The Annals of Probability
1997, Vol. 25, No. 2, 738–766

THÉORÈME ERGODIQUE PONCTUEL ET LOIS FORTES DES GRANDS NOMBRES POUR DES POINTS ALÉATOIRES D'UN ESPACE MÉTRIQUE À COURBURE NÉGATIVE

By Paul Raynaud de Fitte

Université de Rouen

Soit M un espace métrique séparable complet à courbure négative suivant la définition de Herer. À l'aide de la définition de Herer de l'espérance mathématique d'un point aléatoire de M, nous étendons à des suites de points aléatoires de M un théorème ergodique ponctuel et plusieurs lois fortes des grands nombres (lFgn), connus dans le cas où M est un espace de Banach séparable (lFgn d'Etemadi, de Beck et Giesy, et de Cuesta et Matrán). Dans les résultats obtenus, la convergence a lieu au sens de Hausdorff ou au sens de Wijsman dans l'espace des fermés de M.

Let M be a complete separable metric space with negative curvature as defined by Herer. Using Herer's definition of the mathematical expectation of a random point of M, we extend to sequences of random points of M a pointwise ergodic theorem and strong laws of large numbers (SLLN), known in the case where M is a separable Banach space (SLLN of Etemadi, of Beck and Giesy and of Cuesta and Matrán). The convergence results obtained here are stated for the Hausdorff topology or the Wijsman topology in the space of closed subsets of M.

Introduction. Plusieurs définitions ont été proposées pour l'espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans un espace métrique M : Fréchet [21] en 1948, Doss [15] en 1949 (voir aussi [16], [4], [24], [26] et [6]) et Herer [25] en 1988 pour les espaces dits "à courbure négative" (voir aussi [23] et [27]). Une espérance pour des variables aléatoires à valeurs dans une variété différentielle V a été définie par Émery et Mokobodzki [18], puis une autre par Picard [32]. Dans toutes ces définitions (sauf [32]), l'espérance d'un élément aléatoire est un fermé de M ou de V, non nécessairement réduit à un point.

Chacune de ces définitions permet de donner un sens à la somme de Cesàro $\sum_{1\le i\le n}(1/n)x_i$ de points $x_1, \dots, x_n$ de M ou de V, que l'on peut considérer comme l'espérance d'une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$, chacune avec la probabilité $1/n$. Il est donc naturel de se demander si, avec l'une de ces espérances, on peut établir des théorèmes de limite (dans l'ensemble des fermés de M ou de V) pour les sommes de Cesàro d'une suite $(X_n)_n$ de points aléatoires de M ou V. Dans [27], Herer a prouvé une loi forte des grands nombres (relativement à l'espérance au sens de Herer) pour des points aléatoires indépendants identiquement distribués d'un espace métrique à courbure négative et à boules fermées compactes. Nous présentons ici un théorème ergodique ponctuel et plusieurs lois fortes des grands nom-

Received February 1995; revised September 1996.

AMS 1991 *subject classifications.* Primary 60B05, 60D05, 60F15; secondary 51K05.

Key words and phrases. Strong law of large numbers, ergodic theorem, random sets, Hausdorff distance, metric spaces with negative curvature.

bres, relativement à l'espérance de Herer, pour des points aléatoires d'un espace métrique à courbure négative M dont les boules fermées ne sont pas nécessairement compactes.

Nous commençons par définir, dans la Section 1, les espaces métriques à courbure négative, l'espérance au sens de Herer et le barycentre d'une probabilité sur M. Ensuite, dans la Section 2, nous établissons des résultats qui permettent de transporter les points aléatoires de M dans un espace l^1. Ces résultats sont utilisés dans la Section 3 pour démontrer, dans M, un théorème ergodique ponctuel et des lois fortes des grands nombres connues dans le cadre des espaces de Banach séparables (lois des grands nombres d'Etemadi [19] et de Beck et Giesy [2]). En Section 4, une autre loi forte des grands nombres est obtenue en adaptant à M la méthode utilisée par Cuesta et Matrán [12] pour démontrer des lois fortes des grands nombres dans les espaces de Banach séparables.

Dans tout ce qui suit, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, M est un espace métrique séparable complet, $D = \{e_0, \ldots, e_k, \ldots\}$ est une partie dénombrable dense de M et a désignera un point quelconque de M. La distance entre deux éléments x et y de M sera notée $[x, y]$. Si F est une partie fermée non vide de M et x un élément de M, on notera $d(x, F) = \inf_{y \in F}[x, y]$. On notera $\mathscr{F}(M)$ l'ensemble des parties fermées non vides de M, muni de l' écart de Hausdorff $[\cdot, \cdot]$ défini par

$$\begin{aligned}[F, G] &= \max\Big\{\sup_{x \in F} d(x, G), \sup_{y \in G} d(y, F)\Big\} \\ &= \sup_{a \in M} |d(a, F) - d(a, G)|\end{aligned}$$

([11], Section 2, Definition 1.1 et Proposition 1.2). La convergence au sens de Hausdorff (i.e., pour la topologie associée à $[\cdot, \cdot]$) d'une suite $(F_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{F}(M)$ vers $F \in \mathscr{F}(M)$ sera notée

$$F_n \to^{\text{Haus}} F.$$

Nous utiliserons également une notion de convergence plus faible : on dira que $(F_n)_n \in \mathscr{F}(M)^{\mathbb{N}}$ converge au sens de Wijsman vers $F \in \mathscr{F}(M)$ si, pour tout $a \in M$,

$$\lim_{n \to \infty} |d(a, F_n) - d(a, F)| = 0.$$

On écrira alors

$$F_n \to^{\text{Wijs}} F$$

(voir [3] ou [11] pour les propriétés de cette convergence).

1. Espaces métriques à courbure négative, espérance au sens de Herer.

Combinaisons convexes. Espaces à courbure négative. Pour tous x et y dans M, et pour tous p_1 et p_2 dans $[0, 1]$, tels que $p_1 + p_2 = 1$, on appelle *com-*

binaison convexe ([25], Definition 1) de x et y de poids p_1 et p_2 l'ensemble (éventuellement vide)

$$\{z \in M/\ [z,x] = p_2[x,y] \quad \text{et} \quad [z,y] = p_1[x,y]\},$$

que l'on notera p_1x+p_2y. Cette définition s'étend par récurrence à un système de n éléments (distincts ou non) $x_1,\dots,x_n$ de M ($n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$) et de n poids $p_1,\dots,p_n$ positifs ou nuls tels que $\sum_{1\leq i\leq n} p_i = 1$: on écrira $z \in \sum_{1\leq i\leq n} p_ix_i$ s'il existe deux parties disjointes non vides I_1 et I_2 de $\{1,\dots,n\}$ telles que

$$z \in \left(\sum_{i\in I_1} p_i\right) \sum_{j\in I_1} \frac{p_j}{\sum_{i\in I_1} p_i} x_j + \left(\sum_{i\in I_2} p_i\right) \sum_{j\in I_2} \frac{p_j}{\sum_{i\in I_2} p_i} x_j.$$

On dit que M est *convexe* (au sens de Herer [25, 27], voir également la définition de Menger [30]) si $px_1+(1-p)x_2$ est non vide pour tous $x_1, x_2 \in M$ et $p \in [0,1]$. On dit que l'espace métrique convexe M est *à courbure négative* [25, 27], (voir aussi les définitions de Busemann [7, 8] et de Gromov [22]) si pour tous $x, y, x', y' \in M$, $p, p' \in [0,1]$, $z \in px+(1-p)y$ et $z' \in px'+(1-p)y'$, on a

$$[z,z'] \leq p[x,x'] + (1-p)[y,y']. \tag{1}$$

Dorénavant, M sera toujours convexe à courbure négative. Si l'on pose $x = x'$ et $y = y'$ dans (1), on voit que $px+(1-p)y$ est toujours un singleton (que l'on identifiera à son unique élément). On démontre par récurrence ([25], Proposition 1 et [27], Proposition 1.1) que, si $(x_i)_{i\in I}$ et $(x'_i)_{i\in I}$ sont deux familles finies de points de M et si $(p_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $[0,1]$ telle que $\sum_{i\in I} p_i = 1$, alors

$$\left[\sum_{i\in I} p_ix_i, \sum_{i\in I} p_ix'_i\right] \leq \sum_{i\in I} p_i[x_i, x'_i]. \tag{2}$$

Si (p_i) est fixé, l'application $(x_i) \mapsto \sum_{i\in I} p_ix_i$ de M^I dans $\mathscr{F}(M)$ est donc uniformément continue pour la structure uniforme produit sur M^I et la structure uniforme sur $\mathscr{F}(M)$, et par conséquent mesurable pour les tribus boréliennes de M^I et de $\mathscr{F}(M)$. Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille finie de variables aléatoires à valeurs dans M, $\sum_{i\in I} p_iX_i$ est donc une variable aléatoire à valeurs dans $\mathscr{F}(M)$.

Busemann [7] a prouvé en 1948 que les variétés riemanniennes simplement connexes, munies de leur distance géodésique, sont des espaces métriques à courbure négative (au sens de la définition ci-dessus) si et seulement si leur courbure sectionnelle est négative. D'autre part, les espaces de Banach strictement convexes sont également des espaces métriques à courbure négative. Or, d'après un résultat de Clarkson [10], tout espace de Banach séparable peut être muni d'une norme équivalente qui le rend strictement convexe. De plus, dans un espace de Banach strictement convexe, la combinaison convexe (au sens défini ci-dessus) $\sum_{i\in I} p_ix_i$ a pour unique élément la combinaison linéaire habituelle (au sens algébrique) des x_i avec les coefficients p_i, qui, elle, ne dépend pas de la norme. Il s'ensuit que les résultats que nous obtiendrons dans cet article pour les espaces métriques séparables complets à courbure négative généralisent les résultats analogues pour les espaces de Banach séparables, obtenus en remplaçant, pour tout $x \in M$, la distance $[a, x]$ par la norme $\|x\|$.

Espérance au sens de Herer d'un point aléatoire. Nous appellerons *point aléatoire* toute variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans M muni de sa tribu borélienne $\mathscr{B}_M$. La loi d'un point aléatoire X sera notée μ_X.

Soit X un point aléatoire étagé, il est de la forme

$$X = \sum_{1 \le i \le n} \mathbb{1}_{A_i} x_i \tag{3}$$

où $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathscr{A}$ est une partition finie de Ω et les $x_i = X(A_i)$ sont des points de M. Notons $\Pi(X)$ l'ensemble des partitions finies $\pi = \{B_1, \ldots, B_n\} \subset \mathscr{A}$ de Ω, telles que X soit constant sur les B_i. Pour chaque $\pi \in \Pi(X)$, soit

$$\mathbb{E}_\pi X = \sum_{B \in \pi} \mathbb{P}(B) X(B).$$

Si π et π' sont dans $\Pi(X)$ et si π est plus fine que π', alors $\mathbb{E}_{\pi'} X \subset \mathbb{E}_\pi X$.

L'espérance au sens de Herer d'un point aléatoire étagé X est l'ensemble fermé

$$\mathbb{E}X = \overline{\bigcup_{\pi \in \Pi(X)} \mathbb{E}_\pi X}.$$

Pour tous points étagés X et Y, on montre à l'aide de (2) l'inégalité fondamentale suivante ([25], Proposition 2 et [27], Proposition 2.1)

$$[\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y] \le \mathbb{E}[X, Y]. \tag{4}$$

C'est ce résultat qui permet la construction de l'espérance de Herer.

On dira qu'un point aléatoire X est *intégrable* si $\mathbb{E}[a, X] < +\infty$ (où a est un point quelconque de M choisi une fois pour toutes; cette définition ne dépend pas du choix de a). Soit L^1_M l'espace des points aléatoires intégrables (modulo l'égalité p.s.), muni de la distance Δ définie par

$$\Delta(X, Y) = \mathbb{E}[X, Y]$$

qui en fait un espace métrique complet [29]. Le sous-espace $\mathscr{E}^1$ des points aléatoires étagés intégrables est dense dans L^1_M car M est séparable. L'inégalité (4) prouve que l'application

$$\mathscr{E}^1 \to \mathscr{F}(M), \qquad X \mapsto \mathbb{E}X$$

est uniformément continue, et se prolonge donc par continuité de manière unique sur L^1_M en une application $X \mapsto \mathbb{E}X$, que l'on appellera encore *espérance mathématique*, et qui vérifie encore (4) pour tous X et Y dans L^1_M. On notera également

$$\mathbb{E}X = \int X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$$

lorsque l'on aura besoin de préciser que l'espérance de X est relative à la probabilité $\mathbb{P}$.

Barycentre d'une probabilité. On voit que l'espérance de X ne dépend pas seulement de la loi de X, mais aussi de l'espace $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$: si les A_i dans (3) sont des atomes pour $\mathbb{P}$, alors l'espérance de X est

$$\mathbb{E}X = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A_i) x_i$$

qui n'est pas nécessairement le même ensemble que dans le cas où $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est sans atome. En effet, supposons qu'il existe trois points x_1, x_2, x_3 de M dont la combinaison convexe avec les poids $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ n'est pas un singleton (c'est le cas, par exemple, dans le plan hyperbolique si x_1, x_2, x_3 ne sont pas alignés et si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont non nuls, car, sinon, le plan hyperbolique serait isométrique à un espace de Banach, d'après le Théorème 3.1 de [1]). Alors l'ensemble $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ est constitué des éléments

$$\begin{aligned}
u &= \alpha_1 x_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3} x_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3} x_3\right),\\
v &= \alpha_2 x_2 + (\alpha_3 + \alpha_1)\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_3 + \alpha_1} x_3 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3 + \alpha_1} x_1\right),\\
w &= \alpha_3 x_3 + (\alpha_1 + \alpha_2)\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} x_2\right),
\end{aligned}$$

dont deux au moins sont distincts (supposons que ce soient les deux premiers). Or si $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est l'intervalle $[0,1]$ muni de sa tribu borélienne $\mathscr{B}_{[0,1]}$ et de la probabilité uniforme λ, et si X est un point aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2 et x_3 sur les ensembles A_1, A_2 et A_3 de probabilités α_1, α_2 et α_3, l'espérance $\mathbb{E}X$ contient le segment constitué des points de la forme $tu + (1-t)v$ $(0 \leq t \leq 1)$, que l'on obtient en découpant chacun des A_i en deux sous-ensembles de probabilités $t\alpha_i$ et $(1-t)\alpha_i$. Il s'ensuit que $\mathbb{E}X$ a la puissance du continu, alors que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ est fini.

Ceci nous conduit à définir le *barycentre* $b(\mu)$ d'une probabilité μ sur $(M, \mathscr{B}_M)$: si $\int_M [a, x]\, d\mu(x) < \infty$, le barycentre $b(\mu)$ de μ est l'espérance au sens de Herer d'un point aléatoire défini sur $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]}, \lambda)$, et de loi μ. On voit, en le vérifiant d'abord pour μ discrète, que cette définition reste inchangée si l'on choisit un autre espace de départ sans atome. Il est facile de prouver que $b(\mu)$ est toujours convexe pour la distance induite par celle de M. On notera $\mathbb{P}^1(M)$ l'ensemble des probabilités sur M qui admettent un barycentre.

Si I est une partie de $\mathbb{N}$, $(x_i)_{i \in I}$ une famille de points de M et $(p_i)_i \in I$ une famille de réels positifs telle que $\sum_{i \in I} p_i = 1$ et $\sum_{i \in I} p_i [a, x_i] < +\infty$, on notera

$$\sum_{i \in I}{}^{*} p_i x_i$$

le barycentre de la probabilité $\sum_{i \in I} p_i \delta_{x_i}$ (où δ_{x_i} est la mesure de Dirac au point x_i). Si I est fini, on a donc

$$\sum_{i \in I} p_i x_i \subset \sum_{i \in I}{}^{*} p_i x_i. \tag{5}$$

Si $(x'_i)_{i\in I}$ est une famille de points de M telle que $\sum_{i\in I} p_i[a, x'_i] < +\infty$, alors, d'après l'inégalité fondamentale (4),

$$\left[\sum_{i\in I}^{*} p_i x_i, \sum_{i\in I}^{*} p_i x'_i\right] \le \sum_{i\in I} p_i [x_i, x'_i]. \tag{6}$$

Comme précédemment pour les combinaisons convexes, si I est fini, alors, pour (p_i) fixé, l'application $(x_i) \mapsto \sum_{i\in I}^{*} p_i x_i$ de M^I dans $\mathscr{F}(M)$ est uniformément continue, donc mesurable. Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille finie de variables aléatoires à valeurs dans M, $\sum_{i\in I}^{*} p_i X_i$ est donc une variable aléatoire à valeurs dans $\mathscr{F}(M)$.

Remarque 1.1. On peut construire une deuxième notion de moyenne d'une probabilité $\mu \in \mathbb{P}^1(M)$, en choisissant (contrairement au cas du barycentre) un espace probabilisé ayant des atomes aussi gros que possible. Cette moyenne, que nous appellerons *combinaison convexe* de μ et que nous noterons $c(\mu)$, est l'espérance de Herer de l'application identique de $(M, \mathscr{B}_M, \mu)$. Si X est un point aléatoire de loi μ défini sur un espace $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, $c(\mu)$ est alors égal à l'espérance de Herer de X relative à $(\Omega, \mathscr{A}_X, \mathbb{P}_X)$, où $\mathscr{A}_X$ et $\mathbb{P}_X$ désignent respectivement la tribu engendrée par X et la restriction de $\mathbb{P}$ à $\mathscr{A}_X$. Soient en effet $\tilde{\mathscr{A}}_X$ la tribu des classes d'équivalence de $\mathscr{A}_X$ pour la relation d'égalité $\mathbb{P}_X$-presque sûre, $\tilde{\mathbb{P}}_X$ la probabilité associée à $\mathbb{P}_X$ sur $\tilde{\mathscr{A}}_X$ et soit de même $(\tilde{\mathscr{B}}, \tilde{\mu})$ l'espace probabilisé quotient associé à $(\mathscr{B}, \mu)$. L'application $A \mapsto X(A)$ de $\mathscr{A}_X$ dans $\mathscr{B}$ définit alors un isomorphisme d'espaces probabilisés de $(\tilde{\mathscr{A}}_X, \tilde{\mathbb{P}}_X)$ sur $(\tilde{\mathscr{B}}, \tilde{\mu})$. Comme l'espérance de Herer ne dépend pas des parties négligeables, on en déduit l'égalité annoncée. Pour un point aléatoire intégrable X, on obtient ainsi, avec $b(\mu_X)$ et $c(\mu_X)$, deux notions d'espérance mathématique indépendantes de l'espace sur lequel X est défini. De plus, la tribu $\mathscr{A}_X$ étant la plus pauvre pour laquelle X soit mesurable, on a toujours

$$c(\mu_X) \subset \mathbb{E}X \subset b(\mu_X).$$

On peut également définir, en cohérence avec les définitions précédentes, la combinaison convexe d'une suite $(x_i)_{i\in I}$ de points de M affectés de poids p_i tels que $\sum_{i\in I} p_i = 1$ et $\sum_{i\in I} p_i[a, x_i] < +\infty$, en posant

$$\sum_{i\in I} p_i x_i = c\left(\sum_{i\in I} p_i \delta_{x_i}\right).$$

L'inégalité (2) et l'inclusion (5) restent vérifiées pour I quelconque.

Nous aurons besoin (dans le cas où I est fini) de l'inégalité suivante, qui prolonge (6).

Lemme 1.1. *Soient I une partie de $\mathbb{N}^*$, $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_i)_{i\in I}$ deux familles de points aléatoires intégrables et $(p_i)_{i\in I}$ une famille de nombres positifs ou nuls* *tels que*

$$\sum_{i\in I} p_i = 1, \quad \sum_{i\in I} p_i \int_M [a, x]\, d\mu_{X_i}(x) < +\infty \quad \textit{et} \quad \sum_{i\in I} p_i \int_M [a, x]\, d\mu_{Y_i}(x) < +\infty.$$

Alors

$$\left[b\Big(\sum_{i\in I} p_i \mu_{X_i}\Big),\ b\Big(\sum_{i\in I} p_i \mu_{Y_i}\Big)\right] \le \sum_{i\in I} p_i \mathbb{E}[X_i,\ Y_i].$$

REMARQUE 1.2. Dans le cas où p.s. $X_i = x_i$ et $Y_i = x'_i$, on retrouve l'inégalité (6).

PREUVE DU LEMME 1.1. Remarquons d'abord que l'on peut supposer $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sans atomes, car le résultat à démontrer ne dépend que des lois des couples (X_i, Y_i). Notons $\mu = \sum_{i\in I} p_i \mu_{X_i}$ et $\nu = \sum_{i\in I} p_i \mu_{Y_i}$. La loi μ est définie sur la tribu borélienne $\mathscr{B}_M$ de M par $\mu(A) = \sum_{i\in I} p_i \mu_{X_i}(A)$ pour tout $A \in \mathscr{B}_M$ et μ est dans $\mathbb{P}^1(M)$ car

$$\int_M [a, x]\, d\mu(x) = \sum_{i\in I} p_i \int_M [a, x]\, d\mu_{X_i}(x) < +\infty.$$

De même ν est dans $\mathbb{P}^1(M)$. Découpons l'intervalle $[0, 1]$ en intervalles A_i de longueur p_i. Soient U et V les points aléatoires définis sur $(\Omega \times [0, 1], \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}_{[0,1]}, \mathbb{P} \otimes \lambda)$ par

$$(\omega, \omega') \in \Omega \times A_i \quad \Rightarrow \quad [U(\omega, \omega') = X_i(\omega) \text{ et } V(\omega, \omega') = Y_i(\omega)].$$

Alors $\mu_U = \mu$, $\mathbb{E}U = b(\mu)$, $\mu_V = \nu$ et $\mathbb{E}V = b(\nu)$ [on a supposé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sans atome]. On a donc

$$[b(\mu),\ b(\nu)] = [\mathbb{E}U,\ \mathbb{E}V] \le \mathbb{E}[U,\ V] = \sum_{i\in I} p_i \mathbb{E}[X_i,\ Y_i]. \qquad \square$$

2. Approximation dans M et transport de points aléatoires dans l^1_a.

Approximation dans M: l'application ψ^N. Rappelons que $D = \{e_0, \dots, e_k, \dots\}$ est une partie dense de M. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on définit une application

$$\psi^N:\ \begin{cases} M \to D, \\ x \mapsto x^N, \end{cases}$$

en posant, pour tout $x \in M$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$x^N = e_k \quad \Leftrightarrow \quad k = \min\left\{\frac{i \in \mathbb{N}}{[x, e_i]} < \frac{1}{N}\right\}.$$

Notons les propriétés suivantes de ψ^N.

LEMME 2.1. *Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et X un point aléatoire.*

(i) *L'application ψ^N est mesurable.*

(ii) *Le point aléatoire X est intégrable si et seulement si son approximation $\psi^N(X)$ l'est. Si tel est le cas, on a*

$$[\mathbb{E}X, \mathbb{E}X^N] \leq \frac{1}{N}, \tag{7}$$

$$[b(\mu_X),\, b(\mu_{X^N})] \leq \frac{1}{N}. \tag{8}$$

En particulier, pour tout $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}[a, X^N]^p \leq 2^{p-1}\left(\frac{1}{N^p} + \mathbb{E}[a, X]^p\right) \tag{9}$$

et

$$\mathbb{E}\big|[a, X^N] - \mathbb{E}[a, X^N]\big|^p \leq 3^{p-1}\left(\frac{2}{N^p} + \mathbb{E}\big|[a, X] - \mathbb{E}[a, X]\big|^p\right). \tag{10}$$

PREUVE. L'application ψ^N est mesurable car, pour tout $\eta > 0$ tel que $\eta < 1/N$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'image réciproque de la boule ouverte $B(e_k, \eta[$ de centre e_k et de rayon η est le borélien

$$B(e_k, \eta[- \left(\bigcup_{0 \leq i < k} B\left(e_i, \frac{1}{N}\right[\right)$$

et, par conséquent, l'image réciproque de tout ouvert est un borélien.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on a $[X(\omega), X^N(\omega)] \leq 1/N$, d'où $|[a, X(\omega)] - [a, X^N(\omega)]| \leq 1/N$. Donc X est intégrable si et seulement si X^N l'est. Dans ce cas, d'après l'inégalité fondamentale (4), on a

$$[\mathbb{E}X, \mathbb{E}X^N] \leq \mathbb{E}[X, X^N] \leq \frac{1}{N}$$

ce qui prouve (7).

Soit U un point aléatoire de loi μ_X défini sur $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]}, \lambda)$. Alors U^N a pour loi $\psi^N(\mu_X) = \mu_{X^N}$ donc, d'après (4),

$$[b(\mu_X),\, b(\mu_{X^N})] \leq \mathbb{E}[U, U^N] \leq \frac{1}{N}$$

ce qui prouve (8).

Les inégalités (9) et (10) concernent en fait les moments d'ordre p d'une variable aléatoire réelle intégrable. Notons $f = [a, X]$ et $f^N = [a, X^N]$, et montrons par exemple (10). Il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|f^N - \mathbb{E}f^N\right|^p &= 3^p \mathbb{E}\left(\frac{|(f^N - f) + (f - \mathbb{E}f) + (\mathbb{E}f - \mathbb{E}f^N)|}{3}\right)^p \\
&\le 3^p \frac{\mathbb{E}|f^N - f|^p + \mathbb{E}|f - \mathbb{E}f|^p + |\mathbb{E}f - \mathbb{E}f^N|^p}{3} \\
&\qquad \big(\text{par convexité de } t \mapsto t^p \text{ sur } \mathbb{R}^+\big) \\
&\le 3^{p-1}\left(\frac{2}{N^p} + \mathbb{E}|f - \mathbb{E}f|^p\right) \\
&\qquad \left[\text{car, pour tout } \omega,\ \left|f^N(\omega) - f(\omega)\right| \le \frac{1}{N}\right]
\end{aligned}$$

ce qui prouve bien (10). □

Transport de points aléatoires dans l^1_a: l'application φ. Ayant approché un point aléatoire intégrable X par un point aléatoire X^N à valeurs dans D, nous allons représenter X^N par un vecteur aléatoire intégrable $\varphi(X^N)$ de l' espace l^1_a des suites $(p_k)_k$ de nombres réels vérifiant $\sum_{k\in\mathbb{N}} |p_k|[a, e_k] < +\infty$, muni de la semi-norme $\|\cdot\|_a$ définie par

$$\|(p_k)_k\|_a = \sum_{k\in\mathbb{N}} |p_k|[a, e_k].$$

Plus précisément, $\varphi(X^N)$ prendra ses valeurs dans l'ensemble $\mathscr{S}$ des éléments $p = (p_k)$ de l^1_a dont tous les termes p_k sont positifs ou nuls et tels que $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k = 1$. Cet ensemble ne dépend pas du choix du point a, contrairement à l'ensemble l^1_a et à la semi-norme $\|\cdot\|_a$.

Pour simplifier l'exposé, nous supposerons désormais que a n'appartient pas à D. Dans ce cas, $\|\cdot\|_a$ est une norme et l^1_a un espace de Banach séparable, isométrique à l^1 via l'application $(p_k)_k \mapsto (p_k[a, e_k])_k$. Ceci nous permettra en Section 3 d'utiliser des théorèmes connus dans le cadre des espaces de Banach (théorème ergodique, lois des grands nombres). On a de plus le résultat suivant, intéressant pour lui-même, mais que nous n'utiliserons pas par la suite.

PROPOSITION 2.1. *La topologie métrisable sur $\mathscr{S}$ induite par celle de l^1_a ne dépend pas du choix de a dans $M - D$.*

PREUVE. Soient $(p^{(n)})_n = ((p_k^{(n)})_k)_n$ une suite d'éléments de $\mathscr{S}$ et $p = (p_k)_k$ un élément de $\mathscr{S}$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \left|p_k^{(n)} - p_k\right| [b, e_k] = 0$$

pour un point b n'appartenant pas à D. Soient $\varepsilon > 0$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\sum_{k>k_0} p_k < \varepsilon.$$

Comme toutes les normes de $\mathbb{R}^{k_0+1}$ sont équivalentes, il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que, pour toute suite $(q_k)_k$ de nombres réels,

$$\sum_{k \le k_0} |q_k| \, [a, e_k] \le A \sum_{k \le k_0} |q_k| \, [b, e_k]$$

et

$$\sum_{k \le k_0} |q_k| \le B \sum_{k \le k_0} |q_k| \, [b, e_k].$$

Soit $C = \min\{1, 1/A, 1/B\}$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \ge n_0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| p_k^{(n)} - p_k \right| [b, e_k] < C\varepsilon.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k^{(n)} - \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k = 0,$$

donc, pour tout $n \ge n_0$,

$$\left| \sum_{k > k_0} p_k^{(n)} - \sum_{k > k_0} p_k \right| = \left| \sum_{k \le k_0} p_k^{(n)} - \sum_{k \le k_0} p_k \right| \le B \sum_{k \le k_0} \left| p_k^{(n)} - p_k \right| [b, e_k] \le BC\varepsilon,$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \in \mathbb{N}} \left| p_k^{(n)} - p_k \right| [a, e_k] \\
&\qquad \le \sum_{k \le k_0} \left| p_k^{(n)} - p_k \right| [a, e_k] + \sum_{k > k_0} \left| p_k^{(n)} - p_k \right| [b, a] + \sum_{k > k_0} \left| p_k^{(n)} - p_k \right| [b, e_k] \\
&\qquad \le AC\varepsilon + \left(\left| \sum_{k > k_0} p_k^{(n)} - \sum_{k > k_0} p_k \right| + 2 \sum_{k > k_0} p_k \right) [b, a] + \varepsilon \\
&\qquad \le AC\varepsilon + (BC + 2)\varepsilon [b, a] + \varepsilon \le \varepsilon (2 + 3[b, a])
\end{aligned}$$

ce qui prouve que, dans $\mathscr{S}$, les convergences pour les distances associées à $\| \cdot \|_a$ et $\| \cdot \|_b$ sont équivalentes. $\square$

REMARQUE 2.1. Si l'on supprime l'hypothèse $a \notin D$, la semi-distance sur $\mathscr{S}$ associée à $\| \cdot \|_a$ reste encore une distance (à cause de la condition $\sum_k p_k = 1$ dans la définition de $\mathscr{S}$), mais la topologie associée dépend alors de a. Par exemple, comme M est connexe par arcs, il existe une suite strictement croissante $(l_n)_n$ telle que e_{l_n} tende vers e_0. Posons $p_k^{(n)} = \delta_{k, l_n}$ et $p_k = \delta_{k, 0}$, où $\delta_{k, i} = 1$ si $i = k$ et 0 sinon. Alors $\sum_k |p_k^{(n)} - p_k| [a, e_k]$ vaut $[a, e_0] + [a, e_{l_n}]$ et tend vers p pour $\| \cdot \|_{e_0}$, mais pas pour $\| \cdot \|_a$ si $a \ne e_0$.

La convergence pour $\| \cdot \|_a$ d'une suite $(p^{(n)})_n$ d'éléments de $\mathscr{S}$ vers $p \in \mathscr{S}$ sera notée

$$p^{(n)} \to^{\mathscr{S}} p.$$

Soit $\mathbb{P}^1(D)$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{P}^1(M)$ de support D. L'application

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{P}^1(D) \to l^1_a, \\ \mu \mapsto (\mu(e_k))_{k\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

est une bijection de $\mathbb{P}^1(D)$ sur $\mathscr{S}$. On définit donc une distance sur $\mathbb{P}^1(D)$ en posant, pour tout μ et tout ν dans $\mathbb{P}^1(D)$,

$$[\mu, \nu] = \|\varphi(\mu) - \varphi(\nu)\|_a.$$

Le lemme qui suit montre que l'application $b\colon \mu \mapsto b(\mu)$ de $\mathbb{P}^1(D)$ dans $\mathscr{F}(M)$ est uniformément continue pour cette distance.

Ce lemme est essentiel pour la suite de cet article.

LEMME 2.2. *Soient $(p_k)_k$ et $(p'_k)_k$ deux éléments de $\mathscr{S}$. On a alors*

$$\left[\sum_k{}^* p_k e_k, \sum_k{}^* p'_k e_k\right] \le \sum_k |p_k - p'_k|\,[a, e_k]. \tag{11}$$

PREUVE. Nous allons construire deux points aléatoires intégrables X et Y à valeurs dans D tels que

$$\mathbb{E}X = \sum_k{}^* p_k e_k, \qquad \mathbb{E}Y = \sum_k{}^* p'_k e_k \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X, Y] \le \sum_k \left|p_k - p'_k\right|[a, e_k].$$

Le Lemme 2.2 se déduira alors de (4). Soient

$$I = \{k \in \mathbb{N}/p_k = p'_k\}, \qquad J = \{k \in \mathbb{N}/p_k > p'_k\}, \qquad K = \{k \in \mathbb{N}/p_k < p'_k\},$$

$$\alpha = \sum_{k\in I} p_k = \sum_{k\in I} p'_k, \qquad \beta = \sum_{k\in J} p'_k, \qquad \gamma = \sum_{k\in K} p_k.$$

On vérifie facilement que $\sum_{k\in J} p_k - p'_k = \sum_{k\in K} p'_k - p_k = 1 - (\alpha + \beta + \gamma)$. Soient U l'intervalle $[0, 1[$ et λ la mesure de Lebesgue sur U. Construisons une partition de $[0, \alpha[$ en intervalles U_k de longueur $p_k = p'_k$ ($k \in I$), une partition de $[\alpha, \alpha + \beta[$ en intervalles U_k de longueur p'_k ($k \in J$), et une partition de $[\alpha+\beta, \alpha+\beta+\gamma[$ en intervalles U_k de longueur p_k ($k \in K$). Ainsi $\{U_k/k \in \mathbb{N}\}$ est une partition de $[0, \alpha+\beta+\gamma[$. Soient $\{V_k/k \in J\}$ une partition de $[\alpha+\beta+\gamma, 1[$ en intervalles de longueur $p_k - p'_k$ et $\{W_k/k \in K\}$ une partition de $[\alpha+\beta+\gamma, 1[$ en intervalles de longueur $p'_k - p_k$. Définissons sur (U, λ) les points aléatoires X et Y par

$$\begin{aligned} X(\omega) = Y(\omega) &= e_k, \quad \text{si } \omega \in U_k\ (k \in \mathbb{N}), \\ X(\omega) &= e_k, \quad \text{si } \omega \in V_k\ (k \in J), \\ Y(\omega) &= e_k, \quad \text{si } \omega \in W_k\ (k \in K). \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a donc $\lambda\{X = e_k\} = p_k$ et $\lambda\{Y = e_k\} = p'_k$, d'où

$$\mathbb{E}X = \sum_{k\in\mathbb{N}}{}^* p_k e_k \quad \text{et} \quad \mathbb{E}Y = \sum_{k\in\mathbb{N}}{}^* p'_k e_k.$$

Par ailleurs, pour tout $\omega \in [0, \alpha+\beta+\gamma[$, on a $X(\omega) = Y(\omega)$, ce qui entraîne

$$\begin{aligned}[][\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y] \le \mathbb{E}[X, Y] &= \int_{[\alpha+\beta+\gamma,\, 1[} [X, Y]\, d\lambda \\ &\le \int_{[\alpha+\beta+\gamma,\, 1[} [X, a]\, d\lambda + \int_{[\alpha+\beta+\gamma,\, 1[} [a, Y]\, d\lambda \\ &= \sum_{k\in J} (p_k - p'_k)[a, e_k] + \sum_{k\in K} (p'_k - p_k)[a, e_k] \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} |p_k - p'_k|\, [a, e_k]. \qquad \square\end{aligned}$$

Identifions D à une partie de $\mathbb{P}^1(D)$ au moyen de l'injection

$$D \to l^1_a, \qquad e \mapsto \delta_e.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'image par φ de e_k est donc le vecteur

$$\varphi(e_k) = (0, \ldots, 1, 0, \ldots) = (\delta_{i,\,k})_{i\in\mathbb{N}}$$

où $\delta_{i,\,k}$ vaut 1 si $i = k$ et 0 sinon. L'application φ nous permettra de "transporter" dans l^1_a des points aléatoires intégrables.

LEMME 2.3. *La restriction $\varphi|_D$ de φ à D est mesurable pour la tribu induite par la tribu borélienne de M et pour la tribu borélienne de l^1_a. Soit X un point aléatoire à valeurs dans D et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $p_k = \mathbb{P}(X = e_k)$. Pour tout $p \ge 0$, on a*

$$\mathbb{E}[a, X]^p = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k [a, e_k]^p = \mathbb{E}\|\varphi(X)\|_a^p \tag{12}$$

donc X est intégrable si et seulement $\varphi(X)$ l'est dans l^1_a. Dans ce cas, on a

$$\mathbb{E}\varphi(X) = \varphi(\mu_X). \tag{13}$$

PREUVE. Comme $\{e\}$ est compact pour tout $e \in M$, chaque partie de D est un K_σ, donc une partie borélienne de M. Donc toute application de D dans un espace mesuré quelconque est mesurable.

Soit X un point aléatoire à valeurs dans D. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(X = e_k)$. L'égalité (12) se déduit du fait que $\|\varphi(X(\omega))\|_a = [a, e_k]$ lorsque $X(\omega) = e_k$. Donc X est intégrable si et seulement si $\varphi(X)$ l'est. On a alors, dans ce cas,

$$\mathbb{E}\varphi(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k d_k = (p_k)_k = \varphi(\mu_X)$$

ce qui prouve (13). $\square$

3. Théorème ergodique et lois fortes des grands nombres à la Etemadi et à la Beck et Giesy.

Un lemme de convergence d'ensembles. Donnons encore un lemme (un peu long), qui servira dans le cas de points aléatoires de même loi (Théorèmes 3.1 et 3.2).

LEMME 3.1. *Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de D. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$Y_{n,k} = \delta_{e_k}(x_n),$$
$$Z_{n,k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{i,k} = \frac{1}{n}\mathrm{card}\left\{i \in \frac{\{1,\dots,n\}}{x_i} = e_k\right\},$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_n = (Y_{n,k})_k \in \mathscr{S} \quad \text{et} \quad Z_n = (Z_{n,k})_k \in \mathscr{S}.$$

On suppose qu'il existe $p = (p_k) \in \mathscr{S}$ tel que

$$Z_n \to^{\mathscr{S}} p. \tag{14}$$

Soit $C = \sum^* p_k e_k$. Alors

(a) $$\sum_{1\leq i\leq n}^{*} \frac{1}{n} x_i \to^{\text{Haus}} C,$$

(b) $$\sum_{1\leq i\leq n} \frac{1}{n} x_i \to^{\text{Wijs}} C.$$

(c) *Si M est à boules fermées compactes, alors*

$$\sum_{1\leq i\leq n} \frac{1}{n} x_i \to^{\text{Haus}} C.$$

PREUVE. (a) C'est une conséquence immédiate du Lemme 2.2:

$$\left[\sum_{1\leq i\leq n}^{*} \frac{1}{n} x_i, C\right] = \left[\sum_k^{*} Z_{n,k} e_k, \sum_k^{*} p_k e_k\right]$$
$$\leq \|Z_n - p\|_a \to 0.$$

(b) Notons $\rho_n = d(a, \sum_{1\leq i\leq n}(1/n)x_i)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $\rho = d(a, C)$. Comme a est quelconque, il suffit de montrer que $\lim_{n\to\infty}\rho_n = \rho$. Or $\sum_{1\leq i\leq n}(1/n)x_i \subset \sum_{1\leq i\leq n}^{*}(1/n)x_i$, d'où $\rho_n \geq d(a, \sum_{1\leq i\leq n}^{*}(1/n)x_i)$, ce qui entraîne, d'après (a)

$$\liminf_{n\to\infty} \rho_n \geq \lim_{n\to\infty} d\left(a, \sum_{1\leq i\leq n}^{*} \frac{1}{n} x_i\right) = \rho.$$

Il reste à montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} \rho_n \leq \rho. \tag{15}$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $p \in l^1_a$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sum_{k>N} p_k[e_0, e_k] < \varepsilon. \tag{16}$$

Notons $p^{|N}$ et $Z_n^{|N}$ respectivement les éléments de $\mathscr{S}$ définis par

$$p_k^{|N} = \begin{cases} p_0 + \sum_{k'>N} p_{k'}, & \text{si } k = 0, \\ p_k, & \text{si } 0 < k \leq N, \\ 0, & \text{si } k > N, \end{cases}$$

$$Z_{n,k}^{|N} = \begin{cases} Z_{n,0} + \sum_{k'>N} Z_{n,k'}, & \text{si } k = 0, \\ Z_{n,k}, & \text{si } 0 < k \leq N, \\ 0, & \text{si } k > N. \end{cases}$$

On a, d'après le Lemme 2.2 et d'après (16),

$$\left[\sum_k{}^* p_k^{|N} e_k, \sum_k{}^* p_k e_k\right] \leq \sum_{k>N} p_k[e_0, e_k] < \varepsilon. \tag{17}$$

Il existe donc $c \in \sum^* p_k^{|N} e_k$ tel que

$$[a, c] \leq \rho + \varepsilon. \tag{18}$$

De plus, d'après la définition du symbole $\sum^*$, on peut choisir c de la forme

$$c \in \sum_{1 \leq i \leq m_N} \gamma_i f_i$$

où les γ_i sont positifs ou nuls et $m_{-1}, m_0, \ldots, m_N$ est une suite strictement croissante d'entiers telle que $m_{-1} = 0$ et, pour tout $k \in \{0, \ldots, N\}$,

$$\sum_{m_{k-1} < i \leq m_k} \gamma_i = p_k^{|N}$$

et

$$\forall i \in \{m_{k-1} + 1, \ldots, m_k\}, \qquad f_i = e_k.$$

Notons $\mathscr{C} = \{(\xi_i)_{1 \leq i \leq m_N} / \forall i \in \{1, \ldots, m_N\},\ \xi_i \geq 0,\ \sum_{1 \leq i \leq m_N} \xi_i = 1\}$. On munit $\mathscr{C}$ de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^{m_N}$. L'application

$$\mathscr{C} \to \mathscr{F}(M), \qquad (\xi_i) \mapsto \sum_{1 \leq i \leq m_N} \xi_i f_i$$

est continue pour la topologie de $\mathscr{C}$ et la topologie de Hausdorff sur $\mathscr{F}(M)$, d'après la Proposition 1.2 de [27]. Il existe donc dans $\mathscr{C}$ un voisinage V de (γ_i) tel que

$$(\xi_i) \in V \quad \Rightarrow \quad \left[\sum_{1 \leq i \leq m_N} \xi_i f_i, \sum_{1 \leq i \leq m_N} \gamma_i f_i\right] \leq \varepsilon.$$

On peut supposer V de la forme

$$V = \{(\xi_i) \in \mathscr{C} / |\xi_i - \gamma_i| < \eta,\ \forall i \in \{1, \dots, m_N\}\}$$

pour un certain $\eta > 0$. Pour chaque $k \in \{0, \dots, N\}$, les (γ_i) déterminent une subdivision de l'intervalle $[0, p_k^{|N}]$:

$$0 = t_{k, m_{k-1}} \leq \cdots \leq t_{k, i} = \sum_{m_{k-1} < j \leq i} \gamma_j \leq \cdots \leq t_{k, m_k} = p_k^{|N}.$$

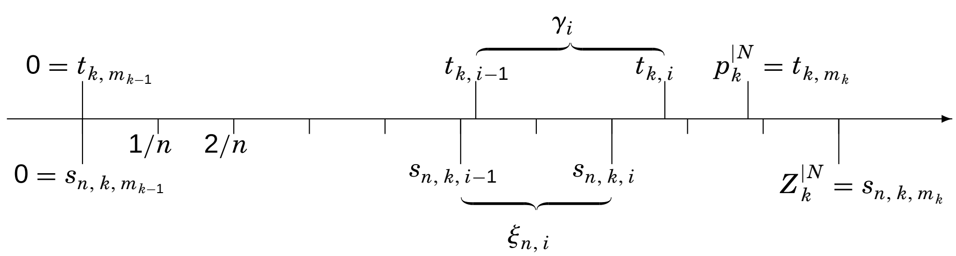
Approchons $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq m_N}$ par une suite d'éléments $(\xi_{n, i})_{1 \leq i \leq m_N}$ de $\mathscr{C}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $k \in \{0, \dots, N\}$ et tout $i \in \{m_{k-1} + 1, \dots, m_k\}$,

$$s_{n, k, i} = \begin{cases} Z_{n, k}^{|N}, & \text{si } i = m_k, \\ \left(\dfrac{1}{n} \langle n t_{k, i} \rangle\right) \wedge Z_{n, k}^{|N}, & \text{si } i < m_k, \end{cases}$$

où $\langle x \rangle = \max\{m \in \mathbb{Z} / m \leq x\}$, puis

$$\xi_{n, i} = s_{n, k, i} - s_{n, k, i-1}$$

comme suggéré par la figure suivante:



Pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, les $s_{n, k, i}$ $(m_{k-1} < i \leq m_k)$ forment une subdivision de l'intervalle $[0, Z_{n, k}^{|N}]$, et par conséquent on a

$$\sum_{m_{k-1} < i \leq m_k} \xi_{n, i} = Z_{n, k}^{|N}, \tag{19}$$

d'où $\sum_{1 \leq i \leq m_N} \xi_{n, i} = \sum_{0 \leq k \leq N} Z_{n, k}^{|N} = 1$, ce qui prouve que $(\xi_{n, i})_{1 \leq i \leq m_N}$ est dans $\mathscr{C}$. De plus on a, pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$ et tout $i \in \{m_{k-1} + 1, \dots, m_k\}$,

$$0 \leq t_{k, i} - s_{n, k, i} \leq \frac{1}{n} \vee |Z_{n, k}^{|N} - p_k^{|N}|$$

et

$$|\gamma_i - \xi_{n, i}| \leq 2\left(\frac{1}{n} \vee |Z_{n, k}^{|N} - p_k^{|N}|\right).$$

Comme $(Z_n)_n$ converge vers p dans l_a^1, il existe un entier $n_0 > 3/\eta$ tel que

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \{0, \dots, N\}, \qquad |Z_{n, k}^{|N} - p_k^{|N}| < \frac{\eta}{3}.$$

On a alors, pour tous $n \geq n_0$ et $i \in \{1, \dots, m_N\}$,

$$|\gamma_i - \xi_{n,i}| < 2\left(\frac{1}{n} \vee \frac{\eta}{3}\right) < \eta$$

donc, dès que $n \geq n_0$, $(\xi_{n,i})_{1 \leq i \leq m_N}$ est dans V et, par conséquent,

$$\left[\sum_{1 \leq i \leq m_N} \xi_{n,i} f_i, \sum_{1 \leq i \leq m_N} \gamma_i f_i\right] < \varepsilon.$$

Pour tout $n \geq n_0$, il existe donc $v_n \in M$ tel que

$$[v_n, c] < \varepsilon \quad \text{et} \quad v_n \in \sum_{1 \leq i \leq m_N} \xi_{n,i} f_i. \tag{20}$$

Par ailleurs, les $\xi_{n,i}$ sont de la forme q/n ($q \in \{0, \dots, nZ_{n,k}^{|N}\}$), d'où, en utilisant (19),

$$\sum_{1 \leq i \leq m_N} \xi_{n,i} f_i = \sum_{\substack{0 \leq k \leq N \\ m_{k-1} \leq i \leq m_k}} \xi_{n,i} e_k \subset \sum_{\substack{0 \leq k \leq N \\ 1 \leq j \leq nZ_{n,k}^{|N}}} \frac{1}{n} e_k. \tag{21}$$

Si l'on note, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$x_i^{|N} = \begin{cases} x_i, & \text{si } x_i \in \{e_0, \dots, e_N\}, \\ e_0, & \text{si } x_i \in D - \{e_0, \dots, e_N\}, \end{cases}$$

on a également

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq N \\ 1 \leq j \leq nZ_{n,k}^{|N}}} \frac{1}{n} e_k = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n} x_i^{|N}$$

et donc, d'après (20) et (21),

$$v_n \in \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n} x_i^{|N}. \tag{22}$$

Évaluons maintenant $[\sum (1/n) x_i^{|N}, \sum (1/n) x_i]$. Considérons, pour n fixé, une partition de $[0,1]$ en intervalles $I_1, \dots, I_n$ de longueur $1/n$, et soit $\mathscr{A}$ la tribu sur $[0,1]$ engendrée par ces intervalles. On munit $([0,1], \mathscr{A})$ de la probabilité λ, restriction à $\mathscr{A}$ de la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Soient U et V les points aléatoires $\mathscr{A}$-mesurables définis par

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \forall \omega \in I_i, \qquad U(\omega) = x_i \quad \text{et} \quad V(\omega) = x_i^{|N}.$$

On a alors $\mathbb{E}U = \sum(1/n)x_i$ et $\mathbb{E}V = \sum(1/n)x_i^{|N}$ (car $\mathscr{A}$ est engendrée par des atomes pour λ), d'où

$$\left[\sum \frac{1}{n}x_i, \sum \frac{1}{n}x_i^{|N}\right] \leq \mathbb{E}[U,V] = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ x_i\notin\{e_0,\dots,e_N\}}} \frac{1}{n}[e_0,x_i]$$

$$= \sum_{\substack{k>N\\ 1\leq i\leq n}} \frac{1}{n} Y_{k,i}[e_0,e_k] = \sum_{k>N} Z_{n,k}[e_0,e_k].$$

Comme $(Z_n)_n$ converge vers p dans $\mathscr{S}$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que

$$n \geq n_1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} |Z_{n,k} - p_k|[e_0,e_k] < \varepsilon$$

d'où, pour $n \geq n_1$,

$$\begin{aligned} \left[\sum \frac{1}{n}x_i, \sum \frac{1}{n}x_i^{|N}\right] &\leq \sum_{k>N} Z_{n,k}[e_0,e_k] \\ &\leq \sum_{k>N} |Z_{n,k}-p_k|[e_0,e_k] + \sum_{k>N} p_k[e_0,e_k] \\ &< 2\varepsilon \quad \text{d'après (16).} \end{aligned} \tag{23}$$

D'après (22) et (23), pour tout $n \geq n_1$, il existe donc un élément u_n de $\sum(1/n)x_i$ tel que

$$[u_n, v_n] < 2\varepsilon$$

d'où, d'après (18) et (20),

$$\rho_n = d\left(a, \sum \frac{1}{n}x_i\right) \leq [a,u_n] \leq [a,c] + [c,v_n] + [v_n,u_n] < \rho + 4\varepsilon$$

ce qui prouve bien l'inégalité (15).

(c) Supposons M à boules fermées compactes. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F_n = \sum_{1\leq i\leq n} (1/n)x_i, \qquad F_n^{|N} = \sum_{1\leq i\leq n} x_i^{|N},$$

$$C^{|N} = \sum_{k\in\mathbb{N}}{}^{*} p_k^{|N} e_k,$$

$$\mathscr{S}^{|N} = \left\{(q_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S} / \forall k > N, q_k = 0\right\}$$

et

$$K^{|N} = \overline{\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}}{}^{*} q_k e_k / (q_k)_k \in \mathscr{S}^{|N}\right\}}.$$

L'ensemble $K^{|N}$ est borné car, pour tout $(q_k) \in \mathscr{S}^{|N}$,

$$\left[\sum_{k\in\mathbb{N}}{}^{*} q_k^{|N} e_k, e_0\right] \leq \sum_{1\leq k\leq N} q_k[e_0,e_k] \leq \sum_{1\leq k\leq N} [e_0,e_k].$$

Donc $K^{|N}$ est compact. Notons encore, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\rho_n^{|N} = d(a, F_n^{|N}) \quad \text{et} \quad \rho^{|N} = d(a, C^{|N}).$$

Comme $(Z_n^{|N})_n$ tend vers $p^{|N}$ dans l_a^1, le résultat (b) prouve que $F_n^{|N} \to^{\text{Wijs}} C^{|N}$, lorsque $n \to \infty$. Or les $F_n^{|N}$ et $C^{|N}$ sont contenus dans $K^{|N}$. Par conséquent $(F_n^{|N})_n$ tend vers $C^{|N}$ pour la convergence au sens de Wijsman dans le compact $K^{|N}$, donc $(F_n^{|N})_n$ tend vers $C^{|N}$ au sens de Hausdorff ([11], Section 3, Proposition 4.1). Or, d'après (23),

$$\left[F_n^{|N}, F_n\right] < 2\varepsilon$$

et, d'après (16) et (17),

$$\left[C^{|N}, C\right] < \varepsilon.$$

Le choix de ε étant arbitraire, on a donc bien

$$F_n \to^{\text{Haus}} C. \qquad \square$$

Théorème ergodique. On supposera ici, sans perdre en généralité, que $(\Omega, \mathscr{A})$ est un espace standard, c'est-à-dire que $\mathscr{A}$ est σ-isomorphe à la tribu borélienne d'un espace polonais ([31], Chapitre 5, Définition 2.2). Notons en effet M^∞ le produit dénombrable d'une suite de copies de M, et $\mathscr{B}^\infty$ la tribu borélienne de M^∞. On peut, dans ce qui suit, se ramener au cas où $(\Omega, \mathscr{A})$ est l'espace standard $(M^\infty, \mathscr{B}^\infty)$, car les résultats à démontrer ne dépendent que de la loi d'une suite (X_n) de points aléatoires de M.

Sous cette hypothèse il existe, pour toute sous-tribu $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$, une version régulière de la probabilité conditionnelle sachant $\mathscr{B}$ ([31], Chapitre 5, Théorème 8.1), c'est-à-dire une application $\omega \mapsto Q_\omega$ telle que (i), pour tout $\omega \in \Omega$, Q_ω soit une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et (ii), pour tout $A \in \mathscr{A}$, l'application $\omega \mapsto Q_\omega(A)$ soit $\mathscr{B}$-mesurable et $\mathbb{P}(A) = \int Q_\omega(A)\, d\mathbb{P}(\omega)$. Si X est un point aléatoire intégrable pour $\mathbb{P}$, X est intégrable pour Q_ω pour presque tout ω, d'après (ii). On définit alors, comme dans [23], l'*espérance conditionnelle* $\mathbb{E}(X/\mathscr{B})$ *de* X *sachant* $\mathscr{B}$ comme étant, pour chaque $\omega \in \Omega$, l'espérance de X pour la probabilité Q_ω:

$$\mathbb{E}(X/\mathscr{B})(\omega) = \int X(\omega')\, dQ_\omega(\omega').$$

Notons $\mu_{X/\mathscr{B}}$ la loi conditionnelle de X sachant $\mathscr{B}$: $\mu_{X/\mathscr{B}}(\omega) = X(Q_\omega)$. On a donc $b(\mu_{X/\mathscr{B}}(\omega)) = \mathbb{E}(X/\mathscr{B})(\omega)$ dès que $\mathscr{A}$ est sans atome pour Q_ω, ou que Q_ω est une masse de Dirac en un point. L'inégalité fondamentale (4) entraîne que, pour tous points aléatoires intégrables X et Y, on a

$$\text{p.s.} \quad [\mathbb{E}(X/\mathscr{B}), \mathbb{E}(Y/\mathscr{B})] \le \mathbb{E}([X, Y]/\mathscr{B})$$

et

$$\text{p.s.} \quad [b(\mu_{X/\mathscr{B}}), b(\mu_{Y/\mathscr{B}})] \le \mathbb{E}([X, Y]/\mathscr{B}). \tag{24}$$

Signalons encore que, d'après la Proposition 1 de [23], l'application $\omega \mapsto \mathbb{E}(X/\mathscr{B})(\omega)$, de Ω vers $\mathscr{F}(M)$, est mesurable pour $\mathscr{B}$ et la tribu borélienne de $(\mathscr{F}(M), [\cdot, \cdot])$. De même, l'application $\omega \mapsto b(\mu_{X/\mathscr{B}}(\omega))$ est mesurable pour ces tribus, car on peut se ramener au cas où, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathscr{A}$ est sans atome pour Q_ω, en remplaçant Ω par $\Omega \times [0, 1]$, $\mathscr{A}$ par $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}_{[0,1]}$, $\mathscr{B}$ par $\mathscr{B} \otimes \mathscr{B}_{[0,1]}$, $\mathbb{P}$ par $\mathbb{P} \otimes \lambda$ et Q_ω par $Q_\omega \otimes \lambda$.

Théorème 3.1 (Théorème ergodique). *Soit (X_n) une suite stationnaire de points aléatoires intégrables de M. Soit $\mathscr{I}$ la tribu des événements invariants par (X_n). Alors*

$$\text{(25)} \qquad \text{p.s.} \quad \sum_{1 \le i \le n}^{*} \frac{1}{n} X_i(\omega) \to^{\text{Haus}} b(\mu_{X_1/\mathscr{I}}(\omega)),$$

$$\text{(26)} \qquad \text{p.s.} \quad \sum_{1 \le i \le n} \frac{1}{n} X_i(\omega) \to^{\text{Wijs}} b(\mu_{X_1/\mathscr{I}}(\omega)).$$

Si, de plus, M est à boules fermées compactes,

$$\text{(27)} \qquad \text{p.s.} \quad \sum_{1 \le i \le n} \frac{1}{n} X_i(\omega) \to^{\text{Haus}} b(\mu_{X_1/\mathscr{I}}(\omega)).$$

Preuve. *Première étape: supposons les X_n à valeurs dans D.* Pour tout $\omega \in \Omega$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$ on note, comme dans le Lemme 3.1,

$$Y_{n,k}(\omega) = \delta_{e_k}(X_n(\omega)),$$
$$Z_{n,k}(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i,k}(\omega) = \frac{1}{n} \text{card} \left\{ i \in \frac{\{1, \dots, n\}}{X_i(\omega)} = e_k \right\},$$

et, pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_n(\omega) = (Y_{n,k}(\omega))_k \in \mathscr{S} \quad \text{et} \quad Z_n(\omega) = (Z_{n,k}(\omega))_k \in \mathscr{S}.$$

Soit $\omega \mapsto Q_\omega$ une version régulière de la probabilité conditionnelle sur Ω sachant $\mathscr{I}$. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{p.s.} \quad \mathbb{E}(Y_{1,k}/\mathscr{I})(\omega) = Q_\omega\{\omega' \in \Omega / X_1(\omega') = e_k\} = \mu_{X_1/\mathscr{I}}(\omega)(e_k)$$

d'où, en particulier,

$$\text{p.s.} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(Y_{1,k}/\mathscr{I})(\omega) = 1.$$

Remarquons également que

$$\text{p.s.} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(Y_{1,k}/\mathscr{I})(\omega)[a, e_k] = \mathbb{E}([a, X_1]/\mathscr{I})(\omega) < +\infty$$

ce qui prouve que $(\mathbb{E}(Y_{1,k}/\mathscr{I})(\omega))_k$ est p.s. dans $\mathscr{S}$. De plus,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}}^{*} \mathbb{E}(Y_{1,k}/\mathscr{I})(\omega) e_k = b(\mu_{X_1/\mathscr{I}}(\omega)).$$

Le processus $(Y_n)_n = (\varphi|_D(X_n))_n$ est stationnaire car, d'après le Lemme 2.3, l'application $\varphi|_D\colon D \to l^1_a$ est mesurable. En outre les Y_n sont intégrables, d'après le même lemme. Le théorème ergodique ponctuel pour des variables aléatoires à valeurs dans un espace de Banach ([31], Chapitre 6, Théorème 9.4 ou [28], Chapitre 4, cas (a) de la démonstration du Théorème 2.1) entraîne donc qu'il existe un élément Ω' de $\mathscr{A}$, de probabilité 1, tel que

$$\forall\omega \in \Omega', \qquad Z_n(\omega) \to^{\mathscr{S}} \mathbb{E}(Y_1/\mathscr{I})(\omega) \quad \text{comme } n \to \infty.$$

D'autre part, par linéarité de l'espérance conditionnelle et des projections $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto Y_k$ de l^1_a dans $\mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}(Y_1/\mathscr{I}) = (\mathbb{E}(Y_{1,k}/\mathscr{I}))_k.$$

Donc, pour tout ω dans Ω', en appliquant le Lemme 2.2,

$$\begin{aligned}&\Big[\sum_{1\le i\le n}{}^{*}\frac{1}{n}X_i(\omega), \mathbb{E}\big(X_1/\mathscr{I}\big)(\omega)\Big]\\ &\quad= \Big[\sum_{k\in\mathbb{N}}{}^{*}Z_{n,k}e_k, \sum_{k\in\mathbb{N}}{}^{*}\mathbb{E}\big(Y_{1,k}/\mathscr{I}\big)(\omega)e_k\Big]\\ &\quad\le \big\|Z_n(\omega) - \mathbb{E}\big(Y_1/\mathscr{I}(\omega)\big)\big\|_a \to 0\end{aligned} \tag{28}$$

ce qui prouve (25). On déduit (26) et (27) du Lemme 3.1 et de (28) en posant, pour tout $\omega \in \Omega'$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$x_n = X_n(\omega) \quad \text{et} \quad p_k = \mathbb{E}(Y_{1,k}/\mathscr{I})(\omega).$$

Deuxième étape: *cas général.* Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, d'après le Lemme 2.1, l'application $\psi^N\colon M \to D$ est mesurable, ce qui entraîne que le processus $(X^N_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\psi^N(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire. De plus, les X^N_n sont intégrables, d'après le même lemme. On a donc, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned}\Big[\sum_{1\le i\le n}{}^{*}\frac{1}{n}X_i(\omega), b(\mu_{X_1/\mathscr{I}}(\omega))\Big] &\le \Big[\sum_{1\le i\le n}{}^{*}\frac{1}{n}X_i(\omega), \sum_{1\le i\le n}{}^{*}\frac{1}{n}X^N_i(\omega)\Big]\\ &\quad+ \Big[\sum_{1\le i\le n}{}^{*}\frac{1}{n}X^N_i(\omega), b(\mu_{X^N_1/\mathscr{I}}(\omega))\Big]\\ &\quad+ \big[b(\mu_{X^N_1/\mathscr{I}}(\omega)), b(\mu_{X_1/\mathscr{I}}(\omega))\big].\end{aligned} \tag{29}$$

Notons respectivement A, B et C les trois termes du membre de droite. Alors, d'après (4),

$$A \le \sum_{1\le i\le n}\frac{1}{n}\big[X_i(\omega), X^N_i(\omega)\big] \le \frac{1}{N},$$

$$\text{p.s.} \quad C \le \mathbb{E}\big(\big[X^N_1, X_1\big]/\mathscr{I}\big)(\omega) \le \frac{1}{N}$$

[d'après (24)] et, d'après la première étape,

$$\text{p.s.} \quad \lim_{n\to\infty} B = 0,$$

d'où, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{p.s.} \quad \limsup_{n\to\infty} \Big[\sum_{1\le i\le n}^{*} \frac{1}{n} X_i(\omega), b(\mu_{X_1/\mathscr{I}}(\omega)) \Big] \le \frac{2}{N}$$

ce qui prouve (25) dans le cas général.

Pour prouver (26), remarquons que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
&\Big| d\Big(a, \sum_{1\le i\le n} \frac{1}{n} X_i(\omega)\Big) - d(a, b(\mu_{X_1/\mathscr{I}}(\omega)))\Big| \\
&\quad \le \Big| d\Big(a, \sum_{1\le i\le n} \frac{1}{n} X_i(\omega)\Big) - d\Big(a, \sum_{1\le i\le n} \frac{1}{n} X_i^N(\omega)\Big)\Big| \\
&\qquad + \Big| d\Big(a, \sum_{1\le i\le n} \frac{1}{n} X_i^N(\omega)\Big) - d(a, b(\mu_{X_1^N/\mathscr{I}}(\omega)))\Big| \\
&\qquad + \big| d(a, b(\mu_{X_1^N/\mathscr{I}}(\omega))) - d(a, b(\mu_{X_1/\mathscr{I}}(\omega)))\big| \\
&\quad \le \frac{2}{N} + \Big| d\Big(a, \sum_{1\le i\le n} \frac{1}{n} X_i^N(\omega)\Big) - d(a, b(\mu_{X_1^N/\mathscr{I}}(\omega)))\Big|
\end{aligned}$$

et le dernier terme tend p.s. vers 0 d'après la première étape.

Enfin, si M est à boules fermées compactes, on prouve (27) par le même calcul que dans (29), en remplaçant $\sum^*_{1\le i\le n}(1/n)X_i$ par $\sum_{1\le i\le n}(1/n)X_i$, car d'après la première étape le terme B tend encore vers 0. □

Loi forte des grands nombres pour des points aléatoires intégrables deux à deux indépendants et de même loi. On obtient ici un résultat analogue au théorème précédent, par une méthode analogue.

THÉORÈME 3.2 (Loi forte des grands nombres à la Etemadi). *Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de points aléatoires intégrables de M deux à deux indépendants et de même loi. Alors*

$$\mathbb{E}X_1 = b(\mu_{X_1}), \tag{30}$$

$$\text{p.s.} \quad \sum_{1\le i\le n}^{*} \frac{1}{n} X_i(\omega) \to^{\text{Haus}} \mathbb{E}X_1 \tag{31}$$

et

$$\text{p.s.} \quad \sum_{1\le i\le n} \frac{1}{n} X_i(\omega) \to^{\text{Wijs}} \mathbb{E}X_1. \tag{32}$$

Si, de plus, M est à boules fermées compactes,

$$\text{p.s.} \quad \sum_{1\le i\le n} \frac{1}{n} X_i(\omega) \to^{\text{Haus}} \mathbb{E}X_1. \tag{33}$$

REMARQUE 3.1. La loi forte des grands nombres obtenue par Herer dans [27] est le résultat (33) dans le cas où M est à boules fermées compactes et où la suite $(X_n)_n$ est indépendante identiquement distribuée (i.i.d.). Herer a prouvé également dans ce cas une réciproque dont la démonstration n'utilise pas l'hypothèse de compacité des boules fermées ([27], Théorème 3.2): *si (X_n) est i.i.d. et s'il existe $F \in \mathscr{F}(M)$ tel que p.s. $\sum^*_{1\le i\le n}(1/n)X_i(\omega)$ converge au sens de Hausdorff vers F, alors X_1 est intégrable et $F = \mathbb{E}(X_1)$.*

Ce dernier résultat s'étend au cas où les X_n sont seulement deux à deux indépendants de même loi, en utilisant, dans la réciproque de la loi forte des grands nombres pour des variables aléatoires réelles, le lemme de Borel–Cantelli pour des événements deux à deux indépendants ([9], Théorème 4.2.5).

PREUVE DU THÉORÈME 3.2. L'égalité (30) provient du fait que si les X_n ne sont pas p.s. constants, alors $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est sans atome. Ce résultat est bien connu dans le cas où (X_n) est i.i.d., et sa démonstration utilise le lemme de Borel–Cantelli. Le même résultat pour des variables deux à deux indépendantes de même loi s'obtient en utilisant la loi du zéro-un pour la limite supérieure d'événements deux à deux indépendants, qui est démontrée dans [9] (corollaire du Théorème 4.2.5).

La preuve de (31), (32) et (33) est semblable à celle du théorème ergodique, en remplaçant la tribu $\mathscr{I}$ par la tribu $\{\Omega, \varnothing\}$ et le théorème ergodique dans les espaces de Banach par la loi des grands nombres d'Etemadi [19]. □

Lois fortes des grands nombres avec des conditions sur les moments.

THÉORÈME 3.3 (Lois fortes des grands nombres à la Beck et Giesy). *Soit $(X_n)_{n\ge 1}$ une suite indépendante de points aléatoires intégrables de M vérifiant l'une des conditions suivantes*:

$$\text{(i)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1\le i\le n} (\mathrm{Var}[a, X_i])^{1/2} = 0 \quad \textit{et} \quad \sum_{n\ge 1} \frac{\mathrm{Var}[a, X_n]}{n^2} < +\infty$$

[*où, pour une variable aléatoire réelle intégrable* f, $\mathrm{Var} f = \mathbb{E}(f - \mathbb{E}f)^2$],

$$\text{(ii)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1\le i\le n} \operatorname{ess\,sup}[a, X_i] = 0.$$

Alors

$$\textit{p.s.} \quad \left[\sum^*_{1\le i\le n} \frac{1}{n} X_i(\omega),\, b\left(\sum_{1\le i\le n} \frac{1}{n} \mu_{X_i} \right) \right] \to 0.$$

REMARQUE 3.2. Beck et Giesy ont montré dans [2] que, dans le cadre des espaces de Banach, les conditions (i) et (ii) ne peuvent pas être affaiblies.

PREUVE DU THÉORÈME 3.3. *Première étape: on suppose les X_n à valeurs dans D.* Les notations $Y_{n,k}$, Y_n, $Z_{n,k}$ et Z_n sont les mêmes que dans la preuve du Théorème 3.1. Notons encore, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$p_{n,k} = \mathbb{P}(X_n = e_k) = \mathbb{E}Y_{n,k},$$
$$q_{n,k} = \mathbb{E}\Big(\sum_{1\le i\le n} \frac{1}{n} Y_{i,k}\Big) = \mathbb{E}\Big(\frac{1}{n}\mathrm{card}\Big\{i \in \frac{\{1,\dots,n\}}{X_i} = e_k\Big\}\Big),$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = (p_{n,k})_k = \varphi(\mu_{X_n}) \quad \text{et} \quad q_n = (q_{n,k})_k = \varphi\Big(\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{n}\mu_{X_i}\Big) = \mathbb{E}Z_n.$$

Examinons la loi forte des grands nombres pour la suite $(Y_n)_n$.

(i) Les Y_n sont indépendants, ont des moments d'ordre deux et vérifient

$$\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{n}(\mathrm{Var}\|Y_i\|_a)^{1/2} \to 0$$

et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\mathrm{Var}\|Y_n\|_a}{n^2} < +\infty$$

donc, d'après le Théorème III.13 de Beck et Giesy [2],

$$\text{p.s.} \quad \|Z_n - q_n\|_a \to 0. \tag{34}$$

(ii) Les Y_n sont indépendants et

$$\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{n}\operatorname{ess\,sup}\|Y_i\|_a \to 0,$$

d'où encore (34) d'après le même théorème de Beck et Giesy.

Dans tous les cas, $(Y_n)_n$ vérifie donc la loi des grands nombres. Or, d'après la définition du symbole $\sum^*$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega$,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}{}^{*} q_{n,k}e_k = b\Big(\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{n}\mu_{X_i}\Big) \quad \text{et} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}}{}^{*} Z_{n,k}(\omega)e_k = \sum_{1\le i\le n}{}^{*}\frac{1}{n}X_i(\omega)$$

d'où p.s.

$$\Big[\sum_{1\le i\le n}{}^{*}\frac{1}{n}X_i(\omega), b\Big(\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{n}\mu_{X_i}\Big)\Big] = \Big[\sum_{k\in\mathbb{N}}{}^{*}Z_{n,k}(\omega)e_k, \sum_{k\in\mathbb{N}}{}^{*}q_{n,k}e_k\Big]$$
$$\le \|Z_n - q_n\|_a \to 0.$$

Deuxième étape: *cas général.* D'après le Lemme 2.1, $(X_n^n)_n = (\psi^n(X_n))_n$ est une suite indépendante de points aléatoires intégrables telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$[b(\mu_{X_n^n}), b(\mu_{X_n})] \le \frac{1}{n}.$$

(i) D'après le Lemme 2.1, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{Var}[a, X_n^n] \leq \frac{2}{n^2} + \mathrm{Var}[a, X_n]$$

d'où

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mathrm{Var}[a, X_n^n]}{n^2} \leq 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} + \sum_{n \geq 1} \frac{\mathrm{Var}[a, X_n]}{n^2} < +\infty$$

et, de plus,

$$(\mathrm{Var}[a, X_n^n])^{1/2} \leq \frac{2^{1/2}}{n} + (\mathrm{Var}[a, X_n])^{1/2},$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} (\mathrm{Var}[a, X_i^i])^{1/2} \\ &\leq \limsup_{n \to \infty} \left(\frac{2^{1/2}}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i} + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} (\mathrm{Var}[a, X_n])^{1/2} \right) = 0. \end{aligned}$$

La suite $(X_n^n)_n$ à valeurs dans D vérifie donc les hypothèses (i) du théorème et, d'après la première étape,

$$\text{p.s.} \quad \left[\sum_{1 \leq i \leq n}^{*} \frac{1}{n} X_i^i(\omega), b\left(\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n} \mu_{X_i^i} \right) \right] \to 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{p.s.} \quad & \left[\sum_{1 \leq i \leq n}^{*} \frac{1}{n} X_i(\omega), b\left(\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n} \mu_{X_i} \right) \right] \\ &\leq \left[\sum_{1 \leq i \leq n}^{*} \frac{1}{n} X_i(\omega), \sum_{1 \leq i \leq n}^{*} \frac{1}{n} X_i^i(\omega) \right] + \left[\sum_{1 \leq i \leq n}^{*} \frac{1}{n} X_i^i(\omega), b\left(\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n} \mu_{X_i^i} \right) \right] \\ &\quad + \left[b\left(\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n} \mu_{X_i^i} \right), b\left(\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n} \mu_{X_i} \right) \right] \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n} [X_i(\omega), X_i^i(\omega)] + \left[\sum_{1 \leq i \leq n}^{*} \frac{1}{n} X_i^i(\omega), b\left(\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n} \mu_{X_i^i} \right) \right] \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n} \mathbb{E}[X_i^i, X_i] \end{aligned}$$

[en appliquant (6) au premier terme et le Lemme 1.1 au troisième]

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i} + \left[\sum_{1 \leq i \leq n}^{*} \frac{1}{n} X_i^i(\omega), b\left(\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n} \mu_{X_i^i} \right) \right] + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i} \\ &\to 0. \end{aligned}$$

(ii) On a

$$\sum_{1\le i\le n} \frac{1}{n} \operatorname{ess\,sup}[a, X_i^i] \le \frac{1}{n} \sum_{1\le i\le n} \left(\operatorname{ess\,sup}[a, X_i] + \frac{1}{i} \right) \to 0.$$

Le même raisonnement que pour (i) s'applique donc. □

4. Loi forte des grands nombres à la Cuesta et Matrán. Cuesta et Matrán ont prouvé de deux manières différentes, dans [12] et [13], une loi forte des grands nombres très générale pour des éléments aléatoires d'un espace de Banach séparable. Chacune de leurs deux méthodes s'adapte au cas de points aléatoires de M, moyennant quelques changements mineurs, dont le principal est le remplacement de $\|x\|$ par $[a, x]\ldots$. La première méthode utilise une généralisation par Blackwell et Dubins [5] du théorème de Skorohod, tandis que la deuxième fait appel aux propriétés de la distance de Lévy–Wasserstein sur l'espace $\mathbb{P}^1(M)$, définie, pour μ et ν dans $\mathbb{P}^1(M)$, par

$$d(\mu, \nu) = \inf\{\mathbb{E}[X, Y]/X \text{ de loi } \mu, Y \text{ de loi } \nu\}.$$

Les propriétés de d utilisées dans [13] sont démontrées dans le cadre des espaces métriques par Rachev dans [33]. Remarquons que l'inégalité fondamentale (4) qui permet de définir l'espérance au sens de Herer entraîne que l'application $\mu \mapsto b(\mu)$ de $\mathbb{P}^1(M)$ dans $\mathscr{F}(M)$ est uniformément continue.

Notons ici que la preuve de Blackwell et Dubins [5] comporte une faille, signalée dans [14], mais qui n'a aucune incidence sur la démonstration de [12]. En effet, pour tout $a \in A$, avec les notations de [5], la variable $\rho^*(J_a(m), \cdot)$ a pour loi $J_a(m) = c_a(m)$. Donc $\rho^*(J_a(m), v)$ est dans $c_a(X)$ pour tout (a, v) en dehors d'un négligeable de (U, λ) qui dépend de m, disons N_m. Examinons le point (D) de la démonstration. Si une suite généralisée $(m_i)_{i\in I}$ tend vers m pour la convergence étroite dans $M(X)$, les représentations $\rho_{m_i}(a, v)$ ne tendent pas nécessairement vers $\rho_m(a, v)$ lorsque (a, v) appartient à $\bigcup_{i\in I} N_{m_i}$. La convergence presque sûre n'est donc obtenue que pour I dénombrable, ce qui est tout de même un peu plus que le théorème classique de Skorohod, et suffit pour démontrer la loi des grands nombres par la méthode de [12].

Une preuve complète du théorème de Blackwell et Dubins a été donnée par Fernique [20], par une méthode différente. Par ailleurs, Rachev, Rüschendorf et Schief [34, 35] et Dudley [17] ont obtenu un théorème de représentation de Skorohod pour des suites de lois de probabilités équivalentes pour une distance qui métrise la convergence étroite ou la convergence en probabilité.

THÉORÈME 4.1 (Loi forte des grands nombres à la Cuesta et Matrán). *Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de points aléatoires intégrables. On suppose que les trois conditions suivantes sont réalisées.*

(i) *La suite $(\sum_{1\le i\le n}(1/n)\mu_{X_i})_n$ est tendue.*

(ii) *La suite $([a, X_n])_n$ vérifie la loi forte des grands nombres*:

$$\text{p.s.} \quad \sum_{1\le i\le n} \frac{1}{n}[a, X_i(\omega)] \to 0.$$

(iii) *L'application* $x \mapsto [a, x]$ *est uniformément intégrable par rapport à* $(\sum_{1 \leq i \leq n}(1/n)\mu_{X_i})_n$.

Alors

$$p.s. \quad \left[\sum_{1 \leq i \leq n}^{*} \frac{1}{n} X_i(\omega), b\left(\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n}\mu_{X_i} \right) \right] \to 0.$$

PREUVE. Analogue à celle de [12], ou bien à celle de [13]. □

Soit $(X_n)_n$ une suite de points aléatoires. Nous dirons que $(X_n)_n$ est *tendue* si $(\mu_{X_n})_n$ l'est. La suite $(X_n)_n$ sera dite *uniformément intégrable* si $([a, X_n])_n$ l'est par rapport à $\mathbb{P}$.

COROLLAIRE 4.2 (Adaptation du Corollaire 4 de [12]). *Soit* $(X_n)_{n \geq 1}$ *une suite tendue et uniformément intégrable de points aléatoires deux à deux indépendants vérifiant*, *pour un certain* $p > 1$,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}[a, X_n]^p}{n^p} < +\infty.$$

Alors

$$p.s. \quad \left[\sum_{1 \leq i \leq n}^{*} \frac{1}{n} X_i(\omega), b\left(\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n}\mu_{X_i} \right) \right] \to 0.$$

REMARQUE 4.1. Pour démontrer le Corollaire 4.2, on peut se ramener au résultat analogue dans le cadre des espaces de Banach, par la même méthode que dans la Section 3, en choisissant un ensemble D particulier. En effet, la suite $(X_n)_n$ étant tendue, il existe une suite $(K_s)_{s \in \mathbb{N}^*}$ de compacts de M telle que, pour tout n et pour tout s dans $\mathbb{N}^*$, on ait

$$\mathbb{P}(X_n \notin K_s) < \frac{1}{s}.$$

Choisissons l'ensemble $D = \{e_{s,k}/s \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}\}$ de sorte que, pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, $\{e_{s,k}/k \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans K_s. Pour chaque $x \in \bigcup_{s \in \mathbb{N}^*} K_s$ et pour chaque $N \in \mathbb{N}^*$, posons

$$s(x) = \min\{s \in \mathbb{N}^*/x \in K_s\},$$
$$k^N(x) = \min\left\{k \in \mathbb{N}/[x, e_{s(x),k}] < \frac{1}{N}\right\}$$

[donc $(s(x), k^N(x))$ est le plus petit élément, pour l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, de $\{(r, k)/x \in K_r \cap B(e_{r,k}, 1/N[\}]$. Pour tout $s \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe, par compacité de K_s, un entier k_s^N tel que

$$K_s \subset \bigcup_{0 \leq k \leq k_s^N} B\left(e_{s,k}, \frac{1}{N}\right[.$$

Si $x \in K_s$, on a donc

$$s(x) \leq s \quad \text{et} \quad k^N(x) \leq k_{s(x)}^N. \tag{35}$$

Nous pouvons définir l'application $\psi^N \colon \bigcup_{s\in\mathbb{N}^*} K_s \to D$ par

$$\psi^N(x) = x^N = e_{(s(x),\, k^N(x))}.$$

Pour tout $x \in \bigcup_{s\in\mathbb{N}^*} K_s$, on a donc $[x, x^N] < 1/N$. De plus, d'après (35), pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\psi^N(K_s)$ est contenu dans l'ensemble fini

$$D_s^N = \left\{e_{r,\,k}/r \leq s \quad \text{et} \quad k \leq k_r^N\right\}.$$

En réindexant les éléments de D par les entiers naturels, on peut conserver la définition de l_a^1 et de l'application $\varphi \colon \mathbb{P}^1(D) \to l_a^1$. Il est tout aussi simple de poser

$$l_a^1 = \left\{(p_{s,\,k}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}} \Big/ \sum_{(s,\,k)} |p_{s,\,k}|[a, e_{s,\,k}] < +\infty\right\}$$

et, pour $\mu \in \mathbb{P}^1(D)$,

$$\varphi(\mu) = \left(\mu\{e_{s,\,k}\}\right)_{(s,\,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}.$$

Dans les deux cas, l'ensemble $\varphi(D_s^N)$ est une partie finie, donc compacte, de l_a^1, et on a, par définition de $(K_s)_s$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}\big(\varphi(X_n^N) \notin \varphi(D_s^N)\big) \leq \mathbb{P}\big(X_n^N \notin D_s^N\big) \leq P(X_n \notin K_s) \leq \frac{1}{s}$$

donc la suite $(Y_n^N)_n = (\varphi(X_n^N))_n$ est tendue.

Par ailleurs, $(Y_n^N)_n$ est uniformément intégrable, car, pour $R \geq 1/N$,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\{\|Y_n^N\|_a > R\}} \|Y_n^N\|_a \, d\mathbb{P} \\
&= \int_{\{[a,\, X_n^N] > R\}} \big[a, X_n^N\big] \, d\mathbb{P} \quad \left(\text{car } \big[a, X_n^N\big] = \|\varphi(X_n^N)\|_a\right) \\
&\leq \int_{\{[a,\, X_n] > R-1/N\}} \big[a, X_n\big] + \frac{1}{N} \, d\mathbb{P} \\
&\leq \int_{\{[a,\, X_n] > R-1/N\}} 2\big[a, X_n\big] \, d\mathbb{P} \quad \left(\text{dès que } R - \frac{1}{N} > \frac{1}{N}\right) \\
&\to 0, \quad \text{lorsque } R \to +\infty \text{ [car la suite } (X_n)_n \text{ est tendue].}
\end{aligned}$$

Enfin $(Y_n^N)_n$ vérifie la même condition sur les moments que $(X_n)_n$, car

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathbb{E}\|Y_n^N\|_a{}^p}{n^p} &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathbb{E}[a, X_n^N]^p}{n^p} \\
&\leq 2^{p-1}\frac{1}{N^p} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^p} + 2^{p-1} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathbb{E}[a, X_n]^p}{n^p} \\
&\qquad\qquad \text{(d'après le Lemme 2.1)} \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

La suite $(Y_n^N)_n$ vérifie donc, d'après [12] (Corollaire 4),

$$\text{p.s.} \quad \left\| \sum_{1\le i\le n} \frac{1}{n}\big(Y_i^N(\omega) - \mathbb{E}Y_i^N\big)\right\|_a \to 0, \quad \text{lorsque } n\to\infty.$$

On conclut en utilisant

$$\begin{aligned}
&\bigg[{\sum_{1\le i\le n}}^{*} \frac{1}{n} X_i^N(\omega), b\bigg(\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{n}\mu_{X_i^N}\bigg)\bigg] \\
&\quad = \bigg[{\sum_{k\in\mathbb{N}}}^{*} \bigg(\frac{1}{N}\sum_{1\le i\le n} Y_{i,k}^N(\omega)\bigg)e_k, {\sum_{k\in\mathbb{N}}}^{*}\bigg(\frac{1}{N}\sum_{1\le i\le n}\mathbb{E}Y_{i,k}^N\bigg)e_k\bigg] \\
&\qquad\qquad \text{(ici on a réindexé les éléments de } D \text{ par les entiers naturels)} \\
&\quad \le \left\|\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{n}\Big(Y_i^N(\omega) - \mathbb{E}Y_i^N\Big)\right\|_a \quad \text{(d'après le Lemme 2.2)},
\end{aligned}$$

puis, d'après (6),

$$\bigg[{\sum_{1\le i\le n}}^{*}\frac{1}{n}X_i(\omega), {\sum_{1\le i\le n}}^{*}\frac{1}{n}X_i^N(\omega)\bigg] \le \sum_{1\le i\le n}\frac{1}{n}[X_i, X_i^N] \le \frac{1}{N},$$

et, d'après le Lemme 1.1,

$$\bigg[b\bigg(\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{n}\mu_{X_i^N}\bigg), b\bigg(\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{n}\mu_{X_i}\bigg)\bigg] \le \sum_{1\le i\le n}\frac{1}{n}\mathbb{E}[X_i^N, X_i] \le \frac{1}{N}.$$

Remerciements. Je remercie un referee anonyme pour ses remarques constructives, notamment pour avoir détecté une erreur dans la démonstration de la Proposition 2.1 et fourni l'exemple de la Remarque 2.1.

REFERENCES

[1] Andalafte, E. Z., Valentine, J. E. and Wayment, S. G. (1979). Triangle median properties which characterize Banach spaces. *Houston J. Math.* 5 307–312.
[2] Beck, A. and Giesy, D. P. (1970). P-uniform convergence and a vector-valued strong law of large numbers. *Trans. Amer. Math. Soc.* 147 541–559.
[3] Beer, G. (1994). Wijsman convergence: a survey. *Set Valued Analysis* 2 77–94.
[4] Beneš, V. E. (1962). Martingales on metric spaces. *Teor. Veroyatnost. i Primenen*. 7 82–83.
[5] Blackwell, D. and Dubins, L. E. (1983). An extension of Skorohod's almost sure representation theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.* 89 691–692.
[6] Bru, B., Heinich, H. and Lootgieter, J. C. (1993). Distances de Lévy et extensions des théorèmes de la limite centrale et de Glivenko–Cantelli. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* 37 29–42.
[7] Busemann, H. (1948). Spaces with non-positive curvature. *Acta Math.* 80 259–310.
[8] Busemann, H. (1955). *Theory of Geodesics*. Academic Press, New York.
[9] Chung, K. L. (1974). *A Course in Probability Theory*, 2nd ed. Academic Press, New York.
[10] Clarkson, J. A. (1936). Uniformly convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 40 396–414.
[11] Cornet, B. (1973). Topologies sur les fermés d'un espace métrique. Thèse de 3ème cycle, Cahiers de Mathématiques de la Décision 7309, Univ. Paris-Dauphine, Paris.

[12] CUESTA, J. A. and MATRÁN, C. (1988). Strong convergence of weighted sums of random elements through the equivalence of sequences of distributions. *J. Multivariate Anal.* 25 311–322.

[13] CUESTA, J. A. and MATRÁN, C. (1992). A review on strong convergence of weighted sums of random elements based on Wasserstein metrics. *J. Statist. Plann. Inference* 30 359–370.

[14] DELLACHERIE, C. and MEYER, P. A. (1996). Probabilités et potentiel. Unpublished. Version définitive to appear.

[15] DOSS, S. (1949). Sur la moyenne d'un élément aléatoire dans un espace distancié. *Bull. Sci. Math.* (*2*) 73 1–26.

[16] DOSS, S. (1962). Moyennes conditionnelles et martingales dans un espace métrique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 254 3630–3632.

[17] DUDLEY, R. M. (1989). *Real Analysis and Probability*. Wadsworth and Brooks/Cole, Pacific Grove, CA.

[18] ÉMERY, M. and MOKOBODZKI, G. (1991). Sur le barycentre d'une probabilité dans une variété. *Séminaire de Probabilités XXV*. *Lecture Notes in Math.* 1485 220–233. Springer, Berlin.

[19] ETEMADI, N. (1981). An elementary proof of the strong law of large numbers. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 55 119–122.

[20] FERNIQUE, X. (1988). Un modèle presque sûr pour la convergence en loi. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 306 335–338.

[21] FRÉCHET, M. (1948). Les éléments aléatoires de nature quelconque. *Ann. Inst. H. Poincaré* 14 215–310.

[22] GROMOV, M. (1975). *Structures Métriques pour les Variétés Riemanniennes*. Cedic, Paris.

[23] HERER, W. (1988). Martingales à valeurs fermées bornées d'un espace métrique à courbure négative. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* 307 997–1000.

[24] HERER, W. (1983). Espérance mathématique au sens de Doss d'une variable aléatoire à valeurs dans un espace métrique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 302 131–134.

[25] HERER, W. (1988). Espérance mathématique d'une variable aléatoire à valeurs dans un espace métrique à courbure négative. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 306 681–684.

[26] HERER, W. (1990). Mathematical expectation and martingales of random subsets of a metric space. *Probab. Math. Statist.* 11 291–304.

[27] HERER, W. (1992). Mathematical expectation and strong law of large numbers for random variables with values in a metric space of negative curvature. *Probab. Math. Statist.* 13 59–70.

[28] KRENGEL, U. (1985). *Ergodic Theorems*. de Gruyter, Berlin.

[29] KURATOWSKI, K. (1966) (1968). *Topology* 1 and 2. Academic Press, New York.

[30] MENGER, K. (1928). Untersuchungen über allgemeine Metrik. *Math. Ann.* 100 75–163.

[31] PARTHASARATHY, K. R. (1967). *Probability Measures on Metric Spaces*. Academic Press, New York.

[32] PICARD, J. (1994). Barycentres et martingales sur une variété. *Ann. Inst. H. Poincaré* 30 647–702.

[33] RACHEV, S. T. (1982). Minimal metrics in the random variables space. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* 27 27–47.

[34] RACHEV, S. T., RÜSCHENDORFF, L. and SCHIEF, A. (1988). On the construction of almost surely convergent random variables. *Angewandte Mathematik und Informatik* 10.

[35] RACHEV, S. T., RÜSCHENDORFF, L. and SCHIEF, A. (1992). Uniformities for the convergence in law and in probability. *J. Theoret. Probab.* 5 33–44.

UNIVERSITÉ DE ROUEN
UFR DES SCIENCES-MATHÉMATIQUES
URA CNRS 1378 SITE COLBERT
76 821 MONT SAINT AIGNAN CEDEX
FRANCE
E-MAIL: raynaud@univ-rouen.fr