}_{t+s})_+ | \hat{\mathcal{F}}_s] \quad P^\lambda\text{-p.s.}$$

et finalement

$$(4) \quad \lim_p p\hat{U}_p g(X_{s+}^m) = (g \circ \hat{X}_s)_+ \quad P^\lambda\text{-p.s.}$$

ce qui démontre que $\lim_p p\hat{U}_p g$ existe \hat{q} .p. Posons alors $\tilde{g}(x) = \lim_p p\hat{U}_p g(x)$ si la limite existe, et, sinon, $\tilde{g}(x) = 0$. D'après la relation (1), on a $\tilde{g} \circ \hat{X}_{s+}^m = (g \circ \hat{X}_s)_+ P^\lambda$ -p.s. pour tout $s > 0$. Or les deux membres de (3) étant continus à droite en la variable s , l'ensemble négligeable de (4) peut être pris le même

pour tout $s > 0$. On conclut que les processus $(\tilde{g} \circ \hat{X}_{t+}^m)$ et $(g \circ \hat{X}_t)_+$ sont P^λ -indistinguables. En retournant le temps, on obtient que les processus $(\tilde{g} \circ X_{t-}^m)$ et $(g \circ X_t)_-$ sont P^λ -indistinguables. Pour démontrer le lemme, il nous reste à remarquer que $(g \circ X_t)_- = g \circ X_{t-}$ car $g \in \mathcal{G}(F^r)$.

REMARQUE. Nous pouvons démontrer le Lemme 5 par une autre méthode qui utilise un théorème d’Azéma sur le retournement du temps. Ce n’est pas la peine de reproduire ici le travail d’Azéma, nous l’appliquons donc sans rappeler les définitions, nos références sont [2] et [10]. La propriété de Markov forte du processus (\hat{X}_{t+}^m) entraîne que tout processus coprévisible et optionnel de la famille (\mathcal{F}_t) , nul sur $[\zeta, \infty[$ est P^λ -indistinguable d’un processus de la forme $(h \circ \hat{X}_{t+}^m)_{t \geq 0}$ où h est une fonction borélienne sur F^m définie à un ensemble λ -polaire à gauche près. Or le théorème du retournement d’Azéma nous dit que si $(Z_t)_{t > 0}$ est un processus prévisible et cooptionnel de la famille (\mathcal{F}_t) , alors son retourné $(\hat{Z}_t)_{t \geq 0}$ est un processus coprévisible et optionnel de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ et il est nul sur $[\zeta, \infty[$. On conclut donc, en retournant le temps, que tout processus prévisible et cooptionnel, nul sur $]\zeta, \infty[$, est P^λ -indistinguable d’un processus de la forme $(h \circ X_{t-}^m)$ où h est une fonction borélienne sur F^m définie à un ensemble λ -polaire à gauche près. La démonstration du lemme est maintenant très courte, car si $g \in \mathcal{G}(F^r)$, alors le processus $(g \circ X_{t-}^r)$ est un processus prévisible et cooptionnel de la famille (\mathcal{F}_t) et il est nul sur $]\zeta, \infty[$; on peut donc lui appliquer le résultat ci-dessus et le lemme est démontré.

THÉORÈME 7. *Il existe une application borélienne n de F^m dans F^r , définie à un ensemble λ -polaire à gauche près, telle que le noyau N de F^m dans F^r défini par $Ng = g \circ n$, possède la propriété suivante:*

- (5) *pour toute fonction $g \in \mathcal{G}(F^r)$, les processus $(g \circ X_{t-}^r)_{t > 0}$ et $(Ng \circ X_{t-}^m)_{t > 0}$ sont P^λ -indistinguables.*

DÉMONSTRATION. Nous avons une partition de $\mathcal{G}(F^m)$ en classes d’équivalence modulo les ensembles λ -polaires à gauche: h_1 et h_2 appartiennent à la même classe si et seulement si on a $h_1 = h_2$ \hat{q} .p. Soit alors $g \in \mathcal{G}(F^r)$ et notons par $A(g)$ la classe d’équivalence qui contient la fonction \tilde{g} telle que les processus $(g \circ X_{t-}^r)_{t > 0}$ et $(\tilde{g} \circ X_{t-}^m)_{t > 0}$ soient P^λ -indistinguables. La propriété (5) s’exprime alors en disant que $Ng \in A(g)$ pour toute fonction $g \in \mathcal{G}(F^r)$. On vérifie facilement que les classes $A(g)$ possèdent les propriétés suivantes:

- (a) $1 \in A(1)$,
- (b) $A(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 A(g_1) + \lambda_2 A(g_2)$ pour $g_1, g_2 \in \mathcal{G}(F^r)$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$,
- (c) si $g_1 \leq g_2$ et $h_1 \in A(g_1)$, $h_2 \in A(g_2)$, alors $h_1 \leq h_2$ \hat{q} .p.

(a), (b) et (c) entraînent encore une propriété:

- (d) soit (g_n) une suite de fonctions de $\mathcal{G}(F^r)$ qui converge simplement vers $g \in \mathcal{G}(F^r)$ et soient $h_n \in A(g_n)$, $h \in A(g)$. Alors $h_n \rightarrow h$ \hat{q} .p.

Soit $(g_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues et positives sur F^r , dense dans

$\mathcal{C}^+(F^r)$ pour la convergence uniforme et contenant la fonction 1. Définissons alors l'espace suivant:

$$H = \{ \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i : \lambda_i \in \mathbf{Q}, n \in \mathbf{N} \}.$$

C'est un espace vectoriel sur les rationnels, dense dans $\mathcal{C}(F^r)$ pour la convergence uniforme, et dénombrable. Pour $g \in H$, désignons par N^1g une fonction arbitraire $N^1g \in A(g)$. Notons par B l'ensemble des points $x \in F^m$ tels que $N^1(x, 1) \neq 1$, ou que $N^1(x, \cdot)$ ne soit pas linéaire (sur les rationnels) sur H ou que ne soit pas positive (où positive veut dire que si g est une fonction positive dans H , alors $N^1(x, g) \geq 0$). D'après (b) et (c) et le fait que H est dénombrable nous pouvons conclure que B est λ -polaire. Nous choisirons un point arbitraire $a \in F^r$, et nous poserons pour $g \in H$

$$N^2(x, g) = N^1(x, g) \text{ si } x \in F^m \setminus B, \quad N^2(x, g) = g(a) \text{ si } x \in B.$$

N^2 est alors linéaire sur H et positive, $N^2g \in A(g)$ pour toute fonction $g \in H$ et $N^21 = 1$. Maintenant le fait que H soit dense dans $\mathcal{C}(F^r)$ nous permet d'étendre N^2 : pour $g \in \mathcal{C}(F^r)$ prenons une suite (g_n) de fonctions dans H qui converge uniformément vers g ; N^2 étant linéaire sur H et positive, la suite $(N^2g_n(x))$ est de Cauchy pour tout $x \in F^m$. Posons alors $N^3g(x) = \lim_n N^2g_n(x)$. N^3g est bien définie car la limite ne dépend que de g , et il est facile de vérifier que N^3 est linéaire (sur les réels) sur $\mathcal{C}(F^r)$ et positive. En plus $N^31 = 1$ et, d'après (d), $N^3g \in A(g)$ pour toute fonction $g \in \mathcal{C}(F^r)$. Finalement, N^3 s'étend en un noyau borélien N^0 de F^m dans F^r qui satisfait à $N^01 = 1$, et de nouveau d'après (d) et par un argument de classes monotones on démontre qu'il satisfait à (5). Il nous reste encore à améliorer N^0 de façon qu'il provienne d'une application borélienne n de F^m dans F^r . Démontrons d'abord un lemme.

LEMME 6. *L'ensemble B^0 des $x \in F^m$, tels que $N^0(x, \cdot)$ ne soit pas une masse unité, est borélien et λ -polaire à gauche.*

DÉMONSTRATION. Pour tout couple de fonctions $g_1 \in \mathcal{G}(F^r)$, $g_2 \in \mathcal{G}(F^r)$ on a $\widetilde{g_1 \cdot g_2} = \widetilde{g_1} \cdot \widetilde{g_2}$ q.p. Donc l'ensemble des points $x \in F^m$ tels que la mesure $N^0(x, \cdot)$ ne soit pas multiplicative est λ -polaire à gauche, et il est facile de voir qu'il est borélien. Or cet ensemble est justement B^0 car pour tout $x \in F^m$ la mesure $N^0(x, \cdot)$ a une masse totale égale à 1.

Revenons alors à la démonstration du Théorème 2.3. La mesure $N^0(x, \cdot)$ étant une masse unité pour tout $x \in F^m \setminus B^0$, il existe une application borélienne $n_0: F^m \setminus B_0 \rightarrow F^r$ telle qu'on ait $N^0g = g \circ n_0$ sur $F^m \setminus B_0$ pour toute fonction $g \in \mathcal{G}(F^m)$. Soit y_0 un point arbitraire de F^r et définissons l'application borélienne $n: F^m \rightarrow F^r$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned} n(x) &= n_0(x) & \text{si } x \in F^m \setminus B^0 \\ &= y_0 & \text{si } x \in B^0. \end{aligned}$$

Alors comme B^0 est λ -polaire à gauche, le noyau $Ng = g \circ n$ satisfait à la propriété (5).

Remarquons finalement que les processus $(g \circ X_{t-}^r)_{t>0}$ et $(g \circ n \circ X_{t-}^m)_{t>0}$ étant P^λ -indistinguables pour toute fonction $g \in \mathcal{G}(F^r)$, on conclut la même chose pour les processus $(X_{t-}^r)_{t>0}$ et $(n \circ X_{t-}^m)_{t>0}$. Deux applications boréliennes satisfaisant à l'énoncé du théorème sont donc égales \hat{q} .p.

8. Limites à gauche de X_t dans l'espace de Martin. L'utilité des compactifiés de Ray pour l'étude des processus tient à un petit nombre de propriétés fondamentales, liant la prévisibilité des temps d'arrêt aux limites à gauche des processus, permettant le calcul explicite des sauts prévisibles des trajectoires au moyen du noyau P_0^r , etc. Nous allons montrer ici que toutes ces propriétés sont aussi vraies dans la compactification de Martin.

Notons par P_0^m le noyau NP_0^r . C'est un noyau de F^m dans F^r .

DÉFINITION 4. On pose

$$B^m = \{x \in F^m : \varepsilon_x P_0^m \neq \varepsilon_x\}.$$

Remarquons que N étant défini à un ensemble λ -polaire à gauche près, B^m lui aussi est défini à un ensemble λ -polaire à gauche près. Rappelons que tous les points de branchement de la résolvante (U_p^r) sont dans $F^r \setminus F$ et rappelons aussi que F^r était une compactification de Ray minimale, donc sans points de branchement dégénérés. Notons par B^r l'ensemble des points de branchement de la résolvante (U_p^r) tels que $P_0^r(x, \cdot)$ soit portée par F . Nous savons que tous les autres points de $F^r \setminus F$ sont inutiles. Nous pouvons donc supposer que N provienne d'une application n de F^m dans $F \cup B^r$. P_0^m est alors un noyau de F^m dans $F \cup B^r$.

Si x est un point de F^m tel que $n(x) \in B^r$, alors $\varepsilon_x P_0^m$ n'est pas une masse unité, donc $x \in B^m$. Si x est un point de F^m tel que $n(x) \notin B^r$ (donc $n(x) \in F$), alors $x \in B^m$ si et seulement si $n(x) \neq x$. Ainsi

$$(6) \quad B^m = \{x \in F^m : n(x) \notin B^r, n(x) \neq x\} \cup \{x \in F^m : n(x) \in B^r\}.$$

LEMME 7. B^m est semi-polaire pour le processus (X_t) .

DÉMONSTRATION. L'ensemble $\{n \circ X_t \in B^r\}$ est contenu dans l'ensemble $\{n \circ X_t \neq X_t\}$ car B^r n'est pas rencontré par les trajectoires de X_t . On a donc d'après (6) que l'ensemble $\{X_t \in B^m\}$ est aussi contenu dans l'ensemble $\{n \circ X_t \neq X_t\}$. Or les ensembles $\{n \circ X_t \neq n \circ X_{t-}^m\}$ et $\{X_t \neq X_{t-}^r\}$ étant à coupes dénombrables et les processus $(n \circ X_{t-}^m)$ et (X_{t-}^r) étant indistinguables, on conclut que l'ensemble $\{n \circ X_t \neq X_t\}$ est aussi à coupes dénombrables. Donc il en est de même aussi pour l'ensemble $\{X_t \in B^m\}$, ce qui entraîne que B^m est semi-polaire, d'après un théorème de Dellacherie ([4], Théorème 5, page 112).

Nous allons voir maintenant que B^m tient le rôle de l'ensemble des points de branchement du processus (X_t) considéré comme processus à valeurs dans F^m , et de même que B^r servait à décrire les limites à gauche de (X_t) dans F^r , B^m va nous servir à décrire les limites à gauche de (X_t) dans F^m . Nous verrons plus

tard qu'en quelque sorte les limites à gauche dans F^m sont les "vraies" limites à gauche du processus (X_t) .

THÉORÈME 8. Soit (T_n) une suite croissante de temps d'arrêt de la famille (\mathcal{F}_t) et soit T sa limite. Soit $A = \{T < \infty, T_n < T \text{ pour tout } n\}$. Alors si $g \in \mathcal{G}(F^r)$

$$(7) \quad E^\lambda[g \circ X_T I_{\{T < \infty\}} | \mathbf{V}_n \mathcal{F}_{T_n}] = (g \circ X_T I_{\{T < \infty\}})I_{A^c} + (P_0^m g \circ X_{T-}^m)I_A.$$

DÉMONSTRATION. En réalité, il n'y a presque rien à démontrer. La "quasi-continuité à gauche" des processus de Ray nous donne:

$$E^\lambda[g \circ X_t I_{\{T < \infty\}} | \mathbf{V}_n \mathcal{F}_{T_n}] = (g \circ X_T I_{\{T < \infty\}})I_{A^c} + (P_0^r g \circ X_{T-}^r)I_A.$$

Or les processus $(P_0^r g \circ X_{t-}^r)$ et $(P_0^m g \circ X_{t-}^m)$ étant P^λ -indistinguables, on conclut immédiatement à la relation (7).

COROLLAIRE 3. L'ensemble $\{X_{T-}^m \notin B^m\} \cap A$ est P^λ -p.s. contenu dans l'ensemble $\{X_{T-}^m = X_T\}$.

DÉMONSTRATION. Notons par K l'ensemble $\{X_{T-}^m \notin B^m\} \cap A$ qui est $\mathbf{V}_n \mathcal{F}_{T_n}$ -mesurable et remarquons que sur K nous avons $X_{T-}^m \in F$. Alors si f et g sont deux fonctions dans $\mathcal{G}(F)$, nous avons, d'après le Théorème 8,

$$\int_K f(X_{T-}^m)g(X_T) dP^\lambda = \int_K f(X_{T-}^m)P_0^m g'(X_{T-}^m) dP^\lambda = \int_K f(X_{T-}^m)g(X_{T-}^m) dP^\lambda$$

où g' dénote la fonction sur F^r , égale à g sur F et à 0 sur $F^r \setminus F$. Alors par un argument de classes monotones on obtient que pour toute fonction $u \in \mathcal{G}(F \times F)$, on a

$$\int_K u(X_{T-}^m, X_T) dP^\lambda = \int_K u(X_{T-}^m, X_{T-}^m) dP^\lambda,$$

prenant pour u l'indicatrice de la diagonale de $F \times F$, on voit que $X_{T-}^m = X_T$ P^λ -p.s. sur K .

COROLLAIRE 4. Soit T un temps d'arrêt de la famille (\mathcal{F}_t) tel que $T > 0$ P^λ -p.s. sur $\{T < \infty\}$ et tel que $X_{T-}^m \notin B^m$, $X_{T-}^m \neq X_T$ P^λ -p.s. Alors T est totalement inaccessible.

DÉMONSTRATION. D'après le Corollaire 3, si une suite (T_n) converge en croissant vers T , alors $T_n = T$ pour n grand sur $\{T < \infty\}$, ce qui veut dire que T est totalement inaccessible.

COROLLAIRE 5. Posons $H = \{(t, \omega) : 0 < t \leq \zeta(\omega), X_{t-}^m(\omega) \neq X_t(\omega)\}$. Alors l'ensemble H est contenu (à un ensemble évanescant près) dans la réunion de l'ensemble

$$\{(t, \omega) : X_{t-}^m(\omega) \in B^m\}$$

et d'une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt totalement inaccessibles.

DÉMONSTRATION. L'ensemble $H \cap \{(t, \omega) : X_{t-}^m \notin B^m\}$ est à coupes dénombrables, il est donc la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt de la famille (\mathcal{F}_t) . D'après le Corollaire 4, tous ces temps d'arrêt sont totalement inaccessibles.

Remarquons que l'ensemble $\{(t, \omega) : 0 < t \leq \zeta(\omega), X_{t-}^m(\omega) \in B^m\}$ est P^λ -indistinguable de la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt prévisibles de la famille (\mathcal{F}_t) .

Démontrons maintenant la réciproque du Corollaire 4.

LEMME 8. *Soit T un temps d'arrêt totalement inaccessible. Alors la limite à gauche X_{T-} dans F , existe P^λ -p.s. sur $\{T < \infty\}$ et vaut X_{T-}^m .*

DÉMONSTRATION. Nous montrerons que l'ensemble

$$H = \{(t, \omega) : t > 0, X_{t-}(\omega) \text{ n'existe pas ou } X_{t-}(\omega) \neq X_{t-}^m(\omega)\}$$

est P^λ -indistinguable d'une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles. Comme H est à coupes dénombrables, il suffit de démontrer que H est un ensemble prévisible. Notons par K l'ensemble des (t, ω) tels que $X_{t-}(\omega)$ n'existe pas. C'est un ensemble prévisible et sur K^c le processus X_{t-} est prévisible ([12], Lemme 2, page 157). Il nous suffit donc de montrer que $H \cap K^c$ est prévisible. Or cet ensemble est la réunion des ensembles prévisibles

$$H_n = \{(t, \omega) : t > 0, (t, \omega) \in K^c, f_n \circ X_{t-}(\omega) \neq f_n \circ X_{t-}^m(\omega)\},$$

où (f_n) est une suite de fonctions continues sur F^m , dense dans $\mathcal{C}(F^m)$ pour la convergence uniforme.

THÉORÈME 9. *Soit T un temps d'arrêt totalement inaccessible de la famille (\mathcal{F}_t) . Alors, on a P^λ -p.s. sur $\{T < \infty\} : T > 0, X_{T-}^m \notin B^m, X_{T-}^m \neq X_{T-}$.*

DÉMONSTRATION. La première propriété est connue. La deuxième résulte du fait que l'ensemble $\{(t, \omega) : 0 < t < \infty, X_{t-}^m \in B^m\}$ est P^λ -indistinguable de la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt prévisibles de la famille (\mathcal{F}_t) . Démontrons la troisième: nous avons P^λ -p.s., $X_{T-}^m \neq X_{T-}$ et $X_{T-} = X_{T-}^r$ ([12], Théorème 7 et Lemme 2 respectivement). Donc d'après le Lemme 8, on conclut que $X_{T-}^m = X_{T-}^r = X_{T-} \neq X_{T-}^r$ P^λ -p.s.

On voit dans la démonstration que les discontinuités totalement inaccessibles du processus (X_t) sont les mêmes sur F^m, F^r ou F . Par contre, les discontinuités prévisibles peuvent être différentes (voir l'exemple au paragraphe 12).

9. Représentation des mesures. Nous allons démontrer maintenant un théorème de représentation des mesures, ne chargeant pas les ensembles polaires, au moyen des fonctionnelles additives prévisibles. Nous utiliserons ici quelques résultats d'Azema sur le retournement du temps, nos références sont [2] et [10].

DÉFINITION 5. Soit (A_t) une fonctionnelle additive.³ Les noyaux suivants,

³ Par fonctionnelles additives, nous entendons ici les fonctionnelles additives parfaites (A_t) : processus croissants, continus à droite, adaptés à la famille (\mathcal{F}_t) , nuls en 0, et satisfaisant pour presque tout ω à l'identité $A_{t+s}(\omega) = A_s(\omega) + A_t(\theta_s \omega)$.

associés à (A_t) , seront utilisés dans la suite:

$$(8) \quad U_A f^x = E^x[\int_0^\infty f \circ X_t dA_t] \quad f \in \mathcal{G}(F), x \in F;$$

$$(9) \quad \bar{U}_A h^x = E^x[\int_0^\infty h \circ X_{t-}^m dA_t] \quad h \in \mathcal{G}(F^m), x \in F;$$

$$(10) \quad \tilde{U}_A F^x = E^x[\int_0^\infty F(X_{t-}^m, X_t) dA_t] \quad F \in \mathcal{G}(F^m \times F), x \in F.$$

Ce sont des noyaux qui transforment les fonctions positives en fonctions excessives.

LEMME 9. Soit (A_t) une fonctionnelle additive accessible telle que la mesure $\lambda \bar{U}_A$ ne charge pas l'ensemble B^m . Alors, P^λ -presque sûrement, (A_t) n'a pas de discontinuités en commun avec le processus (X_t) considéré comme processus à valeurs dans F^m (et on a donc $\lambda \bar{U}_A = \lambda U_A$).

DÉMONSTRATION. D'après le Corollaire 5, l'ensemble

$$H = \{(t, \omega) : 0 < t \leq \zeta, X_{t-}(\omega) \neq X_t(\omega)\}$$

est P^λ -indistinguable de la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt totalement inaccessible et d'une suite de graphes de temps d'arrêt prévisibles T_n tels que $X_{T_n-}^m \in B^m$. Les hypothèses entraînent donc immédiatement le résultat.

THÉORÈME 10. Soit ν une mesure positive et bornée sur F^m , ne chargeant pas les ensembles λ -polaires à gauche. Alors, il existe une fonctionnelle additive prévisible (A_t) telle que l'on ait

$$\nu = \lambda \bar{U}_A.$$

DÉMONSTRATION. Etant donné un processus $(Z_t)_{t>0}$, $(\mathcal{B}(R_+^*) \times \mathcal{F}^\circ)$ mesurable, positif et nul sur $] \zeta, \infty[$, nous formons sa projection prévisible (Z_t^p) pour P^λ , puis la projection cooptionnelle $(Z_t^{p\hat{\delta}})$ de (Z_t^p) . Le retourné de $(Z_t^{p\hat{\delta}})_{t>0}$ est un processus coprévisible et optionnel de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$, la propriété de Markov forte du processus (\hat{X}_{t+}^m) entraîne alors qu'il est P^λ -indistinguable d'un processus de la forme $(h \circ \hat{X}_{t+}^m)_{t \geq 0}$ où h est une fonction dans $\mathcal{G}(F^m)$ définie à un ensemble λ -polaire à gauche près. En retournant le temps, on voit donc que les processus $(Z_t^{p\hat{\delta}})_{t>0}$ et $(h \circ X_{t-}^m)_{t>0}$ sont P^λ -indistinguables. Posons

$$\eta(Z) = \nu(h).$$

η est alors une mesure sur $R_+^* \times \Omega$ portée par l'intervalle stochastique $]0, \zeta]$ et elle est à la fois cooptionnelle et prévisible d'après le théorème de commutation de projections ([10], IV). Il existe donc une fonctionnelle additive prévisible (A_t) telle que

$$\eta(Z) = E^\lambda[\int_0^\infty Z_t dA_t] \quad \text{pour tout } Z.$$

Si l'on prends $Z_t = h \circ X_{t-}^m$, où $h \in \mathcal{G}(F^m)$, on obtient

$$\nu(h) = \lambda \bar{U}_A(h)$$

et le théorème est établi.

COROLLAIRE 6. *Soit μ une mesure positive et bornée sur F , ne chargeant pas les ensembles polaires ni l'ensemble $B \cup \hat{B}$. Alors il existe une fonctionnelle additive prévisible (A_t) telle que l'on ait*

$$\mu = \lambda U_A .$$

DÉMONSTRATION. Considérons μ comme une mesure sur F^m portée par F . Démontrons d'abord qu'elle ne charge pas les ensembles λ -polaires à gauche. En effet, soit C un tel ensemble, comme μ ne charge pas \hat{B} nous pouvons supposer que C est disjoint de \hat{B}^m . Notons par (Y_t) le processus (\hat{X}_{t+}^m) , alors C est polaire pour (Y_t) , donc l'ensemble prévisible $\Gamma = \{(t, \omega) : Y_{t-}(\omega) \in C\}$ est à coupes dénombrables, et par conséquent il est la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt prévisibles de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$. Pour montrer que μ ne charge pas C il nous suffit de montrer que C est polaire. Comme on a $Y_{t-} = \hat{X}_t$, il est suffisant de montrer que Γ est P^λ -évanescent, soit que pour tout temps d'arrêt prévisible T de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ on a $Y_{T-} \notin CP^\lambda$ -p.s.

D'autre part, le processus (Y_t) est un processus de Ray avec \hat{B}^m comme ensemble des points de branchement, donc si T est un temps prévisible, on a :

- (a) ou bien $Y_{T-} \in \hat{B}^m$ et alors $Y_{T-} \notin C$ car $C \cap \hat{B}^m = \emptyset$,
- (b) ou bien $Y_{T-} \notin \hat{B}^m$ et alors $Y_{T-} = Y_T$ d'après la quasi-continuité à gauche. Donc $Y_{T-} \notin C$ car C est polaire pour (Y_t) .

Appliquons maintenant le Théorème 10 à μ : il existe une fonctionnelle additive prévisible (A_t) telle que

$$\mu = \lambda \bar{U}_A .$$

Or μ ne charge pas B^m , donc d'après le Lemme 9, on a $\lambda \bar{U}_A = \lambda U_A$ et le théorème est établi.

Remarquons que la première partie de la démonstration du Corollaire 6 montre que tout ensemble copolaire, disjoint de l'ensemble des points de cobranchement, est polaire.

10. Représentation des noyaux excessifs. Nous démontrons maintenant des résultats analogues à ceux que nous avons démontrés, sous des hypothèses de dualité, dans [5].

Si (A_t) est une fonctionnelle additive, on peut lui associer des noyaux $U_A, \bar{U}_A, \tilde{U}_A$ qui transforment les fonctions positives en fonctions excessives. D'autre part, si μ est une mesure positive et bornée sur F^m (resp. sur $F^m \times F$) l'application $h \rightarrow \int k(\cdot, y)h(y)\mu(dy)$ (resp. $F \rightarrow \int k(\cdot, y)F(y, z)\mu(dy, dz)$) définit un noyau qui sera nommé *noyau de mesure* et qui transforme aussi les fonctions positives en fonctions excessives. Nous allons démontrer ici que les noyaux $U_A, \bar{U}_A, \tilde{U}_A$ peuvent tous être représentés comme des noyaux de mesure.

Si N est un noyau de F dans F^m (resp. $F, F^m \times F$) nous dirons que c'est un noyau excessif s'il transforme les fonctions positives en fonctions excessives et si $N1$ est une fonction λ -intégrable (que nous appellerons le potentiel de N).

Si N est un noyau excessif de F dans F^m nous dirons qu'il est *conaturel* si pour tout co-ouvert G et tout cocompact K contenu dans G on a

$$P_G N I_K = N I_K.$$

Nous allons étendre un résultat d'Azema [1] à notre situation. Nous notons \ll l'ordre fort pour les fonctions excessives.

LEMME 10. (a) Soient u une fonction excessive λ -intégrable, G un co-ouvert. Si w est une fonction excessive telle que $w \ll P_G u$, alors $P_G w = w$.

(b) Soient u et v deux fonctions excessives λ -intégrables. Si G et G' sont deux co-ouverts dont les adhérences dans F^m , \bar{G} et \bar{G}' respectivement, sont disjointes, alors $P_G u$ et $P_{G'} v$ sont étrangères pour l'ordre fort.

DÉMONSTRATION. (a) Comme $w \ll P_G u$, il existe une fonction excessive v telle que $v + w = P_G u$, et comme $G \cap F$ est un ouvert fin, on a $P_G P_G u = P_G u$. Donc $P_G v + P_G w = P_G u$, ceci entraîne $P_G w = w$ sur $\{u < \infty\}$, donc presque partout, donc partout car les deux membres sont des fonctions excessives.

(b) Soit w une fonction excessive telle que $w \ll P_G u$ et $w \ll P_{G'} v$. D'après (a), on a $P_G w = w = P_{G'} w$. Notons par μ_0 la mesure représentative de w , alors d'après le Lemme 3 et l'unicité de la représentation de Martin, μ_0 est portée par \bar{G} et aussi par \bar{G}' . Donc μ_0 est nulle et par conséquent $w = 0$.

Le Lemme 10 étant vrai, la démonstration d'Azema ([1], Théorème 3.2) peut être appliquée pour obtenir le résultat suivant.

THÉORÈME 11. Soit u une fonction excessive λ -intégrable. Posons pour tout cocompact K

$$(11) \quad C(\cdot, K) = \inf_{G \text{ co-ouvert}; G \supset K} \text{fort} P_G u.$$

Alors en tout point x où u est finie, $K \rightarrow C(x, K)$ définit une fonction de compact, positive, croissante, fortement additive ($C(K_1) + C(K_2) = C(K_1 \cap K_2) + C(K_1 \cup K_2)$) et continue à droite.

Maintenant, d'après le théorème de capacitabilité, si l'on pose pour tout coborélien A

$$C(x, A) = \sup_{K \text{ cocompact}; K \subset A} C(x, K)$$

on obtient une mesure pour tout x dans $\{u < \infty\}$, donc pour tout x , car $C(\cdot, A)$ est une fonction excessive quelque soit A coborélien; C est ainsi un noyau excessif de F dans F^m satisfaisant à $C1 = u$.

THÉORÈME 12. C est le seul noyau de F dans F^m excessif et conaturel admettant u comme potentiel.

DÉMONSTRATION. Si K est un cocompact et G un co-ouvert contenant K , on a d'après la définition (11), $C(I_K) \ll P_G u$, donc $P_G C I_K = C I_K$ d'après la partie (a) du Lemme 10, C est donc conaturel. Montrons l'unicité: soit N un noyau de F dans F^m satisfaisant à l'énoncé. On a, pour tout cocompact K et tout co-ouvert G contenant K , $N I_K \ll u$, donc $P_G N I_K \ll P_G u$, donc $N I_K \ll P_G u$, donc

$NI_K \ll CI_K$. Par conséquent, $Nh \ll Ch$ pour tout $h \in \mathcal{S}^+(F^m)$; et comme N et C ont le même potentiel, on conclut $N = C$.

Voici deux exemples de noyaux excessifs conaturels:

(a) Soit (A_i) une fonctionnelle additive dont le potentiel u est λ -intégrable. Nous savons que le noyau \bar{U}_A de F dans F^m est un noyau excessif. Montrons qu'il est conaturel. Soit G un co-ouvert et h une fonction dans $\mathcal{S}^+(F^m)$ nulle hors de G . On a, en tout point x tel que $u(x) < \infty$:

$$\bar{U}_A h^x - P_G \bar{U}_A h^x = E^x[h \circ X_{T_G}^m - (A_{T_G} - A_{T_G})].$$

Or, $X_{T_G}^m \notin G$ p.s. pour tout x . Donc on obtient $\bar{U}_A h = P_G \bar{U}_A h$ p.p., donc partout.

(b) Soit u une fonction excessive λ -intégrable et soit μ_0 la mesure représentative de u . Alors le noyau de mesure $h \rightarrow K(h\mu_0)$ est excessif. Si G est un co-ouvert et K un cocompact contenu dans G , le Corollaire 2 montre que $P_G K(I_K \mu_0) = K(I_K \mu_0)$. Donc, on a bien un noyau excessif conaturel.

Ces deux exemples nous donnent le troisième des résultats principaux de cet article.

THÉORÈME 13. Soit (A_i) une fonctionnelle additive dont le potentiel u soit λ -intégrable et notons par $\bar{\nu}$ la mesure $\lambda \bar{U}_A$. Alors $\bar{\nu}$ est la seule mesure sur F^m portée par l'ensemble des points de non cobranchement et satisfaisant à

$$(12) \quad \bar{U}_A h = \int k(\cdot, y)h(y)\bar{\nu}(dy) \quad \text{pour tout } h \in \mathcal{S}(F^m).$$

DÉMONSTRATION. Soit μ_0 la mesure représentative de u . Les noyaux \bar{U}_A et $h \rightarrow K(h\mu_0)$ sont deux noyaux excessifs conaturels et on a $\bar{U}_A 1 = K\mu_0$. Donc d'après le Théorème 12, on obtient

$$\bar{U}_A h = \int k(\cdot, y)h(y)\mu_0(dy) \quad h \in \mathcal{S}(F^m).$$

Or la fonction $\lambda K = \int g(x, \cdot)\lambda(dx)$ étant égale à 1 hors de B^m , on a $\lambda \bar{U}_A = \mu_0$ et (12) est donc établi. L'unicité n'est que l'unicité de la représentation de Martin. Le théorème est démontré.

Maintenant, soit N un noyau excessif de F dans F . Notons par μ_f la mesure représentative de la fonction excessive Nf , où $f \in \mathcal{S}(F)$. L'application $f \rightarrow \mu_f$ étant complètement additive, il existe une mesure η et une seule sur $F^m \times F$ telle que

$$\mu_f(h) = \eta(h \otimes f) \quad \text{pour } h \in \mathcal{S}(F^m), \quad f \in \mathcal{S}(F).$$

Nous pouvons donc définir un noyau excessif \tilde{N} de F dans $F^m \times F$ de la façon suivante:

$$\tilde{N}F = \int k(\cdot, y)F(y, z)\eta(dy, dz) \quad \text{pour } F \in \mathcal{S}(F^m \times F).$$

D'après le Théorème 12 on a que \tilde{N} est le seul noyau excessif de F dans F^m satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(13) \quad \tilde{N}(1 \otimes f) = Nf \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}(F)$$

$$(14) \quad P_G \tilde{N}(I_K \otimes 1) = \tilde{N}(I_K \otimes 1) \quad \text{pour tout co-ouvert } G \text{ et tout cocompact } K \text{ contenu dans } G.$$

Remarquons aussi que la projection de η sur F^m ne charge pas l'ensemble des points de cobranchement. L'unicité de la représentation de Martin montre alors que η est la seule mesure sur $F^m \times F$ ayant cette propriété et satisfaisant à

$$Nf = \int k(\cdot, y)f(z)\eta(dy, dz) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{G}(F).$$

Nous avons donc obtenu un deuxième théorème de représentation des noyaux excessifs comme noyaux de mesure. En particulier, nous avons le résultat suivant.

THÉORÈME 14. *Soit (A_t) une fonctionnelle additive dont le potentiel soit λ -intégrable. Notons par $\tilde{\nu}$ la mesure $\lambda\tilde{U}_A$, où \tilde{U}_A est défini par (10). Alors $\tilde{\nu}$ est la seule mesure sur $F^m \times F$ dont la projection sur F^m ne charge pas B^m et satisfasse à*

$$(15) \quad \tilde{U}_A F = \int k(\cdot, y)F(y, z)\tilde{\nu}(dy, dz) \quad \text{pour tout } F \in \mathcal{G}(F^m \times F)$$

ou, par équivalence à

$$(16) \quad U_A f = \int k(\cdot, y)f(z)\tilde{\nu}(dy, dz) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{G}(F).$$

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que si l'on pose $N = U_A$, alors \tilde{U}_A satisfait aux conditions (13) et (14). Donc, il existe une mesure unique η sur $F^m \times F$ dont la projection sur F^m ne charge pas B^m et telle que

$$\tilde{U}_A F = \int k(\cdot, y)F(y, z)\eta(dy, dz) \quad \text{pour tout } F \in \mathcal{G}(F^m \times F)$$

et comme la fonction $\int k(x, \cdot)\lambda(dx)$ est égale à 1 sur $F^m \setminus B^m$, on obtient $\lambda\tilde{U}_A = \eta$.

Montrons maintenant que l'équivalence de (15) et (16) (15) \Rightarrow (16) est évidente. Pour la réciproque, supposons que $\tilde{\nu}$ satisfasse à (16), alors le Théorème 12 entraîne

$$\tilde{U}_A(h \otimes f)^{(\cdot)} = \int k(\cdot, y)h(y)f(z)\tilde{\nu}(dy, dz)$$

pour tout $h \in \mathcal{G}(F^m)$, $f \in \mathcal{G}(F)$. On conclut (15) par un argument de classes monotones.

Nous montrerons dans les exemples qu'en général le noyau U_A ne peut être représenté que comme noyau de mesure d'une mesure sur $F^m \times F$. Autrement dit, nous trouverons une fonctionnelle additive dont le noyau U_A ne peut être représenté par aucune mesure sur F^m .

11. Fonctionnelles additives conaturelles. Dans cette partie nous définissons une classe de fonctionnelles qui ignorent les discontinuités du processus (X_t) sur l'espace de Martin et qui constituent une bonne classe d'unicité: elles sont déterminées soit par leur potentiel $E^*[A_\infty]$, soit par leur mesure potentiel λU_A . Nous caractérisons ces fonctionnelles au moyen soit des mesures représentatives de leurs potentiels, soit de leurs temps de discontinuité. Nous montrons encore d'autres propriétés de ces fonctionnelles, à savoir: elles satisfont un théorème de Radon-Nikodym, qu'elles sont accessibles et que leurs potentiels sont des potentiels semi-réguliers. Nous ne savons pas résoudre un problème de manière complète: celui de caractériser les potentiels de ces fonctionnelles. Nous donnons uniquement des résultats partiels.

DÉFINITION 6. Une fonctionnelle additive (A_t) est dite conaturale si l'on a $U_A = \bar{U}_A$.

Si (A_t) est une fonctionnelle additive de potentiel λ -intégrable, alors d'après le Théorème 12, pour qu'elle soit conaturale, il faut et il suffit que l'on ait $P_G Uf = Uf$ pour tout co-ouvert G et toute fonction $f \in \mathcal{S}^+(F)$ nulle hors de G , soit

$$(17) \quad P^x\{A \text{ charge } T_G, X_{T_G} \in G\} = 0$$

pour tout co-ouvert G et tout $x \in F$.

Dans ce paragraphe lorsqu'on parle des fonctionnelles additives conaturelles, on supposera qu'elles ont des potentiels λ -intégrables.

Si (A_t) est conaturale, on a $\lambda \bar{U}_A = \lambda U_A$. Donc, d'après le Théorème 13, on obtient:

THÉORÈME 15. Soit (A_t) une fonctionnelle additive conaturale et notons par ν la mesure λU_A . Alors ν est la seule mesure sur F portée par l'ensemble des points de noncobranchement et satisfaisant à

$$(18) \quad U_A f = \int k(\cdot, y) f(y) \nu(dy) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}(F).$$

Montrons maintenant que les fonctionnelles additives conaturelles forment une bonne classe d'unicité.

THÉORÈME 16. Soient (A_t) et (B_t) deux fonctionnelles additives conaturelles. On a

- (a) si A et B engendrent le même potentiel, alors $A = B$;
- (b) si A et B ont la même mesure potentiel, alors $A = B$.

DÉMONSTRATION. (b) est une conséquence immédiate du Théorème 15. D'autre part, la relation (18) et l'unicité de la représentation de Martin montrent que la mesure représentative du potentiel engendré par une fonctionnelle additive conaturale est justement la mesure potentiel de cette fonctionnelle. Donc, deux fonctionnelles additives conaturelles engendrant le même potentiel ont la même mesure potentiel. Ainsi (a) est une conséquence de (b). Le théorème est établi.

Nous avons de même un théorème de Radon-Nikodym pour les fonctionnelles conaturelles:

THÉORÈME 17. Soient A et B deux fonctionnelles additives conaturelles telles que λU_A soit absolument continue par rapport à λU_B . Alors il existe une fonction f , mesurable et positive, telle que $A = f \cdot B$.

DÉMONSTRATION. C'est immédiat car si f est une densité de λU_A par rapport à λU_B , alors (18) entraîne $U_A g = U_B f g$ pour tout $g \in \mathcal{S}(F)$, donc $A = f \cdot B$.

Remarquons ici que le résultat du Théorème 17 avait été démontré pour les fonctionnelles additives continues, mais n'est pas vrai pour les fonctionnelles additives dites naturelles, qui ignorent les discontinuités de X_t comme processus à valeurs dans F ([3], pages 210-211). De même, la partie (b) du Théorème 16

est fautive pour de telles fonctionnelles, comme nous le montrerons dans les exemples au paragraphe 12.

Maintenant nous passons à la caractérisation des fonctionnelles additives conaturelles.

Soit (A_t) une fonctionnelle additive conaturelle et notons par u son potentiel. Nous avons vu (Théorème 13) que la mesure représentative de u est la mesure λU_A . Si (A_t) est conaturelle, cette mesure est λU_A , qui est une mesure portée par F et qui ne charge pas les ensembles polaires. Démontrons la réciproque.

THÉORÈME 18. *Soit u une fonction excessive λ -intégrable. Supposons que la mesure représentative de u soit portée par F et ne charge pas les ensembles polaires. Alors il existe une fonctionnelle additive conaturelle engendrant u .*

DÉMONSTRATION. Notons par μ_0 la mesure représentative de u . Meyer [10] a démontré que toute mesure bornée sur F ne chargeant pas les ensembles polaires est la mesure potentiel d'une fonctionnelle additive (A_t) dont la partie discontinue (A_t^d) est de la forme

$$A_t^d = \sum_{0 < s \leq t} b \circ X_s$$

où b est presque-borélienne positive, nulle hors d'un ensemble semi-polaire S .

Soit alors (A_t) la fonctionnelle correspondant à μ_0 . Comme μ_0 ne charge pas l'ensemble des points de cobranchement, nous pouvons prendre S disjoint de \hat{B} . Pour montrer que (A_t) est conaturelle, il suffit de montrer que (A_t^d) l'est. Soit alors G un co-ouvert et montrons que (17) est satisfaite pour tout $x \notin S$. Sur l'ensemble $\{X_{T_G} \notin S\}$ on a $A_{T_G}^d = A_{T_G^-}^d$. D'autre part, S étant semi-polaire, le Théorème 6 entraîne

$$P^x\{X_{T_G} \in G \cap S\} = 0 \quad \text{pour tout } x \in F \setminus S.$$

On a donc, pour toute fonction $f \in \mathcal{G}(F)$ nulle hors de G , $P_G U_{A^d} f = U_{A^d} f$ sur $F \setminus S$, donc partout car les deux fonctions sont excessives.

D'autre part, (A_t) étant conaturelle, son potentiel v est représenté par $\lambda U_A = \mu_0$. Donc $u = v$.

COROLLAIRE 7 (de la démonstration). *Toute fonctionnelle additive conaturelle (A_t) se décompose en une partie continue (A_t^c) et une partie de la forme $\sum_{0 < s \leq t} b \circ X_s$ où b est une fonction presque borélienne, positive et nulle hors d'un ensemble semi-polaire S disjoint de \hat{B} .*

Avec ces notations, si (A_t) est une fonctionnelle additive conaturelle et T un temps d'arrêt totalement inaccessible de la famille (\mathcal{F}_t) , on a d'après le Théorème 6

$$P^\lambda(X_T \in S) = 0.$$

C'est à dire (A_t) ne charge pas les temps d'arrêt totalement inaccessibles. Donc, on a:

THÉORÈME 19. *Toute fonctionnelle additive conaturelle est accessible.*

Nous avons mentionné à tout à l'heure les fonctionnelles additives naturelles. Ces fonctionnelles ont la propriété de ne pas avoir des discontinuités en commun avec le processus X_t (considéré comme processus à valeurs dans F). Nous montrons maintenant que les fonctionnelles additives conaturelles ont la même propriété si l'on considère le processus X_t comme processus à valeurs dans F^m .

THÉORÈME 20. *Soit (A_t) une fonctionnelle additive de potentiel λ -intégrable. Alors pour qu'elle soit conaturelle il faut et il suffit que, P^λ -presque sûrement, elle n'ait pas des discontinuités en commun sur $]0, \zeta]$ avec le processus X_t considéré comme processus à valeurs dans F^m .*

DÉMONSTRATION. Si (A_t) n'a pas, P^λ -presque sûrement, de discontinuités en commun avec le processus X_t , il est très facile de montrer qu'elle satisfait à la relation (17), donc elle est conaturelle. Démontrons la réciproque: supposons que (A_t) soit conaturelle, alors, d'après le Corollaire 7, elle se décompose en une partie continue (A_t°) et une partie de la forme $\sum_{0 < s \leq t} b \circ X_s$ où b est une fonction presque borélienne, positive et nulle hors d'un ensemble semi-polaire S disjoint de \hat{B} . Pour démontrer le résultat il suffit donc de montrer que la fonctionnelle $(A_t^\circ) = (\sum_{0 < s \leq t} b \circ X_s)$ n'a pas, P^λ -presque sûrement, des discontinuités en commun avec le processus (X_t) . Définisons

$$B_t = \sum_{0 \leq s < t} b \circ X_s$$

et posons $\hat{B}_t = B_\zeta - B_{(\zeta-t)^+}$.

Alors (B_t) est une fonctionnelle additive gauche qui a, sur $]0, \zeta]$, les mêmes discontinuités que (A_t°) . (\hat{B}_t) est un processus croissant droit prévisible par rapport à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ d'après un théorème d'Azema ([2], I, 4) et on a

$$\int_{[0, \infty[} \hat{Z}_t(\omega) dB_t(\omega) = \int_0^\infty Z_t(\omega) d\hat{B}_t(\omega)$$

pour tout processus réel $(Z_t)_{t > 0}$. En particulier on a

$$\int_{[0, \infty[} I_H(t, \omega) dB_t(\omega) = \int_0^\infty I_{\hat{H}}(t, \omega) d\hat{B}_t(\omega)$$

où

$$H = \{(t, \omega) : 0 \leq t < \zeta(\omega), X_{t-}^m(\omega) \neq X_t(\omega)\}$$

$$\hat{H} = \{(t, \omega) : 0 < t \leq \zeta(\omega), (\hat{X}_{t+}^m) - (\omega) \neq \hat{X}_{t+}^m(\omega)\}$$

$X_{0-}^m(\omega)$ étant égal à ∂ par convention.

Comme (B_t) est continue en ζ , pour démontrer le théorème il nous suffit maintenant de montrer la relation suivante:

$$(19) \quad E^\lambda[\int_0^\infty I_{\hat{H}}(t, \omega) d\hat{B}_t(\omega)] = 0.$$

Or (\hat{X}_{t+}^m) étant une réalisation continue à droite du semi-groupe de Ray (\hat{P}_t^m) sur F^m (Théorème 2), nous avons que, à un ensemble P^λ -évanescent près, \hat{H} est la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt totalement inaccessibles de la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ et d'une suite de graphes de temps d'arrêt T_n prévisibles par rapport à la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ et tels que $X_{T_n} = (\hat{X}_{T_n+}^m)_- \in \hat{B}$. Tous ces temps d'arrêt ne sont pas chargés, P^λ -presque sûrement, par (\hat{B}_t) , car d'une part (\hat{B}_t) est

prévisible par rapport à (\mathcal{F}_t) et d'autre part, la fonction b est nulle hors de \hat{B} . On vérifie ainsi la relation (19) et le théorème est démontré.

COROLLAIRE 8 (de la démonstration). *Soit (A_t) une fonctionnelle additive qui se décompose en une partie continue et une partie de la forme $\sum_{0 < s \leq t} b \circ X_s$ où b est une fonction presque borélienne, positive et nulle hors d'un ensemble semi-polaire S disjoint de \hat{B} . Alors (A_t) est conaturelle.*

Nous avons encore une conséquence du Corollaire 7. Rappelons qu'un Δ -potentiel est une fonction fortement surmédiane v régulière (i.e., $P_{T_n} v \rightarrow P_T v$ chaque fois qu'une suite (T_n) de temps d'arrêt tend en croissant vers T). Le potentiel d'une fonctionnelle additive gauche est un Δ -potentiel ([2], Chapitre 3). Rappelons de même qu'une fonction excessive est dite semi-régulière si elle est la régularisée excessive d'un Δ -potentiel.

D'après le Corollaire 7, il est évident que le potentiel u d'une fonctionnelle additive conaturelle est semi-régulier (u est la régularisée excessive du Δ -potentiel engendré par la fonctionnelle additive gauche $A_t^c + \sum_{0 \leq s < t} b \circ X_s$).

Le Théorème 18 n'est pas très satisfaisant, car nous ne savons pas sous quelles conditions la mesure représentative de u est portée par F et ne charge pas les ensembles polaires. Sous des "hypothèses de dualité" il est connu que lorsque u appartient à la classe (D) (i.e., $P_{T_n} u \rightarrow 0$ pour toute suite croissante (T_n) de temps d'arrêt qui tend vers l'infini) alors si la mesure représentative de u est portée par F , cette mesure ne charge pas les ensembles polaires ([3], page 281). D'autre part, il est aussi connu que lorsque u est un potentiel naturel (i.e., $P_{T_n} u \rightarrow 0$ pour toute suite croissante (T_n) de temps d'arrêt qui tend vers la durée de vie) alors sa mesure représentative est portée par F ([8], pages 66-67). Nous montrerons dans les exemples que dans notre cas, il n'en est pas ainsi: un potentiel naturel n'est pas nécessairement représenté par une mesure portée par F . Remarquons encore qu'une fonctionnelle additive conaturelle ne charge pas ζ , donc si son potentiel est fini, c'est un potentiel naturel (donc de la classe (D)).

Nous allons donner ci-dessous des conditions pour que la mesure représentative de u soit portée par F et ne charge pas les ensembles polaires. Nos conditions ne sont non plus vraiment satisfaisantes: elles font toujours intervenir la topologie de Martin.

THÉORÈME 21. *Soit u une fonction excessive λ -intégrable et supposons qu'elle appartienne à la classe (D). Alors sa mesure représentative μ_0 satisfait aux conditions du Théorème 18 si et seulement si μ_0 ne charge pas les ensembles polaires contenus dans B^m (nous considérons comme polaires les coboréliens contenus dans $F^m \setminus F$).*

DÉMONSTRATION. Soit (A_t) une fonctionnelle additive engendrant u . Nous avons $\mu_0 = \lambda \bar{U}_A$ (Théorème 13), donc μ_0 ne charge pas les ensembles λ -polaires à gauche. Pour démontrer le théorème il suffit donc de démontrer que tout

coborélien *polaire* disjoint de B^m est λ -*polaire à gauche*. Or, si C est *polaire*, alors l'ensemble $D = \{X_{T_n}^m \in C\}$ étant prévisible et à coupes dénombrables, il est P^λ -indistinguable de la réunion d'une suite (T_n) de graphes de temps d'arrêt prévisibles. Pour chaque T_n , on a $X_{T_n}^m \in C$, donc $X_{T_n}^m \notin B^m$, donc $X_{T_n}^m = X_{T_n}$ d'après le Corollaire 3, donc $X_{T_n}^m \notin C$ car C est *polaire*. Ceci montre que D est P^λ -évanescent, donc C est λ -*polaire à gauche* et le théorème est établi.

COROLLAIRE 9. Soit u une fonction excessive λ -intégrable de la classe (D) et supposons qu'elle satisfasse à la condition de "régularité" suivante:

$$P_{T_n} u \rightarrow P_T u$$

pour tout temps d'arrêt prévisible T tel que $X_{T-}^m \in B^m$ P^λ -p.s. et toute suite (T_n) de temps d'arrêt telle que $T_n \uparrow T, T_n < T, \forall n$.

Alors u est engendré par une fonctionnelle additive conaturelle (qui est prévisible d'après le Théorème 23 ci-dessous).

DÉMONSTRATION. Soit (A_i) une fonctionnelle additive engendrant u , alors la condition de "régularité" s'exprime en disant que (A_i) ne charge pas les temps d'arrêt prévisibles T pour lesquels on a $X_{T-}^m \in B^m$ P^λ -p.s., soit que la mesure $\lambda \bar{U}_A$ ne charge pas B^m . Or, on a $\mu_0 = \lambda \bar{U}_A$, et on conclut au le résultat d'après le Théorème 21.

Remarquons encore que la démonstration "classique" du fait que μ_0 ne charge pas les ensembles polaires, utilise le théorème d'approximation des temps d'entrée par l'extérieur, qui n'est valable pour l'espace de Martin que pour les temps d'entrée dans les coboréliens disjoints de B^m . Donc, la conclusion du Théorème 18 n'est pas améliorée par cette méthode.

Passons maintenant à l'étude des potentiels. Supposons que l'espace de Martin satisfasse à l'hypothèse suivante.

(H) Il existe une suite croissante de cocompacts K_n contenus dans F telle que

$$T_{K_n^c} \rightarrow \zeta P^\lambda\text{-p.s.}$$

Dans ces conditions, on a:

THÉORÈME 22. Soit u une fonction excessive λ -intégrable. Si u est un potentiel naturel, alors sa mesure représentative μ_0 est portée par F .

DÉMONSTRATION. Notons par μ la restriction de μ_0 à $F^m \setminus F$. Soit (K_n) la suite de l'hypothèse (H). On a alors d'après le Corollaire 2

$$P_{K_n^c} K \mu = K \mu .$$

Or, u étant naturel on a $P_{K_n^c} u \rightarrow 0$, donc $K \mu = 0$, donc μ est nulle.

Encore avec une hypothèse "mauvaise" nous pouvons démontrer un dernier résultat.

THÉORÈME 23. Soit (A_t) une fonctionnelle additive de potentiel λ -intégrable et telle que $\lambda \bar{U}_A$ ne charge B^m . Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes.

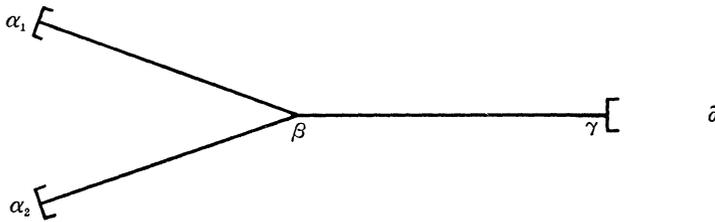
- (a) A est accessible,
- (b) A est conaturelle,
- (c) A est prévisible.

DÉMONSTRATION. On a (a) \implies (b) d'après le Lemme 9 et le Théorème 20. Supposons maintenant que (A_t) soit conaturelle, alors la mesure λU_A ne charge pas les ensembles polaires ni $B^m \cup \hat{B}^m$. Donc, d'après le Corollaire 6, il existe une fonctionnelle additive prévisible (A_t°) qui satisfait à

$$\lambda U_A = \lambda U_{A^\circ}.$$

Cette fonctionnelle est prévisible et accessible, donc conaturelle; et on a donc, d'après le Théorème 16, $A = A^\circ$. Donc, (b) \implies (c) \implies (a). Le théorème est établi.

12. Un exemple. Considérons le processus de translation à droite (vitesse 1) sur l'espace $E \cup \{\partial\}$ suivant:



Les trajectoires sautent au point ∂ avant de toucher γ .

Le semi-groupe et la résolvante sont donnés par

$$P_t f^x = f(x + t) \quad f \in \mathcal{S}(E)$$

$$U_p f^x = \int_x^\infty e^{-pt} f(t) dt \quad f \in \mathcal{S}(E).$$

Comme mesure de référence, nous prenons la mesure $\lambda = \frac{1}{2}(\epsilon_{\alpha_1} + \epsilon_{\alpha_2})$.

Le processus de retour (\hat{X}_t) n'est pas fortement markovien car la propriété de Markov forte fait défaut si l'on considère le temps d'entrée dans l'intervalle $]\beta, \alpha_1]$.

Le semi-groupe et la résolvante de (\hat{X}_t) sont donnés par

$$\hat{P}_t f^x = f(x - t) \quad \text{si } x \in [\alpha_1, \beta[\cup [\alpha_2, \beta] \text{ ou } x - t \in [\beta, \gamma[;$$

$$= \frac{1}{2} f(\overline{x - t}) + \frac{1}{2} f(\underline{x - t}) \quad \text{si } x \in [\beta, \gamma[\text{ et } x - t \in [\alpha_1, \beta[\cup [\alpha_2, \beta[$$

(\bar{x} dénote un point sur $[\alpha_1, \beta[$, \underline{x} un point sur $[\alpha_2, \beta[$).

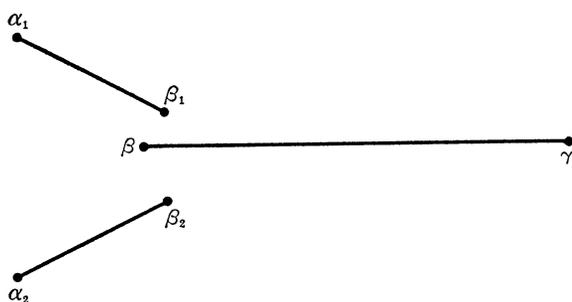
$$\hat{U}_p f^x = \int_{\alpha_1}^x e^{-p(x-t)} f(t) dt \quad \text{si } x \in [\alpha_1, \beta[$$

$$= \int_{\alpha_1}^x e^{-p(x-t)} f(t) dt \quad \text{si } x \in [\alpha_2, \beta[$$

$$\doteq \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^x e^{-p(x-t)} f(t) dt + \frac{1}{2} \int_{\alpha_2}^x e^{-p(t-x)} f(t) dt \quad \text{si } x \in [\beta, \gamma[.$$

Parmi tous les ensembles polaires qu'il faut jeter, pour que notre "théorie de dualité" marche, il n'y en a qu'un qui n'est pas vide dans l'exemple, c'est l'ensemble des points x où $\varepsilon_x \hat{U} = 0$. Or, cet ensemble est retrouvé dans le compactifié de Martin et nous pouvons le garder dès le début. Donc, nous ne jetons aucun ensemble polaire, i.e., $E = F$.

La cotopologie est alors la topologie induite par les $\hat{U}f (f \in \mathcal{G}(F))$: la topologie n'est changée qu'au point β . Comme espace de Martin F^m on obtient donc l'espace suivant:



D'autre part, le processus (X_t) étant de Ray, on a $F^r = F \cup \{\gamma\}$. L'application $n: F^m \rightarrow F^r$ du Théorème 7 est, dans ce cas, l'identité sauf aux points β_1, β_2 qui sont projetés sur β .

On a $\hat{B} = \hat{B}^m = \{\beta, \alpha_1, \alpha_2\}$, $B^m = \{\beta_1, \beta_2, \gamma\}$, $B = \emptyset$.

Voici l'expression du noyau de Martin sur $F^r \times F^m$. Si $x \in [\alpha_1, \beta_1[$

$$\begin{aligned} k(x, y) &= 0 & \text{si } y \in [\alpha_1, x], & [\alpha_2, \beta_2] \\ &= 2 & \text{si } y \in]x, \beta_1] \\ &= 1 & \text{si } y \in [\beta, \gamma]. \end{aligned}$$

Si $x \in [\alpha_2, \beta_2[$

$$\begin{aligned} k(x, y) &= 0 & \text{si } y \in [\alpha_2, x], & [\alpha_1, \beta_1] \\ &= 2 & \text{si } y \in]x, \beta_2] \\ &= 1 & \text{si } y \in [\beta, \gamma]. \end{aligned}$$

Si $x \in [\beta, \gamma]$

$$\begin{aligned} k(x, y) &= 0 & \text{si } y \leq x \\ &= 1 & \text{si } y > x. \end{aligned}$$

Voici alors des exemples qui illustrent quelques théorèmes.

(a) Un potentiel représenté par deux mesures différents (dont l'une charge \hat{B}^m).

Posons:

$$\begin{aligned} u(x) &= 0 & \text{si } x \in [\beta, \gamma] \\ &= 1 & \text{sinon.} \end{aligned}$$

La mesure représentative de u est la mesure $\frac{1}{2}(\varepsilon_{\beta_1} + \varepsilon_{\beta_2})$. Or, u est aussi représenté par la mesure ε_β .

Ceci montre que les représentations de la réduite données par le Théorème 4 et le Théorème 4 de [6] ne sont pas les mêmes. En effet, la fonction u ci-dessus est la réduite sur $\{\beta\}$ de la fonction 1 sur F .

(b) *Un potentiel naturel dont la mesure représentative n'est pas portée par F (Théorème 22).*

Posons:

$$\begin{aligned} v(x) &= 2 && \text{si } x \in [\alpha_1, \beta_1] \\ &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

La mesure représentative de v est ε_{β_1} et c'est la seule mesure sur F^m représentant v .

On conclut que l'hypothèse (H) n'est pas satisfaite.

(c) *Une fonctionnelle additive "naturelle" dont le noyau U_A ne peut être représenté par aucune mesure sur F^m (Théorèmes 14 et 15).*

Soit (A_t) la fonctionnelle additive prévisible engendrant le potentiel v de (b). La seule mesure sur F^m qui pourrait représenter U_A serait la mesure μ représentative de v . Or, on a, pour $h \in \mathcal{G}(F^m)$

$$\begin{aligned} U_A h^x &= 2h(\beta) && \text{si } x \in [\alpha_1, \beta_1] \\ &= 0 && \text{sinon ;} \\ K(h\mu) &= 2h(\beta_1) && \text{si } x \in [\alpha_1, \beta_1[\\ &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

Notons que U_A est représenté par la mesure (sur $F^m \times F$) $\frac{1}{2}\varepsilon_{\{\beta_1, \beta\}}$.

(d) *Une fonctionnelle additive non conaturale qui se décompose en une partie continue et une partie de la forme $\sum_{0 < s \leq t} b \circ X_s$ où b est une fonction nulle hors d'un ensemble semi-polaire S (Corollaire 7).*

Soit (B_t) la fonctionnelle additive prévisible engendrant le potentiel u de l'exemple (a). On obtient une décomposition en prenant $b = I_{\{\beta\}}$.

Remarquons que U_B est représenté par sa mesure potentiel $\lambda U_B = \varepsilon_\beta$ (portée par F) (Théorème 15).

(e) *Deux fonctionnelles additives "naturelles" ayant même mesure potentiel (Théorème 16).*

Soient (A_t) et (B_t) les fonctionnelles additives prévisibles engendrant le potentiel v de (b) et le potentiel u de (a) respectivement. On a $\lambda U_A = \lambda U_B = \varepsilon_B$, or $A \neq B$.

(f) *Un potentiel naturel et semi-régulier qui n'est engendré par aucune fonctionnelle additive conaturale.*

Soit u le potentiel de l'exemple (a). Il est naturel et semi-régulier, or sa mesure représentative est la mesure $\frac{1}{2}(\varepsilon_{\beta_1} + \varepsilon_{\beta_2})$ qui n'est pas portée par F , donc u ne peut être représenté par aucune fonctionnelle additive conaturale.

13. Conclusion. L'exemple ci-dessus montre que si l'on considère la topologie originale sur l'espace d'états, alors on "ignore" certaines singularités du processus

(X_t) : dans l'exemple, celles-ci sont les temps de passage par le point β . Par contre, la topologie de Martin "transforme" ces singularités en temps de discontinuité. On trouve donc toutes les singularités du processus aux temps où il n'est pas continu sur l'espace de Martin. Ainsi, par exemple, les fonctionnelles additives qui ignorent les discontinuités du processus, sur l'espace original, ne constituent pas une bonne classe de fonctionnelles additives car elles n'ignorent pas d'autres singularités qui ne sont pas des temps de discontinuité.

Nous pouvons dire la même chose pour la topologie de Ray: elle ignore aussi certaines singularités du processus (X_t) .

D'autre part, nous avons vu que si l'on considère le compactifié de Martin, alors nous avons toutes les propriétés d'un compactifié de Ray et en plus, un dual fortement markovien (et par conséquent une bonne théorie de la dualité). On conclut donc que la topologie de Martin est meilleure que les autres (l'originale et celle de Ray); elle est très bien adaptée au processus (X_t) .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AZEMA, J. (1969). Noyau potentiel associé à une fonction excessive d'un processus de Markov. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **19** 495-526.
- [2] AZEMA, J. (1973). Le retournement du temps. A paraître aux *Ann. Ecole Nat. Sup. Méc. Nantes*.
- [3] BLUMENTHAL, R. M. et GETTOOR, R. K. (1968). *Markov Processes and Potential Theory*. Academic Press, New York.
- [4] DELLACHERIE, C. (1969). Ensembles aléatoires I, II. Séminaire de Probabilités III, Strasbourg, *Lecture Notes in Mathematics* **88** 97-136. Springer-Verlag, Berlin.
- [5] GARCIA, A. M. A. (1971). Représentation des noyaux excessifs. *Ann. Inst. H. Poincaré*, **9** 277-283.
- [6] GARCIA, A. M. A. et MEYER, P. A. (1972). Une théorie de la dualité a ensemble polaire près I. *Ann Probability* **1** 207-222.
- [7] MEYER, P. A. (1967). Processus de Markov. *Lecture Notes in Mathematics* **26**. Springer-Verlag, Berlin.
- [8] MEYER, P. A. (1968). Processus de Markov: la frontière de Martin. *Lecture Notes in Mathematics* **77**. Springer-Verlag, Berlin.
- [9] MEYER, P. A. (1970). Balayage pour les processus de Markov continus à droite, d'après Shih. Séminaire de Probabilités V, Strasbourg, *Lecture Notes in Mathematics* **191** 270-274. Springer-Verlag, Berlin.
- [10] MEYER, P. A. (1973). Les travaux d'Azema sur le retournement du temps. Séminaire de Probabilités VIII, Strasbourg, *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin.
- [11] WALSH, J. B. (1970). Two footnotes to a theorem of Ray. *Lecture Notes in Mathematics* **77** 283-289. Springer-Verlag, Berlin.
- [12] WALSH, J. B. et MEYER, P. A. (1971). Quelques applications des résolvantes de Ray. *Invent. Math.* **14** 143-166.
- [13] WALSH, J. B. (1972). Transition functions of Markov processes. Séminaire de Probabilités VI, Strasbourg, *Lecture Notes in Mathematics* **258** 233-242. Springer-Verlag, Berlin.

APARTADO POSTAL 20-726
MEXICO 20, D.F.
MEXICO.