The Annals of Probability
1980, Vol. 8, No. 6, 1049–1067

REFLEXION DISCONTINUE ET SYSTEMES STOCHASTIQUES

PAR M. CHALEYAT-MAUREL, N. EL KAROUI, B. MARCHAL

Université P. & M. Curie, E. N. S. Fontenay and Université Paris-Nord

We show the existence and uniqueness of the solution of stochastic equations of reflection on $\mathbb{R}_n^+$ associated to semimartingales with right continuous and left limited paths. This result is used to prove the existence and uniqueness of a Markov process associated with a boundary condition of Neumann type with degenerate infinitesimal generator.

0. Introduction. Les équations de réflexions associées à des semimartingales Browniennes ont été introduites dans [16], [6] et [3], en vue de construire un processus de Markov sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$, à trajectoires continues dont le générateur est associé à un opérateur elliptique L, et limité par une condition frontière de type Neumann. Nous avons précisé cette notion d'équations de réflexion dans [3] en définissant d'abord les réflexions d'un processus continu sur $\mathbb{R}^+$, puis en appliquant les résultats obtenus à la résolution par approximations successives d'équations différentielles stochastiques réfléchies. Cette étude se propose de généraliser cette démarche, en considérant un problème de réflexion associé à un processus continu à droite, limité à gauche (cadlag).

La première difficulté est évidemment de définir la notion de problème de réflexion sur $\mathbb{R}$, en précisant en particulier la condition qui doit intervenir sur les sauts. C'est ce que nous faisons dans la première partie en montrant que le problème ainsi défini admet toujours une solution et une seule. Lorsque le processus à réfléchir est une semimartingale, des majorations intéressantes peuvent être établies pour le processus réfléchi, comme nous le montrons dans la deuxième partie. Ces majorations sont à la base du théorème établi dans la troisième partie, montrant, lorsque les coefficients sont lipschitziens, l'existence et l'unicité des solutions d'un problème de réflexion sur $\mathbb{R}^n$ associé à des semimartingales continues et des mesures-martingales dont nous rappelons la définition. Enfin nous utilisons le résultat de cette étude pour montrer l'existence et l'unicité d'un processus de Markov associé à un opérateur intégro-différentiel L, dont la partie elliptique peut être dégénérée et à une condition frontière de type Neumann, résultats qui n'ont pu être obtenus par les méthodes classiques d'analyse fonctionnelle, ([1]).

Nous tenons à remercier le referee pour le soin avec lequel il a lu notre article et pour les remarques fructueuses qu'il a bien voulu nous donner.

1. Première partie. Un problème de réflexion sur $\mathbb{R}$. Dans [3], nous avons posé un problème de réflexion sur $\mathbb{R}$ associé à des fonctions y continues, définies sur $\mathbb{R}^+$, qui s'énonce ainsi: un couple (z, k) de fonctions continues est dit solution du problème de réflexion associé à y (en abrégé PBR (y)) si le système suivant est vérifié:

(1) $z = y + k$;

(2) z est positif ou nul;

(3) k est une fonction croissante, nulle en 0 et telle que:

$$\int_0^\infty z(s)\, dk(s) = 0.$$

Il est alors facile de voir que ce système admet une solution unique définie par:

$$k(t) = \sup_{[0,t]} \bar{y}(s) \quad \text{où} \quad \bar{y}(s) = \sup(-y(s), 0)$$

Received October 20, 1978; revised July 10, 1979.
AMS 1970 *subject classifications.* Primary 60H20; secondary 60G45, 60J55, 60J60.
Key words and phrases. Stochastic differential equations, semimartingales, reflection, diffusion process, local time.

et

$$z(t) = y(t) + k(t) \quad \text{si} \quad y(0) \geq 0.$$

Si y est seulement continue à droite et limitée à gauche (en abrégé cadlag), il est raisonnable de définir un problème de réflexion en exigeant que les fonctions z et k soient cadlag et vérifient les conditions (1) et (2); la condition (3) étant modifiée en la condition (3′):

(3′) k est une fonction croissante, nulle en $\{0\}$, de partie continue k^c satisfaisant à:

$$\int_0^\infty z(s)\, dk^c(s) = 0,$$

plus une condition sur les sauts de k. Or si y est une fonction à un saut, par exemple:

$$y(t) = \alpha 1_{\{t_o \leq t\}}$$

il est naturel d'exiger que $z(t) = |\alpha|\, 1_{\{t_o \leq t\}}$, c'est-à-dire que:

$$z(t) = \alpha 1_{\{t_o\leq t\}} \quad \text{si} \quad \alpha \geq 0 \quad \text{et} \quad k(t) = 0$$

$$z(t) = \alpha 1_{\{t_o\leq t\}} - 2\alpha 1_{\{t_o\leq t\}} \quad \text{si} \quad \alpha < 0 \quad \text{et} \quad k(t) = 2|\alpha|\, 1_{\{t_o\leq t\}};$$

k a alors un saut en $\{t_o\}$ égal à $2z(t_o)$. C'est une condition de ce type que nous retiendrons pour caractériser les sauts de k. Elle nous permettra d'établir l'unicité du PBR.

1.1 *Notations et definitions.* Nous désignons par $\mathscr{H}$ l'ensemble des fonctions cadlag de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Si y appartient à $\mathscr{H}$, on peut définir les fonctions y_- et Δy par:

$$y_-(t) = \lim_{s\nearrow t; s\neq t} y(s) \quad \text{et} \quad \Delta y(t) = y(t) - y_-(t).$$

L'ensemble des instants de saut de y, c'est-à-dire $\{t > 0: |\Delta y(t)| > 0\}$, est noté S_y. Nous aurons également besoin des fonctions $\bar{y}$ et a définies par:

$$\bar{y}(s) = \sup(-y(s), 0) \quad \text{et} \quad a(t) = \sup_{[0,t]} \bar{y}(s).$$

Par ailleurs, pour toute fonction k de $\mathscr{H}$, croissante, nous notons k^d la fonction croissante: $k^d(t) = \sum_{0<s\leq t} \Delta k(s)$ et k^c la fonction continue, croissante:

$$k^c = k - k^d.$$

DEFINITION 1. Soit y un élément de $\mathscr{H}$. On dit que le couple (z, k) où z et k sont des éléments de $\mathscr{H}$, est une solution du problème de réflexion associé à y (en abrégé PBR(y)), si le système suivant est vérifié:

(1) $z = y + k$;

(2) z est positif ou nul;

(3) k est une fonction croissante, nulle en $\{0\}$ satisfaisant à:

(1) $$\text{(i)} \quad \int_0^\infty z(s)\, dk^c(s) = 0$$

(2) $$\text{(ii)} \quad \text{Pour tout } t \text{ de } S_k, \qquad \Delta k(t) = 2z(t).$$

1.2. *Quelques conditions nécessaires.* Avant d'aborder la résolution proprement dite, nous allons établir quelques conditions nécessaires qui guideront la construction d'une solution.

Comme dans le cas continu, la fonction a, définie plus haut, jouera un rôle fondamental. Remarquons tout de suite que a est une fonction croissante appartenant à $\mathscr{H}$. Comme $a_-(t) = \sup_{0<s<t} \bar{y}(s)$, on a manifestement:

$$S_a \subseteq S_y \cap \{t > 0: \quad \Delta y(t) < 0\} = \bar{S}_y$$

et si $t \in S_a$, alors:

$$a(t) = -y(t) > a_-(t).$$

PROPOSITION 2. *Supposons qu'il existe une solution* (z, k) *au* PBR(y). *Alors nécessairement* $y(0) \geq 0$ *et*:

(1) $k \geq a$;

(2) $S_k \subseteq S_a \subseteq \bar{S}_y$; *pour tout t de* S_k:

(3), (4) $$k(t) + k_-(t) = 2a(t), \qquad k(t) > a(t) > k_-(t) \geq a_-(t),$$

(5) $$\Delta k(t) \leq 2\Delta a(t);$$

(3) *une condition nécessaire et suffisante pour que t appartienne à* S_k *est*:

$$z_-(t) + \Delta y(t) < 0;$$

(4) *pour tout t*

(6) $$z(t) = |z_-(t) + \Delta y(t)| = |y(t) + k_-(t)|.$$

PREUVE. Puisque $k(0) = 0$, nécessairement $z(0) = y(0) \geq 0$. De plus, z étant positive et k croissante, $k(t) \geq \bar{y}(s)$ pour tous $s \leq t$, donc $k(t) \geq a(t)$.

Considérons maintenant t dans S_k. Par hypothèse: $\Delta k(t) = 2z(t) = 2y(t) + 2k(t)$, soit encore $k(t) + k_-(t) = 2\bar{y}(t) > 0$. Nous avons: $0 < k(t) - a(t) + k_-(t) - a_-(t) = \bar{y}(t) - a(t) + \bar{y}(t) - a_-(t)$, $\bar{y}(t) \leq a(t)$ entraîne alors nécessairement: $\bar{y}(t) > a_-(t)$, donc $\bar{y}(t) = a(t)$ et l'égalité $k(t) + k_-(t) = 2a(t)$, ce qui donne $k(t) > a(t) > k_-(t)$. De plus:

$$\Delta k(t) = k(t) + k_-(t) - 2k_-(t) = 2(a(t) - k_-(t)) \leq 2\Delta a(t).$$

Nous avons aussi: $z(t) + z_-(t) = y(t) + y_-(t) - 2y_-(t) = -\Delta y(t)$,c'est à dire: si t appartient à S_k, $z_-(t) + \Delta y(t) < 0$ et $z(t) = |z_-(t) + \Delta y(t)|$. Notons qu'alors t n'appartient pas nécessairement à S_z, mais que réciproquement, si $z_-(t) + \Delta y(t) < 0$, $k_-(t) + y(t) < 0$ et donc t appartient à S_k.

Par ailleurs, si t n'appartient pas à S_k, ou $\Delta y(t) = 0$ et $z(t) = z_-(t)$, ou $\Delta y(t) \neq 0$ et alors:

$$z(t) - z_-(t) = y(t) - y_-(t) \quad \text{puisque} \quad \Delta k(t) = 0,$$

et donc

$$z(t) = z_-(t) + \Delta y(t) = |z_-(t) + \Delta y(t)|,$$

soit encore en utilisant la forme de z,

$$z(t) = |y(t) + k_-(t)|. \qquad \square$$

Les fonctions k et a sont très liées; nous nous proposons de préciser les situations d'égalité.

PROPOSITION 3. *Une condition nécessaire et suffisante pour que k soit égale à a est qu'elle soit continue.*

PREUVE. La condition nécessaire est évidente, car en tout point de S_k, d'après la Proposition 2, k est strictement supérieure à a.

Supposons k continue. Pour tout t, Nous désignons par $d_t = \inf\{s : k(s) > k(t)\}$ et $l_t = \sup\{s : k(s) < k(t)\}$; d_t est un point de croissance à droite de k, et l_t un point de croissance à gauche de k. Comme k est continue, $k(t) = k(d_t) = k(l_t)$. D'autre part, puisque pour tout t $\int_0^t z(s)\,dk(s)$ est nul $z(d_t) = z_-(l_t) = 0$, ou encore grâce à la continuité à droite de z, $k(d_t) = -y(d_t)$ et $k(l_t) = -y_-(l_t)$. Or:

$$k \geq a \geq \bar{y}, \quad \text{par suite} \quad k(d_t) = a(d_t) = \bar{y}(d_t)$$

et

$$k(l_t) = a_-(l_t) = \bar{y}_-(l_t); \quad \text{mais} \quad k(t) = k(d_t) = k(l_t)$$

donc

$$a(d_t) = a_-(l_t) = a(t) \text{ car } a \text{ est croissante.} \qquad \square$$

1.3. *Le thèorème d'éxistence et d'unicité.* Avant toute chose, rappelons, sous la forme dont nous aurons besoin, un lemme de changement de variables.

LEMME 4. *Soit* k (resp. $\hat{k}$) *une fonction croissante, continue à droite, nulle en* $\{0\}$, *de partie continue* k^c(resp. $\hat{k}^c$). *On désigne par* v *le processus à variation finie* $k - \hat{k}$ *et par* v^c *sa partie continue. On a alors*:

$$\begin{aligned} v^2(t) = {} & 2\int_o^t v_-(s)\, dv^c(s) \\ & + \textstyle\sum_{0<s\le t} 1_{S_k \cap S_{\hat{k}}}(s)[k(s) + k_-(s) - \hat{k}(s) - \hat{k}_-(s)]\Delta v(s) \\ & - \textstyle\sum_{0<s\le t} 1_{S_k \cap S_{\hat{k}}^c}(s)[2\hat{k}(s) - k(s) - k_-(s)]\Delta k(s) \\ & - \textstyle\sum_{0<s\le t} 1_{S_k^c \cap S_{\hat{k}}}(s)[2k(s) - \hat{k}(s) - \hat{k}_-(s)]\Delta \hat{k}(s). \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer notre théorème.

THEOREME 5. *Pour tout* y *de* $\mathscr{H}$ *satisfaisant à* $y(0) \ge 0$, *il existe une solution et une seule au* PBR(y), *notée* (z, k). *Le couple* (z, k) *satisfait alors aux propriétés énoncées dans les Propositions* 2 *et* 3 *et de plus*:

$$a \le k \le a + a^d \quad \text{où} \quad a^d(t) = \textstyle\sum_{]0,t]} \Delta a(s).$$

PREUVE. (a). *Unicité.* Considérons deux solutions (z, k) et $(\hat{z}, \hat{k})$ du PBR(y), et posons $v = k - \hat{k}$. Alors $z - \hat{z} = k - \hat{k} = v$. Compte-tenu du Lemme 4 et des égalités (1), (3), il vient:

$$\begin{aligned} v^2(t) = {} & -2\int_o^t [\hat{z}(s)\, dk^c(s) + z(s)\, d\hat{k}^c(s)] \\ & - \textstyle\sum_{0<s\le t} 1_{S_k \cap S_{\hat{k}}^c}(s)[2\hat{k}(s) - 2a(s)]\Delta k(s) \\ & - \textstyle\sum_{0<s\le t} 1_{S_k^c \cap S_{\hat{k}}}(s)[2k(s) - 2a(s)]\Delta \hat{k}(s). \end{aligned}$$

Or z et $\hat{z}$ sont positifs, k et $\hat{k}$ sont supérieurs à a; par suite: $v^2(t) \le 0$. k est donc identique à $\hat{k}$ et z à $\hat{z}$.

(b). *Existence.* Un cas particulier. Nous commençons par supposer qu'il existe une suite $(t_n)_{n\in N}$ croissante qui épuise les sauts de a. Nous allons définir k par récurrence de la manière suivante: sur $[0, t_1[$ on pose $k(t) = a(t)$, et donc nécessairement d'après l'égalité (6) $k(t_1) = |y(t_1) + a_-(t_1)| - y(t_1)$; supposons défini k sur $[0, t_n]$; sur $[t_n, t_{n+1}[$ on pose $k(t) = a(t) \vee k(t_n)$, et au point $t_{n+1} k(t_{n+1}) = |y(t_{n+1}) + k_-(t_{n+1})| - y(t_{n+1})$, soit encore $k(t_{n+1}) = |k_-(t_{n+1}) - a(t_{n+1})| + a(t_{n+1})$ puisque t_{n+1} est un saut de a. Notons qu'il n'y aura de sauts de k que si: $k_-(t_{n+1}) < a(t_{n+1})$. Par suite:

$$k(t) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} 1_{[t_n, t_{n+1}[}(t) \qquad a(t) \vee k(t_n)$$

et

$$k(t_{n+1}) = |a_-(t_{n+1}) \vee k(t_n) - a(t_{n+1})| + a(t_{n+1}) \quad \text{avec} \quad k(0) = 0.$$

Si $z = y + k$, vérifions que le couple (z, k) est bien solution du PBR(y). Par construction, k est supérieur à a, donc z est positif. De plus si $t \in S_k$, $t \in S_a$ et $k(t) + k_-(t) = 2a(t) = -2y(t)$. D'autre part, soit s un point de croissance stricte de k^c (pour tout $\epsilon > 0$, $k^c(s - \epsilon) < k^c(s)$). D'après la forme de k, il existe un n tel que: $t_n < s < t_{n+1}$ et $k(s) = a(s) > k(t_n)$. s est donc un point de croissance stricte de a, ce qui entraîne que $a(s) = -y(s)$ et donc $z(s) = 0$. Par suite, le support de k^c est inclus dans l'ensemble $\{z = 0 \text{ ou } z_- = 0\}$ ce qui est équivalent à: pour tout $t \int_o^t z(s)\, dk^c(s) = 0$. Il reste à montrer par récurrence que $k(t) \leq a(t) + a^d(t)$. Cette inégalité est vraie sur $[0, t_1]$. Supposons la vérifiée sur $[0, t_n]$; alors, sur $[t_n, t_{n+1}[$

$$k(t) = a(t) \vee k(t_n) \leq a(t) \vee (a(t_n) + a^d(t_n))$$
$$\leq a(t) + a^d(t)$$

et

$$k(t_{n+1}) = a(t_{n+1}) + |\, a(t_{n+1}) - k_-(t_{n+1})|$$
$$\leq a(t_{n+1}) + a^d(t_{n+1}).$$

Cette inégalité est donc vraie partout.

(c). *Existence.* Le cas général. Nous désignons maintenant par t_n^ϵ le $n^{\text{ième}}$ saut de a d'amplitude supérieure à ϵ; la suite t_n^ϵ est croissante et tend vers l'infini. Posons:

$$k^\epsilon(t) = \textstyle\sum_{n=0}^\infty 1_{[t_n^\epsilon, t_{n+1}^\epsilon[}(t) a(t) \vee k^\epsilon(t_n^\epsilon)$$
$$k^\epsilon(t_{n+1}^\epsilon) = a(t_{n+1}^\epsilon) + |\, a(t_{n+1}^\epsilon) - k^\epsilon(t_n^\epsilon) \vee a_-(t_{n+1}^\epsilon)|$$

et

$$z^\epsilon(t) = y(t) + k^\epsilon(t).$$

On vérifie comme ci-dessus que $z^\epsilon \geq 0$, $(k^\epsilon)^c$ ne croît que sur $\{z^\epsilon(s) = 0\}$ et si $t \in S_{k^\epsilon}$, $\Delta k^\epsilon(t) = 2z^\epsilon(t)$ si $\Delta a(t) \geq \epsilon$. Pour simplifier l'écriture, nous noterons $\underline{S}_\epsilon$ l'ensemble $S_{k^\epsilon} \cap \{t : \Delta a(t) \geq \epsilon\}$ et $\bar{S}_\epsilon$ l'ensemble $S_{k^\epsilon} \cap [t : \Delta a(t) < \epsilon\}$. Etudions l'ensemble $\bar{S}_\epsilon$; si $t \in \bar{S}_\epsilon$, $0 < \Delta a(t) < \epsilon$ et il existe n tel que $t_n^\epsilon < t < t_{n+1}^\epsilon$; alors:

$$\Delta a(t) = \Delta k^\epsilon(t) \quad \text{si} \quad a_-(t) \geq k^\epsilon(t_n^\epsilon)$$
$$\Delta k^\epsilon(t) = a(t) - k^\epsilon(t_n^\epsilon) \leq \Delta a(t) \quad \text{si} \quad a_-(t) < k^\epsilon(t_n^\epsilon) < a(t).$$

Dans tous les cas:

$$a(t) + a_-(t) \leq k^\epsilon(t) + k_-^\epsilon(t) \leq 2a(t).$$

Nous nous proposons d'étudier la limite de z^ϵ quand ϵ tend vers zéro, en calculant, pour $\alpha < \epsilon$, $(z^\epsilon(t) - z^\alpha(t))^2 = (k^\epsilon(t) - k^\alpha(t))^2$.

D'après le Lemme 4 et les propriétés de $(k^\epsilon)^c$, $(k^\alpha)^c$, Δk^ϵ, il vient:

$$(z^\epsilon(t) - z^\alpha(t))^2 = -2 \int_o^t (z^\alpha(s)\, d(k^\epsilon)^c(s) + z^\epsilon(s)\, d(k^\alpha)^c(s))$$
$$+ \textstyle\sum_{0<s\leq t} 1_{\bar{S}_\epsilon \cap S_\alpha}(s)[2a(s) - k^\epsilon(s) - k_-^\epsilon(s)](\Delta k^\alpha(s) - \Delta k^\epsilon(s))$$
$$- \textstyle\sum_{0<s\leq t} 1_{S_{k^\epsilon}^c \cap S_{k^\alpha}}(s)[2k^\epsilon(s) - k^\alpha(s) - k_-^\alpha(s)]\Delta k^\alpha(s)$$
$$- \textstyle\sum_{0<s\leq t} 1_{S_{k^\alpha}^c \cap S_{k^\epsilon}}(s)[2k^\alpha(s) - k^\epsilon(s) - k_-^\epsilon(s)]\Delta k^\epsilon(s).$$

Nous notons cette expression $-2I_1 + I_2 - I_3 - I_4$. Comme z^α et z^ϵ sont positifs, I_1 est positif. De même, nous avons vu que si $s \in S_{k^\alpha}$,

$$k^\alpha(s) + k_-^\alpha(s) \leq 2a(s) \leq 2k^\epsilon(s)$$

et donc les termes I_3 et I_4 sont positifs. Quant au terme I_2, il est majoré par:

$$2 \textstyle\sum_{0<s\leq t} 1_{\{\alpha\leq\Delta a(s)<\epsilon\}}(s)(\Delta a(s))^2$$

car

$$\Delta k^\alpha(s) \leq 2\Delta a(s)$$

et:

$$0 \leq 2a(s) - k^\epsilon(s) - k^\epsilon_-(s) \leq 2a(s) - a(s) - a_-(s) \leq \Delta a(s).$$

Par suite:

$$\begin{aligned}(z^\epsilon(t) - z^\alpha(t))^2 &\leq 2 \textstyle\sum_{0<s\leq t} 1_{\{\alpha\leq\Delta a(s) < \epsilon\}}(s)(\Delta a(s))^2 \\ &\leq 2\epsilon a^d(t).\end{aligned}$$

Les fonctions z^ϵ et k^ϵ convergent donc uniformément sur tout compact vers des fonctions z et k qui satisfont à $z = y + k$, $z \geq 0$ et k est croissante.

Il reste à préciser les propriétés de k. Remarquant que $\Delta k^\epsilon(s) \leq 2\Delta a(s)$ et que $\Delta k^\epsilon(s)$ converge vers $\Delta k(s)$, nous voyons que $(k^\epsilon)^d$ converge uniformément sur tout compact vers k^d et que $(k^\epsilon)^c$ converge suivant le même mode vers k^c. D'autre part, si $t \in S_k$, il existe ϵ_o tel que $t \in S_\epsilon$ pour tout $\epsilon < \epsilon_o$; soit $\Delta k^\epsilon(t) = 2z^\epsilon(t)$ ce qui entraîne après passage à la limite que $\Delta k(t) = 2z(t)$. De même, soit $]r, s[$ un intervalle contigu à l'ensemble $\{z \leq b\}$; pour ϵ petit il est contenu dans un intervalle contigu à l'ensemble $\{z^\epsilon \leq b/2\}$ et donc:

$$(k^\epsilon)^c(r) = (k^\epsilon)^c(s).$$

Après passage à la limite $k^c(r) = k^c(s)$. Pour tout $b > 0$,

$$\int_0^t z(s)1_{\{z(s)\geq b\}}\, dk^c(s) = 0$$

et donc, puisque z est positif,

$$\int_0^t z(s)\, dk^c(s) = 0.$$

Le couple (z, k) ainsi construit est donc bien solution du PBR(y). □

2. Deuxième partie. Applications aux processus.

Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, P)$ un espace de probabilité satisfaisant aux conditions habituelles et Y un processus à valeurs réelles, cadlag. On dira que les processus, (Z_t, K_t), résolvent le problème de réflexion associé à Y si, pour tout ω de Ω, $(Z_t(\omega), K_t(\omega))$ est solution du PBR $(Y(\omega))$ défini dans le paragraphe précédent. Par suite, pout tout processus Y cadlag tel que $Y_o \geq 0$, il existe une unique solution au PBR $(Y)\colon(Z, K)$. La construction de la première partie montre que si Y est $\mathscr{B}(R^+) \otimes \mathscr{F}_\infty$ mesurable (resp. optionnel), il en est de même des processus Z et K.

Nous allons voir que ce problème simple a de nombreuses applications à la théorie des semimartingales.

2.1. *Temps local des semimartingales et problème de réflexion.* Soit X une semimartingale. Il est établi dans [13] que si $x^+ = \sup(x, o)$ et si par convention le signe de 0 est pris égal à -1:

$$X_t^+ = X_0^+ + \int_o^t 1_{\{X_{s^-}>0\}}\, dX_s + \tfrac{1}{2}L_t^o(X) + \textstyle\sum_{0<s\leq t} (1_{\{X_{s^-}X_s<0\}} \,|X_s| + 1_{\{X_{s^-}=0\}} X_s^+),$$

et

$$|X_t| = |X_o| + \int_0^t signe(X_{s^-})\, dX_s + L_t^o(X) + 2 \textstyle\sum_{0<s\leq t} (1_{\{X_{s^-}X_s<0\}} \,|X_s| + 1_{\{X_{s^-}=0\}} X_s^+),$$

où $L^o(X)$ est un processus croissant continu qui ne croit que sur les zéros de X; L^o est appelé temps local de X en $\{0\}$.

La proposition suivante résulte alors immédiatement de l'unicité des solutions du problème de réflexion.

PROPOSITION 6. *Soit X une semimartingale cadlag de temps local en $\{0\}L^o(X)$.*

(a). *Le couple* $(|X|_t,\ L_t^o(X) + 2\sum_{0<s\le t} 1_{\{X_{s^-}\times X_s\le 0\}}|X_s|)$ *est l'unique solution du* PBR(Y), *où l'on a posé:*

$$Y_t = |X_o| + \int_o^t signe(X_{s^-})\,dX_s - 2\sum_{0<s\le t} 1_{\{X_{s^-}=0\}}\bar{X}_s.$$

(b). *Le couple* $(X_t^+,\ \tfrac12 L_t^o(X))$ *est l'unique solution du PBR*(Y') *où l'on a posé:*

$$Y'_t = X_o^+ + \int_o^t 1_{\{X_{s^-}>0\}}\,dX_s + \sum_{0<s\le t} 1_{\{X_{s^-}\times X_s<0\}}|X_s| + 1_{\{X_{s^-}=0\}}X_s^+)$$

et $\tfrac12 L_t^o(X) = \sup_{[o,t]}\bar{Y}'_s$, *car* $L^o(X)$ *est continu.*

Nous aurons par ailleurs besoin du résultant suivant:

Proposition 7. *Soient* Y (resp. $\hat{Y}$) *une semimartingale et* (Z, K) (resp. $(\hat{Z}, \hat{K})$ *la solution du* PBR(Y)(resp. PBR$(\hat{Y})$). *Alors on a:*

$$(Z_t - \hat{Z}_t)^2 = (Z_o - \hat{Z}_o)^2 + 2\int_o^t (Z_{s^-} - \hat{Z}_{s^-})\,d(Y_s - \hat{Y}_s) - 2\int_o^t \hat{Z}_{s^-}\,dK_s^c$$

$$(7)\qquad - 2\int_o^t Z_{s^-}\,d\hat{K}_s^c + \langle Y - \hat{Y}, Y - \hat{Y}\rangle_t^c + \sum_{0<s\le t}(\Delta Y_s - \Delta\hat{Y}_s)^2$$

$$- 4\sum_{0<s\le t}(1_{S_K\cap S_{\hat K}^c} + 1_{S_K^c\cap S_{\hat K}})(s)Z_s\hat{Z}_s.$$

En particulier on a:

$$(8)\qquad Z_t^2 = 2\int_o^t Z_{s^-}\,dY_s + [Y, Y]_t.$$

Preuve. Par construction, $Z - \hat{Z}$ est une semimartingale et d'après la formule d'Itô,

$$(Z_t - \hat{Z}_t)^2 = (Z_o - \hat{Z}_o)^2 + 2\int_o^t (Z_{s^-} - \hat{Z}_{s^-})\,d(Y - \hat{Y})_s$$

$$+ 2\int_o^t (Z_{s^-} - \hat{Z}_{s^-})(dK_s^c - d\hat{K}_s^c) + \langle Y - \hat{Y}, Y - \hat{Y}\rangle_t^c$$

$$+ 2\sum_{0<s\le t}(Z_{s^-} - \hat{Z}_{s^-})(\Delta K_s - \Delta\hat{K}_s) + \sum_{0<s\le t}(\Delta Z_s - \Delta\hat{Z}_s)^2$$

où $\langle Y - \hat{Y}, Y - \hat{Y}\rangle^c$ est le processus croissant associé à la partie martingale continue de $Y - \hat{Y}$. Remarquons que puisque K^c(resp. $\hat{K}^c$) ne croit que sur les zéros de Z (resp. $\hat{Z}$),

$$\int_o^t (Z_s - \hat{Z}_s)(dK_s^c - d\hat{K}_s^c) = -\left(\int_o^t \hat{Z}_{s^-}\,dK_s^c + \int_o^t Z_{s^-}\,d\hat{K}_s^c\right).$$

Calculons d'autre part $H_s = 2(Z_{s^-} - \hat{Z}_s)(\Delta K_s - \Delta\hat{K}_s) + (\Delta Z_s - \Delta\hat{Z}_s)^2$:

—*Si* $s \in S_K \cap S_{\hat K}$,

$\Delta K_s - \Delta\hat{K}_s = 2(Z_s - \hat{Z}_s)$, $\quad Z_s + Z_{s^-} = -\Delta Y_s$, $\quad \hat{Z}_s + \hat{Z}_{s^-} = -\Delta\hat{Y}_s$ d'où:

$$H_s = (Z_s - \hat{Z}_s + Z_{s^-} - \hat{Z}_{s^-})^2 = (\Delta Y_s - \Delta\hat{Y}_s)^2.$$

—*Si* $s \in S_K^c \cap S_{\hat K}$,

$$H_s = -4\hat{Z}_{s^-}(Z_s - \hat{Z}_{s^-}) + (\Delta Y_s - \Delta\hat{Y}_s - 2\hat{Z}_s)^2$$
$$= (\Delta Y_s - \Delta\hat{Y}_s)^2 - 4\hat{Z}_s(Z_{s^-} + \Delta Y_s - \hat{Z}_{s^-} - \Delta Y_s) + 4\hat{Z}_s^2, \quad \text{or:}$$

$Z_{s^-} + \Delta Y_s = Z_s$ et $\hat{Z}_{s^-} + \Delta\hat{Y}_s = -\hat{Z}_s$ car $\Delta\hat{K}_s > 0$, par suite:

$$H_s = (\Delta Y_s - \Delta\hat{Y}_s)^2 - 4Z_s\hat{Z}_s.$$

Il en est de même par symétrie si $s \in S_K \cap S_{\hat{K}}^c$.

$$—Si \quad s \in S_K^c \cap S_{\hat{K}}^c,$$

$$H_s = (\Delta Y_s - \Delta \hat{Y}_s)^2.$$

En regroupant les différentes valeurs de H_s on obtient le résultat. □

2.2. Majoration sur le PBR. Dans la démonstration du théorème principal de la troisième partie nous utiliserons une méthode de point fixe qui nécessitera la majoration de la différence de deux processus croissants, solutions du PBR. Plus précisément en utilisant une idée de M. Métivier et J. Pellaumail (voir [12]) nous désirons majorer:

$$E[\sup_{0<s<\tau} |K_t - \hat{K}_t|^2] \quad \text{où } \tau \text{ est un temps d'arrêt.}$$

Nous procédons en deux étapes: tout d'abord nous obtenons une majoration sur $[0, \tau]$, puis nous nous ramenons à $[0, \tau[$ à l'aide d'un résultat de [12].

PROPOSITION 8. *Soit* (Z, K) (resp. $(\hat{Z}, \hat{K})$)*la solution du* PBR *associé à la semimartingale nulle en* 0, Y (resp. $\hat{Y}$), *dont on choisit une décomposition en* $Y = M + V$ (resp. $\hat{Y} = \hat{M} + \hat{V}$) *où* M (resp. $\hat{M}$) *est une martingale de carré intégrable et* V (resp. $\hat{V}$) *un processus dont la variation est de carré intégrable; alors il existe une constante C telle que pour tout temps d'arrêt*:

$$E[\sup_{0<s\leq\tau} |Z_s - \hat{Z}_s|^2] \leq CE\left[[M - \hat{M}, M - \hat{M}]_\tau + \left(\int_o^\tau |d(V - \hat{V})_s|\right)^2\right]. \tag{9}$$

PREUVE. Désignons par Δ_τ, $\sup_{0<s<\tau}|Z_s - \hat{Z}_s|$ et remarquons tout d'abord que si les hypothèses de la proposition sont satisfaites

$$E[\Delta_\tau] \leq 2E[\sup_{0<s\leq\tau} |Z_s]^2| + E[\sup_{0<s\leq\tau} |\hat{Z}_s|^2] < +\infty.$$

En appliquant la Proposition 7 et en remarquant que l'expression:

$$-2\int_o^t \hat{Z}_s\, dK_s^c - 2\int_o^t Z_s\, d\hat{K}_s^c - 4 \textstyle\sum_{0<s\leq t} (1_{S_K \cap S_{\hat{K}}^c} + 1_{S_K^c \cap S_{\hat{K}}})(s) Z_s \hat{Z}_s$$

est négative, nous obtenons:

$$(Z_t - \hat{Z}_t)^2 \leq 2\int_o^t (Z_{s^-} - \hat{Z}_{s^-})\, d(Y - \hat{Y})_s + [Y - \hat{Y}, Y - \hat{Y}]_t,$$

d'où

$$\begin{aligned} E[\Delta_\tau^2] &\leq 2E\left[\sup_{0<s\leq\tau}\left|\int_o^s (Z_{u^-} - \hat{Z}_{u^-})\, d(M - \hat{M})_u\right|\right] \\ &\quad + 2E\left[\sup_{0<s\leq\tau}\left|\int_o^s (Z_{u^-} - \hat{Z}_{u^-})\, d(V - \hat{V})_u\right| + E[Y - \hat{Y}, Y - \hat{Y}]_T\right] \\ &\leq 2I_1 + 2I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité de Davis (voir [13], page 349) à la martingale de carré intégrable $\int_o^t (Z_{u-} - \hat{Z}_{u-})\, d(M - \hat{M})_u$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq CE\left[\left|\int_0^\tau |Z_{s-} - \hat{Z}_{s-}|^2\, d[M - \hat{M}, M - \hat{M}]_s\right|^{1/2}\right] \\ &\leq CE[\Delta_\tau [M - \hat{M}, M - \hat{M}]_\tau^{1/2}] \\ &\leq CE[\Delta_\tau^2]^{1/2} E[[M - \hat{M}, M - \hat{M}]_\tau]^{1/2} \quad \text{où } C \text{ est indépendante de } \tau. \end{aligned}$$

Nous avons de même:

$$I_2 \leq E\left[\Delta_\tau \int_o^\tau |d(V-\hat{V})_s|\right] \leq E[\Delta_\tau^2]^{1/2} E\left[\left(\int_o^\tau |d(V-\hat{V})_s|\right)^2\right]^{1/2}.$$

Enfin il est facile de voir que:

$$I_3 \leq 2E[[M-\hat{M}, M-\hat{M}]_\tau + \textstyle\sum_{0<s\leq\tau} \Delta(V-\hat{V})_s^2]$$
$$\leq 2E\left[[M-\hat{M}, M-\hat{M}]_\tau + \left(\int_o^\tau |d(V-\hat{V})_s|\right)^2\right].$$

Nous en déduisons

$$E[\Delta_\tau^2] \leq 2C'2^{1/2} E\left[[M-\hat{M}, M-\hat{M}]_\tau + \int_o^\tau |d(V-\hat{V})_s|^2\right]^{1/2} E[\Delta_\tau^2]^{1/2}$$
$$+ 2E\left[[M-\hat{M}, M-\hat{M}]_\tau + \int_o^\tau |d(V-\hat{V})_s|^2\right]$$

où $C' = \sup(C, 1)$.

Remarquons que cette inégalité est du type $x^2 - 2bx - b^2 \leq 0$ avec $0 \leq x < +\infty$ et $b = C'2^{1/2}E[[M-\hat{M}, M-\hat{M}]_\tau + (\int_o^\tau d(V-\hat{V})_s|)^2]^{1/2} < +\infty$. Il s'en suit que $E[\Delta_\tau^2] \leq (1 + 2^{1/2})b$, soit en posant $C = (1+2^{1/2})^2 C'^2$ l'inégalité annoncée. □

Puisque Z solution du PBR(Y) est égal à $Y + K$, nous en déduisons immédiatement:

COROLLAIRE 9. *Il existe une constante $\hat{C} \geq C$ telle que pour tout temps d'arrêt*:

$$E[\sup_{0<s\leq\tau} |K_s - \hat{K}_s|^2] \leq \hat{C}E\left[[M-\hat{M}, M-\hat{M}]_\tau + \left(\int_o^\tau |d(V-\hat{V})_s|\right)^2\right]. \tag{10}$$

Enonçons le résultat essentiel de [12] (Théorème 1) qui nous permettra de déduire de l'inégalité précédente une majoration sur $[0, \tau[$.

PROPOSITION 10. *Etant donnée une martingale réelle, cadlag et de carré intégrable, M, pour tout temps d'arrêt τ il existe une martingale, M^*, réelle, cadlag et de carré intégrable qui possède les propriétés suivantes*:

(i). $1_{[0,\tau[} \times M^* = 1_{[0,\tau[}M$;

(ii). $E[[M^*, M^*]_\tau] = E[\langle M^*, M^*\rangle_\tau] \leq E[[M, M]_{\tau-} + \langle M, M\rangle_\tau]$.

Nous pouvons maintenant étudier la majoration sur $[0, \tau[$.

THEOREME 11. *Soit (Z, K) (resp. $(\hat{Z}, \hat{K})$) la solution du* PBR *associé à la semimartingale nulle en* 0, Y (resp. $\hat{Y}$), *dont on choisit une décomposition en $Y = M + V$* (resp. $\hat{Y} = \hat{M} + \hat{V}$) *où* M (resp. $\hat{M}$) *est une martingale de carré intégrable et* V (resp. $\hat{V}$) *un processus à variation finie*; *alors il existe une constante C telle que pour tout temps d'arrêt*:

$$[\sup_{0<s<\tau} |K_s - \hat{K}_s|]^2$$
$$\leq CE\left[[M-\hat{M}, M-\hat{M}]_{\tau-} + \langle M-\hat{M}, M-\hat{M}\rangle_{\tau-} + \int_{[0,\tau[} |d(V-V)_s|^2\right]. \tag{11}$$

PREUVE. Les hypothèses du théorème étant satisfaites, il existe une suite de temps d'arrêt croissant vers l'infini, $(\tau_n)_{n\geq1}$, pour laquelle $M_{t\wedge\tau_n}$ et $\hat{M}_{t\wedge\tau_n}$ soient des martingales de carré intégrable, et, $\int_{[0,\tau_n[} |dV_s|$ et $\int_{[0,\tau_n[} |d\hat{V}_s|$ soient de carré intégrable. Il suffit de montrer l'inégalité pour les temps d'arrêt $\tau \wedge \tau_n$, car on l'obtiendra pour τ en faisant tendre n vers l'infini.

Fixons n. Soient M^* et $\hat{M}^*$ les martingales de carré intégrable associées aux martingales $M_{t\wedge\tau_n}$ et $\hat{M}_{t\wedge\tau_n}$ par la Proposition 10, V^* et $\hat{V}^*$ les processus, dont la variation est de carré intégrable, définis par:

$$1_{[0,\tau\wedge\tau_n[}V^* = 1_{[0,\tau\wedge\tau_n[}V, \qquad 1_{[0,\tau\wedge\tau_n[}\hat{V}^* = 1_{[0,\tau\wedge\tau_n[}\hat{V}$$

et sur l'ensemble $[\tau\wedge\tau_n, +\infty[$: $V^* = V_{\tau\wedge\tau_{n-}}$ et $\hat{V}^* = \hat{V}_{\tau\wedge\tau_{n-}}$ et considérons (Z^*, K^*) (resp. $\hat{Z}^*$, $\hat{K}^*$) la solution du PBR associé à la semimartingale $Y^* = M^* + V^*$ (resp. $\hat{Y}^* = \hat{M}^* + \hat{V}^*$). Alors, l'unicité de la solution du PBR entraîne en particulier que sur $[0, \tau\wedge\tau_n[$:

$$K - \hat{K} = K^* - \hat{K}^*.$$

Par suite:

$$E[\sup\nolimits_{0<s\le\tau\wedge\tau_n}|K_s - \hat{K}_s|^2] = E[\sup\nolimits_{0<s\le\tau\wedge\tau_n}|K_s^* - \hat{K}_s^*|^2] \le E[\sup\nolimits_{0<s\le\tau\wedge\tau}|K_s^* - \hat{K}_s^*|^2]$$

et nous pouvons appliquer la majoration (10) du Corollaire 9. Nous obtenons l'existence d'une constante indépendante de τ et de n pour laquelle:

$$E[\sup\nolimits_{0<s\le\tau\wedge\tau_n}|K_s - \hat{K}_s|]^2 \le CE\left[[M^* - \hat{M}^*]_{\tau\wedge\tau_n} + \left(\int_o^{\tau\wedge\tau_n}|d(V^* - \hat{V}^*)_s|\right)^2\right].$$

La construction des martingales M^* et $\hat{M}^*$ montre facilement que leur différence $M^* - \hat{M}^*$ est associée à la martingale $M_{\cdot\wedge\tau_n} - \hat{M}_{\cdot\wedge\tau_n}$ et donc:

$$E[[M^* - \hat{M}^*, M^* - \hat{M}^*]_{\tau\wedge\tau_n}] \le E[[M - \hat{M}, M - \hat{M}]_{\tau\wedge\tau_n} + \langle M - \hat{M}, M - \hat{M}\rangle_{\tau\wedge\tau_n}]$$

L'inégalité résulte immédiatement de la définition de V^* et $\hat{V}^*$. □

2.3. *Inégalité du type Burkholder-Davis-Gundy.* Nous allons considérer la solution du PBR associé à une martingale locale et établir comme dans [3] des inégalités du type Burkholder, Davis, Gundy; elles ne servent pas directement dans la suite mais donnent un encadrement de la norme L^p du sup de la solution en fonction seulement de la donnée Y.

PROPOSITION 12. *Soit Y une martingale locale cadlag et (Z, K) la solution du* PBR *associé à Y. Pour tout p; $1 \le p < \infty$, il existe 2 constantes strictement positives C et D, ne dépendant que de p telles que*:

$$CE([Y, Y]^{p/2}) \le E(\sup Z_t^p) \le DE([Y, Y]^{p/2}).$$

PREUVE. Désignons par (A) l'inégalité de gauche et par (B) celle de droite.

(a). Commençons par justifier (B). Par construction, $Z_t = Y_t + K_t$ avec $K_t = K_{t-} + \Delta K_t$. Si A_t désigne $\sup_{[o,t]}\bar{Y}_s$, d'après la Proposition 2 les inégalités suivantes sont satisfaites: $K_t \le A_t + 2\Delta A_t \le 3A_t$, ce qui entraîne que:

$$\sup\nolimits_t Z_t \le 4\sup\nolimits_t|Y_t|.$$

Nous concluons à l'aide des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy qui impliquent:

$$E[\sup\nolimits_t|Y_t|^p] \le C_1E([Y, Y]_\infty^{p/2}) \quad \text{et donc:}$$

$$E[\sup\nolimits_t Z_t^p] \le 4^P C_1 E([Y, Y]_\infty^{p/2}).$$

(b)[1] Remarquons tout d'abord qu'il suffit d'établir l'inégalité (A) pour une martingale de H^1. En effet, si Y est une martingale locale cadlag il existe une suite croissante de temps d'arrêt, $(T_n)_{n\in N}$, qui réduit fortement la martingale locale Y, ce qui entraîne que les martingales Y^{T_n} appartiennent à H^1. Désignons par (Z^n, K^n) la solution du PBR(Y^{T_n}). D'après la

[1] Nous tenons à remercier Monsieur C. Stricker qui nous a communiqué cette démonstration plus élégante que celle initialement donnée par les Auteurs.

Proposition 8, Z^n est égal p.s. à Z sur $[0, T_n[$, donc si (A) est satisfaite pour (Z^n, Y^{T_n}), il est clair qu'il en sera de même pour (Z, Y) après avoir fait tendre n vers $+\infty$.

On suppose donc que Y appartient à H^1. On démontre alors aisément (A) à partir des Théorèmes 23 et 24, pages 346 et 347 de [13], (lemme de Garsia). On a:

$$E[K_\infty/\mathscr{F}_T] - K_{T\_} = E[K_\infty - K_T/\mathscr{F}_T] + K_T - K_{T\_} \leq E[Z_\infty - Z_T/\mathscr{F}_T] + 2Z_T \leq 4E[Z^*_\infty/\mathscr{F}_T]$$

où Z^*_t désigne le processus croissant $\sup_{[o,t]} Z_s$. Dans ce cas d'après les deux théorèmes cités ci-dessus on a:

$$E[K^p_\infty]^{1/p} \leq 4pE[Z^{*p}_\infty]^{1/p} \quad \text{pour } p \geq 1,$$

d'où l'on déduit immédiatement l'existence d'une constante c_p ne dépendant que de p, telle que:

$$E[\sup_t[Y_t]^p]^{1/p} \leq c_p E[Z^{*p}_\infty]^{1/p},$$

c'est à dire (A) grâce au Théorème 31 de [13] (inégalité de Davis appliquée à Y). □

3. Troisième partie. Système différentiel stochastique dans $\mathbb{R}^+_d$. Dans cette dernière partie, nous allons résoudre un système différentiel stochastique dans $\mathbb{R}^+_d$, qui est l'analogue dans le cadre de la réflexion des équations stochastiques d'Itô associées à un opérateur intégro-différentiel (cf. Skorokhod [14] Lepeltier-Marchal [11]).

La méthode suit essentiellement celle de Doléans-Dade et Meyer dans [5] pour des équations différentielles stochastiques sans réflexion du type

$$X_t = H_t + \int_o^t f(s, X_{s-})\, dM_s$$

où M est une semimartingale cadlag nulle en 0.

Cette résolution, qui utilise le PBR précédent, généralise au cas discontinu les résultats de El Karoui et Chaleyat-Maurel [3].

Afin de rendre compte des équations de réflexion les plus générales, nous intégrons par rapport à la mesure de comptage des sauts de la semimartingale, aussi, est-il nécessaire de rappeler quelques notions sur les processus ponctuels et leur mesure martingale associée (cf. El Karoui-Lepeltier [7] et Jacod [9]).

3.1. *Rappels sur les processus ponctuels.* Nous utilisons systématiquement les notations et définitions de [7]. $(U, \mathscr{U})$ désigne l'espace $\mathbb{R}^d - \{0\}$ muni de sa tribu borélienne, δ un point à l'infini et $(\hat{U}, \hat{\mathscr{U}})$ l'espace $U \cup \{\delta\}$ muni de sa tribu borélienne. Toute fonction f définie sur U est prolongée à $\hat{U}$ par $f(\delta) = 0$.

Soit un espace probabilisé satisfaisant aux conditions habituelles, nous dirons qu'un processus ponctuel, Y, à valeurs dans $\hat{U}$, est σ-discret s'il existe une suite croissante H^n d'éléments de $\mathscr{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathscr{F} \otimes \mathscr{U}$ telle que $D^n_\omega = \{t; (t, \omega, Y_t(\omega)) \in H^n\}$ soit discret pour presque tout ω et $D_\omega = \{t: Y_t(\omega) \neq \delta\} = U_n D^n_\omega$ pour tout ω. A tout processus ponctuel σ-discret Y_t, nous associons *une mesure aléatoire de comptage p* définie sur $\mathscr{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathscr{U}$ par:

$$p(\omega, \cdot) = \textstyle\sum_{0<s\in D_\omega} \epsilon_s \otimes \epsilon_s(\omega),$$

où ϵ est la mesure de Dirac sur $\mathbb{R}^+$. Le processus ponctuel, Y_t, sera dit *σ-fini*, adapté s'il existe un processus H, $\mathscr{P} \otimes \mathscr{U}$ mesurable ($\mathscr{P}$ tribu prévisible), strictement positif, tel que $E[p(H)] < +\infty$ et si pour toute fonction f positive, $\mathscr{U}$ mesurable, le processus

$$p_t f = \textstyle\sum_{0<s\leq t} f(Y_s)$$

est un processus croissant adapté. Alors on peut associer à $p_t f$ sa projection duale prévisible qui s'écrit

$$\int_o^t N(s, \cdot, f)\, dA_s$$

où $N(t, \omega, \cdot)$ est un noyau de transition σ-fini de $\mathscr{P}$ vers $(U, \mathscr{U})$ et A_t un processus strictement croissant prévisible. Le couple (N, A) (unique) est appelé le *système de Lévy* du processus ponctuel σ-fini Y_t.

Introduisons les espaces de processus $\mathscr{P} \otimes \mathscr{U}$-mesurables sur lesquels sont définies les mesures aléatoires associées à un processus ponctuel de système de Lévy (N, A):

$$\mathscr{L}^1(N, A) = \left\{ Z : E\left[\int_o^\infty dA_s \int_U N(s, du) |Z(s, u)| \right] < \infty \right\}$$

$$\mathscr{L}^{1,\mathrm{loc}}(N, A) = \left\{ Z : \int_o^\infty dA_s \int_U N(s, du) |Z(s, u)| < \infty P_{p-s} \right\}$$

$$\mathscr{L}^2(N, A) = \left\{ Z : E\left[\int_o^\infty dA_s \int_U N(s, du) |Z(s, u)|^2 \right] < \infty \right\}$$

$$\mathscr{L}^{2,\mathrm{loc}}(N, A) = \left\{ Z : \int_o^\infty dA_s \int_U N(s, du) |Z(s, u)|^2 < \infty P_{p-s} \right\}.$$

Si Z appartient à $\mathscr{L}^{1,\mathrm{loc}}(N, A)$ nous pouvons définir une mesure aléatoire à variation finie par la relation:

$$q_t(Z) = p_t(Z) - \int_o^t dA_s N(s, Z_s)$$

qui est une martingale locale cadlag. Remarquons que si Z appartient à $\mathscr{L}^1(N, A) \cap \mathscr{L}^2(N, A)$, $q_t(Z)$ est une martingale de carré intégrable de processus croissant prévisible

$$\int_o^t dA_s N(s, Z_s^2) - \textstyle\sum_{s \leq t} (\Delta A_s)^2 N^2(s, Z_s).$$

Par les méthodes habituelles la mesure martingale q peut s'étendre aux éléments de $\mathscr{L}^2(N, A)$, puis $\mathscr{L}^{2,\mathrm{loc}}(N, A)$, et ainsi nous obtenons le résultat d'existence suivant:

PROPOSITION 13. *Si le processus Z appartient à $\mathscr{L}^2(N, A)$* (resp. $\mathscr{L}^{2,\mathrm{loc}}(N, A)$), *il existe une unique martingale de carré intégrable* (resp. *locale localement de carré intégrable*), *que nous notons $q_t(Z)$, de processus croissant associé*

$$\int_o^t dA_s N(s, Z_s^2) - \textstyle\sum_{s \leq t} \Delta A_s^2 N^2(s, Z_s)$$

telle que si Z appartient à $\mathscr{L}^2(N, A) \cap \mathscr{L}^1(N, A)$:

$$q_t(Z) = p_t(Z) - \int_o^t dA_s N(s, Z_s).$$

3.2. *Système différentiel stochastique de réflexion.* Nous pouvons maintenant introduire le système différentiel stochastique de réflexion dans $\mathbb{R}_d^+$, auquel nous donnerons un sens et dont nous établirons sous certaines conditions l'existence et l'unicité.

DEFINITION 14. *Soient $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ un espace probabilisé satisfaisant aux conditions habituelles; (M_t) une semimartingale d-dimensionnelle continue et nulle en 0; (Y_t) et $(\tilde{Y}_t)$ deux processus ponctuels σ-finis à valeurs dans $\hat{U}$ et (H_t) un processus cadlag à valeurs dans $\mathbb{R}_d^+$. Pour toute $f(t, \omega, x)$* (resp. *$g(t, \omega, x, u)$ et $h(t, \omega, x, u)$*) *fonction aléatoire mesurable, d-dimensionnelle, définie sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}_d^+$* (resp. $\mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}_d^+ \times U$) *nous dirons que le couple (X_t, K_t) est solution du système différentiel stochastique $S(f, g, h)$ si*:

(i) *X_t est un processus cadlag adapté d-dimensionnel,*

(ii) *K_t est un processus croissant cadlag, adapté, nul en 0,*

(iii) $X_t^1(\omega) = H_t^1(\omega) + \int_o^t f^1(s, \omega, X_s(\omega))\, dM_s^1(\omega) + \int_o^t \int_U g^1(s, \omega, X_{s-}(\omega), u) q(\omega, ds, du) + \sum_{s\le t} h^1(s, \omega, X_{s-}(\omega), \tilde{Y}_s(\omega)) + K_t(\omega)$

$$X_t^1 \geq 0, \qquad \int_o^t 1_{(X_s^1=0)}\, dK_s^c = K_t^c, \qquad \Delta K_t = 2X_t^1 \quad \text{si} \quad \Delta K_t \neq 0;$$

(iv) *pour tout* $2 \leq i \leq d$

$$X_t^i(\omega) = H_t^i(\omega) + \int_o^t f^i(s, \omega, X_s(\omega))\, dM_s^i(\omega)$$
$$+ \int_o^t \int_U g^i(s, \omega, X_{s-}(\omega), u) q(\omega, ds, du) + \textstyle\sum_{0<s\leq t} h^i(s, \omega, X_{s-}(\omega), \tilde{Y}_s(\omega)),$$

où q est la mesure martingale associée au processus ponctuel (Y_t). De plus, nous dirons qu'il y a unicité de la solution si tous les couples (X, K) solutions sont indistinguables.

Remarquons que, n'ayant pas plus précisé les conditions de mesurabilité des processus f, g et h, nous n'avons pas donné un sens aux différentes intégrales stochastiques intervenant dans la définition. Ce sens apparaît dans notre théorème d'existence et d'unicité énoncé ci-dessous et dont la preuve sera établie au paragraphe suivant.

THEOREME 15. *Il existe une unique solution au système $S(f, g, h)$ si les fonctions f, g, et h satisfont aux hypothèses suivantes*:

(H_1). *pour (ω, t) fixés $f(t, \omega, \cdot)$ est lipschitzienne de rapport K, pour x fixé $f(\cdot, \cdot, x)$ est un processus cadlag adapté*:

(H_2). *g est $\mathcal{P} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \otimes \mathcal{U}$ mesurable, $g(t, o, \cdot)$ appartient à $\mathcal{L}^{2,\mathrm{loc}}(N, A)$ et il existe un processus $\eta(t, \omega, u) \mathcal{P} \otimes \mathcal{U}$ mesurable, positif, appartenant à $\mathcal{L}^{2,\mathrm{loc}}(N, A)$ tel que pour tous t, ω, x, y*:

$$|g(t, \omega, x, u) - g(t, \omega, y, u)| \leq \eta(t, \omega, u)|x - y|;$$

(H_3). *La fonction h est $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \otimes \mathcal{U}$-mesurable. Il existe $\epsilon > 0$ et un processus $\tilde{\eta}(t, \omega, u)$ $\mathcal{P} \otimes \mathcal{U}$-mesurable, positif, porté par $\{|u| \leq \epsilon\}$ tels que sur $\{|u \leq \epsilon\}$ pour tous t, ω et tout couple (x, y)*

$$|h(t, \omega, x, u) - h(t, \omega, y, u)| \leq \tilde{\eta}(t, \omega, u)|x - y|$$

et pour tout t P. p.s.:

$$\tilde{P}_t(\tilde{\eta}) < +\infty, \qquad \textstyle\sum_{s\leq t} |h(s, o, \tilde{Y}_s)|\, 1_{\{|Y_s|<\epsilon\}} < +\infty.$$

Remarquons tout d'abord que le système stochastique $S(f, g, h)$ a bien un sens. En effet, si le processus X est adapté cadlag, le processus $f(t, X_t)$ l'est aussi grâce à la condition de Lipschitz (cf. [5]) et la première intégrale stochastique existe. De même, grâce à l'hypothèse (H_2) le processus $g(t, X_{t-}, u)$ est $\mathcal{P} \otimes \mathcal{U}$-mesurable et appartient à $\mathcal{L}^{2,\mathrm{loc}}(N, A)$ et par suite nous pouvons définir l'intégrale stochastique par rapport à q. Enfin, grâce à l'hypothèse (H_3) $\tilde{P}_t(h_{X^-}) = \sum_{s\leq t} h(s, X_{s-}, \tilde{Y}_s)$ est un processus à variation finie cadlag adapté.

Nous aurions pu énoncer le théorème précédent relatif à un système S comportant plusieurs intégrales stochastiques par rapport à un nombre fini de semimartingales continues nulles en 0 et plusieurs processus ponctuels. En particulier, étant donnés un Brownien d-dimensionnel nul en 0 et un processus de Poisson ponctuel (Z), à partir du théorème précédent, en prenant pour Y le processus $Z 1_{(|Z|\leq 1)}$ et pour $\tilde{Y}$ le processus $Z 1_{(|Z|>1)}$ nous pouvons résoudre les systèmes différentiels stochastiques intégrodifférentiels d'Itô avec réflexion dans $\mathbb{R}_d^+$; nous indiquerons en Section 4 comment utiliser ces résultats pour établir l'existence d'un processus de Markov de type intégrodifférentiel avec condition frontière; ces questions étant développées dans [4].

Le théorème précédent permet en particulier de résoudre les systèmes de réflexion associés aux semimartingales. En effet, considérons une semimartingale $\bar{M}_t$, enlevons-lui ses sauts d'amplitude supérieure à 1, alors la semimartingale:

$$^1M_t = \bar{M}_t - \textstyle\sum_{s\le t} \overline{\Delta \bar{M}_s} 1(|\Delta \bar{M}_s| > 1)$$

est une semimartingale spéciale qui admet une décomposition unique:

$$^1M_t = \bar{M}_t^c + N_t^d + V_t^d$$

où $\bar{M}^c$ est une semimartingale continue, N_t^d une martingale locale, localement de carré intégrable, purement discontinue et V_t^d un processus à variation finie purement discontinu (cf. les caractéristiques locales d'une semimartingale [10]). A la semimartingale $(\bar{M})$ nous pouvons associer un système (S) en prenant pour M la semimartingale continue $\bar{M}^c$, pour Y le processus ponctuel des sauts de la martingale N^d et pour Y le processus ponctuel des sauts du processus à variation finie

$$V_t^d + \textstyle\sum_{o<s\le t} \Delta M_s 1(|\Delta M_s| > 1).$$

Nous en déduisons la résolution d'un système similaire aux équations de Doléans-Dade et Meyer [5].

PROPOSITION 16. *Si la fonction f est continue à gauche et adaptée le système (S') associé à la semimartingale $\bar{M}_t$*

(i)
$$X_t^1 = H_t^1 + \int_o^t f^1(s, X_{s^-})\, d\bar{M}_s^1 + K_t$$

$$X_t^1 \ge 0, \qquad \int_o^t 1_{(X^1{}_s=0)}\, dK_s^c = K_t^c, \qquad \Delta K_t = 2X_t^1 \quad si \quad \Delta K_t \ne 0$$

(ii) *pour tout* $2 \le i \le d$

$$X_t^i = H_t^i + \int_o^t f^i(s, X_{s^-})\, d\bar{M}_s^i$$

admet une et une unique solution.

En effet les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) sont manifestement vérifiées par les processus $f(t, \omega, x)$, $f(t, \omega, x)u1_{\{|u|\le 1\}}$ et $F(t, \omega, x)u1_{\{|u|>1\}}$ respectivement.

Signalons en particulier le travail d'Emery [8] sur les équations de Doléans-Dade, qu'il résoud sous des conditions plus abstraites.

Pour terminer, précisons sous quelles conditions le processus croissant K est continu; rappelons qu'il en est toujours ainsi dans le modèle Markovien, lorsque la "frontière" est régulière pour elle-même.

PROPOSITION 17. *Sous les hypothèses du Théorème 15, le processus croissant K est continu dès que pour tout (t, x, ω):*

$$x^1 + \Delta H_t^1(\omega) + g^1(t, x, Y_t(\omega)) + h^1(t, x, \tilde{Y}_t(\omega)) \ge 0. \tag{12}$$

PREUVE. Par définition de la mesure martingale q le saut du processus

$$H_t^1 + \int_o^t f^1(s, X_s)\, dM_s^1 + \int_o^t \int_U g^1(s, X_{s^-}, u) q\,(ds, du) + \textstyle\sum_{0<s\le t} h^1(s, X_{s^-}, \tilde{Y}_s)$$

au point t est P p.s.:

$$\Delta H_t^1 + g^1(t, X_{t^-}, Y_t) + h^1(t, X_{t^-}, \tilde{Y}_t).$$

Nous en déduisons immédiatement la Proposition 17 à l'aide de l'inégalité (12) et de la Proposition 2. □

Nous pouvons souligner toutefois que même si l'inégalité (12) est satisfaite, le procédé de construction des solutions du PBR, tel qu'il est développé ci-après met en oeuvre des processus intermédiaires solutions de PBR associés à des processus croissants non continus.

3.3. *Démonstration du Théorème* 15. Pour établir l'existence et l'unicité d'une solution du système (S), nous utilisons le procédé standard, qui consiste à construire une suite strictement croissante de temps d'arrêt $T_1, \cdots, T_n \cdots$ tendant vers l'infini telle que sur chaque intervalle $[T_i, T_{i+1}[$ les processus qui interviennent aient des propriétés suffisamment régulières pour pouvoir utiliser une méthode de point fixe. Le lemme suivant permet alors de conclure.

LEMME 18. *S'il existe une unique solution* (X, K) *au* PBR *sur l'intervalle* $[\sigma, T[$ *où* σ *et* T *sont deux* t.a. *tels que* $\sigma \leq T$, *il existe une unique solution sur l'intervalle* $[\sigma, T]$.

PREUVE. Pour les composantes d'indice ≥ 2, on a nécessairement:

$$\Delta X_T^i = \Delta H_T^i + g^i(T, X_{T^-}, Y_T) + h^i(T, X_{T^-}, \tilde{Y}_t)$$

ce qui détermine donc uniquement les X_T^i pour $i \geq 2$. Quant à la première composante c'est une conséquence de la Proposition 2, inégalité (6), puisque nécessairement:

$$X_T^1 = | X_{T^-}^1 + \Delta H_T^1 + g^1(T, X_{T^-}, Y_T) + h^1(T, X_{T^-}, \tilde{Y}_T) | . \qquad \square$$

Nous ne donnerons la démonstration de l'existence que sur un intervalle *du* type $[0, T[$, et utiliserons les notations qui suivent. $\mathscr{H}$ désigne l'ensemble des processus X adaptés, cadlag sur $[0, T[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_d^+$ tels que: $X^* = \sup_{s<T} | X_s |$ appartienne à L^2, muni de la norme $[[X]] = \| X^* \|_2$. D'autre part, si X appartient à $\mathscr{H}$, nous définissons sur $[0, T[$ le processus $S(X)_t$ par:

$$H_t + \int_o^t f(s, X_s)\, dM_s + \int_o^t \int_U g(s, X_{s^-}, u) q\,(ds, du) + \textstyle\sum_{s \leq t} h(s, X_{s^-}, \tilde{Y}_s)$$

et par $(R(X)_t, K(X)_t)$ la solution du PBR associée à $S(X)_t$, c'est à dire que $R(X)_t$ est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}_d^+$, dont la première composante est la solution du PBR $(S^1(X))$ et dont les composantes d'indice ≥ 2 sont identiques à celles de $S(X)$. Nous allons établir que sous certaines hypothèses sur T:

(i) si X appartient à $\mathscr{H}$, $R(X)$ appartient à $\mathscr{H}$;

(ii) pour tous X et X' de $\mathscr{H}$, $[[R(X) - R(X')]] \leq h[[X - X']]$ avec $0 \leq h < 1$, ce qui prouve aisément que l'équation $R(X) = X$ a une solution unique dans $\mathscr{H}$.

(a). *Condition* (i). (ii) étant supposée vérifiée il suffit pour obtenir (i) de montrer que $R(0)$ appartient à $\mathscr{H}$.

LEMME 19. *Si le temps d'arrêt T est tel que:*

$\sup_{s<T} | H_s |$, *pour tout* i, $\displaystyle\int_o^T | f^i(s, o)\ d\langle N^i, N^i \rangle_s$, $\displaystyle\int_{[0,T[} dA_s N(s, | g(s, o) |^2)$, $\displaystyle\int_{]0,T[} | f(s, o) | | dV_s |$, $P_{T^-}(| g_o |^2)$ *et* $\tilde{P}_{T^-}(| h_o |)$ *sont bornées, alors* $R(0)$ *appartient à* $\mathscr{H}$, *où* g_o (resp. h_o) *est le processus* $g(t, o)$(resp. $h(t, o)$).

PREUVE. Nous avons

$$[[R(0)]]^2 \leq 2^5 \left[[[H]]^2 + \left[\left[\int_o^\cdot f(s, o)\, dN_s \right]\right]^2 + \left[\left[\int_o^\cdot f(s, o)\, dV_s \right]\right]^2 + [[q \cdot (g_o)]]^2 + [[\tilde{p} \cdot (h_o)]]^2 + [[K(0)]]^2 \right];$$

$$[[H]]^2 = E[\sup_{s<T} | H_s |^2] \leq C^2 < +\infty.$$

Appliquons l'inégalité de Doob à la martingale continue $\int_o^t f(s, o)\, dN_s$:

$$\left[\left[\int_o^\cdot f(s, o)\, dN_s\right]\right]^2 \le 4\, 2^{d-1} \textstyle\sum_i E\left[\displaystyle\int_o^t |f^i(s, o)|^2\, d\langle N^i, N^i\rangle s\right] \le 4\, 2^{d-1}\, dC < +\infty.$$

Appliquons l'inégalité de Métivier-Pellaumail à la martingale localement de carré intégrable $L_t = \int_o^t \int_U g(s, o, u) q\, (ds, du)$:

$$\begin{aligned}[[L]]^2 &\le 4E[[L, L]_{T^-} + \langle L, L\rangle_{T^-}]\\ &\le 4E\left[\left(P_{T^-}(|g_o|^2) + \int_{[0,T[} dA_s\, N(s, |g(s, o)|^2)\right) - \textstyle\sum_{o<s<T} \Delta A_s^2 N^2(s, |g(s, o)|^2)\right]\\ &\le 4E\left[P_{T^-}(|g_o|^2) + \int_{[0,T[} dA_s\, N(s, |g(s, o)|^2)\right]\\ &\le 8C < +\infty;\end{aligned}$$

$$\left[\left[\int_o f(s, o)\, dV_s\right]\right]^2 \le E\left[\left(\int_{[0,T[} |f(s, o)|\, |dV_s|\right)^2\right] \le C^2 < +\infty$$

$$[[\tilde{P}\cdot(|h_o|)]] \le E(\tilde{p}_{T^-}(|h_o|))^2] \le C^2 < +\infty.$$

Enfin par application du Théoreme 11 et des majorations qui précèdent nous voyons que $[[K(0)]]$ est aussi finie. Par suite $R(0)$ appartient à $\mathscr{H}$. □

(b) *Condition* (ii).

LEMME 20. *Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites:*

—les v.a. $\sum_{i=1}^d \langle N^i, N^i\rangle$, $\quad \int_{[0,T[} |dV_s|$, $\quad p_{T^-}(\eta^2)$, $\quad \int_{[0,T[} dA_s\, N(s, \eta^2(s))$, $(\tilde{P}_{T^-}(\tilde{\eta}))^2$ *sont bornées par* b;

—*sur* $[0, T[$, *le processus* $|\tilde{Y}.| < \epsilon$ *lorsque* $\{\tilde{Y} \ne \delta\}$.

Alors si X *et* $\hat{X}$ *appartiennent à* $\mathscr{H}$,

$$[[R(X) - R(\hat{X})]] \le Kb[[X - \hat{X}]]. \tag{13}$$

PREUVE. *On a manifestement*

$$\begin{aligned}[[R(X) - R(\hat{X})]]^2 \le 2^4\Bigg[&\left[\left[\int_o^\cdot (f(s, X_s) - f(s, \hat{X}_s))\, dN_s\right]\right]^2\\ &+ \left[\left[\int_o^\cdot (f(s, X_{s^-}) - f(s, \hat{X}_{s^-}))\, dV_s\right]\right]^2\\ &+ \left[\left[\int_o^\cdot \int_U (g(s, X_{s^-}, u) - g(s, \hat{X}_{s^-}, u)) q\, (ds, du)\right]\right]^2\\ &+ [[\tilde{P}(h_X - h_{\hat{X}})]]^2 + [[K(X) - K(\hat{X})]]^2.\end{aligned}$$

L'inégalité de Doob, la condition de Lipschitz et l'hypothèse du Lemme 20 sur les processus croissants montrent aisément que:

$$\left[\left[\int_o^{\cdot} (f(s, X_s) - f(s, \hat{X}_s))\, dN_s\right]\right]^2 \leq K_1 b[[X - \hat{X}]]^2$$

et que $\left[\left[\int_o^{\cdot} (f(s, X_s) - f(s, \hat{X}_s))\, dV_s\right]\right]^2 \leq K_2 b[[X - \hat{X}]]^2.$

La majoration du terme suivant s'obtient à partir de l'inégalité de Métivier-Pellaumail, des conditions de Lipschitz et des hypothèses du Lemme 20:

$$\left[\left[\int_o^{\cdot} \int_U (g(s, X_{s^-}, u) - g(s, \hat{X}_{s^-}, u))q\,(ds, du)\right]\right]^2$$
$$\leq 4E\left[p_{T^-}(g_X - g_{\hat{X}})^2 + \int_{[0,T[} dA_s\, N(s, g(s, X_{s^-}, \cdot) - g(s, \hat{X}_{s^-}, \cdot))^2\right] \leq K_3 b[[X - \hat{X}]]^2.$$

De même, puisque sur $[0, T]$, $|\tilde{Y}_t| < \epsilon$, nous pouvons utiliser l'hypothèse de Lipschitz (H_3) et en déduire que:

$$[[\tilde{P}(h_X - h_{\hat{X}})]]^2 \leq bK_4[[X - \hat{X}]]^2.$$

Il reste à déduire, des majorations du Théorème 11 et des inégalités que nous venons d'établir que $[[K(X) - K(\hat{X})]]^2 \leq K_5 b[[X - \hat{X}]]^2$. En conclusion:

$$[[R(X) - R(\hat{X})]]^2 \leq Kb[[X - \hat{X}]]^2. \qquad \square$$

(c) *Construction de la suite T_n.* Nous nous fixons b tel que $Kb < 1$ et construisons la suite T_n par récurrence de la manière suivante:

T_n est le premier $t > T_{n-1}$ tel que les processus $|H_t - H_{T_{n-1}}|$, $\int_{T_{n-1}}^t |f^i(o, s)|\, d\langle N^i, N^i\rangle s$, $\sum_{i=1}^d \langle N^i, N^i\rangle_t - \langle N^i, N^i\rangle_{T_{n-1}}$, $\int_{T_{n-1}}^t |f(s, o)|\,|dV_s|$, $\int_{T_{n-1}}^t |dV_s|$, $p_t(|g_o^2|) - p_{T_{n-1}}(|g_o^2|)$, $p_t(\eta^2) - p_{T_{n-1}}(\eta^2)$, $\int_{T_{n-1}}^t dA_s\, N(s, |g(s, o)|^2)$, $\int_{T_{n-1}}^t dA_s\, N(s, \eta^2)$, $\tilde{p}_t(|h_o|) - \tilde{p}_{T_{n-1}}(|h_o|)$ et $|\tilde{p}_t(\tilde{\eta}) - \tilde{p}_{T_{n-1}}(\tilde{\eta})|^2$ dépassent b et $|\tilde{Y}_t|$ dépasse ϵ. Les hypothèses faites sur les coefficients assurent que la suite T_n est strictement croissante et tend vers $+\infty$.

3.4. *Application.* La résolution du système stochastique de réflexion nous permet d'établir l'existence et l'unicité d'un processus de Markov associé à un opérateur intégrodifférentiel dont la partie elliptique peut être dégénérée et à une condition frontière de type Neumann.

Comme dans le cas continu (voir D. Stroock et S. Varadhan [15] et N. El Karoui [6]), ces questions se traitent à l'aide d'un problème des martingales que nous énoncerons plus loin.

L'existence et l'unicité du problème des martingales sont équivalentes à l'existence et l'unicité en loi de la solution d'un système différentiel stochastique de réflexion associé, la résolution de ce système résulte alors immédiatement du Théorème 15.

Exposons brièvement ces questions qui seront développées dans [4].

(a). *Le problème des martingales.* Soit L un opérateur intégrodifférentiel défini sur le demiplan de $\mathbb{R}^d$, $\bar{G} = \{x^1 > 0\}$, pour toute fonction f de $C_b^2(\bar{G})$[2] par:

$$Lf(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$
$$+ \int_{R^d - \{0\}} |f(x+u) - f(x) - 1_{\{|u| \leq 1\}}\langle u, \nabla f(x)\rangle|\, S(x, du)$$

[2] $C_b^2(\bar{G})$ est l'ensemble des fonctions sur $\bar{G}$ deux foix continûment différentiables et bornées.

avec a semielliptique borélienne bornée; b borélienne bornée; S noyau positif σ-fini sur $\bar{G} \times R^d - \{0\}$ ne chargeant ni le point à l'infini de $\mathbb{R}^d - \{0\}$, ni la demidroite $\{u^1 < -x^1\}$ pour tout x, et intégrant uniformément en x la fonction $|u|^2 1_{\{|u| \leq 1\}} + |u| \, 1_{\{|u|>1\}}$, et soit enfin γ_1 une fonction positive, minorée, bornée et définie sur $\partial G = \{x^1 = 0\}$.

Alors nous dirons qu'une probabilité P, définie sur l'espace canonique, résoud le problème des martingales partant de x à l'instant 0, s'il existe un processus croissant continu, $(A_t)_{t \geq 0}$ adapté tel que:

$$-P(X_o = x) = 1$$

$$- A_t = \int_o^1 1_{\partial G}(X_s) \, dA_s$$

$-$ pour toute fonction f de $C_b^2(\bar{G})$

$$f(X_t) - f(X_o) - \int_o^t Lf(X_s) \, ds - \int_o^t \gamma_1(X_s) \frac{\partial f}{\partial x_1} (X_s) \, dA_s \text{ soit une martingale.}$$

Dans le cas où a_{11} est minoré, l'existence et l'unicité de ce problème sont équivalentes à l'existence et l'unicité (en loi) des solutions du système suivant:

(b). *Le système stochastique.* Donnons nous sur un espace de probabilité $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P})$ un mouvement Brownien d-dimensionnel issu de $0 : (\beta_t)_{t \geq o}$ et un processus de Poisson ponctuel $(Z_t)_{t \geq o}$ à valeurs dans $R^d - \{0\}$, de mesure de Lévy m et de mesures aléatoires associées p et q.

Alors nous dirons que le couple $(\hat{X}_t, \hat{A}_t)_{t \geq o}$ de processus adaptés, $\hat{A}_t$ étant croissant, est solution du système (s) s'il vérifie:

$$-\hat{X} = x + \int_o^t \sigma(X_s) \, d\beta_s + \int_o^t \hat{b}(\hat{X}_s) \, ds$$

$$+ \int_o^t \int_{|u| \leq 1} f(\hat{X}_{s^-}, u) \, q(ds,du) + \int_o^t \int_{|u|>1} f(\hat{X}_{s^-}, u) \, p(ds,du)$$

$$+ \int_o^t \gamma(\hat{X}_s) \, d\hat{A}_s$$

$$- \hat{X}_t^1 > 0$$

$$- \int_o^t 1_{\partial G}(\hat{X}_s) \, d\hat{A}_s = \hat{A}_t$$

avec:

$$- \gamma = (\gamma_1, 0, \cdots, 0)$$

$$-\sigma\sigma^* = a$$

$$- \hat{b}(x) = b(x) + \int_{|u| \leq 1, |f(x,u)|>1} f(x, u) \, m(du) - \int_{|u|>1, |f(x,u)| \leq 1} f(x, u) \, m(du)$$

$$- \text{pour tout } A \text{ de } \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d - \{0\}}, \; S(x, A) = \int_{\mathbb{R}^d - \{0\}} 1_A(f(x, u)) \, m(du)$$

où $f_1(x, u) - x_1$ est positif, et $\int_{|u| \leq 1} |f(x, u)|^2 \, m\,(du) + \int_{|u|>1} |f(x, u)| \; m\,(du)$ uniformément bornée, (voir J. P. Lepeltier et B. Marchal [11]).

(c). *Résolution.* Le Théorème 15 permet de résoudre l'existence et l'unicité de (S) sous les hypothèses suivantes:

(i) σ et b Lipschitziennes bornées,

(ii) f vérifiant de plus:

$$\int_{|u|\le 1} |f(x, u) - f(y, u)|^2 \, m(du) \le K|x - y|^2$$

(iii) γ_1 bornée, minorée par une constante strictement positive.

En effet, il suffit de prendre pour Y le processus $Z1_{(|Z|\le 1)}$ et pour $\tilde{Y}$ le processus $Z1_{(|Z|>1)}$. On obtient alors un couple unique (X, K) où K est continu grâce à la Proposition 17 et au fait que $f_1(x, u) - x_1$ est positif. On en déduit l'existence d'un unique processus croissant $\hat{A}$ par la formule:

$$\hat{A}_t = \int_o^t \gamma_1^{-1}(X_s) \, dK_s.$$

On montre enfin, à l'aide d'arguments classiques l'existence et l'unicité d'un processus de Markov dans le demiplan, de générateur infinitésimal L et associé à la condition frontière γ_1.

REFERENCES

[1] BENSOUSSAN, A. and LIONS, J. L. (1974). Diffusion processes in bounded domains and singular-pertubation problems for variational inequalities with Neumann boundary conditions. In-*Probabilistic methods in differential equations. Lecture notes in Math.* **451** Springer.

[2] BONY, J. M., COURREGE P. and PRIOURET, P. (1969). Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte. *Ann. Inst. Fourier* **XVIII-2.**

[3] CHALEYAT-MAUREL, M. and EL KAROUI, N. (1978). Un problème de réflexion et ses applications au temps local et aux équations différentielles stochastiques sur $\mathbb{R}$-cas continu. *Astérisque* **52–53** 117–144.

[4] CHALEYAT-MAUREL, M. and MARCHAL, B. (1980). Problème des martingales et processus de réflexion associés à un opérateur intégro-différentiel. Unpublished manuscript.

[5] DOLEANS-DADE, C. and MEYER, P. A. (1977). Equations différentielles stochastiques. Séminaire de Probabilités XI. *Lecture Notes in Math.* **581** 376–382. Springer.

[6] EL KAROUI, N. (1975). Processus de réflexion sur $\mathbb{R}^n$. Séminaire de Probabilités IX. *Lecture Notes in Math.* **465.** Springer.

[7] EL KAROUI, N. and LEPELTIER, J. P. (1977). Représentation des processus ponctuels multivariés à l'aide d'un processus de Poisson. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* **39** 111–135.

[8] EMERY, M. (1978). Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques, application aux intégrales multiplicatives stochastiques. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* **41** 241–262.

[9] JACOD, J. (1976). Un théorème de représentation pour les martingales discontinues. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* **34** 225–245.

[10] JACOD, J. and MEMIN, J. (1976). Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semi-martingales. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* **35** 1–37.

[11] LEPELTIER, J. P. and MARCHAL, B. (1976). Problème des martingales et équations différentielles stochastiques associés à un opérateur intégrodifférentiel. *Ann. Inst. H. Poincaré* **XII** 43–103.

[12] METIVIER, M. and PELLAUMAIL, J. (1977). Une formule de majoration pour martingales. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A* **285** 685–688.

[13] MEYER, P. A. (1976). Un cours sur les Intégrales Stochastiques. Séminaire de Probabilités X. *Lecture notes in Math.* **511** Springer.

[14] SKOROHOD, A. V. (1965). *Studies in the Theory of Random Processes.* Addison Wesley.

[15] STROOCK, D. W. and VARADHAN, S. R. S. (1971). Diffusion processes with boundary conditions. *Comm. Pure Appl. Math.* **24** 147–225.

[16] WATANABE, S. (1971). On stochastic differential equations for multidimensionnal diffusion processes with boundary conditions. *J. Math Kyoto Univ.* **I. 11.1** 169–180, **II. 11-3** 545–551.

M. CHALEYAT-MAUREL
UNIVERSITÉ P. & M. CURIE
LABORATOIRE DE CALCUL DES PROBABILITÉS
9, QUAI SAINT BERNARD, TOUR 56
75230 PARIS CEDEX 05

N. EL KAROUI
E.N.S. FONTENAY
5 RUE BOUCICAUT
92260 FONTENAY-AUX ROSES

B. MARCHAL
UNIVERSITÉ PARIS-NORD—C.S.P.
DEPT. DE MATHÉMATIQUES
AVENUE J.B. CLÉMENT
93430 VILLETANEUSE