The Annals of Probability
1984, Vol. 12, No. 3, 829–842

TEMPS DE SEJOUR ET OSCILLATION DU MOUVEMENT BROWNIEN AU VOISINAGE DE LA SPHERE EUCLIDIENNE

PAR A. GOLDMAN

Université LYON

For a standard Brownian motion $\omega(t)$ in R^p, $p \geq 3$, let $t_a(\omega)$ be the last exit time from the ball $B(0, a)$ of radius a centered at the origin and let $F(a, t, \omega)$ be the oscillation in the neighbourhood of sphere $S(0, a)$. The distribution of the functional

$$B_f(a, \omega) = \int_0^{+\infty} 1_{B(0,a)}(\omega(t)) f\left(\frac{F(a, t, \omega)}{F(a, +\infty, \omega)}\right) dt,$$

where f: $(0, 1) \to R^+$ is an arbitrary bounded measurable function, coincides with the limiting distribution, when $n \to +\infty$, of the weighted sojourn time

$$\frac{T_f(a\sqrt{n}, \omega)}{n} = \sum_{k=0}^{+\infty} 1_{B(0,a\sqrt{n})}(S_k(\omega)) f\left(\frac{n(a\sqrt{n}, k, \omega)}{n(a\sqrt{n}, +\infty, \omega)}\right) \Big/ n$$

for a standard random walk in Z^p where $n(b, k, \omega)$ denote the number of crossing $S(0, b)$ during the first k steps. We give explicit formulas, in terms of Laplace transform, for the joint distribution of $B_f(a, \omega)$, $F(a, +\infty, \omega)$ and $t_a(\omega)$.

Introduction. Considérons une marche au hasard de Bernoulli, $S_k = S_0 + X_1 + \cdots + X_k$, $k = 1, 2, \cdots$, évoluant sur le treillis $\mathbb{Z}^p$, $p \geq 3$, et démarrant d'un point $a_0 \equiv S_0$ situé sur la sphère euclidienne $S(0, a) \subset \mathbb{R}^p$, centrée à l'origine et de rayon $a > 0$. On aura choisi le rayon $a > 0$ de sorte que l'intersection $S(0, a) \cap \mathbb{Z}^p$ soit non vide. Cela étant, il est bien classique que le temps de séjour dans la boule $B(0, a) \cap \mathbb{Z}^p$, convenablement pondéré, converge en loi vers le temps de séjour dans $B(0, a) \subset \mathbb{R}^p$, pour un mouvement brownien p-dimensionnel démarrant également du point a_0. En clair, en posant

$$T_0(a, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} 1_{B(0,a)}(S_k(\omega)),$$

la variable aléatoire $T_0(a\sqrt{n}, \omega)/n$ converge en loi, lorsque n tend vers l'infini, vers:

$$B_0(a, \omega) = \int_0^{+\infty} 1_{B(0,a)}(\omega(t))\, dt, \quad \omega(0) \equiv a_0.$$

Ce résultat bien connu ainsi que ses généralisations diverses, relevant du principe d'invariance de Donsker, se sont avérés constituer un outil fondamental dans la résolution de problèmes physiques, statistiques et autres, voir par exemple

Received July 1982; revised September 1983.

AMS 1980 *subject classifications*. Primary 60F17, 60J15, 60J65; secondary 33A40, 60J55, 60G17, 60G60.

Key words and phrases. Brownian motion, random walk, sojourn time and oscillation, Bessel functions, Hausdorff measure.

Kac [5] et [6]. On pourra également consulter Revesz [8] pour des questions analogues concernant le cas linéaire.

Dans le présent travail nous envisageons le problème du calcul de la distribution asymptotique du temps de séjour dans $B(0, a)$ qui tiendrait compte de la fréquence du nombre de retours vers la sphère $S(0, a)$ dans le passé du "marcheur". Plus précisément, si au pas $k \geq 2$ le "marcheur" ω se trouve dans $B(0, a) \cap \mathbb{Z}^p$, on lui octroira un gain égal à $f(n(a, k, \omega)/n(a, +\infty, \omega))$, où f: $[0, 1] \to \mathbb{R}^+$ est une fonction fixée, positive et bornée, mesurable pour la mesure de Lebesgue, et où $n(a, k, \omega)$ est le nombre de passages (une sortie et un retour consécutif comptant pour un passage) effectués au cours des $k - 1$ pas précédents. Le mouvement étant transient ($p \geq 3$) le nombre total de passages est nécessairement fini. Le gain total du "marcheur", au cours de son périple, s'exprime alors sous la forme suivante:

$$T_f(a, \omega) = \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} 1_{B(0,a)}(S_k(\omega)) f\left(\dfrac{n(a, k, \omega)}{n(a, +\infty, \omega)}\right).$$

Par suite, la recherche de l'évolution asymptotique de $T_f(a, \omega)$ nous conduit, comme précédemment, à étudier la distribution limite, lorsque $n \to +\infty$, de la variable aléatoire $T_f(a\sqrt{n}, \omega)/n$.

A cet effet, introduisons l'oscillation

$$F(a, t, \omega) = \lim_{x \downarrow a}(1 - (a/x)^{p-2})\, d(a, x, t, \omega),$$

de la trajectoire brownienne au voisinage de la sphère euclidienne. La notation $d(a, x, t, \omega)$ représente le nombre de retours vers $S(0, a)$, via $S(0, x)$, dans l'intervalle de temps $[0, t]$. On vérifie aisément que la distribution de la variable aléatoire

$$B_f(a, \omega) = \int_0^{+\infty} 1_{B(0,a)}(\omega(t)) f\left(\frac{F(a, t, \omega)}{F(a, +\infty, \omega)}\right) dt,$$

pour un mouvement brownien p-dimensionnel démarrant du point $a_0 \in S(0, a)$, coïncide précisément avec la loi limite associée à la suite $(T_f(a\sqrt{n}, \omega)/n)$, $n = 1, 2, \cdots$.

Dans certains problèmes il est souhaitable de faire intervenir le nombre absolu de passages (et non le nombre relatif comme cela est le cas ci-dessus). On peut également être amené à prendre en ligne de compte le dernier instant de visite, soit $t_a(\omega)$, de la boule $B(0, a)$. Par suite il est intéressant d'obtenir la loi conjointe du vecteur aléatoire

$$I = (I_1, I_2, I_3) = \left(\int_0^{+\infty} 1_{B(0,a)}(\omega(t)) f\left(\frac{F(a, t, \omega)}{F(a, +\infty, \omega)}\right) dt,\ F(a, +\infty, \omega),\ ta(\omega)\right).$$

Cette loi est complètement caractérisée, au moyen de la transformée de Laplace à trois variables, au dernier paragraphe de ce travail. Assez curieusement on est confronté à une expression explicite particulièrement simple qui laisse pressentir une vision plus "géométrique" du problème.

Outre son intérêt intrinsèque relativement évident, notamment pour la modélisation de divers phénomènes physiqus, économiques, etc. (voir par exemple les travaux de Montroll, E. W. et Weiss, G. H. traitant de la migration dans les cristaux; on pourra consulter *J. Math. Phys.* **23(2)**, pages 250–253 ainsi que la bibliographie indiquée), l'étude de cette loi limite (ou d'expressions analogues) devrait avoir des retombées intéressantes dans le domaine des distributions empiriques. Nous présenterons des résultats allant en ce sens au cours d'un prochain travail.

A l'origine nous avons été conduit vers l'étude de cette fonctionnelle limite à l'issue d'une recherche sur la mesure de Hausdorff des trajectoires d'un mouvement brownien à plusieurs paramètres (au sens de P. Lévy) $\omega_n^p(t) \in R^p$, $t \in R^n$, $p, n \in N\backslash(0)$, dans le cas transient, c'est-à-dire avec le choix $2n < p$. Comme cela est bien classique [1] pour répondre à ce genre de question, on commence par rechercher la "meilleure" fonction g possible, positive, continue, à croissance lente au voisinage de l'origine de R^+, et vérifiant la condition suivante:

$$\text{Il existe} \quad A < +\infty; \quad \operatorname{limsup}_{a \downarrow 0}\left(\int 1_{B(0,a)} \frac{(\omega(t))dt}{g(a)}\right) \leq A, \quad \text{presque sûrement.}$$

On peut démontrer que cette proprieté est équivalente à la suivante:

$$\text{Il existe} \quad A < +\infty; \quad \operatorname{limsup}_{a \downarrow 0}\left(\int_0^{+\infty} 1_{B(0,a)} \frac{(\omega(t))t^{n-1}\,dt}{g(a)}\right) \leq A,$$

presque sûrement, où $\omega(t)$, $t \in R^+$, est un mouvement brownien p-dimensionnel classique.

Par suite on est amené à évaluer le comportement asymptotique, lorsque $a \to 0$, de fonctionnelles du mouvement brownien transient se présentant sous la forme

$$C_n(a, \omega) = \int_0^{+\infty} 1_{B(0,a)}(\omega(t))t^n\,dt, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Un encadrement simple de $C_n(a, \omega)$ (reposant par exemple sur la méthode exposée au cours de la preuve du lemme 2.) permet de voir que avec le choix $g(x) = x^{2n}(\ln 1/x)^{n-1}\ln \ln 1/x$, les trajectoires (à n-paramètres) sont de mesure non nulle pour la m_g-mesure de Hausdorff associée, la fonction "idéale" g recherchée vérifiant par ailleurs la majoration $g(x) \geq x^{2n}(\ln \ln 1/x)^n$, dans la mesure où une relation de comparaison existe. Cependant la caractérisation exacte qui reposerait éventuellement sur la comparaison asymptotique, lorsque $a \to 0$, des fonctionnelles $C_n(a, \omega)$ et $B_f(a, \omega)$ avec le choix $f(x) = x^n$, constitue encore un problème ouvert.

La méthode utilisée dans la preuve de notre théorème principal (comme d'ailleurs dans la preuve des lemmes préliminaires) présente l'avantage essentiel de ne pas être tributaire (contrairement à l'usage courant) de la résolution d'une équation intégro-différentielle associée. En fait a contrario, certains problèmes analytiques présentant des singularités rendant inopérants les procédés de résolution habituels peuvent être traités par des techniques probabilistes reprenant les principes exposés dans ce travail. On consultera [3] pour une application spécifique ayant trait aux équations de Volterra de première espèce à noyau singulier.

Signalons encore que la restriction au cas transient $p \geq 3$ qui, certes, simplifie notablement les calculs, n'est pas réellement fondamentale. Pour un mouvement brownien récurrent on serait amené à envisager la durée du séjour dans $B(0, a)$ relativement à un intervalle de temps borné, par exemple $[0, \tau_b]$, où τ_b est le premier instant d'atteinte d'une sphère auxiliaire $S(0, b)$, $b > a$. Plus généralement, tous ces résultats pourraient très probablement s'adapter au cas d'une diffusion sur $\mathbb{R}^+$.

I. Preliminaires. Ce paragraphe contient quelques résultats préparatoires qui nous seront directement utiles par la suite. Ils concernent essentiellement des transformées de Laplace de diverses distributions associées aux temps d'entrée, de séjour et du dernier instant de visite, relativement à la sphère euclidienne $B(0, a) \subset \mathbb{R}^p$ centrée à l'origine et de rayon $a > 0$, pour un mouvement brownien p-dimensionnel $(\omega(t))$, $t \in \mathbb{R}^+$. Certains de ces lemmes sont bien classiques, consulter [1], [2], [7] et [10]. D'autres nous semblent moins connus, voir notamment le lemme 2a) et lemme 3.

LEMME 1. *Pour tout $x > 0$, $a > 0$, notons par $\tau_a^x(\omega)$ (τ_a si aucune confusion n'est à craindre) le premier instant d'entrée de la trajectoire ω dans la sphère $S(0, a)$; le mouvement brownien démarrant d'un point $x_0 \in S(0, x) \subset \mathbb{R}^P$, $p \geq 3$. En désignant par P^x la mesure de Wiener associée, on obtient*:

Dans le cas $0 < a < x < b$,

$$h(x, a, b, z) = \int_{\{\tau_a < \tau_b\}} \exp(-z\tau_a)\, dP^x \tag{1}$$
$$= \left(\frac{a}{x}\right)^{v} \frac{I_v(\sqrt{2z}b)K_v(\sqrt{2z}x) - I_v(\sqrt{2z}x)K_v(\sqrt{2z}b)}{I_v(\sqrt{2z}b)K_v(\sqrt{2z}a) - I_v(\sqrt{2z}a)K_v(\sqrt{2z}b)};$$

Dans le cas $0 < x < a$,

$$h(x, a, z) = \int \exp(-z\tau_a)\, dP^x = \left(\frac{a}{x}\right)^{v} \frac{I_v(\sqrt{2z}x)}{I_v(\sqrt{2z}a)}; \tag{2}$$

En particulier pour $x = 0$,

$$h(0, a, z) = \left(\frac{\sqrt{2z}a}{2}\right)^{v} \frac{1}{\Gamma(v + 1)I_v(\sqrt{2z}a)}, \tag{3}$$

avec $v = (p - 2)/2$ et où I_v, K_v, désignent respectivement les fonctions de Bessel modifiées de première et troisième espèce (*voir* [9]).

PREUVE. Consulter par exemple [10].

Le mouvement brownien étant issu d'un point $x_0 \in S(0, x)$, désignons par

$t_a^x(\omega)$ (t_a si aucune confusion n'est possible) le dernier instant de séjour de la trajectoire ω dans $B(0, a)$. La variable aléatoire t_a^x est presque sûrement finie. Cela étant posons:

$$H(x, a, b, z, u) = \int_{\{\tau_b > t_a\}} \exp\left(-z \int_0^{+\infty} 1_{B(0,a)}(\omega(t))\, dt - ut_a(\omega)\right) dP^x,$$

$$T(x, a, z, u) = \int \exp\left(-z \int_0^{+\infty} 1_{B(0,a)}(\omega(t))\, dt - ut_a(\omega)\right) dP^x.$$

LEMME 2. *On a la caractérisation suivante:*

$$H(a, a, b, z, u) = \frac{(p-2)/a}{\sqrt{2(z+u)}\,\dfrac{I_v'(\sqrt{2(z+u)}a)}{I_v(\sqrt{2(z+u)}a)} - \sqrt{2u}D} \tag{4}$$

avec:

$$D = \frac{I_v(\sqrt{2u}b)K_v'(\sqrt{2u}a) - I_v'(\sqrt{2u}a)K_v(\sqrt{2u}b)}{I_v(\sqrt{2u}b)K_v(\sqrt{2u}a) - I_v(\sqrt{2u}a)K_v(\sqrt{2u}b)};$$

$$T(a, a, z, u) = \frac{(p-2)/a}{\sqrt{2(z+u)}\,\dfrac{I_v'(\sqrt{2(z+u)}a)}{I_v(\sqrt{2(z+u)}a)} - \sqrt{2u}\,\dfrac{K_v'(\sqrt{2u}a)}{K_v(\sqrt{2u}a)}}; \tag{5}$$

avec comme précédemment $v = (p-2)/2$, et où I_v', K_v' désignent les dérivées des fonctions de Bessel concernées.

PREUVE (4). Fixons une boule auxiliaire $B(0, x)$, $0 < a < x < b$, et désignons par $t_0(\omega) \equiv 0$, $t_1(\omega) = \inf\{t > 0;\ \|\omega(t)\| = x\}$, $t_2(\omega) = \inf\{t > t_1(\omega);\ \|\omega(t)\| = a\}$ et $\cdots$ ainsi de suite, les temps de passages successifs dans les sphères $S(0, x)$, $S(0, a)$. Le caractère transient du processus et la continuité des trajectoires assurent que le nombre total de retours $d(a, x, \omega)$ vers $S(0, a)$, via $S(0, x)$, est nécessairement fini. Les trajectoires vérifiant la condition:

$$t_{2i}(\omega) - t_{2i-1}(\omega) < \tau_b^x(\omega) - t_{2i-1}(\omega), \quad \text{pour tout} \quad i = 1, \cdots d(a, x, \omega), \quad d(a, x, \omega) \geq 1, \tag{$*$}$$

coïncident avec celles satisfaisant

$$\tau_b^a(\omega) > t_a^a(\omega), \quad d(a, x, \omega) \geq 1. \tag{$*$}$$

Par ailleurs, lorsque $x \downarrow a$, l'ensemble $\{\omega;\ d(a, x, \omega) = 0\}$ devient négligeable. Plus généralement on a

$$\lim_{x\downarrow a} P^a\{\omega;\ d(a, x, \omega) \leq k\} = 0, \quad \text{pour tout entier } k \text{ fixé.}$$

Les suites $U_x = \sum_i (t_{2i+1} - t_{2i})$ et $V_x = \sum_i (t_{2i+2} - t_{2i+1})$ diffèrent respectivement des temps de séjours

$$\int_0^{+\infty} 1_{B(0,a)}(\omega(t))\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} 1_{B^c(0,a)}(\omega(t))\,dt,$$

$B^c(0, a) = \mathbb{R}^p\backslash B(0, a)$, que par une fraction de temps inférieure au temps total passé par la trajectoire dans la couronne $B(0, x)\backslash B(0, a)$. Lorsque x tend vers a, cette "erreur" converge vers zéro, on est ainsi confronté à l'expression suivante:

$$H(a, a, b, z, u) = \lim_{x\downarrow a} \int_{\{\tau_b>t_a\}} \exp(-(u+z)U_x - uV_x)\,dP^a.$$

Décomposons l'intégrale ci-dessus suivant le nombre exact de retours vers $S(0, a)$, via $S(0, x)$ et appliquons les remarques qui précèdent, on obtient:

$$\begin{aligned} &H(a, a, b, z, u)\\ &\quad= \lim_{x\downarrow a} \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \displaystyle\int_{\{\tau_b>t_a, d(a,x)=n\}} \exp(-(u+z)U_x - uV_x)\,dP^a\\ &\quad= \lim_{x\downarrow a} \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \displaystyle\int_{\{d(a,x)=n, t_{2i}-t_{2i-1}<\tau_b^x - t_{2i-1}, i=1,\cdots,n\}} \exp(-(z+u)U_x - uV_x)\,dP^a. \end{aligned}$$

En vertu de la propriété de Markoff forte cette formule s'explicite sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} &H(a, a, b, z, u)\\ &= \lim_{x\downarrow a}\left(1-\left(\frac{a}{x}\right)^{2v}\right) \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\displaystyle\int_{\{\tau_a<\tau_b\}} \exp(-u\tau_a)\,dP^x\right]^n \left[\displaystyle\int \exp(-(z+u)\tau_x)\,dP^a\right]^{n+1}\\ &= \lim_{x\downarrow a} \frac{1-(a/x)^{2v}}{1-(\int_{\{\tau_a<\tau_b\}} \exp(-u\tau_a)\,dP^x)(\int \exp(-(u+z)\tau_x)\,dP^a}\\ &= \frac{-2v/a}{(d/dx)\{\int_{\{\tau_a<\tau_b\}} \exp(-u\tau_a)\,dP^x \int \exp(-(u+z)\tau_x)\,dP^a\}_{x=a^+}}. \end{aligned}$$

Ainsi le résultat final repose sur un calcul numérique simple ne présentant pas de difficultés majeures.

La formule (5) s'obtient en faisant tendre b vers l'infini. On pourrait également, ce qui est presque plus rapide, reprendre la preuve précédente convenablement aménagée (consulter [7] pour une preuve reposant sur un principe différent). En particulier on retrouve les transformées de Laplace associées au temps de séjour dans la boule et au dernier instant de visite, soit plus précisément:

$$T(a, a, z, 0) = \frac{(p-2)I_v(\sqrt{2z}a)}{\sqrt{2z}aI_{v-1}(\sqrt{2z}a)}; \tag{6}$$

$$T(a, a, 0, z) = (p-2)I_v(\sqrt{2z}a)K_v(\sqrt{2z}a). \tag{7}$$

Notons encore que la propriété de Markoff forte permet de calculer $H(x, a, b, z, u)$ et $T(x, a, z, u)$ pour un choix arbitraire de $x > 0$. Par exemple avec $0 < x < a$ on a trivailement

$$H(x, a, b, z, u) = H(a, a, b, z, u)h(x, a, z + u).$$

Le résultat qui suit, dont l'intérêt n'est peut-être pas immédiatement perceptible, intervient de façon essentielle au cours de la preuve du théorème fondamental (Théorème 2).

LEMME 3. *On a la caractérisation suivante*:

$$V(a, a, b, z, u) = \int \exp\left(-z \int_0^{\tau_b} 1_{B(0,a)}(\omega(t))\, dt - u\tau_b\right) dP^a = \frac{Ce}{e + (1/T)}, \tag{8}$$

avec:

α) $$C = \left(\frac{b}{a}\right)^v \frac{K_v(\sqrt{2ua})}{K_v(\sqrt{2ub})};$$

β) $$T = T(a, a, z, u) = \frac{(p-2)/a}{\sqrt{2(z+u)}\,\dfrac{I_v'(\sqrt{2(z+u)}a)}{I_v(\sqrt{2(z+u)}a)} - \sqrt{2u}\,\dfrac{K_v'(\sqrt{2ua})}{K_v(\sqrt{2ua})}};$$

γ) $$e = \left(\frac{\sqrt{2ua}}{2v}\right)\left[\frac{K_v'(\sqrt{2ua})}{K_v(\sqrt{2ua})} - D\right] \quad \textit{avec}:$$

δ) $$D = \frac{I_v(\sqrt{2ub})K_v'(\sqrt{2ua}) - I_v'(\sqrt{2ua})K_v(\sqrt{2ub})}{I_v(\sqrt{2ub})K_v(\sqrt{2ua}) - I_v(\sqrt{2ua})K_v(\sqrt{2ub})}.$$

PREUVE. On a trivialement

$$T(a, a, z, u) - H(a, a, b, z, u) = \int_{\{\tau_b < t_a\}} \exp\left(-z \int_0^{+\infty} 1_{B(0,a)}(\omega(t))\, dt - ut_a\right) dP^a$$

et avec la propriété de Markoff forte

$$\begin{aligned} T(a, a, z, u) &- H(a, a, b, z, u) \\ &= V(a, a, b, z, u) \\ &\quad \cdot \int_{\{\tau_a < +\infty\}} \exp\left(-z \int_0^{+\infty} 1_{B(0,a)}(\omega(t))\, dt - ut_a\right) dP^a \\ &= V(a, a, b, z, u) \\ &\quad \cdot \int_{\{\tau_a < +\infty\}} \exp(-u\tau_a)\, dP^b \int \exp\left(-z \int_0^{+\infty} 1_{B(0,a)}(\omega(t))\, dt - ut_a\right) dP^a \\ &= V(a, a, b, z, u)h(b, a, +\infty, u)T(a, a, z, u). \end{aligned}$$

On en déduit

$$V(a, a, b, z, u) = \frac{T(a, a, z, u) - H(a, a, b, z, u)}{h(b, a, +\infty, u)T(a, a, z, u)}.$$

Puis le formule annoncée grâce aux identifications suivantes:

$$e = \frac{T(a, a, z, u) - H(a, a, b, z, u)}{T(a, a, z, u)H(a, a, b, z, u)}, \quad C = \frac{1}{h(b, a, +\infty, u)}.$$

La présentation quelque peu particulière de l'expression donnant $V(a, a, b, z, u)$ et visant à isoler les termes indépendants de b, se concrètisera dans le courant du troisième paragraphe.

II. Oscillation du mouvement brownien au voisinage de la sphere. Fixons une suite $(a(n))$, $n \geq 2$, décroissante vers $a > 0$ et désignons par $d(a, a(n), t, \omega)$, $t > 0$, le nombre de retours vers la sphère $S(0, a)$, via la sphère $S(0, a(n))$ dans l'intervalle de temps $[0, t]$; le mouvement brownien p-dimensionnel $(\omega(t))$, $t \in \mathbb{R}^+$, démarrant d'un point $a_0 \in S(0, a) \subset R^p$. Pour tout $B > a(2)$ on notera par τ_B le premier instant d'atteinte de la sphère $S(0, B)$ et par $d(a, a(n), \tau_B, \omega)$ le nombre de retours relatif à l'intervalle de temps $[0, \tau_B^a(\omega)]$. On voit facilement que la suite $(S_n(\omega) = d(a, a(n), \tau_B(\omega), \omega))$, $n \geq 2$, est une chaîne de Markoff. La probabilité de transition

$$P(S_{n+1} = i_2 \mid S_n = i_1) = p_n(i_2, i_1)$$

est de la forme

$$P_n(i_1, i_2) = P(\textstyle\sum_{i=1}^{i_1} X_i^n = i_2),$$

les variables aléatoires (X_i^n), $i = 1, \cdots, i_1$, étant indépendantes et toutes distribuées comme la variable aléatoire $d(a, a(n + 1), \tau_{a(n)}(\omega), \omega)$, suit plus précisément suivant la loi:

$$P(X_1^n = k) = \frac{1 - (a/a(n + 1))^{2v}}{1 - (a/a(n))^{2v}} \left(\frac{(a/a(n + 1))^{2v} - (a/a(n))^{2v}}{1 - (a/a(n))^{2v}}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2 \cdots.$$

Considérons une situation analogue pour le mouvement brownien linéaire (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}$) en notant par $d(a, a'(n), \tau_b, \omega)$ le nombre de retours vers $a > 0$, via $a'(n) > a$, avant le premier instant d'atteinte du point $b > a'(n_0)$. On vérifie directement que avec le choix

$$a(n) = a(1 + (1/(n - 1)))^{1/2v}, \quad a'(n) = a(1 + (1/n))$$

et $b = a(2 - (a/B)^{2v})$, les deux chaînes de Markoff $(S_n = d(a, a(n), \tau_B, \cdot))$ et $(S'_n = d(a, a'(n), \tau_b, \cdot))$, $n \geq 2$, sont identiques. On entend par là qu'elles ont la même distribution initiale et les mêmes probabilités de transition. On en déduit, grâce au "downcrossing theorem" de P. Lévy, voir Ito-McKean [4], que la suite

$$(1 - (a/x)^{2v})d(a, x, \tau_B, \omega), \quad x > a,$$

converge presque sûrement, lorsque x tend vers a, vers une variable aléatoire

$F(a, \tau_B, \omega)$ distribuée comme le temps local $(1/a)t^+(\tau_{a(1-(a/B)^{2v})}, 0, \omega)$; voir [4] pour la notation et le détail. En faisant tendre B vers l'infini il en résulte que la variable aléatoire $F(a, +\infty, \omega) = F(a, ta, \omega)$ a pour loi la distribution exponentielle $1_{\mathbb{R}^+}(t)e^{-t}\,dt$. Cette propriété est en fait un cas particulier du théorème plus général suivant.

THEOREME 1. *La distribution conjointe des variables aléatoires* $F(a, t_a, \omega)$ *et* t_a *est caractérisée comme suit*

$$\begin{aligned} F(a, +\infty, z, u) &= \int \exp(-zF(a, t_a, \omega) - ut_a)\,dP^a \\ &= \frac{1}{z + (1/2vI_v(\sqrt{2ua})K_v(\sqrt{2ua}))}. \end{aligned} \tag{9}$$

PREUVE. En reprenant les notations intervenant au cours de la preuve du Lemme 2, nous avons:

$$\begin{aligned} &F(a, +\infty, z, u) \\ &= \lim_{x\downarrow a} \int \exp\left(-z\left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{2v}\right) d(a, x, +\infty, \omega) - u(U_x + V_x)\right) dP^a \\ &= \lim_{x\downarrow a} \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{2v}\right)\exp\left(-nz\left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{2v}\right)\right)(h(a, x, u))^n(h(x, a, +\infty, u))^{n+1} \\ &= \lim_{x\downarrow a} \frac{1 - (a/x)^{2v}}{1 - \exp(-z(1 - (a/x)^{2v}))h(a, x, u)h(x, a, +\infty, u)} \\ &= \frac{-2v/a}{(d/dx)\{\exp(-z(1 - (a/x)^{2v}))h(a, x, u)h(x, a, +\infty, u)\}_{x=a^+}}, \end{aligned}$$

un calcul élémentaire, notamment l'identité

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{I_v(\sqrt{2ua})K_v(\sqrt{2ux})}{I_v(\sqrt{2ux})K_v(\sqrt{2ua})}\right\}_{x=a^+} = -\frac{1}{aK_v(\sqrt{2ua})I_v(\sqrt{2ua})}$$

permet de conclure.

Le calcul direct de la transformée de Laplace de la loi associée à la variable aléatoire $F(a, t, \omega)$, t-fixé, est plus délicat. Cependant il est relativement aisé de déterminer la double transformée de Laplace

$$L(a, \alpha, z) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \int_{\{t\le t_a\}} \exp(-zF(a, t))\,dP^a\,dt;$$

pour obtenir la loi de $F(a, t, \omega)$ il faudra donc procéder à deux inversions consécutives.

THEOREME 2. *On a la formulation suivante*:

$$L(a, \alpha, z) = \frac{1}{\alpha} \frac{1 - (p-2) I_v(\sqrt{2\alpha} a) K_v(\sqrt{2\alpha} a)}{1 + z(p-2) I_v(\sqrt{2\alpha} a) K_v(\sqrt{2\alpha} a)}. \tag{10}$$

PREUVE. Conditionnellement à $d(x, a, t_a) = n$, fixé, les variables aléatoires $(t_{2i+1} - t_{2i})$, $(t_{2i+2} - t_{2i+1})$, $i = 0, \cdots, d(x, a, t_a) = n$, sont indépendantes (voir lemme 2), par suite on obtient:

$$\begin{aligned} L(a, \alpha, z) &= \lim_{x \downarrow a} \left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{p-2}\right) \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=2}^{n-1} \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-\alpha t) \\ &\quad \cdot \left(\int_{\left| \substack{(t_1 - t_0) + \cdots + (t_{2k+1} - t_{2k}) \leq t \\ (t_1 - t_0) + \cdots + (t_{2k+2} - t_{2k+2}) > t, d(x,a,t_a) = n} \right|} \exp\left(-z\left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{2p}\right)k\right) dP^a \right) dt \\ &= \lim_{x \downarrow a} \left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{p-2}\right) \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \displaystyle\frac{1}{\alpha} \exp\left(-kz\left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{p-2}\right)\right)\left(\frac{a}{x}\right)^{2nv} \\ &\quad \cdot \left(\frac{h(a, x, \alpha) h(x, a, +\infty, \alpha)}{(a/x)^{2v}}\right)^k \left(1 - \frac{h(a, x, \alpha) h(x, a, +\infty, \alpha)}{(a/x)^{2v}}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{2v/a + (d/dx)\{h(a, x, \alpha) h(x, a, +\infty, \alpha)\}_{x=a^+}}{-2zv/a + (d/dx)\{h(a, x, \alpha) h(x, a, +\infty, \alpha)\}_{x=a^+}}; \end{aligned}$$

on termine en explicitant cette écriture.

III. Resultat principal. Fixons une fonction numérique f: $[0, 1] \to \mathbb{R}^+$, bornée et mesurable pour la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. Notons encore

$$I = (I_1, I_2, I_3) = \left(\int_0^{+\infty} 1_{B(0,a)}(\omega(t)) f\left(\frac{F(a, t, \omega)}{F(a, +\infty, \omega)}\right) dt, F(a, t_a, \omega), t_a(\omega) \right).$$

Notre résultat s'énonce comme suit:

THEOREME 3. *La transformée de Laplace de la distribution associée au vecteur aléatoire I S'exprime à l'aide de la formule suivante*:

$$\begin{aligned} S_f(a, a, z, u, w) &= \int \exp(-zI_1 - uI_2 - wI_3) \, dP^a \\ &= \frac{1}{u + \int_0^1 (1/T(a, a, zf(t), w)) \, dt}, \end{aligned} \tag{11}$$

avec

$$T(a, a, z, u) = \frac{(p-2)/a}{\sqrt{2(z+u)} \dfrac{I_v'(\sqrt{2(z+u)} a)}{I_v(\sqrt{2(z+u)} a)} - \sqrt{2u} \dfrac{K_v'(\sqrt{2u} a)}{K_v(\sqrt{2u} a)}};$$

en particulier on obtient:

$$S_f(a, a, z, 0, 0) = \frac{(p-2)/a}{\displaystyle\int_0^1 \frac{I_{v-1}(\sqrt{2z}f(t)a)}{I_v(\sqrt{2z}f(t)a)} \sqrt{2z}f(t)\, dt}. \tag{12}$$

PREUVE. Il est suffisant d'établir ce résultat dans le cas plus restrictif où f est de classe C^1 (continûment dérivable).

Considérons donc l'expression

$$I(x, f, \omega) = \int_0^{+\infty} 1_{B(0,a)}(\omega(t)) f\left(\frac{d(a, x, t, \omega)}{d(a, x, t_a, \omega)}\right) dt,$$

et décomposons l'intégrale suivant les intervalles consécutifs délimités par les instants de passages successifs. Dans un intervalle de temps se présentant sous la forme $[t_{2i+1}, t_{2i+2}]$ la trajectoire est absente de la boule, de ce fait, on obtient:

$$I(x, f, \omega) = \textstyle\sum_{i=0}^{d(a,x,t_a,\omega)} f\left(\dfrac{i}{d(a, x, t_a, \omega)}\right) \displaystyle\int_{t_{2i}}^{t_{2i+1}} 1_{B(0,a)}(\omega(t))\, dt.$$

En conclusion, la transformée de Laplace s'écrit:

$$S_f(a, a, z, u, w) = \lim_{x\downarrow a} \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}$$

$$\cdot \int_{\{d(a,x,t_a)=n\}} \exp\left(-z \textstyle\sum_{i=0}^{n} f\left(\dfrac{i}{n}\right) \displaystyle\int_{t_{2i}}^{t_{2i+1}} 1_{B(0,a)}(\omega(t))\, dt - nu\left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{2v}\right) - w(U_x + V_x)\right) dP^a,$$

et avec la propriété de Markoff forte

$$S_f(a, a, z, u, w)$$

$$= \lim_{x\downarrow a}\left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{2v}\right) \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-nu\left(1 - \left(\dfrac{a}{x}\right)^{2v}\right)\right)\left[\displaystyle\int_{\{\tau_a<\infty\}} \exp(-w\tau_a)\, dP^x\right]^n$$

$$\cdot \textstyle\prod_{i=1}^{n} \displaystyle\int \exp\left(-zf\left(\frac{i}{n}\right) \int_0^{\tau_x} 1_{B(0,a)}(\omega(t))\, dt - w\tau_x\right) dP^a.$$

Abordons l'étape finale, c'est-à-dire, le calcul explicite de cette limite.

LEMME 4. *Considérons deux fonctions numériques* h: $[0, 1] \to \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$, e: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, *et un point* $a > 0$, *fixés. De plus, supposons les conditions suivantes réalisées*:

1. *h est positive et de classe C^1 (continûment dérivable) sur l'intervalle* $[0, 1]$;
2. $\lim_{x\downarrow a} e(x) = +\infty$;
3. *la dérivée à droite* $(d/dx)(1/e(x))_{x=a^+}$, *est finie*;

on a alors:

$$I = \lim_{x \downarrow a} \left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{2v}\right) \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-nu\left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{2v}\right)\right) \prod_{i=1}^{n} \dfrac{e(x)}{e(x) + h(i/n)}$$

(13)
$$= \frac{u2v/a}{\dfrac{u2v}{a} + \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{e(x)}\right)_{x=a^+} \displaystyle\int_0^1 h(t)\, dt}.$$

PREUVE DU LEMME. L'identité élémentaire

$$n \int_0^1 f(y)\, dy = \textstyle\sum_{i=1}^{n} f\left(\dfrac{i}{n}\right) - \dfrac{1}{n} \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \displaystyle\int_0^1 y f'\left(\frac{y+i}{n}\right) dy, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

appliquée à la fonction $f(y) = \ln(h(y) + e(x)/e(x))$, conduit vers l'identification

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{e(x)}{e(x) + h(i/n)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-f\left(\frac{i}{n}\right)\right)$$

$$= \exp\left(-n \int_0^1 \ln \frac{h(y) + e(x)}{e(x)}\, dy\right) \exp\left(-\frac{1}{n} \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \displaystyle\int_0^1 y \frac{h'((y+i)/n)}{e(x) + h((y+i)/n)}\, dy\right).$$

Le terme "parasite"

$$R(n, x) = \exp\left(-\frac{1}{n} \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \displaystyle\int_0^1 \frac{y h'((y+i)/n)}{e(x) + h((y+i)/n)}\, dy\right),$$

converge vers un, lorsque $x \downarrow a$, uniformément en $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Cette propriété résulte aisément des hypothèses 1 et 2 du lemme.

Par suite l'expression limite envisagée s'écrit:

$$I = \lim_{x \downarrow a} \left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{2v}\right) \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\exp\left(-\displaystyle\int_0^1 \ln \frac{h(y) + e(x)}{e(x)}\, dy - u\left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{2v}\right)\right)\right]^n$$

$$= \lim_{x \downarrow a} \frac{1 - (a/x)^{2v}}{1 - \exp\left(-\displaystyle\int_0^1 \ln \frac{h(y) + e(x)}{e(x)}\, dy - u\left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{2v}\right)\right)}$$

$$= \frac{-2v/a}{\dfrac{d}{dx}\left\{\exp\left(-\displaystyle\int_0^1 \ln \frac{h(y) + e(x)}{e(x)}\, dy - u\left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{2v}\right)\right)\right\}_{x=a^+}}$$

$$= \frac{2v/a}{\dfrac{u2v}{a} + \dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\int_0^1 \ln \frac{h(y)+e(x)}{e(x)}\, dy\right\}_{x=a^+}}$$

$$= \frac{2v/a}{(u2v/a) + (d/dx)(1/e(x))_{x=a^+} \int_0^1 h(y)\, dy},$$

en vertu des hypothèses 2 et 3 du lemme. □

Reprenons la preuve du théorème 2.

L'identification exprimée par le lemme 3 permet d'écrire:

$S_f(a, a, z, u, w)$

$$= \lim_{x \downarrow a}\left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{2v}\right) \sum_{n=1}^{+\infty}$$

$$\cdot \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{C(a, x, w)e(a, x, w)h(x, a, +\infty, w)}{e(a, x, w) + (1/T(a, zf(i/n), w))}\right]\left[\exp\left(-nu\left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{2v}\right)\right)\right],$$

avec

$$C(a, x, w) = \frac{1}{h(x, a, +\infty, w)}.$$

On retrouve bien la formulation du lemme 4 avec les identifications:

$$h(x) = \frac{1}{T(a, zf(x), w)} \quad \text{et} \quad e(x) = e(a, x, w).$$

Il reste à calculer $(d/dx)(1/e(x))_{x=a^+}$.

Les propriétés classiques des fonctions de Bessel permettent de voir que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{e(x)}\right)_{x=a^+} = \frac{2v}{a},$$

la preuve du théorème 2 est donc complètement achevée.

Ainsi que nous l'avons indiqué en introduction, le théorème 2 intervient dans le domaine des marches au hasard. On lui doit en particulier la caractérisation de la distribution asymptotique du temps de séjour, pour une marche au hasard de Bernoulli sur $\mathbb{Z}^p$, relatif à un intervalle fixé de fréquences des visites.

THEOREME 4. *Pour tout* $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ *la fonction de distribution*

$$F_n(t) = P\{(1/n) \textstyle\sum_{(n(a,k,\omega)/n(a,+\infty,\omega)) \in [\alpha,\beta]} 1_{B(0,a\sqrt{n})}(S_k(\omega)) \leq t\}$$

converge, Lorsque $n \longrightarrow +\infty$, *vers une fonction de distribution* $F(t)$ *admettant la* *transformée de Laplace suivante*:

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt}\, dF(t) = \frac{1}{(\sqrt{2za}/(p-2))(I_{\nu-1}(\sqrt{2za})/I_\nu(\sqrt{2za}))(\beta-\alpha) + (1-(\beta-\alpha))}. \tag{14}$$

PREUVE. On applique la conclusion du théorème 2 avec le choix $f(t) = 1_{[\alpha,\beta]}(t)$. En particulier on notera que la distribution limite n'est tributaire que de la longueur $\beta - \alpha$ de l'intervalle considéré. Pour un intervalle réduit à une fréquence $\alpha = \beta$ unique, la distribution associée à $F(t)$ coïncide avec la mesure de Dirac à l'origine.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CIESIELSKI, Z. and TAYLOR, S. J. (1962). First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path. *Trans. Amer. Math. Soc.* **10** 434–450.

[2] GETOOR, R. K. (1979). The Brownian escape process. *Ann. Probab.* **7** 864–867.

[3] GOLDMAN, A. (1983). On a class of non-additive functionals of the Brownian path and applications NATO A.S.I. Statistical extremes and applications. Ed. Reidel. Unpublished manuscript.

[4] ITO, K. and MCKEAN, JR., H. P. (1965). *Diffusion Processes and their Sample Paths*. Springer, Berlin.

[5] KAC, M. (1951). On some connections between probability theory and differential and integral equations. *Proc. 2nd Berkeley Symp.* 189–215.

[6] KAC, M. and DONSKER, M. D. (1951). A sampling method for determining the lowest eigenvalue and the principal eigenfunctions of Schrödinger's equation. *J. Res. Nat. Bur. Standards* **44** 551–557.

[7] PITMAN, J. and YOR, M. (1982). Bessel processes and infinitely divisible laws. *Lect. Notes in Math.* **851**.

[8] REVESZ, P. (1980). Local time and invariance. *Lect. Notes in Math.* **861**.

[9] WATSON, G. N. (1944). *A Treatise of Bessel Functions*. Cambridge Univ. Press.

[10] WENDEL, J. G. (1980). Hitting spheres with Brownian motion. *Ann. Probab.* **8** 164–169.

DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD
43 BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX
FRANCE