The Annals of Probability
1986, Vol. 14, No. 4, 1219–1244

SUR LA SAUCISSE DE WIENER ET LES POINTS MULTIPLES DU MOUVEMENT BROWNIEN

PAR JEAN-FRANÇOIS LE GALL

Université Pierre et Marie Curie

Let B be a Brownian motion with values in Euclidean space R^d, where $d = 2$ or 3. The Wiener sausage with radius ε associated with B is defined as the set of points whose distance from the path is less than ε. Let B' be another Brownian motion with values in R^d, independent of B. The Lebesgue measure of the intersection of the Wiener sausages associated with B and B', suitably normalized, is shown to converge, when ε goes to 0, towards the intersection local time of B and B', as defined by Geman, Horowitz and Rosen. This approximation of the intersection local time is used to prove a conjecture of Taylor, relating to the Hausdorff measure of the set of multiple points of planar Brownian motion.

0. Introduction. Soit $(B_t,\ t \geq 0)$ un mouvement brownien à valeurs dans l'espace euclidien à d dimensions R^d $(d \geq 2)$, issu de 0. On s'intéresse à la probabilité que B pénètre avant un instant donné t dans une "petite" boule de l'espace. Soit y un point de R^d, on note, pour $\varepsilon > 0$, $T_\varepsilon(y)$ le premier temps de passage (éventuellement infini) de B dans la boule de centre y et de rayon ε. Alors:

$$\text{(0a)} \qquad P(T_\varepsilon(y) \leq t) \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} \begin{cases} \pi(\log 1/\varepsilon)^{-1} \int_0^t p_s(0, y)\, ds & \text{si } d = 2, \\ (d/2 - 1) C_d \varepsilon^{d-2} \int_0^t p_s(0, y)\, ds & \text{si } d \geq 3, \end{cases}$$

où C_d est le volume de la sphère unité en dimension d et $p_s(x, y)$ désigne la densité de transition gaussienne:

$$p_s(x, y) = (2\pi s)^{-d/2} \exp(-|y - x|^2/2s).$$

L'équivalence (0a) a été obtenue, dans le cas $d = 2$, par Spitzer (1958). Ce résultat est très lié au problème de l'étude asymptotique de la "saucisse de Wiener." Pour $\varepsilon > 0$, la saucisse de Wiener de rayon ε associée à B sur l'intervalle de temps $[0; t]$ est définie par:

$$S_\varepsilon(0, t) = \{ y \in R^d;\ \inf(|B_s - y|;\ 0 \leq s \leq t) \leq \varepsilon \}.$$

Le terme de gauche de (0a) s'interprète comme la probabilité que y appartienne à $S_\varepsilon(0, t)$. A l'aide de raffinements de (0a) on montre assez facilement

Received December 1984.

AMS 1980 *subject classifications.* Primary 60J65; secondary 60G17, 60J55.

Key words and phrases. Wiener sausage, intersection local time, Hausdorff measure, multiple points.

que, m désignant la mesure de Lebesgue sur R^d:

$$\text{(0b)}\qquad \begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0}(\log 1/\varepsilon)m(S_\varepsilon(0,t)) &= \pi t \quad \text{si } d=2,\\ \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2-d}m(S_\varepsilon(0,t)) &= (d/2-1)C_d t \quad \text{si } d\geq 3, \end{aligned}$$

avec dans les deux cas convergence dans $L^2(P)$.

Au moins dans le cas $d \geq 3$ le résultat de convergence (0b) est connu depuis longtemps; voir par exemple Itô et McKean (1965). On obtient des résultats peut-être plus intéressants en considérant un second mouvement brownien à valeurs dans R^d, noté $(B'_t,\ t \geq 0)$, indépendant de B. Dvoretzky, Erdös et Kakutani (1950) ont montré que pour $d = 2$ ou 3 les trajectoires de B et B' se rencontrent presque sûrement. Geman, Horowitz et Rosen (1984) ont introduit la notion de temps local de confluence qui permet de construire une mesure positive, notée l_2, portée par l'ensemble I des points communs aux trajectoires de B et B' sur l'intervalle de temps $[0; 1]$. Soit, pour $\varepsilon > 0$, $S'_\varepsilon(0, 1)$ la saucisse de Wiener de rayon ε associée à B' sur l'intervalle $[0; 1]$. Il semble plausible que l'étude asymptotique de $S_\varepsilon(0, t) \cap S'_\varepsilon(0, t)$ quand ε tend vers 0 donne des renseignements sur l'ensemble I. Nous montrons que:

$$\text{(0c)}\qquad \begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0}(\log 1/\varepsilon)^2 m(S_\varepsilon(0,1)\cap S'_\varepsilon(0,1)) &= \pi^2 l_2(I) \quad \text{si } d=2,\\ \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-2}m(S_\varepsilon(0,1)\cap S'_\varepsilon(0,1)) &= 4\pi^2 l_2(I) \quad \text{si } d=3, \end{aligned}$$

avec dans les deux cas convergence dans $L^2(P)$.

Plus précisément, la mesure l_2 apparait comme mesure limite, quand ε tend vers 0, des mesures obtenues en normalisant de façon convenable la mesure de Lebesgue sur l'intersection des saucisses de Wiener de rayon ε associées à B et B'. Cette méthode d'approximation de la mesure l_2 peut être utilisée pour étudier les propriétés de cette mesure, et par la même occasion de l'ensemble I. Or l'étude des points d'intersection des trajectoires de deux mouvements browniens indépendants est étroitement liée à celle des points doubles pour un seul mouvement brownien. Dans le cas du plan ($d = 2$), notons, pour tout entier $n \geq 1$, D_n l'ensemble des points de multiplicité (au moins) n de la trajectoire de B sur l'intervalle $[0; 1]$. Dvoretzky, Erdös et Kakutani (1954) ont montré que, pour tout n, D_n est presque sûrement non vide et Taylor (1967) a établi que sa dimension de Hausdorff est deux. Nous utilisons l'approximation (0c), et son extension au cas de n mouvements browniens plans indépendants, pour montrer le résultat suivant, qui confirme une conjecture de Taylor (1973):

$$\text{(0d)}\qquad \begin{aligned} &\text{soit} \quad h_\alpha(x) = x^2(\log 1/x)^\alpha, \quad \text{alors}\\ &h_\alpha - m(D_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \leq n,\\ \infty & \text{si } \alpha > n, \end{cases} \end{aligned}$$

où $h_\alpha - m$ désigne la mesure de Hausdorff associée à h_α.

Les mêmes techniques s'appliquent à l'étude des points doubles de la trajectoire du mouvement brownien dans R^3.

La Partie 1 est consacrée à la démonstration des équivalences (0a). Notre preuve fait apparaitre ce résultat comme un cas particulier d'un résultat commun à une vaste classe de diffusions. Dans la Partie 2 nous démontrons quelques extensions des équivalences (0a) et nous appliquons les résultats obtenus à l'étude asymptotique de la saucisse de Wiener quand le rayon tend vers 0. La Partie 3 contient les principaux théorèmes: nous utilisons les estimations de la Partie 2 pour montrer les résultats limites (0c). Enfin, dans la Partie 4 nous appliquons les résultats précédents à l'étude des points multiples du mouvement brownien et nous établissons la conjecture de Taylor (0d).

1. Un résultat général sur les diffusions. Le point de départ de notre travail étant les équivalences (0a), nous commencerons par en donner une preuve différente de celle de Spitzer (1958) dans le cas $d = 2$. La preuve de Spitzer reposait sur un calcul explicite de la loi de $T_\varepsilon(y)$, faisant intervenir les fonctions de Bessel. La preuve que nous proposons présente le double avantage de s'appliquer à une vaste classe de diffusions et d'utiliser les beaux résultats de Williams sur le retournement des diffusions.

Nous considérons une diffusion régulière, notée

$$(X_t, 0 \le t < \zeta;\ P_x, 0 < x < \infty)$$

sur l'intervalle $]0; \infty[$ de R. s désignera une fonction d'échelle pour la diffusion et m la mesure de rapidité normalisée de façon que le générateur infinitésimal soit $\frac{1}{2}(d/dm)(d/ds)$. Nous ferons les hypothèses suivantes:

(i) $\zeta = \inf\{t > 0;\ X_{t-} = 0 \text{ ou } \infty\}$.
(ii) $s(0) = -\infty$ et $s(\infty) < \infty$.
(iii) 0 est un point d'entrée pour la diffusion.

En vue de (ii) on peut choisir s de façon que $s(\infty) = 0$, ce que nous supposerons dans la suite. L'hypothèse (i) montre que la diffusion est tuée seulement quand elle atteint l'un ou l'autre des deux points frontières. En fait (ii) entraine:

$$\zeta = \inf\{t > 0;\ X_{t-} = \infty\}.$$

On peut associer à la diffusion (X, P) une diffusion "duale" qui sera la diffusion initiale "conditionnée à converger vers 0." Le conditionnement est ici à interpréter au sens de Doob (1957). A l'instar de Pitman et Yor (1982) nous noterons $(X_t,\ 0 \le t < \zeta;\ P_x^{\downarrow},\ 0 < x < \infty)$ et nous appellerons $\downarrow$-diffusion cette nouvelle diffusion, qui est définie, pour tous $0 < x < y < \infty$, par:

$$\text{(1a)} \qquad \frac{dP_y^{\downarrow}}{dP_y} = \frac{1_{(T_x < \zeta)}}{P_y[T_x < \zeta]} \quad \text{sur } \mathscr{F}_{T_x},$$

où $T_x = \inf\{t > 0;\ X_t = x\}$ et $\mathscr{F}_{T_x}$ désigne la tribu engendrée par $(X_{t \wedge T_x},\ 0 \le t < \zeta)$. Pour que notre définition soit complète il faut imposer de plus que la $\downarrow$-diffusion est tuée quand elle atteint 0. Nous renvoyons à Williams (1974) et Pitman et Yor (1981 et 1982) pour davantage d'information sur la $\downarrow$-diffusion.

Soit pour $0 < y < \infty$, $L_y = \sup\{t \ge 0;\ X_t = y\}$. Williams (1974) a établi le résultat remarquable suivant, qui donne une interprétation "trajectorielle" du conditionnement de Doob. Pour tout $y > 0$, $\zeta < \infty$, $P_y^{\downarrow}$ p.s. et:

(1b) $$\left(X_{\zeta-t}, 0 \le t < \zeta;\ P_y^{\downarrow}\right) \overset{(d)}{=} \left(X_t, 0 \le t < L_y;\ P_0\right),$$

où le symbole $\overset{(d)}{=}$ signifie l'identité en distribution.

Nous aurons encore besoin de la description de la loi de L_y, donnée par Pitman et Yor (1981). Rappelons d'abord d'après Itô et McKean (1965) qu'il existe une fonction continue $p_t^*(x, y)$, définie pour $(t, x, y) \in]0; \infty[x(R_+)^2$, telle que le semi-groupe de la diffusion initiale s'écrive, pour tout $t > 0$:

$$Q_t(x, dy) = p_t^*(x, y) m(dy).$$

Pitman et Yor (1981) ont donné l'expression explicite suivante de la loi de L_y, pour $0 \le x < y < \infty$:

(1c) $$P_x\left[L_y \in dt\right] = (-1/2s(y)) p_t^*(x, y)\, dt.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de prouver le résultat principal de cette partie.

THÉORÈME 1-1. *Soit* (X, P) *une diffusion régulière sur l'intervalle* $]0; \infty[$ *satisfaisant les hypothèses* (i), (ii), *et* (iii). *Alors, pour tout* $x > 0$ *et tout* $t > 0$:

$$P_x[T_\varepsilon \le t] \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} (-1/2s(\varepsilon)) \int_0^t p_s^*(0, x)\, ds.$$

PREUVE. On écrit:

$$\begin{aligned} P_x[T_\varepsilon \le t] &= P_x[(T_\varepsilon \le t) \cap (T_\varepsilon < \zeta)] \\ &= (s(x)/s(\varepsilon)) P_x^{\downarrow}[T_\varepsilon \le t] \\ &= (s(x)/s(\varepsilon)) P_0[L_x - L_\varepsilon \le t]. \end{aligned}$$

La deuxième égalité découle de (1a) et de l'identité $P_x[T_\varepsilon < \zeta] = (s(x)/s(\varepsilon))$. Pour la troisième nous avons utilisé (1b). On obtient ainsi:

$$P_x[T_\varepsilon < t] \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} (s(x)/s(\varepsilon)) P_0[L_x \le t],$$

d'où, à l'aide de (1c), le résultat du théorème. □

COROLLAIRE 1-2. *Soit B un mouvement brownien à valeurs dans* R^d, *issu de* 0. *Pour* $z \in R^d - \{0\}$ *et* $\varepsilon > 0$ *on note*:

$$T_\varepsilon(z) = \inf\{t \ge 0;\ |B_t - z| < \varepsilon\}.$$

Alors, pour $t > 0$:

$$P[T_\varepsilon(z) \le t] \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} \begin{cases} \pi(\log 1/\varepsilon)^{-1} \int_0^t p_s(0, z)\, ds & \text{si } d = 2, \\ (d/2 - 1) C_d \varepsilon^{d-2} \int_0^t p_s(0, z)\, ds & \text{si } d \ge 3, \end{cases}$$

où C_d *est le volume de la sphère unité en dimension d et* $p_s(\cdot, \cdot)$ *désigne la densité de transition gaussienne.*

PREUVE. CAS $d \geq 3$. On applique le théorème au processus $X_t = |B_t - z|$ qui est un processus de Bessel d'indice $\nu = d/2 - 1$. On choisit $s(x) = -x^{2-d}$. Un calcul facile montre qu'alors:

$$p_s^*(0, |z|) = (d-2)C_d p_s(0, z).$$

CAS $d = 2$. Ici la situation est un peu plus compliquée car le processus de Bessel d'indice 0 ne satisfait pas les hypothèses du théorème. Cependant on pose, pour tout $K > |z|$:

$$T_K = \inf\{t \geq 0; |B_t - z| = K\},$$

puis on applique le théorème au processus $|B_t - z|$ tué au temps T_K. Ensuite on fait tendre K vers l'infini. Nous laissons les détails au lecteur. □

REMARQUES. (a) La connaissance de la formule (1c) n'est pas vraiment nécessaire pour établir le Corollaire 1-2. En effet, dans le cas des processus de Bessel, on sait calculer directement et assez facilement la loi de L_x sous P_0 (voir Getoor, 1979).

(b) On aurait pu éviter l'artifice consistant à tronquer la diffusion dans le cas $d = 2$, à condition d'avoir au préalable établi une version du Théorème 1-1 s'appliquant aux processus récurrents. Nous ne l'avons pas fait car cela nous aurait emmenés un peu loin. Signalons seulement que la "bonne" définition de la $\downarrow$-diffusion dans le cas récurrent conduit à introduire un processus défini sur un espace de mesure infinie (voir Pitman et Yor, 1981).

(c) Dans le cas $d = 2$ on peut rapprocher le résultat du corollaire du résultat suivant (voir par exemple Le Gall et Yor, 1986), pour tout $z \neq 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\log 1/\varepsilon)^{-1} \log T_\varepsilon(z) = 2(e/e'),$$

où la convergence a lieu en loi, e et e' sont deux variables exponentielles de paramètre 1. Malgré l'analogie qui existe entre ce dernier résultat et le cas $d = 2$ du corollaire, il ne semble pas qu'on puisse déduire l'une des deux convergences de l'autre.

(d) Pour illustrer la puissance du résultat de Williams (1b) donnons une application simple de ce théorème aux processus de Bessel. Dans le cas particulier où $P_x = P_x^v$, la loi du processus de Bessel d'indice $v > 0$ issu de 0, on vérifie facilement (voir par exemple Pitman et Yor, 1981) que la $\downarrow$-diffusion associée est le processus de Bessel d'indice $-v$. Une conséquence immédiate de (1b) est que la loi sous P_0^v de L_x coincide avec la loi sous P_x^{-v} de T_0. Cette identité remarquable a été obtenue par Getoor et Sharpe (1979) au moyen de calculs explicites.

2. Application à la saucisse de Wiener. Nous nous proposons dans cette partie de prouver quelques extensions du Corollaire 1-2 qui nous seront utiles dans les deux parties suivantes. A chaque fois que nous en aurons l'occasion nous appliquerons nos résultats à l'étude asymptotique de la saucisse de Wiener quand le rayon tend vers 0, sans perdre de vue notre principal objectif, qui est l'étude de l'intersection de deux ou plusieurs saucisses de Wiener associées à des mouvements browniens indépendants.

Dans toute cette partie, $(B_t, 0 \le t < \infty;\ P_y,\ y \in R^d)$ désigne un mouvement brownien à valeurs dans R^d, pour $d \ge 2$. Pour $\varepsilon > 0$ et $y \in R^d$, $T_\varepsilon(y)$ est défini comme dans l'énoncé du Corollaire 1-2. On introduit les fonctions s_d et f_d définies pour tout réel $x > 0$ par:

$$s_d(x) = \begin{cases} \log 1/x & \text{si } d = 2, \\ x^{2-d} & \text{si } d \ge 3, \end{cases}$$
$$f_d(x) = \left((s_d(x))_+ + 1\right)\exp(-x^2/16),$$

où, pour $u \in R$, u_+ désigne la partie positive de u.

LEMME 2-1. *Soit $n \ge 1$. Il existe une constante K_n telle que si $y_0, y_1, \dots, y_n$ sont $n + 1$ points distincts de R^d on a, pour tout $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$:*

$$\begin{aligned} &(s_d(\varepsilon))^n P_{y_0}[T_\varepsilon(y_1) \le T_\varepsilon(y_2) \le \cdots \le T_\varepsilon(y_n) \le 1] \\ &\qquad \le K_n \prod_{i=1}^n f_d(|y_i - y_{i-1}|). \end{aligned} \tag{2a}$$

De plus:

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \to 0} (s_d(\varepsilon))^n P_{y_0}[T_\varepsilon(y_1) \le T_\varepsilon(y_2) \le \cdots \le T_\varepsilon(y_n) \le 1] \\ &\quad = (k_d)^n \int_0^1 p_{s_1}(y_0, y_1)\, ds_1 \int_0^{1-s_1} \cdots \int_0^{1-(s_1 + \cdots + s_{n-1})} p_{s_n}(y_{n-1}, y_n)\, ds_n, \end{aligned} \tag{2b}$$

où $p_s(y, z)$ désigne la densité de transition gaussienne et la constante k_d est définie par:

$$k_d = \begin{cases} \pi & si\ d = 2, \\ (d-2)(\Gamma(d/2))^{-1}\pi^{d/2} & si\ d \ge 3. \end{cases}$$

PREUVE. On procède par récurrence sur n pour montrer (2a). On pose:

$$\tilde{T}_1(y_1) = \inf\{t \ge 0;\ |B_t - y_1| = 1\}.$$

Alors:

$$\begin{aligned} P_{y_0}[T_\varepsilon(y_1) \le 1] &\le P_{y_0}[T_\varepsilon(y_1) < \tilde{T}_1(y_1)] + P_{y_0}[\tilde{T}_1(y_1) < T_\varepsilon(y_1) \le 1] \\ &\le \left(\frac{s_d(|y_1 - y_0|)_+}{s_d(\varepsilon)} \wedge 1\right) + P_{y_0}[\tilde{T}_1(y_1) \le 1]\, P_{y_1 + 1}[T_\varepsilon(y_1) \le 1], \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} &s_d(\varepsilon) P_{y_0}[T_\varepsilon(y_1) \le 1] \\ &\qquad \le s_d(|y_1 - y_0|)_+ + P_{y_0}[\tilde{T}_1(y_1) \le 1]\, s_d(\varepsilon) P_0[T_\varepsilon(1) \le 1]. \end{aligned} \tag{2c}$$

Le Corollaire 1-2 montre l'existence d'une constante C telle que, pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$:

$$s_d(\varepsilon) P_0[T_\varepsilon(1) < 1] \le C.$$

Des majorations très grossières entrainent, pour une certaine constante C':

$$P_{y_0}[\tilde{T}_1(y_1) \leq 1] \leq C' \exp(-|y_1 - y_0|^2/4).$$

En revenant à (2c) on trouve:

$$s_d(\varepsilon) P_{y_0}[T_\varepsilon(y_1) \leq 1] \leq s_d(|y_1 - y_0|)_+ + CC' \exp(-|y_1 - y_0|^2/4),$$

d'où l'inégalité (2a) dans le cas $n = 1$.

Supposons maintenant que nous avons établi l'inégalité (2a) jusqu'à l'ordre $n-1$. En appliquant la propriété de Markov au temps $T_\varepsilon(y_{n-1})$ on obtient:

$$\begin{aligned} & P_{y_0}[T_\varepsilon(y_1) \leq T_\varepsilon(y_2) \leq \cdots \leq T_\varepsilon(y_n) \leq 1] \\ \text{(2d)} \qquad & \leq P_{y_0}[T_\varepsilon(y_1) \leq \cdots \leq T_\varepsilon(y_{n-1}) \leq 1] \\ & \quad \times \sup\{P_y[T_\varepsilon(y_n) \leq 1];\ y \in \overline{D}(y_{n-1}, \varepsilon)\}, \end{aligned}$$

où $\overline{D}(y, \varepsilon)$ désigne la boule fermée de centre y de rayon ε ($D(y, \varepsilon)$ désignera la boule ouverte). Or, pour $y \in \overline{D}(y_{n-1}, \varepsilon)$:

$$s_d(\varepsilon) P_y[T_\varepsilon(y_n) \leq 1] \leq \begin{cases} s_d\left(\dfrac{|y_n - y_{n-1}|}{2}\right) & \text{si } |y_n - y_{n-1}| \leq 2\varepsilon, \\ s_d(\varepsilon) P_0\left[T_\varepsilon\left(\dfrac{y_n - y_{n-1}}{2}\right) \leq 1\right] & \text{si } |y_n - y_{n-1}| > 2\varepsilon, \end{cases}$$

d'où, à l'aide du cas $n = 1$:

$$\text{(2e)} \quad s_d(\varepsilon) P_y[T_\varepsilon(y_n) \leq 1] \leq s_d\left(\frac{|y_n - y_{n-1}|}{2}\right)_+ + CC' \exp\left(\frac{-|y_n - y_{n-1}|^2}{16}\right).$$

Compte-tenu de l'hypothèse de récurrence, l'inégalité (2a) à l'ordre n est une conséquence de (2d) et (2e).

Nous passons maintenant à la preuve de (2b). Le cas $n = 1$ nous est donné par le Corollaire 1-2. Nous nous limiterons au cas $n = 2$. On écrit:

$$\begin{aligned} P_{y_0}[T_\varepsilon(y_1) \leq T_\varepsilon(y_2) \leq 1] &= E_{y_0}\left[1_{(T_\varepsilon(y_1) \leq 1)} E_{B_{T_\varepsilon(y_1)}}\left[1_{(T_\varepsilon(y_2) \leq 1 - T_\varepsilon(y_1))}\right]\right] \\ &\quad - E_{y_0}\left[1_{(T_\varepsilon(y_2) < T_\varepsilon(y_1) \leq 1)} E_{B_{T_\varepsilon(y_1)}}\left[1_{(T_\varepsilon(y_2) \leq 1 - T_\varepsilon(y_1))}\right]\right]. \end{aligned}$$

Les inégalités (2a) montrent que le second terme est de l'order de $(s_d(\varepsilon))^{-3}$, et n'intervient pas à la limite. On est donc ramené à l'étude de:

$$s_d(\varepsilon) E_{y_0}\left[1_{(T_\varepsilon(y_1) \leq 1)} s_d(\varepsilon) E_{B_{T_\varepsilon(y_1)}}\left[1_{(T_\varepsilon(y_2) \leq 1 - T_\varepsilon(y_1))}\right]\right].$$

On peut utiliser le Corollaire 1-2 pour remplacer cette dernière expression par:

$$s_d(\varepsilon) E_{y_0}\left[1_{(T_\varepsilon(y_1) \leq 1)} k_d \int_0^{1 - T_\varepsilon(y_1)} p_s(y_1, y_2)\, ds\right].$$

La continuité de l'application $u \to \int_0^u p_s(y_1, y_2)\, ds$, et à nouveau le Corollaire 1-2 entrainent:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} s_d(\varepsilon) E_{y_0}\left[1_{(T_\varepsilon(y_1)<1)} k_d \int_0^{1-T_\varepsilon(y_1)} p_s(y_1, y_2)\, ds\right]$$
$$= (k_d)^2 \int_0^1 p_t(y_0, y_1)\, dt \int_0^{1-t} p_s(y_1, y_2)\, ds. \qquad \square$$

REMARQUES. On a utilisé implicitement le fait que la loi conditionnelle sous P_{y_0} de $T_\varepsilon(y_1)$ sachant que $T_\varepsilon(y_1) \le 1$ converge étroitement quand ε tend vers 0 vers la loi de densité $(p_s(y_0, y_1)/\int_0^1 p_s(y_0, y_1)\, ds)$ sur l'intervalle [0; 1].

Dans le cas $d = 2$, la récurrence du mouvement brownien plan montre que $T_\varepsilon(y) < \infty$, P_{y_0} p.s., pour tout $\varepsilon > 0$ et tous y, $y_0 \in R^2$. Il est alors intéressant de comparer (2b) avec le résultat limite suivant, si $y_0, y_1, \dots, y_n$ sont distincts:

$$\text{(2f)} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} P_{y_0}[T_\varepsilon(y_1) \le T_\varepsilon(y_2) \le \cdots \le T_\varepsilon(y_n)] = 1/n!.$$

Il est remarquable que la valeur limite dans (2f) soit indépendante de la configuration des $n + 1$ points $y_0, y_1, \dots, y_n$ (comparer avec (2b)). (2f) est une conséquence du résultat plus général suivant (voir Le Gall et Yor, 1986); soit $A(t)$ une fonctionnelle additive intégrable du processus B, par exemple $A(t) = \int_0^t f(B_s)\, ds$ où la fonction f est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur le plan, alors:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\log 1/\varepsilon)^{-1} (A(T_\varepsilon(y_i)); 1 \le i \le n) = (C_A e_i; 1 \le i \le n),$$

où la convergence a lieu en loi pour P_{y_0}, les variables $e_1, \dots, e_n$ sont n variables exponentielles indépendantes de paramétre 1, enfin C_A est une constante dépendant de A.

COROLLAIRE 2-2. *Pour* $\varepsilon > 0$, *soit* S_ε *la saucisse de Wiener de rayon* ε *associée à* B *sur l'intervalle de temps* [0; 1]:

$$S_\varepsilon = \{y \in R^d; \inf(|B_s - y|, 0 \le s \le 1) \le \varepsilon\}.$$

Alors, si m *désigne la mesure de Lebesgue sur* R^d, *pour tout* $y_0 \in R^d$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} s_d(\varepsilon) m(S_\varepsilon) = k_d, \quad \textit{dans } L^p(P_{y_0}) \textit{ pour tout } p \ge 1.$$

PREUVE. On remarque que:

$$s_d(\varepsilon) E_{y_0}[m(S_\varepsilon)] = \int_{R^d} dy\, s_d(\varepsilon) P_{y_0}[T_\varepsilon(y) \le 1],$$

d'où, à l'aide du Lemme 2-1 et en observant que l'application du théorème de convergence dominée est justifiée par les majorations (2a):

$$\lim_{\varepsilon \to 0} s_d(\varepsilon) E_{y_0}[m(S_\varepsilon)] = \int_{R^d} dy\, k_d \int_0^1 p_s(y_0, y)\, ds = k_d.$$

On a de même:

$$s_d(\varepsilon)^2 E_{y_0}\left[m(S_\varepsilon)^2\right] = \int_{R^d}\int_{R^d} dy\,dz\, s_d(\varepsilon)^2 P_{y_0}\left[(T_\varepsilon(y) \le 1) \cap (T_\varepsilon(z) \le 1)\right],$$

d'où, à l'aide du Lemme 2-1:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} s_d(\varepsilon)^2 E_{y_0}\left[m(S_\varepsilon)^2\right] = (k_d)^2.$$

On obtient ainsi le résultat du corollaire pour $p = 2$. Pour passer à p quelconque on observe simplement, toujours d'après le Lemme 2-1, que la famille des $s_d(\varepsilon)m(S_\varepsilon)$ est bornée dans tous les espaces $L^p(P_{y_0})$. □

REMARQUES. (a) Soit $S_1(0, t)$ la saucisse de Wiener de rayon 1 associée à B sur l'intervalle $[0; t]$. Le Corollaire 2-2 et un changement d'échelle montrent que, pour tout $y_0 \in R^d$ et tout $p \ge 1$:

$$\text{(2g)} \qquad \lim_{t\to\infty} (\log t/t)m(S_1(0, t)) = 2\pi, \quad \text{dans } L^p(P_{y_0}), \text{ si } d = 2,$$

$$\text{(2h)} \qquad \lim_{t\to\infty} (1/t)m(S_1(0, t)) = k_d, \quad \text{dans } L^p(P_{y_0}), \text{ si } d \ge 3.$$

(2h) est un cas particulier d'un résultat bien connu (voir par exemple Itô et McKean, 1965, page 253). La preuve la plus simple de (2h) repose sur le théorème ergodique sous-additif de Kingman (1968). Ce théorème montre qu'il y a convergence p.s. dans (2h). On peut même obtenir des estimations de la vitesse de convergence, ce qui permet, en refaisant "à l'envers" le changement d'échelle de montrer aussi la convergence presque sûre dans le Corollaire 2-2 pour $d \ge 3$ (voir les arguments d'Orey, 1983, sur un problème similaire). Nous verrons plus loin qu'il y a aussi convergence presque sûre dans le Corollaire 2-2 pour $d = 2$ (et dans (2g)).

(b) Dvoretzky et Erdös (1950) ont montré l'exact analogue du Corollaire 2-2 pour des marches aléatoires simples sur le réseau des points de R^d à coordonnées entières. Par exemple dans le cas $d = 2$, soit V_n le nombre de points visités par une telle marche aléatoire jusqu'à l'instant n. Alors:

$$\lim_{n\to\infty} (\log n/n)V_n = \pi, \qquad P \text{ p.s.}$$

L'idée du prochain lemme est qu'on peut, pour certaines estimations, remplacer l'expression $1_{S_\varepsilon}(y) = 1_{(T_\varepsilon(y)\le 1)}$ par le temps passé par le mouvement brownien B à l'intérieur de la boule de centre y de rayon ε, convenablement normalisé. Cette idée nous sera très utile quand il faudra passer d'une grandeur d'espace (par exemple la mesure de Lebesgue de l'intersection des saucisses de Wiener associées à deux mouvements browniens indépendants) à une grandeur de temps (par exemple le "temps local" d'intersection de ces deux mouvements browniens).

LEMME 2-3. *Soient, pour $y \in R^d$ et $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$:*

$$X_\varepsilon(y) = s_d(\varepsilon) 1_{(T_\varepsilon(y) \le 1)},$$

$$Y_\varepsilon(y) = \begin{cases} \varepsilon^{-2} \int_0^1 1_{(|B_s - y| \le \varepsilon)}\, ds & si\ d = 2, \\ (d(d-2)/2) \varepsilon^{-2} \int_0^1 1_{(|B_s - y| \le \varepsilon)}\, ds & si\ d \ge 3. \end{cases}$$

Il existe une constante K telle que, si y_0, y_1, y_2 sont trois points distincts de R^d et si $Z_\varepsilon(y)$ désigne indifféremment l'une des deux variables $X_\varepsilon(y)$ et $Y_\varepsilon(y)$, on a, pour tout $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$:

(i)
$$E_{y_0}[Z_\varepsilon(y_1)] \le K f_d(|y_1 - y_0|),$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} E_{y_0}[Z_\varepsilon(y_1)] = k_d \int_0^1 p_s(y_0, y_1)\, ds;$$

(ii)
$$E_{y_0}[Z_\varepsilon(y_1) Z_\varepsilon(y_2)] \le K\big(f_d(|y_1 - y_0|) f_d(|y_2 - y_1|) + f_d(|y_2 - y_0|) f_d(|y_1 - y_2|)\big),$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} E_{y_0}[Z_\varepsilon(y_1) Z_\varepsilon(y_2)] = k_d^2 \left(\int_0^1 p_s(y_0, y_1)\, ds \int_0^{1-s} p_t(y_1, y_2)\, dt + \int_0^1 p_s(y_0, y_2)\, ds \int_0^{1-s} p_t(y_2, y_1)\, dt \right).$$

PREUVE. Nous traiterons complètement le cas (i) et nous indiquerons les grandes lignes de la preuve de (ii). Le Lemme 2-1 montre l'existence d'une constante K_1 telle que:

$$E_{y_0}[X_\varepsilon(y_1)] \le K_1 f_d(|y_1 - y_0|).$$

D'autre part, l'application de la propriété de Markov au temps $T_\varepsilon(y_1)$ montre que:

$$\begin{aligned} &E_{y_0}\left[\varepsilon^{-d} \int_0^1 1_{(|B_s - y_1| \le \varepsilon)}\, ds \right] \\ &\quad \le P_{y_0}[T_\varepsilon(y_1) \le 1] \sup\left\{ E_y\left[\varepsilon^{-d} \int_0^1 1_{(|B_s - y_1| \le \varepsilon)}\, ds \right];\ y \in \overline{D}(y_1, \varepsilon) \right\} \\ &\quad \le \varepsilon^{2-d} P_{y_0}[T_\varepsilon(y_1) \le 1]\, E_0\left[\int_0^{\varepsilon^{-2}} 1_{(|B_s| \le 1)}\, ds \right]. \end{aligned}$$

Dans le cas $d \ge 3$, on majore $E_0[\int_0^{\varepsilon^{-2}} 1_{(|B_s| \le 1)}\, ds]$ par une constante. Pour $d = 2$ on majore cette même expression par $C \log 1/\varepsilon$ pour une certaine constante C. Dans les deux cas le Lemme 2-1 permet de conclure à l'existence d'une constante K_1' telle que:

$$E_{y_0}[Y_\varepsilon(y_1)] \le K_1' f_d(|y_1 - y_0|).$$

Nous passons maintenant à la deuxième partie de (i). Le cas où $Z_\varepsilon(y_1) = X_\varepsilon(y_1)$ nous est à nouveau donné par le Lemme 2-1. Ensuite, par exemple pour $d \geq 3$:

$$E_{y_0}[Y_\varepsilon(y_1)] = (d(d-2)/2)\varepsilon^{-d} E_{y_0}\left[\int_0^1 1_{(|B_s - y_1| < \varepsilon)}\, ds\right]$$

$$= (d(d-2)/2)\int_0^1 \left(\varepsilon^{-d}\int_{\overline{D}(y_1,\varepsilon)} p_s(y_0, y)\, dy\right) ds.$$

Soit γ_d le volume de la boule unité de R^d; on trouve:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E_{y_0}[Y_\varepsilon(y_1)] = (d(d-2)/2)\gamma_d \int_0^1 p_s(y_0, y_1)\, ds.$$

On conclut en remarquant que $k_d = (d(d-2)/2)\gamma_d$. La même preuve permet de traiter le cas $d = 2$.

Les propriétés (ii) se démontrent à l'aide de techniques similaires. Par exemple, pour la partie "majoration" on utilise d'abord le Lemme 2-1 pour majorer $E_{y_0}[X_\varepsilon(y_1)X_\varepsilon(y_2)]$. Ensuite, pour majorer $E_{y_0}[X_\varepsilon(y_1)Y_\varepsilon(y_2)]$ on écrit:

$$E_{y_0}\left[1_{(T_\varepsilon(y_1) \leq 1)}\int_0^1 1_{(|B_s - y_2| \leq \varepsilon)}\, ds\right] \leq E_{y_0}\left[1_{(T_\varepsilon(y_1) \leq 1)}\int_{T_\varepsilon(y_1)}^1 1_{(|B_s - y_2| \leq \varepsilon)}\, ds\right]$$

$$+ \int_0^1 ds\, E_{y_0}\left[1_{(|B_s - y_2| \leq \varepsilon)} E_{B_s}\left[1_{(T_\varepsilon(y_1) \leq 1 - s)}\right]\right].$$

On majore le premier terme en appliquant la propriété de Markov au temps $T_\varepsilon(y_1)$ et le second à l'aide des techniques qui nous ont déjà servi pour le Lemme 2-1. Il reste à majorer $E_{y_0}[Y_\varepsilon(y_1)Y_\varepsilon(y_2)]$; on écrit:

$$E_{y_0}\left[\left(\int_0^1 1_{(|B_s - y_1| \leq \varepsilon)}\, ds\right)\left(\int_0^1 1_{(|B_s - y_2| \leq \varepsilon)}\, ds\right)\right] = F(y_0, y_1, y_2) + F(y_0, y_2, y_1),$$

où on note:

$$F(y_0, y_1, y_2) = \int_0^1 ds\, E_{y_0}\left[1_{(|B_s - y_1| \leq \varepsilon)} E_{B_s}\left[\int_0^{1-s} 1_{(|B_u - y_2| \leq \varepsilon)}\, du\right]\right].$$

On utilise ensuite les mêmes majorations que pour (i). La partie "convergence" de (ii) ne présente pas de difficulté; on se sert du Lemme 2-1 et des majorations établies ci-dessus pour appliquer le théorème de convergence dominée. □

REMARQUE. Les majorations du Lemme 2-3 joueront dans la suite un rôle au moins aussi important que les résultats limites quand ε tend vers 0 (la même remarque s'applique au Lemme 2-1). Nous verrons en particulier que les propriétés d'intégrabilité de la fonction $y \to f_d(|y|)$ sont très liées à l'existence de points multiples pour la trajectoire du mouvement brownien dans R^d. On peut déjà remarquer que cette fonction est de puissance $p$ième intégrable pour tout entier p si $d = 2$, de carré intégrable si $d = 3$, et seulement intégrable si $d \geq 4$.

Avant d'énoncer le prochain corollaire nous introduisons quelques nouvelles notations. Si S_ε est définie comme dans le Corollaire 2-2, on note, pour tout $\varepsilon > 0$,

l_1^ε la mesure sur R^d définie par:

$$l_1^\varepsilon(dy) = (k_d)^{-1} s_d(\varepsilon) 1_{S_\varepsilon}(y)\, dy.$$

On note encore l_1 la mesure définie, pour toute fonction g continue bornée sur R^d, par:

$$l_1(g) = \int_0^1 g(B_s)\, ds.$$

COROLLAIRE 2-4. *Pour toute fonction g continue bornée sur R^d:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} l_1^\varepsilon(g) = l_1(g), \quad \textit{dans } L^p(P_{y_0}) \textit{ pour tout } p \geq 1 \textit{ et tout } y_0.$$

PREUVE. On observe d'abord que:

$$l_1^\varepsilon(g) = (k_d)^{-1} \int_{R^d} X_\varepsilon(y) g(y)\, dy,$$

où on a repris les notations du Lemme 2-3.

On écrit ensuite:

$$E_{y_0}\left[\left(\int_{R^d} (X_\varepsilon(y) - Y_\varepsilon(y)) g(y)\, dy\right)^2\right]$$
$$= \int_{R^d}\int_{R^d} g(y) g(z)\, dy\, dz\, E_{y_0}\left[(X_\varepsilon(y) - Y_\varepsilon(y))(X_\varepsilon(z) - Y_\varepsilon(z))\right],$$

d'où, à l'aide du Lemme 2-3 et du théorème de convergence dominée:

$$\text{(2i)} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} E_{y_0}\left[\left(\int_{R^d} (X_\varepsilon(y) - Y_\varepsilon(y)) g(y)\, dy\right)^2\right] = 0.$$

D'autre part:

$$(k_d)^{-1} \int_{R^d} Y_\varepsilon(y) g(y)\, dy = \int_0^1 ds \left((\gamma_d)^{-1} \varepsilon^{-d} \int_{\overline{D}(B_s, \varepsilon)} g(y)\, dy\right),$$

d'où:

$$\text{(2j)} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} (k_d)^{-1} \int_{R^d} Y_\varepsilon(y) g(y)\, dy = \int_0^1 g(B_s)\, ds, \qquad P_{y_0} \text{ p.s.}$$

Le résultat du corollaire découle de (2i) et (2j). □

REMARQUE. On aurait très bien pu se passer du Lemme 2-3 pour démontrer le Corollaire 2-4; en effet il est facile de déduire directement le Corollaire 2-4 du Corollaire 2-2 (qui est le cas $g = 1$). Nous avons préféré utiliser la preuve ci-dessus, car elle nous servira de modèle pour les démonstrations de la partie suivante.

3. Temps local de confluence et intersection de saucisses de Wiener. Dans cette partie nous considérerons n mouvements browniens indépendants

$B^1, B^2, \ldots, B^n$ à valeurs dans R^d, issus respectivement de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous supposerons:

$$\text{soit} \quad d=2, \qquad n \text{ quelconque } (\geq 2),$$
$$\text{soit} \quad d=3, \qquad n = 2.$$

Sous cette hypothèse, il est bien connu (voir Dvoretzky, Erdös et Kakutani, 1950 et 1954) qu'il existe des points communs aux trajectoires des n mouvements browniens $B^1, \ldots, B^n$. Geman, Horowitz et Rosen (1984) (voir aussi Wolpert, 1978) ont introduit la notion de temps local de confluence qui permet de construire une mesure sur l'ensemble de ces points communs. Nous commencerons par rappeler brièvement, sous une forme adaptée à nos applications, les résultats de Geman, Horowitz et Rosen.

Le temps local de confluence de $B^1, \ldots, B^n$ sur l'intervalle de temps $[0;1]$ est la famille $(q_y,\ y \in (R^d)^{n-1})$ de mesures sur $[0;1]^n$ qui satisfait P p.s. les deux propriétés suivantes:

(i) Pour toute partie borélienne F de $[0;1]^n$ et toute fonction $g\colon (R^d)^{n-1} \to R$ borélienne bornée:

$$\int_F ds_1 \cdots ds_n\, g\big(B^1_{s_1} - B^2_{s_2}, \ldots, B^{n-1}_{s_{n-1}} - B^n_{s_n}\big) = \int_{(R^d)^{n-1}} g(y) q_y(F)\, dy.$$

(ii) L'application $y \to q_y$ est continue de $(R^d)^{n-1}$ dans l'espace des mesures positives finies sur $[0;1]^n$, muni de la topologie de la convergence étroite.

Rappelons qu'une suite de mesures (μ_n) converge étroitement vers μ si pour toute fonction continue bornée g, $(\mu_n(g))$ converge vers $\mu(g)$. La propriété (i) est l'analogue de la formule de densité de temps d'occupation pour le temps local du mouvement brownien linéaire. La propriété (ii) assure l'unicité, à indistingabilité près, de la famille (q_y).

La mesure q_0, associée au point $(0, \ldots, 0)$ de $(R^d)^{n-1}$ est portée par les n-uplets $(s_1, \ldots, s_n)$ tels que $B^1_{s_1} = \cdots = B^n_{s_n}$. Soit l_n l'image de q_0 par l'application $(s_1, \ldots, s_n) \to B^1_{s_1}$. La mesure l_n est une mesure positive finie portée par les points communs aux trajectoires de $B^1, \ldots, B^n$.

Pour $\varepsilon > 0$, on note S^1_ε (respectivement $S^2_\varepsilon, \ldots, S^n_\varepsilon$) la saucisse de Wiener de rayon ε associée à B^1 (resp. $B^2, \ldots, B^n$) sur l'intervalle $[0;1]$. On introduit les mesures l^ε_n définies pour tout $\varepsilon > 0$ par:

$$l^\varepsilon_n(dy) = (k_d)^{-n}(s_d(\varepsilon))^n 1_{(S^1_\varepsilon \cap \cdots \cap S^n_\varepsilon)}(y)\, dy.$$

Théorème 3-1. *Pour toute fonction g: $R^d \to R$ continue bornée*:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} l^\varepsilon_n(g) = l_n(g) \quad \textit{dans } L^p(P), \textit{ pour tout } p \geq 1.$$

En particulier il existe une suite $(\varepsilon_k;\ k \geq 1)$ décroissant vers 0 telle que, P p.s.:

$$\lim_{k \to \infty} l^{\varepsilon_k}_n = l_n, \quad \textit{au sens de la convergence étroite}.$$

Remarque. Le Théorème 3-1 apparait comme une généralisation du Corollaire 2-4 qui correspond au cas $n = 1$. Il est particulièrement intéressant de remarquer que le rôle de la mesure l_1 du Corollaire 2-4 est ici tenu par la mesure l_n construite à l'aide du temps local de confluence. Nous reviendrons sur cette remarque dans la Partie 4.

Preuve du Théorème 3-1. Il suffit de prouver la première assertion du théorème. L'outil essentiel pour notre preuve sera le Lemme 2-3. Nous reprenons les notations de ce lemme en utilisant l'indice i pour indiquer que l'expression considérée se rattache au processus B^i. Pour toute fonction g continue bornée, on a:

$$\begin{aligned} l_n^\varepsilon(g) &= (k_d)^{-n}(s_d(\varepsilon))^n \int_{R^d} 1_{(S_\varepsilon^1 \cap \cdots \cap S_\varepsilon^n)}(y) g(y)\, dy \\ &= (k_d)^{-n} \int_{R^d} g(y) \prod_{i=1}^n X_\varepsilon^i(y)\, dy. \end{aligned}$$

On remarque alors que:

$$\begin{aligned} &E\left[\left(\int_{R^d} g(y)\left(\prod_{i=1}^n X_\varepsilon^i(y) - \prod_{i=1}^n Y_\varepsilon^i(y)\right) dy\right)^2\right] \\ &\quad = \int_{R^d}\int_{R^d} g(y) g(z)\, dy\, dz \\ &\qquad \times E\left[\left(\prod_{i=1}^n X_\varepsilon^i(y) - \prod_{i=1}^n Y_\varepsilon^i(y)\right)\left(\prod_{i=1}^n X_\varepsilon^i(z) - \prod_{i=1}^n Y_\varepsilon^i(z)\right)\right]. \end{aligned}$$

Le Lemme 2-3 permet d'appliquer le théorème de convergence dominée: nos hypothèses sur le couple (d, n) assurent que la fonction $y \to f_d(|y|)$ est de puissance n-ième intégrable sur R^d. D'autre part, la partie "convergence" du Lemme 2-3 et l'indépendance des mouvements browniens $B^1, \dots, B^n$ entrainent que pour tout couple (y, z) avec $y \neq z$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E\left[\left(\prod_{i=1}^n X_\varepsilon^i(y) - \prod_{i=1}^n Y_\varepsilon^i(y)\right)\left(\prod_{i=1}^n X_\varepsilon^i(z) - \prod_{i=1}^n Y_\varepsilon^i(z)\right)\right] = 0.$$

On obtient ainsi:

$$\text{(3a)} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} E\left[\left(l_n^\varepsilon(g) - (k_d)^{-n} \int_{R^d} g(y) \prod_{i=1}^n Y_\varepsilon^i(y)\, dy\right)^2\right] = 0.$$

Nous allons ensuite montrer que:

$$\text{(3b)} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} (k_d)^{-n} \int_{R^d} g(y) \prod_{i=1}^n Y_\varepsilon^i(y)\, dy = l_n(g) \quad P \text{ p.s.}$$

On traite par exemple le cas $d = 2$ (le cas $d = 3$ est exactement semblable). On a:

$$\begin{aligned} &(k_2)^{-n} \int_{R^2} g(y) \prod_{i=1}^n Y_\varepsilon^i(y)\, dy \\ &\quad = \int_0^1 \cdots \int_0^1 ds_1 \cdots ds_n (\pi\varepsilon^2)^{-n} \int_{R^2} g(y)\, dy \prod_{i=1}^n 1_{(|B_{s_i}^i - y| < \varepsilon)}. \end{aligned}$$

En utilisant la continuité uniforme de g sur tout compact on peut encore remplacer cette dernière expression par:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 ds_1 \cdots ds_n\, g\left(B_{s_1}^1\right)\left(\pi\varepsilon^2\right)^{-n}\int_{R^2} dy \prod_{i=1}^n 1_{(|B_{s_i}^i - y| < \varepsilon)}.$$

On remarque alors que:

$$\left(\pi\varepsilon^2\right)^{-n}\int_{R^2} dy \prod_{i=1}^n 1_{(|B_{s_i}^i - y| < \varepsilon)} = \Phi_\varepsilon\left(B_{s_1}^1 - B_{s_2}^2, \ldots, B_{s_{n-1}}^{n-1} - B_{s_n}^n\right),$$

où la fonction $\Phi_\varepsilon\colon (R^2)^{n-1} \to R$ est définie par:

$$\begin{aligned}&\Phi_\varepsilon(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\\ &\quad = \left(\pi\varepsilon^2\right)^{-n} m\left(D(0, \varepsilon) \cap D(y_1, \varepsilon) \cap \cdots \cap D(y_1 + \cdots + y_{n-1}, \varepsilon)\right).\end{aligned}$$

La définition du temps local de confluence, rappelée au début de cette partie, montre que:

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \cdots \int_0^1 ds_1 \cdots ds_n\, g\left(B_{s_1}^1\right)\Phi_\varepsilon\left(B_{s_1}^1 - B_{s_2}^2, \ldots, B_{s_{n-1}}^{n-1} - B_{s_n}^n\right)\\ &\qquad = \int_{(R^2)^{n-1}} dy\, \Phi_\varepsilon(y) \int_{[0;\,1]^n} q_y(ds_1 \cdots ds_n) g\left(B_{s_1}^1\right).\end{aligned}$$

Le support de Φ_ε décroit vers $\{0\}$ quand ε tend vers 0, et on a, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\int_{(R^2)^{n-1}} \Phi_\varepsilon(y)\, dy = 1.$$

La continuité étroite de l'application $y \to q_y$ montre:

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{(R^2)^{n-1}} dy\, \Phi_\varepsilon(y) \int_{[0;\,1]^n} q_y(ds_1 \cdots ds_n) g\left(B_{s_1}^1\right)\\ &\qquad = \int_{[0;\,1]^n} q_0(ds_1 \cdots ds_n) g\left(B_{s_1}^1\right) = l_n(g), \quad P \text{ p.s.}\end{aligned}$$

On en déduit (3b). D'autre part le Lemme 2-1 montre que la famille $(l_n^\varepsilon(g), 0 < \varepsilon < \frac{1}{2})$ est bornée dans tous les $L^p(P)$. (3a) et (3b) entrainent alors le résultat du théorème. □

Le cas $g = 1$ est particulièrement intéressant:

COROLLAIRE 3-2.

Si $d=2$: $$\lim_{\varepsilon\to 0}(\log 1/\varepsilon)^n m\left(S_\varepsilon^1 \cap \cdots \cap S_\varepsilon^n\right) = \pi^n l_n(R^2).$$

Si $d=3$: $$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-2} m\left(S_\varepsilon^1 \cap S_\varepsilon^2\right) = 4\pi^2 l_2(R^3).$$

Dans les deux cas la convergence a lieu dans tous les $L^p(P)$.

Soit $S^1(0, t)$ (resp. $S^2(0, t), \ldots, S^n(0, t)$) la saucisse de Wiener associée à B^1 (resp. $B^2, \ldots, B^n$) de rayon 1, sur l'intervalle de temps $[0; t]$. A l'aide d'un changement d'échelle et du Corollaire 3-2 on obtient que:

si $d=2$: $\lim_{t\to\infty} t^{-1}(\log t)^n m(S^1(0,t)\cap\cdots\cap S^n(0,t)) = (2\pi)^n l_n(R^2)$,

si $d=3$: $\lim_{t\to\infty} t^{-1/2} m(S^1(0,t)\cap S^2(0,t)) = 4\pi^2 l_2(R^3)$

avec dans les deux cas convergence en loi.

Ce dernier résultat est à rapprocher des estimations obtenues par Erdös et Taylor (1960) pour des marches aléatoires symétriques sur le réseau des points de R^d à coordonnées entières. Considérons deux telles marches aléatoires indépendantes et soit $I(n)$ le nombre de points communs à leurs trajectoires jusqu'à l'instant n. Pour $d=3$ Erdös et Taylor (1960, Lemme 8) montrent l'existence d'une constante α_1 telle que, pour tout n assez grand:

$$E[I(n)] > \alpha_1 n^{-1/2}.$$

Par analogie avec le cas du mouvement brownien il semble plausible qu'on puisse démontrer, toujours dans le cas $d=3$ la convergence en loi de la suite $n^{-1/2}I(n)$. Erdös et Taylor étudient également le cas $d=4$ et obtiennent dans ce cas l'existence d'une constante α_2 telle que, pour n assez grand:

$$E[I(n)] > \alpha_2 \log n.$$

Nous verrons plus loin comment interprèter ce dernier résultat en termes de saucisses de Wiener indépendantes.

A partir de maintenant, nous considérerons un seul mouvement brownien B, à valeurs dans R^d pour $d=2$ ou 3. Nous cherchons à étudier les recoupements de la trajectoire de B avec elle-même et non plus avec la trajectoire d'un second mouvement brownien indépendant. Rosen (1983) a montré qu'on peut définir un temps local d'intersection $(e_y,\ y\in R^d)$ caractérisé par les quatre propriétés suivantes:

(i) pour tout $y\in R^d$, e_y est une mesure positive sur la tribu borélienne de $T=\{(s,t);\ 0\le s<t\le 1\}$;

(ii) pour toute partie borélienne F de T et toute fonction g: $R^d\to R$ borélienne bornée:

$$\int_F g(B_s-B_t)\,ds\,dt = \int_{R^d} g(y)e_y(F)\,dy;$$

(iii) pour $y\ne 0$ la mesure e_y est finie et l'application $y\to e_y$ est étroitement continue sur $R^d-\{0\}$;

(iv) pour tout $\delta>0$ et tout y la restriction e_y^δ de e_y à $T_\delta=\{(s,t)\in T;\ t-s>\delta\}$ est finie et l'application $y\to e_y^\delta$ est étroitement continue sur R^d.

La différence essentielle avec le cas de deux mouvements browniens indépendants vient du fait que la mesure e_0 est p.s. de masse totale infinie. Pour $\varepsilon>0$, nous noterons simplement S_ε la saucisse de Wiener de rayon ε associée à B sur l'intervalle $[0;1]$. Si y est un point de R^d, $y+S_\varepsilon$ désignera la translatée de S_ε par y.

COROLLAIRE 3-3. *Pour tout* $y \in R^d - \{0\}$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (s_d(\varepsilon))^2 m(S_\varepsilon \cap (y + S_\varepsilon)) = (k_d)^2 \big(e_y(T) + e_{-y}(T)\big)$$

avec convergence dans tous les $L^p(P)$.

PREUVE. Nous nous limiterons au cas $d = 2$. Pour $u < v$ on note $S_\varepsilon(u, v)$ la saucisse de Wiener de rayon ε associée à B sur l'intervalle $[u; v]$. On remarque que:

$$m(S_\varepsilon \cap (y + S_\varepsilon)) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} m\left(S_\varepsilon\left(\frac{i-1}{2}, \frac{i}{2}\right) \cap \left(y + S_\varepsilon\left(\frac{j-1}{2}, \frac{j}{2}\right)\right)\right) - R_1^\varepsilon,$$

où le reste R_1^ε satisfait:

$$0 \le R_1^\varepsilon \le \sum_{i=1}^{2} m\left(S_\varepsilon\left(\frac{i-1}{2}, \frac{i}{2}\right) \cap \left(y + S_\varepsilon\left(0, \frac{1}{2}\right)\right) \cap \left(y + S_\varepsilon\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right)\right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{2} m\left(S_\varepsilon\left(0, \frac{1}{2}\right) \cap S_\varepsilon\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cap \left(y + S_\varepsilon\left(\frac{j-1}{2}, \frac{j}{2}\right)\right)\right).$$

Les majorations du Lemme 2-1 entrainent facilement:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\log 1/\varepsilon)^4 E\left[(R_1^\varepsilon)^2\right] = 0.$$

Plus généralement on montre de même, pour tout entier $n \ge 1$:

$$m(S_\varepsilon \cap (y + S_\varepsilon)) = \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} m(S_\varepsilon((i-1)2^{-n}, i2^{-n}) \cap (y + S_\varepsilon((j-1)2^{-n}, j2^{-n}))) - R_n^\varepsilon, \tag{3c}$$

où le reste R_n^ε satisfait:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\log 1/\varepsilon)^4 E\left[(R_n^\varepsilon)^2\right] = 0.$$

Posons pour tout $n \ge 1$:

$$T_n = T - \bigcup_{i=1}^{2^n} \{(s, t); (i-1)2^{-n} \le s < t \le i2^{-n}\}.$$

Le Théorème 3-1 et la construction des mesures e_y (voir par exemple Le Gall, 1985) entrainent:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\log 1/\varepsilon)^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \ne j}}^{2^n} m\big(S_\varepsilon((i-1)2^{-n}, i2^{-n}) \cap (y + S_\varepsilon((j-1)2^{-n}, j2^{-n}))\big) = \pi^2\big(e_y(T_n) + e_{-y}(T_n)\big), \quad \text{dans } L^2(P). \tag{3d}$$

On a d'autre part:

(3e) $\lim_{n\to\infty}\left(e_y(T_n)+e_{-y}(T_n)\right)=e_y(T)+e_{-y}(T), \quad P$ p.s. et dans $L^2(P)$.

On vérifie sans difficulté que pour ε assez petit:

$$\lim_{n\to\infty}(\log 1/\varepsilon)^2\sum_{i=1}^{2^n} m\big(S_\varepsilon((i-1)2^{-n}, i2^{-n}) \cap \big(y+S_\varepsilon((i-1)2^{-n}, i2^{-n})\big)\big)=0 \tag{3f}$$

la convergence ayant lieu dans $L^2(P)$ uniformément quand ε décrit l'intervalle $[0; |y|/3]$.

Le résultat du corollaire découle de (3c), (3d), (3e), et (3f), au moins pour $p=2$. Pour $p\neq 2$ on utilise le Lemme 2-1. □

REMARQUES. (a) Le résultat du corollaire est évidemment faux pour $y=0$. Le Corollaire 2-2 montre en effet:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} s_d(\varepsilon)m(S_\varepsilon)=k_d, \quad \text{dans } L^p(P) \text{ pour tout } p.$$

La "bonne" normalisation pour $y=0$ est donc $s_d(\varepsilon)$ et non pas $(s_d(\varepsilon))^2$. On sait par ailleurs que:

$$e_0(T)=\infty, \quad P \text{ p.s.}$$

Cependant, Varadhan (1969) a montré qu'on peut "renormaliser" le temps local d'intersection du mouvement brownien plan. Précisément, dans le cas $d=2$, on pose, pour toute partie borélienne F de T telle que $E[e_0(F)]<\infty$:

$$\hat{e}_0(F)=e_0(F)-E[e_0(F)].$$

L'application $F\to\hat{e}_0(F)$ se prolonge de manière unique en une mesure vectorielle sur la tribu borélienne de T, à valeurs dans $L^2(P)$ (voir Le Gall, 1985). On a alors l'analogue suivant du Corollaire 3-3 pour $y=0$:

(3g) $\lim_{\varepsilon\to 0}(\log 1/\varepsilon)\big((\log 1/\varepsilon)m(S_\varepsilon)-\pi\big)=(\pi/2)(1+C-\log 2)-\pi^2\hat{e}_0(T)$,

où la convergence a lieu dans $L^2(P)$ et C désigne la constante d'Euler.

Signalons que la convergence des espérances dans (3g) avait déjà été obtenue par Spitzer (1964) dans un cadre plus général. Nous renvoyons à Le Gall (1985) pour une preuve de (3g). Il est facile de déduire de ce résultat que la convergence du Corollaire 2-2 a lieu P p.s. dans le cas $d=2$. En effet, on introduit la suite $(\varepsilon_k, k\geq 1)$ définie par:

$$\varepsilon_k=\exp(-k^2)$$

de façon que:

(i) $$\sum_{k=1}^{\infty}E\left[\left(m(S_{\varepsilon_k})-\pi\log 1/\varepsilon_k\right)^2\right]<\infty,$$

(ii) $$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\log 1/\varepsilon_{k+1}}{\log 1/\varepsilon_k}\right)=1.$$

On déduit de (i) la convergence p.s. de $(\log 1/\varepsilon_k)^{-1}m(S_{\varepsilon_k})$. (ii) permet ensuite de passer à la convergence p.s. de $(\log 1/\varepsilon)^{-1}m(S_\varepsilon)$.

Il n'existe pas à notre connaissance d'analogue de la renormalisation de Varadhan en dimension $d = 3$.

(b) En dimension $d = 2$ on peut définir pour tout entier $n \geq 2$ un temps local d'intersection d'ordre n correspondant aux points de multiplicité n de la trajectoire (voir Rosen, 1984). Nous noterons encore $(e_y,\ y \in (R^2)^{n-1})$ ce temps local d'intersection; chaque e_y est maintenant une mesure sur:

$$T^{(n)} = \{(s_1, s_2, \dots, s_n);\ 0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_n \leq 1\}.$$

Pour toute partie borélienne F de $T^{(n)}$ et toute fonction $g\colon (R^2)^{n-1} \to R$ borélienne bornée, on a:

$$\int_F ds_1\, ds_2 \cdots ds_n\, g\big(B_{s_1} - B_{s_2}, \dots, B_{s_{n-1}} - B_{s_n}\big) = \int_{(R^2)^{n-1}} g(y) e_y(F)\, dy.$$

L'extension suivante du Corollaire 3-3 est alors vraie, si $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ sont $n - 1$ éléments distincts de $R^2 - \{0\}$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\log 1/\varepsilon)^n m(S_\varepsilon \cap (y_1 + S_\varepsilon) \cap \cdots \cap (y_{n-1} + S_\varepsilon)) = \pi^n \sum_{\sigma \in \Omega_n} e_{y_\sigma}(T^{(n)}),$$

dans $L^p(P)$ pour tout p.

Ω_n désigne ici l'ensemble des permutations de $\{0, 1, \dots, n-1\}$ et pour $\sigma \in \Omega_n$, y_σ est le vecteur:

$$\big(y_{\sigma(1)} - y_{\sigma(0)}, \dots, y_{\sigma(n-1)} - y_{\sigma(n-2)}\big),$$

où par abus d'écriture on note $y_0 = 0$.

(c) Les résultats de cette partie et de la précédente suggèrent d'étudier le problème général suivant. Soient $B^1, \dots, B^n$ n mouvements browniens ($n \geq 1$) à valeurs dans R^d ($d \geq 2$) et $S^1(0, t), \dots, S^n(0, t)$ les saucisses de Wiener de rayon 1 associées sur l'intervalle de temps $[0, t]$. Peut-on décrire le comportement asymptotique de:

$$m\big(S^1(0, t) \cap \cdots \cap S^n(0, t)\big)?$$

Le Corollaire 2-2 nous donne la réponse pour $n = 1$:

si $d=2$: $$\lim_{t \to \infty} (\log t/t) m\big(S^1(0, t)\big) = \pi,$$

si $d \geq 3$: $$\lim_{t \to \infty} (1/t) m\big(S^1(0, t)\big) = (d/2 - 1) C_d,$$

avec convergence P p.s. et dans les $L^p(P)$.

Le Corollaire 3-2 montre:

si $d = 2$, $n \geq 2$: $$\lim_{t \to \infty} \big((\log t)^n/t\big) m\big(S^1(0, t) \cap \cdots \cap S^n(0, t)\big) = (2\pi)^n l_n(R^2),$$

si $d = 3$, $n = 2$: $$\lim_{t \to \infty} t^{-1/2} m\big(S^1(0, t) \cap S^2(0, t)\big) = 4\pi^2 l_2(R^3),$$

avec convergence en loi.

Un calcul facile montre que $E[m(S^1(0,\infty) \cap \cdots \cap S^n(0,\infty))] < \infty$ si et seulement si on est dans l'un des trois cas suivants:

$$d = 3,\ n \geq 4 \quad \text{ou} \quad d = 4,\ n \geq 3 \quad \text{ou} \quad d \geq 5,\ n \geq 2.$$

On voit qu'il reste deux cas critiques à étudier, $d = 4$, $n = 2$ et $d = 3$, $n = 3$. Ces deux cas correspondent à la situation où les trajectoires des n mouvements browniens $B^1, \ldots, B^n$ n'ont pas de point commun mais se rapprochent les unes des autres à des instants arbitrairement grands (voir à ce sujet les remarques d'Erdös et Taylor, 1960). Il est d'ailleurs remarquable que pour ces valeurs du couple (n, d) n marches aléatoires symétriques indépendantes en dimension d ont une infinité de points communs (voir Erdös et Taylor, 1960). Si nous revenons à notre problème de départ, les résultats d'Erdös et Taylor suggèrent que le "bon" facteur de normalisation devrait être $(\log t)^{-1}$. Signalons sans démonstration les résultats suivants:

si $d = 4$, $n = 2$: $$\lim_{t\to\infty} (\log t)^{-1} m\big(S^1(0,t) \cap S^2(0,t)\big) = \pi^2 N^2,$$

si $d = 3$, $n = 3$: $$\lim_{t\to\infty} (\log t)^{-1} m\big(S^1(0,t) \cap S^2(0,t) \cap S^3(0,t)\big) = 2\pi M,$$

où dans les deux cas la convergence a lieu en loi, N est une variable normale centrée réduite, et la loi de M est une loi gamma de paramètres $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ dont la densité s'écrit: $4^{-1/4}(\Gamma(\frac{1}{4}))^{-1}x^{-3/4}\exp(-x/4)$.

La preuve de ces derniers résultats devrait être publiée dans un article à venir.

4. Application à la mesure de Hausdorff de l'ensemble des points multiples du mouvement brownien. Dans un premier temps nous supposerons que B est un mouvement brownien à valeurs dans le plan R^2. Pour tout entier $n \geq 1$, nous noterons D_n l'ensemble des points de multiplicité (au moins) n de la trajectoire de B sur l'intervalle de temps $[0; 1]$. Taylor (1967) a montré que pour tout n la dimension de Hausdorff de D_n est deux. La notion de dimension de Hausdorff n'est donc pas suffisamment "fine" pour distinguer entre points de multiplicité n et $n + 1$. Nous nous proposons ici d'utiliser les résultats des parties précédentes pour montrer le théorème suivant, qui confirme une conjecture de Taylor (1973).

THÉORÈME 4-1. *Soit $h_r(x) = x^2(\log 1/x)^r$. Alors, pour tout entier $n \geq 1$, P p.s.:*

$$h_r - m(D_n) = \begin{cases} 0 & si\ r \leq n, \\ \infty & si\ r > n, \end{cases}$$

où $h_r - m$ désigne la mesure de Hausdorff associée à h_r.

REMARQUE. Le Théorème 4-1 donne un sens à l'affirmation naïve qu'il existe "beaucoup plus" de points de multiplicité n que de multiplicité $n + 1$. En effet on voit que pour $n < r \leq n + 1$ la h_r-mesure de Hausdorff de D_n est infinie cependant que celle de D_{n+1} est nulle. Remarquons que sauf pour $n = 1$, il n'est pas évident qu'il existe des points de multiplicité exactement n.

Dans le cas $n = 1$, le résultat du théorème est une conséquence du résultat beaucoup plus précis de Taylor (1964) qui a montré que, pour $h_1^*(x) = x^2 \log 1/x \log\log\log 1/x$:

$$0 < h_1^* - m(D_1) < \infty, \quad P \text{ p.s.}$$

Dans le cas $n = 2$, une première approche de la conjecture de Taylor est dûe à Rosen (1983) qui a établi que:

$$h_r - m(D_2) = \infty \quad \text{si } r > 6,\ P \text{ p.s.}$$

Avant de démontrer le Théorème 4-1 nous énonçons une proposition qui jouera un rôle essentiel dans notre preuve.

PROPOSITION 4-2. *Soient $B^1, B^2, \dots, B^n$ n mouvements browniens indépendants à valeurs dans R^2 et l_n la mesure associée au temps local de confluence de $B^1, B^2, \dots, B^n$ (voir la Partie 3). Alors, pour tout $r > n$, P p.s.*:

$$l_n\left(\left\{y \in R^2;\ \limsup_{a \to 0}\left(\frac{l_n(D(y,a))}{h_r(a)}\right) > 0\right\}\right) = 0.$$

PREUVE. Nous reprenons les notations du Théorème 3-1. Soit $(\varepsilon_k,\ k \geq 1)$ une suite décroissant vers 0 telle que, P p.s.: $\lim_{k\to\infty} l_n^{\varepsilon_k} = l_n$, au sens de la convergence étroite.

Alors, pour tout entier $p \geq 1$:

$$E\left[\int l_n(dy)(l_n(D(y,a)))^p\right] \leq \liminf_{k\to\infty} E\left[\int l_n^{\varepsilon_k}(dy)(l_n^{\varepsilon_k}(D(y,a)))^p\right]$$
$$\leq \liminf_{k\to\infty}\left(\pi^{-1}\log 1/\varepsilon_k\right)^{n(p+1)}\int_{(R^2)^{p+1}} dy_0 \cdots dy_p$$
$$\times \prod_{i=1}^{p} 1_{(|y_i - y_0| < a)}\left(P_0\left[\bigcap_{i=1}^{p}\left(T_{\varepsilon_k}(y_i) < 1\right)\right]\right)^n.$$

On a repris les notations de la Partie 2. La dernière inégalité est en fait une égalité quand les mouvements browniens $B^1, \dots, B^n$ sont issus du même point. Pour passer au cas général, on utilise l'inégalité de Hölder.

Or le Lemme 1-2 entraine:

$$(\log 1/\varepsilon)^{p+1} P_0\left[\bigcap_{i=0}^{p}\left(T_\varepsilon(y_i) \leq 1\right)\right] \leq K \sum_{\sigma \in \Omega_{p+1}}\left(\prod_{i=0}^{p} f_2\left(|y_{\sigma(i)} - y_{\sigma(i-1)}|\right)\right),$$

où Ω_{p+1} désigne l'ensemble des permutations de $\{0,1,\dots,p\}$ et par abus de notation: $y_{\sigma(-1)} = 0$.

En utilisant la forme particulière de la fonction f_2 on en déduit l'existence d'une constante $C(n,p)$ telle que:

$$E\left[\int l_n(dy)(l_n(D(y,a)))^p\right] \leq C(n,p)a^{2p}(\log 1/a)^{np}.$$

On pose maintenant, pour $k \geq 1$ et $r > n$:

$$a_k = 2^{-k},$$

$$F_k = \left\{ y \in R^2;\ \frac{l_n(D(y, a_k))}{h_r(a_k)} > 1 \right\}.$$

Alors, pour tout entier $p \geq 1$:

$$\begin{aligned} E[l_n(F_k)] &\leq (h_r(a_k))^{-p} E\left[\int l_n(dy)(l_n(D(y, a_k)))^p \right] \\ &\leq (h_r(a_k))^{-p} C(n, p) a_k^{2p} (\log 1/a_k)^{np} \\ &\leq C'(n, p) k^{p(n-r)}, \end{aligned}$$

pour une certaine constante $C'(n, p)$.

On peut choisir p assez grand pour que $p(n - r) < -1$. Alors:

$$\sum_{k=1}^{\infty} E[l_n(F_k)] < \infty \quad \text{d'où } P \text{ p.s.} \quad l_n\left(\left\{ y \in R^2;\ \sum_{k=1}^{\infty} 1_{F_k}(y) = \infty \right\} \right) = 0.$$

Le résultat de la proposition en découle. □

PREUVE DU THÉORÈME 4-1. (a) *Cas* $r > n$. Il suffit de montrer que si $B^1, \ldots, B^n$ sont n mouvements browniens plans indépendants et I désigne l'ensemble des points communs à leurs trajectoires sur l'intervalle $[0; 1]$:

$$\text{(4a)} \qquad P[h_r - m(I) = \infty] > 0.$$

Bien que, comme le remarque Hawkes (1978), cette réduction du problème fasse désormais partie du "folklore" du sujet, nous allons esquisser un argument qui permet de la justifier. Notons, pour $u < v$, $B(u, v)$ la trajectoire de B sur l'intervalle $[u; v]$. On vérifie sans difficulté que la loi de $(B(1,2), B(3,4), \ldots, B(2n-1, 2n))$ est équivalente à celle de $(B^1(1,2), B^2(1,2), \ldots, B^n(1,2))$. Si donc nous savons montrer que:

$$P[h_r - m(I) = \infty] > 0,$$

nous en déduirons aussitôt que:

$$P[h_r - m(D_n) = \infty] > 0,$$

ce qui suffit pour traiter le cas $r > n$.

Nous commencerons par rappeler un lemme dû à Rogers et Taylor (1961) sous la forme qui figure dans l'article de Ciesielski et Taylor (1962).

LEMME 4-3. *Soient* μ *une mesure positive finie sur* R^d *et* h: $R_+ \to R_+$ *une fonction continue croissante telle que* $h(0) = 0$. *On pose, pour tout* $\delta > 0$:

$$E_\delta = \left\{ y \in R^d;\ \limsup_{a \to 0} \frac{\mu(D(y, a))}{h(2a)} > \delta \right\}.$$

Il existe une constante universelle η_d telle que pour toute partie borélienne E de R^d avec $E \cap E_\delta = \varnothing$:

$$h - m(E) \geq \eta_d \delta^{-1} \mu(E).$$

Revenons à la preuve du théorème; on applique le lemme à la mesure l_n associée au temps local de confluence de $B^1, \dots, B^n$ et à la fonction $h = h_r$. En utilisant la Proposition 4-2 on obtient que, pour tout $\delta > 0$, P p.s.:

$$h_r - m(I) \geq \eta_2 \delta^{-1} l_n(I).$$

D'autre part, la mesure l_n est portée par I et on voit facilement, par exemple à l'aide du Théorème 3-1 que:

$$E\left[l_n(R^2)\right] > 0.$$

Ceci termine la preuve de (4a) et donc du cas $r > n$.

(b) *Cas $r \leq n$.* Nous commençons par le cas $n = 2$. On se ramène immédiatement à montrer que, avec les notations du cas (a), P p.s.

$$h_2 - m(B(0,1) \cap B(2,3)) = 0. \tag{4b}$$

On pose, pour $x > 0$: $h_r^*(x) = x^2(\log 1/x)^r \log\log\log 1/x$.

Taylor (1964) a montré que, P p.s., $h_1^* - m(B(0,1)) < \infty$. Plus précisément, pour $p \geq 1$, soit Q_p l'ensemble des carrés du plan de la forme $\{u2^{-m} < x_1 \leq (u+1)2^{-m};\ v2^{-m} < x_2 \leq (v+1)2^{-m}\}$ où u et v sont deux entiers et m un entier plus grand que p. Alors, P p.s., pour tout p on peut trouver une partie $\Delta_p(\omega)$ de Q_p telle que:

(i) $$\Delta_p(\omega) \text{ recouvre } B(0,1),$$

(ii) $$\sum_{A \in \Delta_p(\omega)} h_1^*(d(A)) < C(\omega),$$

où $d(A)$ désigne le diamètre de A et la constante $C(\omega)$ ne dépend pas de p.

Soit $\mathscr{F}_1$ la tribu engendrée par $(B_s;\ 0 \leq s \leq 1)$. On peut supposer que les recouvrements construits ci-dessus sont $\mathscr{F}_1$-mesurables au sens où pour tout p et pour tout élément A de Q_p, la variable aléatoire $1_{\Delta_p(\omega)}(A)$ est $\mathscr{F}_1$-mesurable. Considérons maintenant, pour tout p, le recouvrement $\Delta'_p(\omega)$ de $B(0,1) \cap B(2,3)$ défini par:

$$\Delta'_p(\omega) = \left\{A \in \Delta_p(\omega);\ A \cap B(2,3) \neq \varnothing\right\}.$$

Alors:

$$E\left[\sum_{A \in \Delta'_p(\omega)} h_2^*(d(A)) \middle| \mathscr{F}_1\right] = \sum_{A \in \Delta_p(\omega)} h_2^*(d(A)) P\left[A \cap B(2,3) \neq \varnothing | \mathscr{F}_1\right].$$

On remarque que la densité conditionnelle de B_2 sachant $\mathscr{F}_1$ est majorée par $(2\pi)^{-1}$. Cette remarque et les majorations du Lemme 2-1 entrainent l'existence d'une constante K telle que, pour toute partie A:

$$P[A \cap B(2,3) \neq \varnothing | \mathscr{F}_1] \leq K(\log 1/d(A))^{-1}.$$

Il vient alors:

$$E\left[\sum_{A \in \Delta'_p(\omega)} h_2^*(d(A)) \middle| \mathscr{F}_1 \right] \leq K \sum_{A \in \Delta_p(\omega)} h_1^*(d(A)) \leq KC(\omega),$$

d'où, à l'aide du lemme de Fatou:

$$\liminf_{p \to \infty} \sum_{A \in \Delta'_p(\omega)} h_2^*(d(A)) < \infty, \quad P \text{ p.s.},$$

et donc, par définition d'une mesure de Hausdorff:

$$h_2^* - m(B(0,1) \cap B(2,3)) < \infty, \quad P \text{ p.s.}$$

On en déduit immédiatement (4b). Il est maintenant clair que la même méthode montrerait, pour tout entier $n \geq 1$ et pour $0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots < s_n < t_n$:

$$h_n^* - m(B(s_1, t_1) \cap B(s_2, t_2) \cap \cdots \cap B(s_n, t_n)) < \infty, \quad P \text{ p.s.},$$

et donc a fortiori:

$$h_n - m(B(s_1, t_1) \cap B(s_2, t_2) \cap \cdots \cap B(s_n, t_n)) = 0, \quad P \text{ p.s.} \qquad \square$$

La preuve ci-dessus appelle un certain nombre de remarques. Tout d'abord, le rôle tenu par la mesure l_n est tout à fait comparable à celui que joue, dans l'étude de la mesure de Hausdorff de la courbe brownienne la mesure l_1 définie par:

$$l_1(g) = \int_0^1 g(B_s)\, ds.$$

Par exemple, toujours en dimension 2, Ray (1963) montre:

$$l_1\left(\left\{ y \in R^2;\ \limsup_{a \to 0} \frac{l_1(D(y,a))}{h_1^*(a)} = 2 \right\}\right) = 1, \quad P \text{ p.s.},$$

ce qui lui permet ensuite, à l'aide du Lemme 3-3, d'obtenir immédiatement une minoration de la h_1^*-mesure de Hausdorff de la trajectoire du mouvement brownien plan (la majoration demande un peu plus de travail, voir Taylor, 1964). Une démarche analogue est adoptée par Ciesielski et Taylor (1962) en dimension $d \geq 3$. Dans tous les cas la mesure l_1 coincide avec la restriction à la trajectoire d'une h-mesure de Hausdorff ($h = h_1^*$ en dimension 2). Il parait plausible que le même résultat soit vrai pour les mesures l_n. Une première étape consisterait à trouver, pour tout entier n, une fonction $h_{(n)}$ telle que:

$$l_n\left(\left\{ y \in R^2;\ 0 < \limsup_{a \to 0} \frac{l_n(D(y,a))}{h_{(n)}(a)} < \infty \right\}\right) = l_n(R^2), \quad P \text{ p.s.}$$

La preuve du Théorème 4-1 montre déjà que $h_{(n)}$ doit être "au moins aussi grande" que h_n^* (en supposant que $h_{(n)}$ et h_n^* soient comparables).

On peut appliquer les techniques ci-dessus à l'étude des points doubles de la trajectoire du mouvement brownien dans R^3. Supposons maintenant que B est un mouvement brownien à valeurs dans R^3 et soit D l'ensemble des points doubles de la trajectoire de B sur l'intervalle $[0; 1]$. Dvoretzky, Erdös et Kakutani (1950) ont montré que D est presque sûrement non vide et Fristedt (1967) a établi que sa dimension de Hausdorff est 1 (voir aussi Hawkes, 1978). Le théorème suivant précise ce dernier résultat.

THÉORÈME 4-4. *Soit* $g_r(x) = x(\log 1/x)^r$. *Alors*, P *p.s.*:

$$g_r - m(D) = \begin{cases} 0 & si\ r \leq 0, \\ \infty & si\ r > 0. \end{cases}$$

La preuve du Théorème 4-4 est calquée sur celle du Théorème 4-1. Nous nous contenterons d'énoncer sans démonstration le résultat correspondant à la Proposition 4-2.

PROPOSITION 4-5. *Soient* B^1, B^2 *deux mouvements browniens indépendants à valeurs dans* R^3 *et* l_2 *la mesure associée au temps local de confluence de* B^1 *et* B^2. *Alors, pour tout* $r > 0$, P *p.s.*:

$$l_2\left(\left\{y \in R^3;\ \limsup_{a \to 0}\left(\frac{l_2(D(y,a))}{g_r(a)}\right) > 0\right\}\right) = 0.$$

Remerciements. Je tiens ici à remercier Marc Yor à qui ce travail doit beaucoup. Je voudrais aussi remercier John Hawkes qui m'a donné la référence de l'article d'Erdös et Taylor, et Daniel Revuz pour celle de l'article d'Orey.

RÉFÉRENCES

CIESIELSKI, Z. and TAYLOR, S. J. (1962). First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path. *Trans. Amer. Math. Soc.* **103** 434–450.

DOOB, J. L. (1957). Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions. *Bull. Soc. Math. France* **85** 431–458.

DVORETZKY, A. and ERDÖS, P. (1950). Some problems on random walk in space. *Proc. Second Berkeley Symp. Math. Statist. Probab.* 353–368. Univ. California Press.

DVORETZKY, A., ERDÖS, P. and KAKUTANI, S. (1950). Double points of paths of Brownian motion in n-space. *Acta Sci. Math.* (*Szeged*) **12** 64–81.

DVORETZKY, A., ERDÖS, P. and KAKUTANI, S. (1954). Multiple points of paths of Brownian motion in the plane. *Bull. Res. Council Israel Sect. F* **3** 364–371.

ERDÖS, P. and TAYLOR, S. J. (1960). Some intersection properties of random walk paths. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **11** 231–248.

FRISTEDT, B. (1967). An extension of a theorem of S. J. Taylor concerning the multiple points of the symmetric stable process. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **9** 62–64.

GEMAN, D., HOROWITZ, J. and ROSEN, J. (1984). A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. *Ann. Probab.* **12** 86–107.

GETOOR, R. K. (1979). The Brownian escape process. *Ann. Probab.* **7** 864–867.

GETOOR, R. K. and SHARPE, M. J. (1979). Excursions of Brownian motion and Bessel processes. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **47** 83–106.

HAWKES, J. (1978). Multiple points for symmetric Lévy processes. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **83** 83–90.

ITÔ, K. and MCKEAN, H. P., JR. (1965). *Diffusion Processes and Their Sample Paths*. Springer, Berlin.

KINGMAN, J. F. C. (1968). The ergodic theory of subadditive processes. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* **30** 499–510.

LE GALL, J.-F. (1985). Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan. *Séminaire de Probabilités XIX, Lecture Notes in Math.* **1123** 314–331. Springer, Berlin.

LE GALL, J.-F. et YOR, M. (1986). Etude asymptotique de certains mouvements browniens complexes avec drift. *Probab. Theory Rel. Fields* **71** 183–229.

OREY, S. (1983). Two strong laws for shrinking Brownian tubes. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **63** 281–288.

PITMAN, J. W. and YOR, M. (1981). Bessel processes and infinitely divisible laws. *Stochastic Integrals, Lecture Notes in Math.* **851**. Springer, Berlin.

PITMAN, J. W. and YOR, M. (1982). A decomposition of Bessel bridges. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **59** 425–457.

RAY, D. (1963). Sojourn times and the exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion. *Trans. Amer. Math. Soc.* **106** 436–444.

ROGERS, C. A. and TAYLOR, S. J. (1961). Functions continuous and singular with respect to a Hausdorff measure. *Mathematika* **8** 1–31.

ROSEN, J. (1983). A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space. *Comm. Math. Phys.* **88** 327–338.

ROSEN, J. (1984). Self-intersections of random fields. *Ann. Probab.* **12** 108–119.

SPITZER, F. (1958). Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion. *Trans. Amer. Math. Soc.* **87** 187–197.

SPITZER, F. (1964). Electrostatic capacity, heat flow, and Brownian motion. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **3** 110–121.

TAYLOR, S. J. (1964). The exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **60** 253–258.

TAYLOR, S. J. (1967). Multiple points for the sample paths of the symmetric stable process. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **5** 247–264.

TAYLOR, S. J. (1973). Sample path properties of processes with stationary independent increments. In *Stochastic Analysis* (D. Kendall and E. Harding, eds.). Wiley, London.

VARADHAN, S. R. S. (1969). Appendix to: Euclidean quantum field theory, by K. Symanzik. In *Local Quantum Theory* (R. Jost, ed.). Academic, New York.

WILLIAMS, D. (1974). Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions, I. *Proc. London Math. Soc.* **28** 738–768.

WOLPERT, R. (1978). Wiener path intersections and local time. *J. Funct. Anal.* **30** 329–340.

LABORATOIRE DE PROBABILITÉS—TOUR 56
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
4, PLACE JUSSIEU
75230 PARIS CEDEX 05
FRANCE