The Annals of Applied Probability
1996, Vol. 6, No. 4, 1112–1156

SUR LES PROBLÈMES DE SORTIE DISCRETS INHOMOGÈNES

BY LAURENT MICLO

Université Paul Sabatier de Toulouse

Let $(X^{(t)})_{t\geq 0}$ be a family of inhomogeneous Markov processes on a finite set M, whose jump intensities at the time $s \geq 0$ are given by $\exp(-\beta_s^{(t)} V(x, y))q(x, y)$ for all $x \neq y \in M$, where the evolutions of the inverse of the temperature $\mathbb{R}_+ \ni s \mapsto \beta_s^{(t)} \in \mathbb{R}_+$ take in some ways greater and greater values with t. We study by using semigroup techniques the asymptotic behavior of the couple consisting of the renormalized exit time and exit position from sets which are a little more general than the cycles associated with the cost function V. We obtain a general criterion for weak convergence, for which we describe explicitly the limit law. Then we are interested in the particular case of evolution families satisfying $\forall\ t, s \geq 0$, $\beta_s^{(t)} = \beta_{t+s}^{(0)}$, for which we show there are only three kinds of limit laws for the renormalized exit time (this is relevant for the limit theorems satisfied by renormalized occupation times of generalized simulated annealing algorithms, but this point will not be developed here).

Soit $(X^{(t)})_{t\geq 0}$ une famille de processus de Markov inhomogènes sur un ensemble fini M dont les intensités de sauts à l'instant $s \geq 0$ sont de la forme $\exp(-\beta_s^{(t)} V(x, y))q(x, y)$ pour tous $x \neq y \in M$, où les évolutions de l'inverse de la température $\mathbb{R}_+ \ni s \mapsto \beta_s^{(t)} \in \mathbb{R}_+$ ont tendance à prendre des valeurs de plus en plus élevées avec t grand. On étudie par des techniques de semi-groupes, le comportement asymptotique pour t grand du couple de sortie (constitué du temps de sortie convenablement renormalisé et de la position de sortie) d'ensembles un peu plus généraux que les cycles associés à la fonction de coût V. On obtient notamment des critères généraux de convergence étroite pour lesquels on décrit explicitement la loi limite. On s'intéresse ensuite plus particulièrement aux familles d'évolutions se déduisant par translations d'une évolution donnée (i.e. satisfaisant $\forall\ t, s \geq 0$, $\beta_s^{(t)} = \beta_{t+s}^{(0)}$, et qui apparaissent naturellement lors de l'étude des théorèmes limites satisfaits par les temps d'occupations renormalisés des algorithmes de recuit simulé généralisés, mais ceci ne sera que bièvement mentionné ici), en montrant que pour celles-ci il n'a que trois formes possibles de lois limites des temps de sortie renormalisés.

1. Introduction. Les problèmes de sortie constituent en général une étape cruciale de l'étude des processus stochastiques admettant une température évanescente, comme les algorithmes de recuit simulé. Notre but est de montrer comment des techniques de semi-groupes permettent de résoudre de manière relativement explicite des problèmes de sortie discrets généraux. Nous simplifions ainsi nos résultats de [18] et les étendons au cas non instantanément réversible et à des évolutions de température plus générales.

Received March 1995; revised March 1996.

AMS 1991 *subject classifications*. Primary 60J05; secondary 60J35, 60F10.

Key words and phrases. Inhomogeneous Markov processes at vanishing temperature, estimation of resolvants, compensators of exit times, exit problem for families of cooling schedules (and for the shifts of a schedule).

Commençons d'ailleurs par préciser quel sera notre cadre. Soit (G, g) un graphe fini irréductible: G est un ensemble fini et $g = (g(x, y))_{(x,y)\in G^*}$ est une famille de réels positifs indexée par $G^* = \{(x, y) \in G \times G / x \neq y\}$, telle que pour tout $(x, y) \in G^*$, il existe au moins une famille $p = (p(i))_{1\le i\le n}$ d'éléments distincts de G satisfaisant $p(1) = x$, $p(n) = y$ et $g(p(i), p(i+1)) > 0$, pour tout $1 \le i < n$ (une telle famille sera appelée un chemin allant de x à y). On ne supposera notamment pas que g est normalisé en un noyau de probabilités de transition, car cela n'aurait pas été naturel pour ce qui suit.

Soit également une famille $V = (V(x, y))_{(x,y)\in G^*}$ d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$, telle que $\min_{(x,y)\in G^*} V(x, y) = 0$ et telle que

$$\forall\ (x, y) \in G^*, \qquad V(x, y) = +\infty \iff g(x, y) = 0$$

[une telle famille sera appelée une fonction de coût compatible avec (G, g)].

Pour tout $\beta \ge 0$ fixé (qui représentera l'inverse de la température), on peut alors associer aux données précédentes un opérateur L_β^G agissant sur l'ensemble des fonctions réelles définies sur G [noté $F(G)$ dans la suite] par

$$\forall\ \phi \in F(G),\ \forall\ x \in G, \qquad L_\beta^G \phi(x) = \sum_{y\neq x} (\phi(y) - \phi(x)) g_\beta(x, y)$$

avec

$$\forall\ (x, y) \in G^*, \qquad g_\beta(x, y) = \exp(-\beta V(x, y)) g(x, y).$$

Si de plus, on se donne une probabilité m sur G et une fonction continue β: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, il est bien connu qu'il existe un unique (en loi) processus $Z = (Z_s)_{s\ge 0}$ de Markov (càdlàg) à valeurs dans G dont la loi initiale est m et dont le générateur à tout instant $s \ge 0$ est $L_{\beta_s}^G$. Ce processus (alors inhomogène) est appelé un algorithme de recuit simulé généralisé, si la température tend à s'annuler en temps grand:

$$\lim_{s\to+\infty} \beta_s = +\infty.$$

Les algorithmes de recuit simulé classiques, qui ont été introduits par Kirkpatrick, Gelatt et Vecchi [14] pour résoudre stochastiquement des problèmes d'optimisation et qui ont été ensuite beaucoup étudiés (cf. [8], [9], [11], [12], [3], [7], [2], [10], [4], [17] et [18] et les références que contiennent ces articles), correspondent à la sous-classe des processus précédents pour lesquels on suppose que g est réversible par rapport à une certaine mesure sur G et qu'il existe un potentiel a priori $U \in F(G)$ tel que pour tous $x \neq y$ satisfaisant $g(x, y) > 0$, on ait

$$V(x, y) = (U(y) - U(x))_+.$$

Les algorithmes de recuit simulé généralisés ont ensuite été considérés par Hwang et Sheu [13] (voir aussi [16] et [23]) et apparaissent notamment quand on essaye de paralléliser des algorithmes de recuit classiques (une classe intermédiaire de processus a été introduite par Hajek [11], qui permet de garder pour la description des cycles le bénéfice d'un potentiel a priori).

Nous n'allons pas étudier ici ces processus, mais présenter une nouvelle approche pour obtenir certains résultats concernant l'un des outils les plus utilisés pour la compréhension de leur comportement, les problèmes de sortie discrets (ainsi par exemple dans [18], on en a eu besoin pour obtenir certains des théorèmes limites satisfaits par des renormalisations des temps d'occupation des algorithmes de recuit classiques). Ceux-ci consistent à s'intéresser aux temps et positions de sortie par ces algorithmes de certaines parties de l'espace des phases, appelés des cycles, en suivant la terminologie introduite par Freidlin et Wentzell [6]. Ainsi, plutôt que de considérer un processus qui se promène sur G, on va en étudier un qui peut en sortir par certains points: soit $x_1, \dots, x_l$ des éléments de G (non nécessairement distincts) et $y_1, \dots, y_l$ des éléments (distincts) n'appartenant pas à G, on s'intéressera en fait à l'ensemble $M = G \sqcup \{y_1, \dots, y_l\}$, muni d'une famille d'intensités de transition q telle que

$$\forall\ (x, y) \in M^*, \qquad \begin{cases} q(x, y) = g(x, y), & \text{si } (x, y) \in G^*, \\ q(x, y) > 0, & \text{si } x = x_i \text{ et } y = y_i, \text{ avec } 1 \le i \le l, \\ q(x, y) = 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

et d'une fonction de coût W compatible avec (M, q) telle que

$$\forall\ (x, y) \in G^*, \qquad W(x, y) = V(x, y)$$

(et plus précisément, on imposera aussi à W d'être choisie de telle manière que G soit une cellule dans M, qui est un type d'ensemble légèrement plus général que la notion de cycle dans M).

Les points $x_1, \dots, x_l$ seront donc les portes de sortie de G et les sorties proprement dites seront représentées les $y_1, \dots, y_l$. Le fait qu'à chaque sortie ne corresponde qu'une seule porte n'est pas vraiment une restriction (quitte à éclater d'abord chacune des sorties y_i en un nombre n_i de points, avec $n_i = \operatorname{card}\{x \in G \,/\, q(x, y_i) > 0\}$, à appliquer le résultat obtenu dans ce nouveau cadre, puis à regrouper les sorties, comme nous l'avons déjà fait dans [18]), mais va faciliter les notations.

On note pour tout $\beta \ge 0$, q_β le noyau d'intensités de transition donné par

$$\forall\ (x, y) \in M^*, \qquad q_\beta(x, y) = \exp(-\beta W(x, y)) q(x, y)$$

à qui on associe comme précédemment un opérateur L_β^M agissant sur $F(M)$. Ainsi, avec la donnée supplémentaire d'une probabilité m sur M et d'une évolution continue β: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, on peut à nouveau construire un processus $X = (X_s)_{s\ge 0}$ de Markov (càdlàg) à valeurs dans M, dont la loi initiale est m et dont le générateur à tout instant $s \ge 0$ est $L_{\beta_s}^M$. En fait, on disposera plutôt d'une famille $(m^{(t)})_{t\ge 0}$ de probabilités sur M et d'une famille d'évolutions continues $(\beta^{(t)})_{t\ge 0}$, ce qui permettra de considérer toute une famille $(X^{(t)})_{t\ge 0}$ de processus de Markov.

Le premier objet qui nous intéresse est le temps de sortie de G:

$$T^{(t)} = \inf\{s \ge 0 \,/\, X^{(t)} \notin G\}.$$

Pour nous permettre également de considérer la position de sortie, on introduit un nouveau point $y_0 \notin M$, et on définit:

$$Y^{(t)} = \begin{cases} X^{(t)}_{T^{(t)}} \in \{y_1, \ldots, y_l\}, & \text{si } T^{(t)} < +\infty, \\ y_0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On supposera typiquement que toutes les probabilités $m^{(t)}$ sont portées par G et que plus le paramètre t est grand, plus l'évolution $\beta^{(t)}$ prend d'une certaine manière des valeurs élevées, et on étudiera le comportement en loi asymptotique du couple $(\widehat{T}^{(t)}, Y^{(t)})$, où $\widehat{T}^{(t)}$ est une bonne renormalisation de $T^{(t)}$.

Ce type de problème de sortie a surtout été étudié par le biais de calculs de grandes déviations tels qu'ils ont été développés notamment par Freidlin et Wentzell [6], Catoni [2] et Trouvé [23] (mais voir aussi [15], qui propose une autre approche spectrale dans des situations réversibles continues): heuristiquement, plus les valeurs prises par l'évolution $\beta^{(t)}$ sont grandes, plus le processus $X^{(t)}$ a tendance à suivre le processus $X^{(\infty)}$ (parfois déterministe) que l'on obtient en prenant $\beta \equiv +\infty$, les probabilités de déviations par rapport à ces trajectoires étant (dumoins pour des fonctionnelles qui n'utilisent que les positions en des temps bornés) d'un ordre exponentiellement petit qui est donné par une certaine fonctionnelle d'action, ce qui permet sous de bonnes conditions de montrer que le processus est d'abord "bien mélangeant" dans G avant d'en sortir. Cependant, notre intention est de retrouver ce phénomène directement par des techniques de semi-groupes, qui semblent peut-être plus indiquées pour traiter des problèmes en temps long, et d'en déduire des convergences étroites du couple de sortie, avec des preuves permettant d'estimer la vitesse de convergence.

Les résultats centraux sont le Théorème 1 et la Proposition 5, et le plan de l'article est le suivant: dans la prochaine section, on fera quelques rappels sur la vitesse de convergence des processus homogènes et on déduira dans la section 3 des majorations relativement précises à basse température de la norme uniforme de certains potentiels associés aux générateurs. Ces estimations auront fait apparaître des quantités qui permettront dans la section 4 de donner la définition d'une cellule, et sous de bonnes conditions sur les évolutions $\beta^{(t)}$, on décrira le comportement du couple de sortie. On terminera cette section par des précisions sur ce résultat, notamment sur les types de convergences plus fortes que l'on peut obtenir et sur le cas des chaînes de Markov à temps discret. On verra aussi que toute probabilité sur $\overline{\mathbb{R}_+}$ peut être atteinte (pour un bon choix des évolutions $\beta^{(t)}$) comme loi limite de temps de sortie renormalisés. Mais dans la section 5, on se restreindra aux familles d'évolutions qui s'obtiennent par translations à partir d'une évolution donnée, et il apparaît alors que les lois limites des temps de sortie renormalisés ne peuvent prendre que trois formes; les probabilité portées par $\{0, +\infty\}$, les lois exponentielles ou une certaine famille de probabilités sur $\mathbb{R}_+$ qui n'ont pas des moments de tous ordres.

Enfin précisons que diverses applications des résultats présentés ici ont fait l'objet d'un autre article [19].

2. Convergence des processus homogènes. Le but de cette section est de rappeler quelques résultats classiques sur les processus Z à valeurs dans G qui ont été présentés dans l'introduction, pour lesquels on suppose que la température est constante;

$$\exists\ \beta \geq 0/\forall\ s \geq 0, \qquad \beta_s = \beta.$$

Notons pour $s \geq 0$, m_s la loi de Z_s, il est bien connu qu'elle converge en temps grand vers μ_β, l'unique probabilité invariante associée à l'opérateur L_β^G. Un moyen simple d'obtenir cette convergence est d'utiliser l'entropie par rapport à μ_β, qui à toute probabilité m sur G associe le nombre

$$I(m, \mu_\beta) = \sum_{x\in G} \ln\left(\frac{m(x)}{\mu_\beta(x)}\right) m(x).$$

Le premier avantage de cette quantité est qu'elle permet de majorer la variation totale de la différence entre m et μ_β:

$$\left\| m - \mu_\beta \right\|_{\mathrm{vt}} \leq \sqrt{2}\sqrt{I(m, \mu_\beta)}$$

(voir par exemple l'équation (1.12), page 199, de [22]).

Son second intérêt est qu'il est facile de calculer l'évolution temporelle de $s \mapsto I(m_s, \mu_\beta)$. En effet, du fait de l'irréductibilité du graphe, on remarque que pour tout $s > 0$ et tout $x \in G$, $m_s(x) > 0$, ce qui permet de voir que pour tout $s > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} I(m_s, \mu_\beta) &= \sum_{x\in G} \ln\left(\frac{m_s(x)}{\mu_\beta(x)}\right)\frac{d}{ds} m_s(x) + \sum_{x\in G} \frac{d}{ds} m_s(x) \\ &= \sum_{x\in G} \ln(f_s(x)) \frac{d}{ds} m_s(x) \end{aligned}$$

[où on a posé $f_s(x) = m_s(x)/\mu_\beta(x)$]

$$\begin{aligned} &= \sum_{x\in G} L_\beta^G(\ln f_s)(x)\, m_s(x) \\ &= 2\sum_{x\in G} L_\beta^G\big(\ln\sqrt{f_s}\,\big)(x)\, m_s(x). \end{aligned}$$

Cependant, notons que pour toute application φ: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ convexe et de classe C^1, et pour toute fonction $f \in F(G)$ strictement positive, on a

$$\forall\ x \in G, \qquad L_\beta^G(\varphi \circ f)(x) \geq \varphi'(f(x)) L_\beta^G f(x)$$

inégalité qui découle ici immédiatement du fait que pour tout $(x, y) \in G^*$, on a

$$\varphi(f(y)) - \varphi(f(x)) \geq \varphi'(f(x))(f(y) - f(x))$$

[mais voir aussi [1], équation (2.6)].

En appliquant ceci avec l'application convexe $\varphi(\cdot) = -\ln(\cdot)$ et la fonction $f = \sqrt{f_s}$, on obtient alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} I(m_s, \mu_\beta) &\leq 2 \sum_{x\in G} \frac{1}{\sqrt{f_s(x)}} L^G_\beta(\sqrt{f_s})(x)\, m_s(x)\\ &= 2 \sum_{x\in G} \sqrt{f_s(x)} L^G_\beta(\sqrt{f_s})(x)\, \mu_\beta(x)\\ &= 2 \sum_{x,y\in G} \alpha_\beta(x,y)\sqrt{f_s(x)}\big(\sqrt{f_s(y)} - \sqrt{f_s(x)}\big)\end{aligned}$$

avec pour tous x, $y \in G$,

$$\alpha_\beta(x,y) = \begin{cases} \mu_\beta(x) g_\beta(x,y), & \text{si } (x,y) \in G^*,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Cependant, l'invariance de μ_β par rapport à L^G_β s'exprime par les relations

$$\forall\ x \in G, \qquad \sum_{y\in G} \alpha_\beta(x,y) = \sum_{y\in G} \alpha_\beta(y,x)$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}&\sum_{x,\,y\in G} \alpha_\beta(x,y)\sqrt{f_s(x)}\big(\sqrt{f_s(y)} - \sqrt{f_s(x)}\big)\\ &\quad= \sum_{x,\,y\in G} \alpha_\beta(x,y)\sqrt{f_s(x)}\sqrt{f_s(y)} - \sum_{x\in G} f_s(x) \sum_{y\in G} \alpha_\beta(x,y)\\ &\quad= \sum_{x,\,y\in G} \alpha_\beta(y,x)\sqrt{f_s(y)}\sqrt{f_s(x)} - \sum_{x\in G} f_s(x) \sum_{y\in G} \alpha_\beta(y,x)\\ &\quad= \sum_{x,\,y\in G} \alpha_\beta(y,x)\sqrt{f_s(x)}\big(\sqrt{f_s(y)} - \sqrt{f_s(x)}\big).\end{aligned}$$

On a ainsi montré que

$$\begin{aligned}&\sum_{x,\,y\in G} \alpha_\beta(x,y)\sqrt{f_s(x)}\big(\sqrt{f_s(y)} - \sqrt{f_s(x)}\big)\\ &\qquad= \sum_{x,\,y\in G} n_\beta(x,y)\sqrt{f_s(x)}\big(\sqrt{f_s(y)} - \sqrt{f_s(x)}\big)\end{aligned}$$

avec $n_\beta(x,y) = (\alpha_\beta(x,y) + \alpha_\beta(y,x))/2$ [l'opération précédente a donc simplement consisté à symétriser l'opérateur L^G_β dans $L^2(\mu_\beta)$, en le remplaçant par $(L^G_\beta + (L^G_\beta)^*)/2$, où $(L^G_\beta)^*$ est son adjoint dans cet espace, qui est aussi un opérateur aux différences de par l'invariance de μ_β par L^G_β qui s'exprime par $(L^G_\beta)^* 1 \equiv 0$], et la symétrie en x, y de cette dernière quantité permet d'obtenir finalement que

$$\frac{d}{ds} I(m_s, \mu_\beta) \leq -\sum_{x,y\in G} n_\beta(x,y)\big(\sqrt{f_s(y)} - \sqrt{f_s(x)}\big)^2.$$

REMARQUE. La démonstration précédente simplifie la preuve de la proposition 3 de [16] et montre que l'on peut toujours y prendre $\lambda = 1/2$.

Pour obtenir une inégalité différentielle satisfaite par l'entropie, on est donc ramené à comparer $I(m_s, \mu_\beta)$ et le terme

$$\sum_{x,y\in G} n_\beta(x, y)\big(\sqrt{f_s(y)} - \sqrt{f_s(x)}\big)^2$$

ce qui peut notamment être fait par le biais des inégalités de Sobolev-logarithmiques (voir [12]): il existe une constante a_β telle que pour toute fonction $f \in F(G)$, on ait

$$\int f^2 \ln(f^2)\, d\mu_\beta \le a_\beta \sum_{x,y\in G} (f(x) - f(y))^2 n_\beta(x, y) + \left(\int f^2\, d\mu_\beta\right)\ln\left(\int f^2\, d\mu_\beta\right)$$

la constante a_β désignera désormais le plus petit nombre tel que les inégalités ci-dessus soient satisfaites.

En appliquant ceci avec $f = \sqrt{f_s}$, on obtient donc

$$I(m_s, \mu_\beta) \le a_\beta \sum_{x,\, y\in G} n_\beta(x, y)\big(\sqrt{f_s(y)} - \sqrt{f_s(x)}\big)^2$$

d'où l'inégalité différentielle

$$\frac{d}{ds} I(m_s, \mu_\beta) \le -a_\beta^{-1} I(m_s, \mu_\beta)$$

qui implique immédiatement que pour tout $s \ge 0$, on a

$$I(m_s, \mu_\beta) \le \exp(-a_\beta^{-1}s) I(m_0, \mu_\beta).$$

Pour pouvoir se servir de cette relation, on est donc amené à estimer a_β, ce qui a été fait dans [16], en utilisant des techniques de Holley et Stroock [12]. Mais avant de présenter ce résultat, il faut s'intéresser plus précisément à la probabilité invariante μ_β et rappeler notamment la formule explicite qu'en ont donné Freidlin et Wentzell (cf. [6], page 177).

On note $y \to z$ tout élément $(y, z) \in G^*$ tel que $g(y, z) > 0$, et pour tout $x \in G$, on appelle x-arbre la donnée pour tout $y \ne x$ d'une flèche $y \to z$, cet ensemble de flèches devant en outre être tel que de tout $y \ne x$, on puisse arriver en x en ne suivant que ses flèches (ce qui revient à dire qu'il ne contient pas de "cycles").

On note G_x l'ensemble des x-arbres. Si $h \in G_x$, on lui associe le nombre $\pi_\beta(h)$ suivant

$$\pi_\beta(h) = \prod_{(y\to z)\in h} g_\beta(y, z)$$

et on pose, pour $x \in G$,

$$M_\beta(x) = \sum_{h\in G_x} \pi_\beta(h)$$

La probabilité invariante est alors donnée par

$$\forall\ x \in G, \qquad \mu_\beta(x) = \left(\sum_{y\in G} M_\beta(y)\right)^{-1} M_\beta(x).$$

Ceci permet de faire apparaître clairement la dépendance de μ_β en β, car on a pour tout $x \in G$,

$$M_\beta(x) = \sum_{h\in G_x} \pi_0(h)\exp(\beta v(h))$$

où on a posé

$$v(h) = -\sum_{(y\to z)\in h} V(y, z)$$

et notamment, on a donc

$$\lim_{\beta\to+\infty} \beta^{-1}\ln \mu_\beta(x) = -U(x) \tag{1}$$

avec

$$U(x) = -\max_{h\in G_x} v(h) + \max_{y\in G}\Big(\max_{h\in G_y} v(h)\Big)$$

[remarquons que $\min_{z\in G} U(z) = 0$].

Les formules précédentes permettent en fait d'obtenir un résultat plus précis.

Soient $N = \{x \in G/U(x) = 0\}$ et pour $x \in G$ fixé, $G_{x,\infty}$ l'ensemble des $h \in G_x$ en lesquels $\max_{h\in G_x} v(h)$ est atteint, et posons

$$\widetilde{\rho}(x) = \sum_{h\in G_{x,\infty}} \pi_0(h)$$

puis

$$\rho(x) = \left(\sum_{y\in N} \widetilde{\rho}(y)\right)^{-1} \widetilde{\rho}(x).$$

Alors, on a pour β grand

$$\mu_\beta(x) \sim \rho(x)\exp(-\beta U(x)).$$

Pour tout $(x, y) \in G^*$, soit $\mathscr{S}_{x,y}$ l'ensemble des suites finies d'éléments de G dont le premier élément est x et le dernier y. On définit l'élévation d'une telle suite $p = (p_i)_{1\le i\le N} \in \mathscr{S}_{x,y}$ par

$$e(p) = \max_{2\le i\le N}(\min\{U(x_{i-1}) + V(x_{i-1}, x_i);\ U(x_i) + V(x_i, x_{i-1})\})$$

on pose

$$H(x, y) = \inf_{p\in\mathscr{S}_{x,y}} e(p)$$

puis on introduit la constante

$$c(G, V) = \max_{(x, y)\in G^*} H(x, y) - U(x) - U(y).$$

Avec ces notations, on a vu dans [16] que

$$\limsup_{\beta\to+\infty} \beta^{-1}\ln(a_\beta) \le c(G, V).$$

Cette inégalité va nous permettre de donner une première estimation pour β grand des potentiels (parfois aussi appelés résolvants) associés à L_β^G: à toute fonction $\phi \in F(G)$, on associe son potentiel $\psi_\beta^G(\phi)$ relatif à L_β^G, qui est l'unique solution ψ des équations

$$\begin{aligned} L_\beta^G \psi &= \phi - \mu_\beta(\phi),\\ \mu_\beta(\psi) &= 0. \end{aligned}$$

Il est bien connu que cette solution est en fait donnée par

$$\forall\ x \in G, \qquad \psi_\beta^G(\phi)(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty \phi(Z_s) - \mu_\beta(\phi)\, ds\right]$$

où Z désigne toujours un processus de Markov sur G de générateur L_β^G, issu ci-dessus de x.

On peut donc majorer la norme uniforme sur G (que l'on désignera désormais par $\|\cdot\|_G$) de $\psi_\beta^G(\phi)$ par

$$\begin{aligned} \left\|\psi_\beta^G(\phi)\right\|_G &= \max_{x\in G}\left|\mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty \phi(Z_s) - \mu_\beta(\phi)\, ds\right]\right|\\ &\le \max_{x\in G}\int_0^\infty \left|\mathbb{E}_x[\phi(Z_s) - \mu_\beta(\phi)]\right|\, ds\\ &= \max_{x\in G}\int_0^\infty \left|(\delta_x)_s(\phi) - \mu_\beta(\phi)\right|\, ds\\ &\le \|\phi\|_G \max_{x\in G}\int_0^\infty \left\|(\delta_x)_s - \mu_\beta\right\|_{\mathrm{vt}}\, ds\\ &\le 4\sqrt{2}\,\|\phi\|_G \max_{x\in G}\int_0^\infty \sqrt{I((\delta_x)_s, \mu_\beta)}\, ds\\ &\le 4\sqrt{2}\,\|\phi\|_G \max_{x\in G}\int_0^\infty \sqrt{I(\delta_x, \mu_\beta)}\exp(-a_\beta^{-1}s/2)\, ds\\ &= 8\sqrt{2}\,\|\phi\|_G\, a_{\beta_s} \max_{x\in G}\sqrt{I(\delta_x, \mu_\beta)}. \end{aligned}$$

Cependant, vu (1), notons que

$$\lim_{\beta\to+\infty} \beta^{-1}\max_{x\in G} I(\delta_x, \mu_\beta) = \max_{x\in G} U(x)$$

et on déduit notamment que

$$\limsup_{\beta\to+\infty} \beta^{-1}\ln\left(\left\|\psi_\beta^G(\phi)\right\|_G\right) \le c(G, V).$$

En fait, on peut améliorer légèrement cette majoration, car on sait a priori que pour tout $x \in G$ fixé, $\psi_\beta^G(\phi)(x)$ s'exprime comme une fraction rationnelle (indépendante de β dans ses coefficients) en les variables $(g_\beta(x, y))_{(x, y) \in G^*}$ (cf. [17], dont la démonstration de cette propiété est également valable dans des situations non réversibles), ce qui permet de voir qu'il existe une constante $K_1(\phi)$ telle que pour tout $\beta \geq 0$,

$$\left\| \psi_\beta^G(\phi) \right\|_G \leq K_1(\phi) \exp(c(G, V)\beta).$$

Et plus précisément, la linéarité (à $\beta \geq 0$ fixé) de $\phi \mapsto \psi_\beta^G(\phi)$ et le fait que $F(G)$ est de dimension finie impliquent qu'il existe une constante $K_2 > 0$ telle que pour toute fonction $\phi \in F(G)$,

$$\left\| \psi_\beta^G(\phi) \right\|_G \leq K_2 \left\| \phi \right\|_G \exp(c(G, V)\beta). \tag{2}$$

Cependant, dans la plupart des cas cette majoration n'est pas optimale, car le coefficient devant β dans l'exponentielle dépend en général également de ϕ, comme on va le voir dans la section suivante.

3. Estimation de potentiels. On va donner ici une majoration de la norme uniforme de potentiels associés à des fonctions indicatrices de points, plus précise que celle que l'on obtiendrait en appliquant directement les résultats de la section précédente.

Soit $x_0 \in G$ fixé, on s'intéresse donc à $\left\| \psi_\beta^G(\mathbf{1}_{\{x_0\}}) \right\|_G$. Comme on va le voir, l'estimée (2) ci-dessus est bonne par exemple si x_0 est tel que $U(x_0) = 0$, et ainsi dans le cas général, il est commode de rajouter un point $\overline{x}_0$ à G, qui sera à la fois un minimum global pour U, ce qui permettra de bien estimer le potentiel associé à sa fonction indicatrice, et proche de x_0, pour que l'on puisse faire un lien entre son potentiel et celui de x_0.

Soit donc $\overline{x}_0$ un point n'appartenant pas à G, on considère le nouveau graphe $(\overline{G}, \overline{g})$ défini par

$$\overline{G} = G \sqcup \{\overline{x}_0\}$$

et

$$\forall\ (x, y) \in \overline{G}^*, \qquad \overline{g}(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & \text{si } (x, y) \in G^*, \\ 1, & \text{si } \{x, y\} = \{x_0, \overline{x}_0\}, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

que l'on munit de la fonction de coût $\overline{V}$ donnée par

$$\forall\ (x, y) \in \overline{G}^*, \qquad \overline{V}(x, y) = \begin{cases} V(x, y), & \text{si } (x, y) \in G^*, \\ 0, & \text{si } (x, y) = (x_0, \overline{x}_0), \\ U(x_0), & \text{si } (x, y) = (\overline{x}_0, x_0), \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci nous permet pour tout $\beta \geq 0$ de considérer, comme dans l'introduction, un générateur $L_\beta^{\overline{G}}$ agissant sur $F(\overline{G})$, et d'introduire relativement à cet opérateur, le potentiel $\psi_\beta^{\overline{G}}(\mathbf{1}_{\{\overline{x}_0\}})$ associé à l'indicatrice de $\overline{x}_0$, qui est la solution $\psi \in F(\overline{G})$ de

$$L_\beta^{\overline{G}}\psi = \mathbf{1}_{\overline{x}_0} - \overline{\mu}_\beta(\overline{x}_0),$$
$$\overline{\mu}_\beta(\psi) = 0$$

où $\overline{\mu}_\beta$ est la probabilité invariante associée à $L_\beta^{\overline{G}}$.

D'après la fin de la section précédente, on sait qu'il existe une constante $K_3 > 0$ telle que pour tout $\beta \geq 0$,

$$\left\| \psi_\beta^{\overline{G}}(\mathbf{1}_{\{\overline{x}_0\}}) \right\|_{\overline{G}} \leq K_3 \exp(c(\overline{G}, \overline{V})\beta).$$

Commençons par exprimer $c(\overline{G}, \overline{V})$ en fonction des données initiales (G, g) et V, et pour cela remarquons que l'on aurait pu prendre pour définition de $c(G, V)$,

$$c(G, V) = \max_{x \neq x_1} H(x, x_1) - U(x)$$

où $x_1 \in G$ est un point fixé tel que $U(x_1) = 0$.

En effet, notons $c_{x_1}(G, V)$ le membre de droite, il est clair que

$$c(G, V) \geq c_{x_1}(G, V).$$

Par ailleurs, soit $(x_2, x_3) \in G^*$ tel que

$$c(G, V) = H(x_2, x_3) - U(x_2) - U(x_3).$$

De par la définition de l'élévation d'une suite finie et en utilisant la symétrie en x, y de

$$\min\{U(x) + V(x, y);\ U(y) + V(y, x)\}$$

[qui implique celle de $H(x, y)$], on vérifie immédiatement que

$$H(x_2, x_3) \leq H(x_2, x_1) \vee H(x_1, x_3).$$

Supposons donc par exemple que $H(x_2, x_1) \geq H(x_1, x_3)$, on a alors

$$\begin{aligned} H(x_2, x_3) - U(x_2) - U(x_3) &\leq H(x_2, x_1) - U(x_2) - U(x_3) \\ &\leq H(x_2, x_1) - U(x_2) \\ &\leq c_{x_1}(G, V) \end{aligned}$$

ce qui termine de montrer que

$$c(G, V) = c_{x_1}(G, V).$$

Notamment, on a donc

$$c(\overline{G}, \overline{V}) = \max_{x \in G} \overline{H}(\overline{x}_0, x) - \overline{U}(x)$$

où $\overline{H}$ et $\overline{U}$ sont définis comme H et U, mais en termes de $(\overline{G}, \overline{g})$ et $\overline{V}$.

D'ailleurs, en utilisant le fait qu'à partir de $\overline{x}_0$ on doit d'abord passer par x_0 pour arriver en un point $x \in G$ et que pour retourner d'un tel point à $\overline{x}_0$ on doit nécessairement repasser par x_0, et en reprenant la définition de H donnée dans la section précédente, on obtient que

$$\forall\, x \in \overline{G}, \qquad \overline{U}(x) = \begin{cases} U(x), & \text{si } x \in G, \\ 0, & \text{si } x = \overline{x}_0 \end{cases}$$

ce qui montre que pour tout $x \in G \setminus \{x_0\}$,

$$\begin{aligned} \overline{H}(\overline{x}_0, x) &= \overline{H}(\overline{x}_0, x_0) \vee \overline{H}(x_0, x) \\ &= U(x_0) \vee H(x_0, x). \end{aligned}$$

Par convention, posons pour tout $x \in G$,

$$H(x, x) = U(x)$$

ce qui permet d'écrire que

$$c(\overline{G}, \overline{V}) = \max_{x \in G} H(x_0, x) - U(x).$$

On désignera désormais par $c(G, V, x_0)$ la constante $c(\overline{G}, \overline{V}) - U(x_0)$. Notons que cette quantité est toujours positive ou nulle [si x_0 est un minimum global de U c'est immédiat et sinon il suffit de considérer un tel x dans le maximum qui définit $c(\overline{G}, \overline{V})$], que $c(G, V) = \max_{x \in G} c(G, V, x)$, et que d'après une remarque précédente, ce dernier maximum est notamment atteint en les x tels que $U(x) = 0$, mais il peut aussi être atteint en d'autres points.

Nous allons maintenant faire un lien entre $\psi_\beta^G(\mathbf{1}_{\{x_0\}})$ et $\psi_\beta^{\overline{G}}(\mathbf{1}_{\{\overline{x}_0\}})$. Pour ceci, appelons $\overline{\psi}$ la restriction de $\psi_\beta^{\overline{G}}(\mathbf{1}_{\{\overline{x}_0\}})$ à G, qui vérifie donc pour tout $x \in G \setminus \{x_0\}$,

$$\begin{aligned} L_\beta^G \overline{\psi}(x) &= L_\beta^{\overline{G}} \psi_\beta^{\overline{G}}(x) \\ &= -\overline{\mu}_\beta(\overline{x}_0). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} L_\beta^G \overline{\psi}(x_0) &= L_\beta^{\overline{G}} \psi_\beta^{\overline{G}}(x_0) - \overline{q}_\beta(x_0, \overline{x}_0)(\psi_\beta^{\overline{G}}(\overline{x}_0) - \psi_\beta^{\overline{G}}(x_0)) \\ &= -\overline{\mu}_\beta(\overline{x}_0) - (\psi_\beta^{\overline{G}}(\overline{x}_0) - \psi_\beta^{\overline{G}}(x_0)). \end{aligned}$$

Cependant, notons que

$$\begin{aligned} \exp(-\beta U(x_0))(\psi_\beta^{\overline{G}}(x_0) - \psi_\beta^{\overline{G}}(\overline{x}_0)) &= L_\beta^{\overline{G}} \psi_\beta^{\overline{G}}(\overline{x}_0) \\ &= 1 - \overline{\mu}_\beta(\overline{x}_0) \end{aligned}$$

ainsi, on a

$$L_\beta^G \overline{\psi}(x_0) = -\overline{\mu}_\beta(\overline{x}_0) + \exp(\beta U(x_0))(1 - \overline{\mu}_\beta(\overline{x}_0))$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned} L_\beta^G \overline{\psi} &= \exp(\beta U(x_0))(1 - \overline{\mu}_\beta(\overline{x}_0))\mathbf{1}_{\{x_0\}} - \overline{\mu}_\beta(\overline{x}_0) \\ &= \exp(\beta U(x_0))(1 - \overline{\mu}_\beta(\overline{x}_0))(\mathbf{1}_{\{x_0\}} - \mu_\beta(x_0)) \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant immédiatement du fait que $\mu_\beta(L_\beta^G \overline{\psi}) = 0$.

Ainsi, on a l'égalité, à une constante additive près, de $\overline{\psi}$ et de

$$\exp(\beta U(x_0))[1 - \overline{\mu}_\beta(\overline{x}_0)]\psi_\beta^G(\mathbf{1}_{\{x_0\}}),$$

et plus précisément,

$$\exp(\beta U(x_0))[1 - \overline{\mu}_\beta(\overline{x}_0)]\psi_\beta^G(\mathbf{1}_{\{x_0\}}) = \overline{\psi} - \mu_\beta(\overline{\psi}).$$

Cependant, on vérifie facilement que $\overline{\mu}_\beta$ n'est autre que la renormalisation en une probabilité de la mesure

$$\mu_\beta(x_0)\exp(\beta U(x_0))\delta_{\overline{x}_0} + \mu_\beta$$

d'où

$$\begin{aligned} 1 - \overline{\mu}_\beta(\overline{x}_0) &= \overline{\mu}_\beta(G) \\ &= \frac{1}{1 + \exp(\beta U(x_0))\mu_\beta(x_0)}. \end{aligned}$$

Mais on a rappelé précédemment qu'il existe une constante $\rho(x_0) > 0$ telle que

$$\lim_{\beta \to +\infty} \exp(\beta U(x_0))\mu_\beta(x_0) = \rho(x_0)$$

et il apparaît alors que pour β grand,

$$\exp(\beta U(x_0))[1 - \overline{\mu}_\beta(\overline{x}_0)] \sim \widehat{\rho}(x_0)\exp(\beta U(x_0))$$

avec

$$\widehat{\rho}(x_0) = (1 + \rho(x_0))^{-1}.$$

On a donc pour une certaine constante $K_4 > 0$,

$$\begin{aligned} \left\| \psi_\beta^G(\mathbf{1}_{\{x_0\}}) \right\|_G &\le K_4 \exp(-\beta U(x_0)) \left\| \overline{\psi} - \mu_\beta(\overline{\psi}) \right\|_G \\ &\le 2K_4 \exp(-\beta U(x_0)) \left\| \psi_\beta^{\overline{G}} \right\|_{\overline{G}} \end{aligned}$$

ce qui implique, d'après les estimées ci-dessus, qu'il existe une constante $K_5 > 0$ telle que pour tout $\beta \ge 0$,

$$\left\| \psi_\beta^G(\mathbf{1}_{\{x_0\}}) \right\|_G \le K_5 \exp(\beta c(G, V, x_0))$$

majoration qui est meilleure que celle donnée dans la section précédente, si x_0 n'est pas un maximum global de la fonction $c(G, V, \cdot)$.

4. Le théorème de sortie. Nous allons ici donner un résultat général de convergence pour le problème de sortie.

On reprend le cadre présenté dans l'introduction, dont on va préciser les hypothèses.

On dit que G est une cellule dans M, si on a

$$\forall\, 1 \leq j \leq l, \qquad W(x_j, y_j) > c(G, V, x_j). \tag{3}$$

Le terme de gauche représentant le coût du passage de x_j à y_j, et le membre de droite une mesure de la difficulté que l'on rencontre pour joindre à partir de x_j tout autre point de G, ces inégalités semblent être une bonne hypothèse pour assurer que le système devrait avoir tendance (asymptotiquement à basse température) à être d'abord mélangeant dans G avant d'en sortir.

Les cellules sont des ensembles un peu plus généraux que les cycles (on renvoit à [23] pour leur définition dans ce cadre), mais de la résolution du problème de sortie pour les cycles il n'est pas difficile d'en déduire la résolution du même problème pour les cellules, car toute cellule contient un unique cycle de même hauteur de sortie. Néanmoins on préfère ici la notion de cellule, car seule la condition (3) apparaîtra naturellement dans la suite.

D'autre part, soit $U \in F(M)$ la fonction d'action pour les grandes déviations satisfaites par les probabilités μ_β quand β devient grand (telle qu'elle a été définie dans la section 2), on note

$$\sigma(M, W) = \min_{1\leq j\leq l} U(x_j) + W(x_j, y_j).$$

Les conditions que l'on demandera à être satisfaites par les familles $(\beta^{(t)})_{t\geq 0}$ d'évolutions de l'inverse de la température font intervenir de manière essentielle cette constante qui peut s'interpréter comme la difficulté d'accès de $M\setminus G$ à partir des minima globaux de U. On suppose qu'il existe deux applications $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto a_t \in \mathbb{R}_+^*$ et $F\colon \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}_+}$, telles que pour tout $s \geq 0$, on ait

$$\lim_{t\to+\infty} \inf_{0\leq u\leq a_t s} \beta_u^{(t)} = +\infty \tag{4}$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} a_t \int_0^s \exp(-\beta_{a_t u}^{(t)} \sigma(M, W))\, du = F(s). \tag{5}$$

Posons $\delta = \min_{1\leq j\leq l} W(x_j, y_j) - c(G, V, x_j) > 0$. On fera ensuite l'hypothèse que les applications $\beta^{(t)}$ sont de classe C^1 et surtout qu'elles satisfont pour tout $s \geq 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^s \exp(-\beta_{a_t u}^{(t)} \delta) \left| \frac{d\beta_{a_t u}^{(t)}}{du} \right| du = 0. \tag{6}$$

Par ailleurs, pour que le problème de sortie soit intéressant à étudier, on imposera également à toutes les probabilités initiales $m^{(t)}$ d'être portées par G.

C'est sous ces conditions que l'on s'intéressera au comportement asymptotique en loi du couple de sortie $(\widehat{T}^{(t)}, Y^{(t)})$, la première composante étant le temps de sortie renormalisé

$$\widehat{T}^{(t)} = a_t^{-1}\, T^{(t)}.$$

Notons déjà par compacité de $\overline{\mathbb{R}_+} \times \{y_0, y_1, \ldots, y_l\}$, que la famille des lois des $(\widehat{T}^{(t)}, \widetilde{Y}^{(t)})$ pour $t \geq 0$, est étroitement relativement compacte. Pour décrire les limites possibles, soient

$$I = \{1 \leq i \leq l / U(x_i) + W(x_i, y_i) = \sigma(M, W)\},$$
$$R = \sum_{i \in I} \rho(x_i) q(x_i, y_i)$$

[$\rho(x_i)$ a été défini dans la section 2, quand on a rappelé la formule explicite de la probabilité invariante associée à L_β^G].

Puisque les applications $\mathbb{R}_+ \ni s \mapsto a_t \int_0^s \exp(-\beta_{a_t u}^{(t)} \sigma(M, W))\, du$ sont croissantes, il est clair que F est également croissante. Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble, au plus dénombrable, de ses points de discontinuité. Soit $\widetilde{F}$ l'unique fonction continue à droite que l'on obtient à partir de F en la modifiant éventuellement sur $\mathscr{S}$. On note ν_R l'unique probabilité sur $\overline{\mathbb{R}_+}$ telle que pour tout $s \in \mathbb{R}_+$,

$$\nu_R(]s, +\infty]) = \exp(-R\widetilde{F}(s)).$$

Par ailleurs, soit r la probabilité sur $\{y_1, \ldots, y_l\}$ donnée par

$$\forall\ 1 \leq i \leq l, \qquad r(y_i) = R^{-1} \mathbf{1}_{\{i \in I\}} \rho(x_i) q(x_i, y_i)$$

on pose pour toute probabilité p sur $\{y_0, y_1, \ldots, y_l\}$,

$$\mathbb{P}_{R,p}(dt, dx) = \mathbf{1}_{\{t < +\infty\}} \nu_R(dt) \otimes r(dx) + \nu_R(\{+\infty\}) \delta_{+\infty}(dt) \otimes p(dx)$$

qui est donc une probabilité sur $[0, +\infty] \times \{y_0, y_1, \ldots, y_l\}$. On appellera $\mathscr{P}_R$ l'ensemble de ces mesures quand p varie.

Sous les hypothèses précédentes, la solution "explicite" du problème de sortie est alors donnée par le théorème suivant.

THÉORÈME 1. *Quand t devient grand, toute loi limite des $(\widehat{T}^{(t)}, Y^{(t)})$ appartient à $\mathscr{P}_R$.*

Ce résultat étend donc ceux des théorèmes 4 et 10 de [18], que l'on avait déjà obtenus dans des situations instantanément réversibles et pour des évolutions particulières (voir la section suivante). Il n'y a d'ailleurs pas de différence fondamentale entre les démonstrations, la plus importante consistant à inverser l'ordre de deux étapes à la fin de la preuve.

DÉMONSTRATION. Bien que le problème de sortie soit typiquement un problème de chaîne de Markov absorbée, il est commode de ne plus faire apparaître a priori $y_1, \ldots, y_l$ comme des points absorbants. On introduit donc un nouveau graphe irréductible $(\widetilde{M}, \widetilde{q})$ en posant $\widetilde{M} = M$ et

$$\forall\,(x, y) \in \widetilde{M}^*, \quad \widetilde{q}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x, y) = (y_j, x_j), \text{ pour un } 1 \le j \le l, \\ q(x, y), & \text{sinon} \end{cases}$$

que l'on munit de la fonction de coût

$$\forall\,(x, y) \in \widetilde{M}^*, \quad \widetilde{W}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } (x, y) = (y_j, x_j), \text{ pour un } 1 \le j \le l, \\ W(x, y), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci nous permet, comme d'habitude, de construire pour tout $\beta \ge 0$ un opérateur $L_\beta^{\widetilde{M}}$ sur $\widetilde{M}$, et à la donnée de $m^{(t)}$ et de $\beta^{(t)}$, on peut associer un unique processus de Markov $\widetilde{X}^{(t)}$ sur $\widetilde{M}$, de loi initiale $m^{(t)}$ et de générateur $L^{\widetilde{M}}_{\beta_s^{(t)}}$ à tout instant $s \ge 0$. Appelons $\widetilde{T}^{(t)}$ le premier instant de sortie de G:

$$\widetilde{T}^{(t)} = \inf\{s \ge 0 / \widetilde{X}_s^{(t)} \notin G\} \le +\infty$$

et remarquons que l'on obtient une réalisation de $X^{(t)}$ en posant

$$\forall\, s \ge 0, \qquad X_s^{(t)} = \widetilde{X}^{(t)}_{\widetilde{T}^{(t)} \wedge s}.$$

Notamment, sous cette interprétation, on a

$$T^{(t)} = \widetilde{T}^{(t)},$$
$$Y^{(t)} = \widetilde{Y}^{(t)} =_{\text{déf.}} \begin{cases} \widetilde{X}^{(t)}_{T^{(t)}}, & \text{si } \widetilde{T}^{(t)} < +\infty, \\ y_0, & \text{si } \widetilde{T}^{(t)} = +\infty \end{cases}$$

et il suffit donc de s'intéresser désormais aux processus $\widetilde{X}^{(t)}$.

Commençons par vérifier que les inégalités (3) sont équivalentes à

$$\forall\, 1 \le j \le l, \qquad W(x_j, y_j) > c(\widetilde{M}, \widetilde{W}, x_j). \tag{7}$$

En effet, notons $\mu_{G,\beta}$ (respectivement $\mu_{\widetilde{M},\beta}$) la probabilité invariante associée à L_β^G (respectivement $L_\beta^{\widetilde{M}}$), il apparaît facilement que $\mu_{\widetilde{M},\beta}$ est la renormalisation en une probabilité de la mesure

$$\sum_{1 \le j \le l} \mu_{G,\beta}(x_j) q(x_j, y_j) \exp(-\beta W(x_j, y_j)) \delta_{y_j}(\,\cdot\,) + \mu_{G,\beta}(\,\cdot\,)$$

et ainsi, la fonction d'action pour les grandes déviations satisfaites par les probabilités $\mu_{\widetilde{M},\beta}$ quand β devient grand est donnée par

$$\forall\, x \in \widetilde{M}, \qquad \widetilde{U}(x) = \begin{cases} U(x), & \text{si } x \in G, \\ U(x_j) + W(x_j, y_j), & \text{si } x = y_j, \text{ pour un } 1 \le j \le l \end{cases}$$

[et on a donc $\sigma(M, W) = \min_{x \notin G} \widetilde{U}(x)$].

On en déduit, avec des notations évidentes, que

$$
\begin{aligned}
c(\widetilde{M}, \widetilde{W}, x_i) &\\
&= \max_{x\in\widetilde{M}} \widetilde{H}(x_i, x) - \widetilde{U}(x) - \widetilde{U}(x_i)\\
&= \Big(\max_{x\in G} \widetilde{H}(x_i, x) - \widetilde{U}(x) - \widetilde{U}(x_i)\Big) \vee \Big(\max_{1\le j\le l} \widetilde{H}(x_i, y_j) - \widetilde{U}(y_j) - \widetilde{U}(x_i)\Big)\\
&= \Big(\max_{x\in G} H(x_i, x) - U(x) - U(x_i)\Big)\\
&\qquad \vee \Big(\max_{1\le j\le l} H(x_i, x_j) \vee [U(x_j) + W(x_j, y_j)] - \widetilde{U}(y_j) - U(x_i)\Big)\\
&= c(G, V, x_i) \vee \Big(\max_{1\le j\le l} H(x_i, x_j) - \widetilde{U}(y_j) - U(x_i)\Big)\\
&\qquad \vee \Big(\max_{1\le j\le l} U(x_j) + W(x_j, y_j) - \widetilde{U}(y_j) - U(x_i)\Big)\\
&= c(G, V, x_i) \vee \Big(\max_{1\le j\le l} H(x_i, x_j) - U(x_j) - U(x_i) - W(x_i, y_j)\Big)\\
&\qquad \vee [-U(x_i)]\\
&= c(G, V, x_i)
\end{aligned}
$$

d'où l'équivalence annoncée entre (3) et (7).

Soit $1 \le i \le l$ fixé, l'objet important qui va permettre d'étudier les sorties en y_i est le potentiel $\psi_\beta^{\widetilde{M}}(\mathbf{1}_{\{y_i\}})$ (que l'on notera désormais $\widetilde{\psi}_\beta^{(i)}$) associé à l'indicatrice $\mathbf{1}_{\{y_i\}}$, relativement à l'opérateur $L_\beta^{\widetilde{M}}$. C'est pourquoi l'estimée suivante sera fort utile.

LEMME 2. *Il existe une constante* $K_6 > 0$ *telle que pour tout* $\beta \ge 0$, *on ait*

$$\widetilde{\psi}_\beta^{(i)} = -\mathbf{1}_{\{y_i\}} + \widetilde{R}_\beta^{(i)}$$

avec

$$\left\| \widetilde{R}_\beta^{(i)} \right\|_{\widetilde{M}} \le K_6 \exp(-\delta\beta).$$

DÉMONSTRATION. Soit les deux fonctions de $F(\widetilde{M})$, $\widetilde{\phi} = -(1 - \mu_{\widetilde{M},\beta}(y_i)) \cdot [\mathbf{1}_{\{y_i\}} - \mu_{\widetilde{M},\beta}(y_i)]$ et $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi}_\beta^{(i)} - \widetilde{\phi}$. On calcule que

$$
\begin{aligned}
L_\beta^{\widetilde{M}} \widetilde{\phi} &= (1 - \mu_{\widetilde{M},\beta}(y_i))[\widetilde{q}_\beta(y_i, x_i)\mathbf{1}_{\{y_i\}} - \widetilde{q}_\beta(x_i, y_i)\mathbf{1}_{\{x_i\}}]\\
&= (1 - \mu_{\widetilde{M},\beta}(y_i))[\mathbf{1}_{\{y_i\}} - \widetilde{q}(x_i, y_i)\exp(-\beta W(x_i, y_i))\mathbf{1}_{\{x_i\}}]
\end{aligned}
$$

ainsi

$$L_\beta^{\widetilde{M}} \widetilde{\varphi} = (1 - \mu_{\widetilde{M},\beta}(y_i))\widetilde{q}_\beta(x_i, y_i)\mathbf{1}_{\{x_i\}} - \mu_{\widetilde{M},\beta}(y_i)\mathbf{1}_{G\setminus\{y_i\}}.$$

On a donc notamment $L_\beta^{\widetilde{M}}\widetilde{\varphi}(y_i) = 0$, c'est-à-dire ici

$$\widetilde{\varphi}(y_i) = \widetilde{\varphi}(x_i). \tag{8}$$

Pour estimer la restriction (que l'on notera φ) de $\widetilde{\varphi}$ à $\widetilde{M} \setminus \{y_i\}$, on introduit un nouveau graphe irréductible $(\widetilde{M}^{(i)}, \widetilde{q}^{(i)})$, en posant

$$\widetilde{M}^{(i)} = \widetilde{M} \setminus \{y_i\}$$

et

$$\forall\ (x, y) \in \widetilde{M}^{(i)*}, \qquad \widetilde{q}^{(i)}(x, y) = \widetilde{q}(x, y)$$

que l'on munit de la fonction de coût $\widetilde{W}^{(i)}$ qui est la restriction de $\widetilde{W}$ à $\widetilde{M}^{(i)*}$.

Ceci nous permet d'introduire pour tout $\beta \geq 0$ un opérateur $L_\beta^{\widetilde{M}^{(i)}}$ sur $\widetilde{M}^{(i)}$. Du fait de (8), $L_\beta^{\widetilde{M}^{(i)}}(\varphi)$ n'est autre que la restriction à $\widetilde{M}^{(i)}$ de $L_\beta^{\widetilde{M}}(\widetilde{\varphi})$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}(1 - \mu_{\widetilde{M},\beta}(y_i))&q_\beta(x_i, y_i)\mathbf{1}_{\{x_i\}} - \mu_{\widetilde{M},\beta}(y_i) \\ &= (1 - \mu_{\widetilde{M},\beta}(y_i))q_\beta(x_i, y_i)[\mathbf{1}_{\{x_i\}} - \mu_{\widetilde{M}^{(i)},\beta}(x_i)]\end{aligned}$$

où $\mu_{\widetilde{M}^{(i)},\beta}$ est la probabilité invariante associée à $L_\beta^{\widetilde{M}^{(i)}}$.

On est donc amené à s'intéresser au potentiel $\phi = \psi_\beta^{\widetilde{M}^{(i)}}(\mathbf{1}_{\{x_i\}})$ associé à $\mathbf{1}_{\{x_i\}}$ relativement à $L_\beta^{\widetilde{M}^{(i)}}$, car

$$\varphi = (1 - \mu_{\widetilde{M},\beta}(y_i))q_\beta(x_i, y_i)\phi + \mu_{\widetilde{M}^{(i)},\beta}(\varphi). \tag{9}$$

Cependant, notons que la probabilité $\mu_{\widetilde{M}^{(i)},\beta}$ est la renormalisation de la mesure

$$\sum_{1\leq j\leq l,\ j\neq i} \mu_{G,\beta}(x_j)q_\beta(x_j, y_j)\delta_{y_j}(\cdot) + \mu_{G,\beta}(\cdot)$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{1\leq j\leq l} &\mu_{G,\beta}(x_j)q_\beta(x_j, y_j) + 1\Big)\mu_{\widetilde{M},\beta}(\widetilde{\varphi}) \\ &= \mu_{G,\beta}(x_i)q_\beta(x_i, y_i)\widetilde{\varphi}(y_i) \\ &\quad + \Big(\sum_{1\leq j\leq l,\ j\neq i} \mu_{G,\beta}(x_j)q_\beta(x_j, y_j) + 1\Big)\mu_{\widetilde{M}^{(i)},\beta}(\varphi).\end{aligned}$$

Or, on a $\mu_{\widetilde{M},\beta}(\widetilde{\varphi}) = 0$, d'où

$$\begin{aligned}\mu_{\widetilde{M}^{(i)},\beta}(\varphi) &= -\Big(\sum_{1\leq j\leq l,\ j\neq i} \mu_{G,\beta}(x_j)q_\beta(x_j, y_j) + 1\Big)^{-1} \mu_{G,\beta}(x_i)q_\beta(x_i, y_i)\widetilde{\varphi}(y_i) \\ &= -\Big(\sum_{1\leq j\leq l,\ j\neq i} \mu_{G,\beta}(x_j)q_\beta(x_j, y_j) + 1\Big)^{-1} \mu_{G,\beta}(x_i)q_\beta(x_i, y_i)\varphi(x_i).\end{aligned}$$

En considérant l'égalité (9) au point x_i, il apparaît que

$$\varphi(x_i) = \frac{(1-\mu_{\widetilde{M},\beta}(y_i))q_\beta(x_i, y_i)}{1+\left(\sum_{j\neq i}\mu_{G,\beta}(x_j)q_\beta(x_j, y_j)+1\right)^{-1}\mu_{G,\beta}(x_i)q_\beta(x_i, y_i)}\phi(x_i)$$

puis que

$$\begin{aligned}\mu_{\widetilde{M}^{(i)},\beta}(\varphi) = -\mu_{G,\beta}(x_i)q_\beta(x_i, y_i)(1-\mu_{\widetilde{M},\beta}(y_i))q_\beta(x_i, y_i)\phi(x_i)\\ \times\Bigg(\Bigg[\sum_{j\neq i}\mu_{G,\beta}(x_j)q_\beta(x_j, y_j)+1\Bigg]\\ \times\Bigg[1+\Bigg(\sum_{j\neq i}\mu_{G,\beta}(x_j)q_\beta(x_j, y_j)+1\Bigg)^{-1}\\ \times\mu_{G,\beta}(x_i)q_\beta(x_i, y_i)\Bigg]\Bigg)^{-1}.\end{aligned}$$

Il existe donc une constante $K_7 > 0$ telle que pour tout $\beta \geq 0$,

$$\begin{aligned}\left|\mu_{\widetilde{M}^{(i)},\beta}(\varphi)\right| &\leq K_7\exp(-\beta W(x_i, y_i))|\phi(x_i)|\\ &\leq K_7\exp(-\beta W(x_i, y_i))\,\|\phi\|_{\widetilde{M}^{(i)}}.\end{aligned}$$

Pour évaluer φ, il reste donc à estimer ϕ, ce qui a été fait dans la section 3: il existe une constante $K_8 > 0$ telle que pour tout $\beta \geq 0$,

$$\|\phi\|_{\widetilde{M}^{(i)}} \leq K_8\exp(\beta c(\widetilde{M}^{(i)}, \widetilde{W}^{(i)}, x_i)).$$

Mais le calcul qui a permis de vérifier l'équivalence de (3) et de (7) montre également que

$$c(\widetilde{M}^{(i)}, \widetilde{W}^{(i)}, x_i) = c(G, V, x_i)$$

d'où pour une certaine constante $K_9 > 0$ indépendante de β,

$$\|\widetilde{\varphi}\|_{\widetilde{M}} = \|\varphi\|_{\widetilde{M}^{(i)}} \leq K_9\exp(\beta[c(G, V, x_i) - W(x_i, y_i)])$$

puis en fin de compte le lemme annoncé, vu la forme de $\widetilde{\phi}$. □

COROLLAIRE 3. *Il existe une constante* $K_{10} > 0$ *telle que pour tout* $\beta \geq 0$,

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\beta}\widetilde{\psi}^{(i)}_\beta\right\|_{\widetilde{M}} \leq K_{10}\exp(-\delta\beta).$$

DÉMONSTRATION. Cette majoration découle immédiatement du lemme précédent par dérivation, du fait que pour tout $x \in \widetilde{M}$ fixé, $\widetilde{\psi}^{(i)}_\beta(x)$ s'exprime comme une fraction rationnelle (indépendante de β dans ses coefficients) en les variables $(\widetilde{q}_\beta(y, z))_{(y,z)\in\widetilde{M}^*}$. □

Pour pouvoir profiter des résultats précédents, on utilise le fait que loi de $X^{(t)}$ est la solution au problème de martingales associé à la probabilité initiale $m^{(t)}$ et à la famille de générateurs $(L^{\widetilde{M}}_{\beta^{(t)}_s})_{s\geq 0}$: il existe une martingale $M^{(i)}$ (dans la filtration naturellement engendrée par $X^{(t)}$) nulle en 0, telle que pour tout $s \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}^{(i)}(\widetilde{T}^{(t)} \wedge s) &= \widetilde{\psi}^{(i)}(0) + \int_0^{\widetilde{T}^{(t)}\wedge s} \partial\widetilde{\psi}^{(i)}(u)\,du \\
&\qquad + \int_0^{\widetilde{T}^{(t)}\wedge s} L^{\widetilde{M}}_{\beta^{(t)}_u}(\widetilde{\psi}^{(i)}_{\beta^{(t)}_u})(\widetilde{X}^{(t)}_u)\,du + M^{(i)}(\widetilde{T}^{(t)} \wedge s) \\
&= \widetilde{\psi}^{(i)}(0) + \int_0^{\widetilde{T}^{(t)}\wedge s} \partial\widetilde{\psi}^{(i)}(u)\,du \\
&\qquad - \int_0^{\widetilde{T}^{(t)}\wedge s} \mu_{\widetilde{M},\,\beta^{(t)}_u}(y_i)\,du + M^{(i)}(\widetilde{T}^{(t)} \wedge s)
\end{aligned}$$

où pour alléger les notations on a posé $\widetilde{\psi}^{(i)}(s) =_{\text{déf.}} \widetilde{\psi}^{(i)}_{\beta^{(t)}_s}(\widetilde{X}^{(t)}_s)$ et $\partial\widetilde{\psi}^{(i)}(s) =_{\text{déf.}} ((\partial/\partial s)\widetilde{\psi}^{(i)}_{\beta^{(t)}_s})(\widetilde{X}^{(t)}_s)$.

En prenant l'espérance dans l'égalité ci-dessus et en utilisant le théorème d'arrêt pour les martingales, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\widetilde{\psi}^{(i)}(\widetilde{T}^{(t)} \wedge s)\big] \\
&\quad = \mathbb{E}\big[\widetilde{\psi}^{(i)}(0)\big] + \mathbb{E}\bigg[\int_0^{\widetilde{T}^{(t)}\wedge s} \partial\widetilde{\psi}^{(i)}(u)\,du\bigg] - \mathbb{E}\bigg[\int_0^{\widetilde{T}^{(t)}\wedge s} \mu_{\widetilde{M},\,\beta^{(t)}_u}(y_i)\,du\bigg].
\end{aligned}$$

En remplaçant s par $a_t s$ et en effectuant le changement de variable correspondant dans les intégrales, cette inégalité se réécrit aussi (avec $\widehat{T}^{(t)} = a_t^{-1}\widetilde{T}^{(t)}$)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\widehat{T}^{(t)} \leq s,\, \widetilde{Y}^{(t)} = y_i] &= \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{y_i\}}(\widetilde{X}^{(t)}_{\widetilde{T}^{(t)}\wedge a_t s})\big] \\
&= \varepsilon_i(t,s) + \mathbb{E}[F_i(t, \widehat{T}^{(t)} \wedge s)]
\end{aligned} \tag{10}$$

où on a posé pour tout $1 \leq i \leq l$ et tous $t, s \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i(t,s) = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{y_i\}}(\widetilde{X}^{(t)}_{\widetilde{T}^{(t)}\wedge a_t s})\big] + \mathbb{E}\big[\widetilde{\psi}^{(i)}(\widetilde{T}^{(t)} \wedge a_t s)\big] - \mathbb{E}\big[\widetilde{\psi}^{(i)}(0)\big] \\
- \mathbb{E}\bigg[\int_0^{\widehat{T}^{(t)}\wedge s} \partial\widetilde{\psi}^{(i)}(a_t u)\,du\bigg]
\end{aligned}$$

et

$$F_i(t,s) = a_t \int_0^s \mu_{\widetilde{M},\beta^{(t)}_{a_t u}}(y_i)\,du.$$

Commençons par nous intéresser au comportement en loi des temps de sortie renormalisés, et pour cela, sommons les égalités précédentes pour obtenir

$$\mathbb{P}[\widehat{T}^{(t)} \leq s] = \varepsilon(t, s) + \mathbb{E}[F(t, \widehat{T}^{(t)} \wedge s)] \tag{11}$$

avec

$$\varepsilon(t, s) = \sum_{1 \leq i \leq l} \varepsilon_i(t, s) \quad \text{et} \quad F(t, s) = \sum_{1 \leq i \leq l} F_i(t, s).$$

Cependant, pour $t \geq 0$ fixé, il est clair que la fonction $\mathbb{R}_+ \ni s \mapsto F(t, s)$ est continue et croissante. Par ailleurs, en reprenant les notations du lemme 2, pour tout $\beta \geq 0$, soit la fonction

$$\widetilde{R}_\beta = \sum_{1 \leq i \leq l} \widetilde{R}_\beta^{(i)}$$

et notons que l'on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t, s) &= \mathbb{E}\big[\widetilde{R}_{\beta^{(t)}_{\widetilde{T}^{(t)} \wedge a_t s}}\big(\widetilde{X}^{(t)}_{\widetilde{T}^{(t)} \wedge a_t s}\big)\big] - \mathbb{E}\big[\widetilde{R}_{\beta_0^{(t)}}\big(\widetilde{X}_0^{(t)}\big)\big] \\
&\quad - \mathbb{E}\bigg[\int_0^{\widetilde{T}^{(t)} \wedge a_t s} \bigg(\frac{\partial}{\partial u} \widetilde{R}_{\beta_u^{(t)}}\bigg)\big(\widetilde{X}_u^{(t)}\big)\, du\bigg] \\
&= \mathbb{E}\bigg[\int_0^{\widetilde{T}^{(t)} \wedge a_t s} L_{\beta_u^{(t)}} \widetilde{R}_{\beta_u^{(t)}}\big(\widetilde{X}_u^{(t)}\big)\, du\bigg]
\end{aligned}$$

ce qui permet de voir que l'application $\mathbb{R}_+ \ni s \mapsto \varepsilon(t, s)$ est également continue et à variations bornées. Ces remarques permettent d'effectuer les calculs d'intégrations par parties suivants (voir par exemple [5], pages 166 à 172) pour résoudre l'équation (11):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F(t, \widehat{T}^{(t)} \wedge s)] &= \int_{[0, s]} F(t, u)\, d\mathbb{P}[\widehat{T}^{(t)} \leq u] + F(t, s)\mathbb{P}[\widehat{T}^{(t)} > s] \\
&= -\int_{[0, s]} F(t, u)\, dH_u^{(t)} + F(t, s) H_s^{(t)} \\
&= \int_{[0, s]} H_{u-}^{(t)}\, dF(t, u) \\
&= \int_{[0, s]} H_u^{(t)}\, dF(t, u)
\end{aligned}$$

où on a introduit le processus $H^{(t)}$ défini par

$$\forall\, s \geq 0, \qquad H_s^{(t)} = \mathbb{P}[\widehat{T}^{(t)} > s] = 1 - \mathbb{P}[\widehat{T}^{(t)} \leq s].$$

On peut ainsi transformer l'égalité (11) en

$$1 - H_s^{(t)} = \varepsilon(t, s) + \int_{[0, s]} H_u^{(t)}\, dF(t, u).$$

Or $F(t,0)=0=\varepsilon(t,0)$ (puisque la probabilité $m^{(t)}$ est portée par G), d'où $H_0^{(t)}=1$, et en reprenant des notations plus traditionnelles en théorie des processus, on est donc ramené à résoudre

$$\begin{aligned} dH_s^{(t)} &= -d\varepsilon(t,s) - H_s^{(t)}\,dF(t,s),\\ H_0^{(t)} &= 1 \end{aligned}$$

et il est bien connu (du fait de la continuité des fonctions qui interviennent) que la solution de ce problème est donnée par

$$H_s^{(t)} = \exp(-F(t,s)) - \exp(-F(t,s))\int_0^s \exp(F(t,u))\,d\varepsilon(t,u). \tag{12}$$

Pour évaluer le second terme, il est plus commode de l'intégrer aussi par parties:

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^s \exp(F(t,u))\,d\varepsilon(t,u)\right|\\ &\qquad = \left|\exp(F(t,s))\varepsilon(t,s) - \int_0^s \varepsilon(t,u)\exp(F(t,u))\,dF(t,u)\right|\\ &\qquad \le 2\max_{0\le u\le s}|\varepsilon(t,u)|\exp(F(t,s)) \end{aligned}$$

[pour cette dernière inégalité, on a utilisé la croissance de $\mathbb{R}_+ \ni s \mapsto F(t,s)$].

Cependant, les hypothèses (4) et (6) assurent que pour tout $s \ge 0$,

$$\lim_{t\to+\infty}\max_{0\le u\le s}|\varepsilon(t,u)| = 0. \tag{13}$$

En effet, d'après le lemme 2, on a pour tous $t, s \ge 0$,

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{E}\Big[\widetilde{R}_{\beta^{(t)}_{\widetilde{T}^{(t)}\wedge a_t s}}\Big(\widetilde{X}^{(t)}_{\widetilde{T}^{(t)}\wedge a_t s}\Big)\Big]\right| &\le K_6 l\,\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\delta\beta^{(t)}_{\widetilde{T}^{(t)}\wedge a_t s}\Big)\Big]\\ &\le K_6 l\exp\Big(-\delta\min_{u\le a_t s}\beta_u^{(t)}\Big) \end{aligned}$$

et notamment pour $s=0$,

$$\left|\mathbb{E}\big[\widetilde{R}_{\beta_0^{(t)}}(\widetilde{X}_0^{(t)})\big]\right| \le K_6\exp(-\delta\beta_0^{(t)}).$$

Par ailleurs, d'après le corollaire 3,

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{E}\left[\int_0^{\widetilde{T}^{(t)}\wedge a_t s}\left(\frac{\partial}{\partial u}\widetilde{R}_{\beta_u^{(t)}}\right)(\widetilde{X}_u^{(t)})\,du\right]\right| &\le K_{10}l\mathbb{E}\left[\int_0^{\widetilde{T}^{(t)}\wedge a_t s}\exp\big(-\beta_u^{(t)}\delta\big)\left|\frac{d\beta_u^{(t)}}{du}\right|du\right]\\ &= K_{10}l\int_0^s\exp\big(-\beta_{a_t u}^{(t)}\delta\big)\left|\frac{d\beta_{a_t u}^{(t)}}{du}\right|du. \end{aligned}$$

Il apparaît donc que sous les conditions (4) et (6), pour tout $s\ge 0$ fixé,

$$\lim_{t\to+\infty} H_s^{(t)} - \exp(-F(t,s)) = 0.$$

Cette convergence nous amène à considérer les fonctions $F(t,\,\cdot\,)$, et notons que pour $\beta \geq 0$ grand,

$$\begin{aligned}\mu_{\widetilde{M},\,\beta}(y_i) &= \frac{\mu_{G,\,\beta}(x_i)q_\beta(x_i,\,y_i)}{\sum_{1\leq j\leq l}\mu_{G,\,\beta}(x_j)q_\beta(x_j,\,y_j)+1}\\ &= q(x_i,\,y_i)\rho(x_i)\exp(-\beta[U(x_i)+W(x_i,\,y_i)])\\ &\quad+\mathscr{O}(\exp(-\beta[U(x_i)+W(x_i,\,y_i)+\delta']))\\ &= q(x_i,\,y_i)\rho(x_i)\exp(-\beta\widetilde{U}(y_i))(1+\mathscr{O}(\exp(-\beta\delta')))\end{aligned}$$

où $\delta' = \min_{x\in G,\,U(x)\neq 0} U(x) > 0$.

On en déduit que pour tout $t, s \geq 0$,

$$\begin{aligned}F(t,s) &= a_t\int_0^s \sum_{1\leq i\leq l}\mu_{\widetilde{M},\,\beta^{(t)}_{a_tu}}(y_i)\,du\\ &= \Bigl(1+\mathscr{O}\Bigl(\exp\Bigl(-\delta''\min_{u\leq a_ts}\beta^{(t)}_u\Bigr)\Bigr)\Bigr)a_t\sum_{i\in I}q(x_i,\,y_i)\rho(x_i)\\ &\qquad\times\int_0^s\exp(-\beta^{(t)}_{a_tu}\widetilde{U}(y_i))\,du\\ &= \Bigl(1+\mathscr{O}\Bigl(\exp\Bigl(-\delta''\min_{u\leq a_ts}\beta^{(t)}_u\Bigr)\Bigr)\Bigr)a_tR\int_0^s\exp(-\beta^{(t)}_{a_tu}\sigma(M,\,W))\,du\end{aligned}$$

avec $\delta'' = \delta'\wedge[\min_{i\notin I}\widetilde{U}(y_i)-\sigma(M,\,W)]$, et les l'hypothèses (4) et (5) impliquent notamment que pour tout $s \geq 0$ fixé,

$$\lim_{t\to+\infty}F(t,s) = RF(s) \qquad (\leq +\infty).$$

On a donc prouvé que

$$\forall\ s\geq 0,\qquad \lim_{t\to+\infty}H^{(t)}_s = \exp(-RF(s)).$$

Soit maintenant $(t_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante et divergente de réels positifs, telle que $\widehat{T}^{(t_n)}$ converge en loi vers une certaine probabilité ν sur $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Notons $\mathscr{S}'$ l'ensemble des atomes éventuels de cette loi (de toute manière en nombre au plus dénombrable), de telle manière que pour tout $s \in \mathbb{R}_+\setminus\mathscr{S}'$,

$$\lim_{n\to+\infty}H^{(t_n)}_s = \nu([0,s]).$$

On a alors à la limite pour tout $s \notin \mathscr{S}\cup\mathscr{S}'$,

$$\nu([0,s]) = \exp(-R\widetilde{F}(s))$$

et puisque $\mathscr{S}\cup\mathscr{S}'$ est au plus dénombrable et que les deux membres de l'équation ci-dessus sont continus à droite en s, cette égalité est en fait satisfaite pour tout $s \geq 0$, ce qui détermine uniquement la probabilité limite ν et montre finalement la convergence étroite pour t grand de $\widehat{T}^{(t)}$ vers ν_R.

Revenons à l'étude du comportement asymptotique du couple de sortie complet, et considérons pour cela une suite de réels positifs $(t_n)_{n\geq 0}$ strictement croissante et divergente, telle que l'on ait la convergence étroite des $(\widehat{T}^{(t_n)}, \widetilde{Y}^{(t_n)})$ vers une variable aléatoire $(\widehat{T}^{(\infty)}, \widetilde{Y}^{(\infty)})$. D'après ce qui précède, on sait déjà que $\widehat{T}^{(\infty)}$ est de loi ν_R.

Cependant, vu l'expression qui définit les F_i, on vérifie immédiatement que l'on peut les écrire sous la forme, pour tous $0 \leq u \leq s$,

$$F_i(t,u) = \begin{cases} \Bigl(1 + \mathscr{O}\Bigl(\exp\Bigl(-\delta'' \min_{v\leq a_t s} \beta_v^{(t)}\Bigr)\Bigr)\Bigr) r(y_i) F(t,u), & \text{si } i \in I, \\ \mathscr{O}\Bigl(\exp\Bigl(-\delta'' \min_{v\leq a_t s} \beta_v^{(t)}\Bigr)\Bigr) F(t,u), & \text{si } i \notin I. \end{cases}$$

D'autre part, de la même manière que l'on a prouvé (13), on voit que pour tout $1 \leq i \leq l$,

$$\lim_{t\to+\infty} \max_{0\leq u\leq s} |\varepsilon_i(t,u)| = 0.$$

Ainsi l'équation (10) montre que pour tout $s \geq 0$, on a, pour $i \in I$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}[\widehat{T}^{(t_n)} \leq s,\ \widetilde{Y}^{(t_n)} = y_i] - \Bigl(1 + \mathscr{O}\Bigl(\exp\Bigl(-\delta'' \min_{v\leq a_{t_n} s} \beta_v^{(t_n)}\Bigr)\Bigr)\Bigr) r(y_i) \mathbb{E}[F(t_n, \widehat{T}^{(t_n)} \wedge s)] = 0$$

et pour $i \notin I$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}[\widehat{T}^{(t_n)} \leq s,\ \widetilde{Y}^{(t_n)} = y_i] - \mathscr{O}\Bigl(\exp\Bigl(-\delta'' \min_{v\leq a_{t_n} s} \beta_v^{(t_n)}\Bigr)\Bigr) \mathbb{E}[F(t_n, \widehat{T}^{(t_n)} \wedge s)] = 0$$

puis en utilisant (11) et (13), il apparaît que

$$\forall\, i \in I, \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}[\widehat{T}^{(t_n)} \leq s, \widetilde{Y}^{(t_n)} = y_i] - \Bigl(1 + \mathscr{O}\Bigl(\exp\Bigl(-\delta'' \min_{v\leq a_{t_n} s} \beta_v^{(t_n)}\Bigr)\Bigr)\Bigr) r(y_i) \mathbb{P}[\widehat{T}^{(t_n)} \leq s] = 0$$

$$\forall\, i \notin I, \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}[\widehat{T}^{(t_n)} \leq s, \widetilde{Y}^{(t_n)} = y_i] - \mathscr{O}\Bigl(\exp\Bigl(-\delta'' \min_{v\leq a_{t_n} s} \beta_v^{(t_n)}\Bigr)\Bigr) \mathbb{P}[\widehat{T}^{(t_n)} \leq s] = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall\, i \in I, \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}[\widehat{T}^{(t_n)} \leq s,\ \widetilde{Y}^{(t_n)} = y_i] - r(y_i)\mathbb{P}[\widehat{T}^{(t_n)} \leq s] = 0,$$

$$\forall\, i \notin I, \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}[\widehat{T}^{(t_n)} \leq s,\ \widetilde{Y}^{(t_n)} = y_i] = 0.$$

Si de plus on prend $s \geq 0$ en dehors de l'ensemble des atomes de $\widehat{T}^{(\infty)}$, on obtient à la limite pour tout $1 \leq i \leq l$,

$$\mathbb{P}[\widehat{T}^{(\infty)} \leq s,\ \widetilde{Y}^{(\infty)} = y_i] = r(y_i)\mathbb{P}[\widehat{T}^{(\infty)} \leq s] = r(y_i)\nu_R([0,s])$$

relation qui est en fait vérifiée pour tout $s \geq 0$, par continuité à droite, ce qui permet de voir que conditionnellement à l'événement $\{\widehat{T}^{(\infty)} < +\infty\}$, $\widehat{T}^{(\infty)}$ et $\widetilde{Y}^{(\infty)}$ sont indépendants et $\widetilde{Y}^{(\infty)}$ admet r pour loi, c'est-à-dire finalement que la loi du couple $(\widehat{T}^{(\infty)}, \widetilde{Y}^{(\infty)})$ appartient à $\mathscr{P}_R$. □

Sous une condition supplémentaire, on peut déduire de ce théorème un vrai résultat de convergence.

COROLLAIRE 4. *Outre les hypothèses du théorème précédent, supposons que* $\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$. *La loi du couple* $(\widehat{T}^{(t)}, Y^{(t)})$ *converge alors étroitement quand* t *devient grand vers* $\nu_R \otimes r$, *qui, dans cette situation, est une probabilité portée par* $\mathbb{R}_+ \times \{y_i;\ i \in I\}$.

DÉMONSTRATION. En effet, par définition de ν_R, on a clairement les équivalences

$$\nu_R(\{+\infty\}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{t\to+\infty} \widetilde{F}(t) = +\infty$$

et le corollaire découle alors du fait que dans ce cas

$$\mathscr{P}_R = \{\nu_R \otimes r\}. \qquad \square$$

Le théorème 1 et sa démonstration sont susceptibles d'admettre de nombreuses variantes et extensions qui peuvent être utiles dans les applications, nous en donnons quelques exemples ci-dessous.

EXEMPLE 1. Dans la situation des évolutions constantes, où l'on a pour tous $t, s \geq 0$, $\beta_s^{(t)} = \beta_0^{(t)}$ (les processus $\widetilde{X}^{(t)}$ sont alors homogènes), les conditions (4), (5) et (6) sont trivialement équivalentes à $\lim_{t\to+\infty} \beta_0^{(t)} = +\infty$ et on obtient la convergence des temps de sortie renormalisés par $a_t = \exp[\sigma(M, W)\beta_0^{(t)}]$ vers un temps exponentiel $\mathscr{E}(R)$ de moyenne R^{-1}. Si l'espace est continu (une variété riemannienne compacte et connexe par exemple) et les processus homogènes, ce phénomène de convergence vers une loi exponentielle des temps de sortie renormalisés est parfois connu sous le nom d'imprévisibilité du temps de sortie (voir le théorème 3.2 de [15] et les références qui y sont mentionnées).

EXEMPLE 2. Notons que si l'on suppose que les évolutions $\beta^{(t)}$ sont croissantes, alors l'hypothèse (4) se réduit à $\lim_{t\to+\infty} \beta_0^{(t)} = +\infty$ et la condition (6) est automatiquement satisfaite.

Si de plus on sait a priori que F est dérivable sur un ouvert $O \subset \mathbb{R}_+^*$ (voir par exemple la proposition 5 de la section suivante), alors pour tout $s \in O$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} a_t \exp(-\sigma(M, W)\beta_{a_t s}^{(t)}) = f(s)$$

où f est la dérivée de F (cf. le théorème 25.7, page 248, de [21]). Réciproquement, si pour tout $s \geq 0$, ceci est vérifié avec une fonction f continue, alors une application du théorème de Dini montre que cette convergence est uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}_+$ et (5) est satisfait avec $F(s) = \int_0^s f(u)\,du$.

EXEMPLE 3. En reprenant la démonstration du théorème 1, on peut en fait obtenir un critère de finitude p.s. de $\widetilde{T}^{(t)}$: soit $t \geq 0$ fixé, supposons que $\lim_{s\to+\infty} \beta_s^{(t)}$ existe (à valeur dans $\overline{\mathbb{R}_+}$) et que

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\beta_u^{(t)}\delta) \left| \frac{d\beta_u^{(t)}}{du} \right| du < +\infty$$

et

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\beta_u^{(t)}\sigma(M, W))\,du = +\infty.$$

Alors p.s., on a $\widetilde{T}^{(t)} < +\infty$. Ainsi, si outre les conditions du théorème 1, les hypothèses ci-dessus sont satisfaites pour tout t suffisamment grand, alors il est inutile d'introduire le point y_0.

EXEMPLE 4. Il existe d'autres cas que ceux décrits dans le corollaire 4 pour lesquels on peut obtenir une convergence étroite du couple de sortie renormalisé: remplaçons dans les hypothèses du théorème 1 les conditions (4) et (6) par les conditions plus fortes

$$\lim_{t\to+\infty} \inf_{u\geq 0} \beta_u^{(t)} = +\infty, \tag{14}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{\infty} \exp(-\beta_u^{(t)}\delta) \left| \frac{d\beta_u^{(t)}}{du} \right| du = 0. \tag{15}$$

Notons pour tous $t, s \geq 0$,

$$\widetilde{F}(t, s) = \int_0^{a_t s} \exp(-\beta_u^{(t)}\sigma(M, W))\,du$$

posons $\widetilde{F}(t, +\infty) = \lim_{s\to+\infty} \widetilde{F}(t, s) \in \overline{\mathbb{R}_+}$ [resp. $F(+\infty) = \lim_{s\to+\infty} F(s) \in \overline{\mathbb{R}_+}$] et supposons que $\widetilde{F}(t, +\infty)$ converge pour t grand vers une certaine valeur $\widetilde{F}(+\infty, +\infty) \in \overline{\mathbb{R}_+}$. Alors on a la convergence étroite du couple de sortie renormalisé vers $\mathbb{P}_{R,\,\alpha\delta_{y_0}+(1-\alpha)r}$, avec $\alpha = \exp(RF(+\infty) - R\widetilde{F}(+\infty, +\infty)) \in [0, 1]$ [si $F(+\infty) = +\infty$, peu importe la valeur α, puisqu'alors $\nu_R(\{+\infty\}) = 0$].

EXEMPLE 5. Un des intérêts de la preuve du théorème 1 est qu'il est facile d'en déduire des estimées sur les vitesses de convergence à partir de celles intervenant dans les conditions (4), (5) et (6), et que l'on peut l'adapter à des renormalisations plus générales que celles considérées ici par des homothéties de rapports $(1/a_t)_{t\geq 0}$. On peut aussi montrer de meilleures convergences que la simple convergence étroite en renforçant les hypothèses.

Supposons encore que les conditions (14), (15) et (5) soient remplies et faisons de plus les hypothèses que $F(+\infty) = +\infty$ et que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe une constante $K_{11} > 0$ telle que pour tout t assez grand et tout $s \geq 0$, on ait

$$\widetilde{F}(t, s) \geq (1+\varepsilon)^{-1} F(s) - K_{11}. \tag{16}$$

Soit une application continue g: $\mathbb{R}_+ \times \{y_i;\ 1 \leq i \leq l\} \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe deux constantes $K_{12} > 0$ et $0 < \eta < 1$ telles que pour tout $s \geq 0$ et tout y_i, on ait

$$|g(s, y_i)| \leq K_{12}(1 + \exp[\eta R F(s)]).$$

Alors on a la convergence

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[g(\widehat{T}^{(t)}, Y^{(t)})] = (\nu_R \otimes r)(g).$$

Précisons que l'on vérifie souvent les minorations (16) à partir de bonnes majorations des évolutions $\beta^{(t)}$: ainsi si F est absolument continue et si $F(0) = 0$, notons f la dérivée de F, il suffit de trouver deux applications h: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et k: $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = 1 \quad \text{et} \quad \limsup_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} k(t, u)\, du < +\infty$$

et pour lesquelles on a pour tous $t, u \geq 0$,

$$\exp(-\sigma(M, W)\beta_u^{(t)}) \geq \frac{h(t)}{a_t} f\left(\frac{u}{a_t}\right) - k(t, u). \tag{17}$$

EXEMPLE 6. On n'a considéré ici que des processus de Markov à temps continu, néanmoins il n'est pas difficile d'adapter le théorème 1 pour des familles de chaînes de Markov à temps discret. En effet, si Q est une probabilité de transition irréductible et si μ est sa probabilité invariante, alors la solution ψ de l'équation de Poisson associée à une chaîne de Markov de transitions données par Q et à une fonction ϕ:

$$\begin{gathered} (I - Q)(\psi) = \phi - \mu(\phi), \\ \mu(\psi) = 0 \end{gathered}$$

où I est l'application identité, est évidemment la même que celle associée au processus de Markov en temps continu de générateur $L = I - Q$.

Ainsi, on peut appliquer les estimées des sections 2 et 3 au cas du temps discret et on obtient un résultat similaire au théorème 1 [il suffit de remplacer dans les conditions (5) et (6), les intégrales par des sommes].

En fait, si Q est de la forme qui nous intéresse,

$$\forall\, x, y \in G, \qquad Q(x, y) = \begin{cases} \exp(-\beta V(x, y))P(x, y), & \text{si } x \neq y, \\ 1 - \sum_{z \neq x} \exp(-\beta V(x, z))P(x, z), & \text{sinon} \end{cases}$$

où P est une probabilité de transitions irréductible, où V est une fonction de coût compatible avec P et où $\beta \geq 1$ (ou $\beta \geq 0$ si P est apériodique), alors il est aussi possible (cf. [20]) de retranscrire directement les preuves des sections 2 et 3 à partir de la représentation de ψ en termes de chaînes de Markov Z de transitions données par Q:

$$\forall\, x \in G, \qquad \psi(x) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n \in \mathbb{N}} \phi(Z_n) - \mu(\phi)\right].$$

EXEMPLE 7. Enfin précisons que pour toute loi ν sur $\overline{\mathbb{R}_+}$, on peut construire une famille d'évolutions $(\beta^{(t)})_{t \geq 0}$ et une renormalisation $(a_t)_{t \geq 0}$ (un graphe et une fonction de coût étant donnés comme précédemment) telles que la loi limite des temps de sortie renormalisés soit ν. Cependant ceci n'est plus vrai si la famille d'évolutions s'obtient par translations à partir d'une évolution donnée, car alors seuls trois types de lois limites sont possibles, comme on va le voir dans la section suivante.

5. Cas des familles obtenues par translations. Nous allons ici nous intéresser aux familles d'évolutions que l'on obtient en translatant une fonction donnée de classe C^1, puis on explicitera les résultats obtenus, dans les situations particulières que l'on rencontre lorsque l'on étudie certains algorithmes de recuit simulé.

On suppose donc ici de plus que la famille d'évolutions $(\beta^{(t)})_{t \geq 0}$ satisfait

$$\forall\, t, s \geq 0, \qquad \beta_s^{(t)} = \beta_{t+s}^{(0)}$$

et que l'application $s \mapsto \beta_s =_{\text{déf.}} \beta_s^{(0)}$ est de classe C^1.

Remarquons déjà que dans cette situation, la condition (4) est équivalente à la divergence vers l'infini de β_t pour t grand, et on supposera désormais jusqu'à la fin de cette section que cette dernière hypothèse est vérifiée, ce qui nous permettra de ne pas nous soucier de la condition (4).

Par ailleurs, si l'hypothèse (6) est satisfaite pour une renormalisation $(a(t))_{t \geq 0}$, et si

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\sigma(M, W)\beta_u)\, du < +\infty$$

alors on a la convergence étroite du temps de sortie renormalisé vers $\delta_{+\infty}$.

En effet, dans ce cas on a

$$\lim_{t \to +\infty} \int_t^{+\infty} \exp(-\sigma(M, W)\beta_u)\, du = 0$$

et la fonction F qui apparaît dans la condition (5) est donc nécessairement nulle, c'est-à-dire que $\nu_R = \delta_{\{+\infty\}}$. Notamment si de plus on a

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\delta\beta_u) \left|\frac{d\beta_u}{du}\right| du < +\infty,$$

alors l'hypothèse (6) est vérifiée pour toute renormalisation, et on en déduit la convergence étroite du couple de sortie renormalisé vers $\delta_{(+\infty, y_0)}$.

Ainsi, sous les conditions d'application du théorème 1, les cas intéressants à étudier sont donc ceux pour lesquels

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\sigma(M, W)\beta_u)\, du = +\infty \tag{18}$$

[rappelons que si de plus on suppose

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\delta\beta_u) \left|\frac{d\beta_u}{du}\right| du < +\infty,$$

alors les temps de sortie sont p.s. finis d'après l'exemple 3 précédent].

On dira que la renormalisation $(a(t))_{t\geq 0}$ est adaptée au problème de sortie considéré, si outre la validité des conditions (5) et (6), la loi limite ν_R satisfait $\nu_R(\{0\}) = 0$ et $\nu_R(\{+\infty\}) = 0$ (i.e. si la renormalisation n'est ni trop forte, au point d'écraser en 0 beaucoup des valeurs des temps de sortie, ni trop faible, au point de laisser échapper en $+\infty$ beaucoup des valeurs des temps de sortie).

D'une manière générale, cette hypothèse implique aussi qu'asymptotiquement pour t grand, l'évolution $\beta^{(t)}$ finit par permettre aux trajectoires de sortir de G, et que l'on est de plus dans le cas décrit par le corollaire 4. Dans la situation actuelle, ceci assure également la validité de (18).

Le résultat suivant montre que pour une renormalisation adaptée à une famille d'évolutions obtenue par translation, il n'y a que deux types de lois asymptotiques pour les temps de sortie renormalisés.

PROPOSITION 5. *Considérons une famille d'évolutions* $(\beta^{(t)})_{t\geq 0}$ *obtenue comme ci-dessus par translations à partir d'une fonction* β *divergente vers* $+\infty$, *et satisfaisant les conditions* (5) *et* (6), *pour une renormalisation* $(a(t))_{t\geq 0}$ *adaptée au problème. La loi limite* ν_R *des temps de sortie renormalisés est alors soit une loi exponentielle* $\mathscr{E}(\lambda_1)$ *de moyenne* λ_1^{-1}, *avec* $\lambda_1 > 0$, *soit la probabilité* $\mathscr{F}(\lambda_1, \lambda_2)$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *de densité* $x \mapsto \lambda_1\lambda_2(1+\lambda_2 x)^{-\lambda_1 - 1}$, *avec* $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

On verra ultérieurement que réciproquement, toutes ces lois peuvent être obtenues pour un bon choix de l'évolution β et de la fonction de renormalisation a.

DÉMONSTRATION. Comme d'habitude, F désignera l'application limite qui intervient dans la condition (5), l'hypothèse d'adaptivité se traduisant alors par $F_+(0) = 0$ et $F(+\infty) = +\infty$ [pour tout $s \geq 0$, on notera désormais $F_+(s) = \lim_{u\to s_+} F(u)$ et $F_-(s) = \lim_{u\to s_-} F(u)$ [avec $F_-(0) = 0$] et on reprend la convention que $F(+\infty) = \lim_{s\to+\infty} F(s)$].

La preuve repose sur la remarque suivante: soit $s > 0$ fixé et considérons une suite $(t_n)_{n\geq 0}$ croissante et divergente de réels positifs telle que la limite suivante existe dans $\overline{\mathbb{R}_+}$,

$$l(s) = \lim_{n\to+\infty} \frac{a(t_n + a(t_n)s)}{a(t_n)}$$

[$l(s)$ dépend aussi a priori de la suite $(t_n)_{n\geq 0}$].

Alors, pour tout $\tilde{s} > 0$, on a:

(i) Si $l(s) = 0$, $F(s) + F(\tilde{s}) \leq F_+(s)$.

(ii) Si $l(s) \in \mathbb{R}_+^*$,

$$F_-(s + l(s)\tilde{s}) \leq F(s) + F(\tilde{s}) \leq F_+(s + l(s)\tilde{s}). \tag{19}$$

(iii) Si $l(s) = +\infty$, $F(s) + F(\tilde{s}) \geq F(+\infty)$.

En effet, il suffit d'écrire pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\tilde{s} > 0$, l'égalité

$$\int_{t_n}^{t_n+a(t_n)s} b(u)\,du + \int_{t_n+a(t_n)s}^{t_n+a(t_n)s+a(t_n+a(t_n)s)\tilde{s}} b(u)\,du = \int_{t_n}^{t_n+a(t_n)g_n(s,\tilde{s})} b(u)\,du \tag{20}$$

avec

$$\forall\ u \geq 0, \qquad b(u) = \exp(-\sigma(M, W)\beta_u),$$

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ s, \tilde{s} > 0, \qquad g_n(s, \tilde{s}) = s + \frac{a(t_n + a(t_n)s)}{a(t_n)}\tilde{s}.$$

Ainsi par exemple dans le cas où $l(s) \in \mathbb{R}_+^*$, il apparaît que

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(s, \tilde{s}) = s + l(s)\tilde{s}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, pour n assez grand, on peut donc encadrer le terme de gauche de (20) par

$$\begin{aligned}\int_{t_n}^{t_n+a(t_n)(s+l(s)\tilde{s}-\varepsilon)_+} b(u)\,du &\leq \int_{t_n}^{t_n+a(t_n)s} b(u)\,du + \int_{t_n+a(t_n)s}^{t_n+a(t_n)s+a(t_n+a(t_n)s)\tilde{s}} b(u)\,du \\ &\leq \int_{t_n}^{t_n+a(t_n)(s+l(s)\tilde{s}+\varepsilon)} b(u)\,du.\end{aligned}$$

En passant à la limite pour n grand on voit que

$$F((s + l(s)\tilde{s} - \varepsilon)_+) \leq F(s) + F(\tilde{s}) \leq F(s + l(s)\tilde{s} + \varepsilon)$$

et en faisant tendre ε vers 0, on obtient le résultat annoncé.

Les cas où $l(s) = 0$ ou $l(s) = +\infty$ se traitent d'une manière similaire.

Notons que si $l(s) = +\infty$, alors $F(s) = +\infty$, du fait que $F(+\infty) = +\infty$ et que l'on a $F(\tilde{s}) < +\infty$ pour $\tilde{s}$ assez petit [car $F_+(0) = 0$]. De même si $l(s) = 0$, il apparaît en faisant tendre $\tilde{s}$ vers $+\infty$ que $F_+(s) = +\infty$.

Soit $S = \inf\{s \geq 0 \,/\, F(s) = +\infty\} \leq +\infty$, sous nos hypothèses, on a déjà $S > 0$, car $S = 0$ équivaut à dire que $\nu_R = \delta_0$. Par ailleurs, d'après les remarques ci-dessus, il est clair que pour tout $0 < s < S$, $l(s) \in \mathbb{R}_+^*$, ainsi en fixant un tel s, en utilisant le fait que l'on a aussi

$$S = \inf\{s \geq 0/F_-(s) = +\infty\} = \inf\{s \geq 0/F_+(s) = +\infty\}$$

et en tenant compte de (19), on obtient que $s + l(s)S = S$.

Montrons par l'absurde que l'on a $S = +\infty$. En effet, si $S < +\infty$, la formule précédente montre que pour tout $0 < s < S$ fixé, $l(s) = S^{-1}(S - s)$, et cette quantité est donc indépendante de la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ choisie, d'où en fait

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{a(t + a_t s)}{a(t)} = l(s).$$

Soit $\rho(s) = (1+l(s))/2$, de manière à ce que $l(s) < \rho(s) < 1$, et $\widetilde{t_0} \geq 0$ tel que pour tout $t \geq \widetilde{t_0}$, on ait $a(t + a(t)s) \leq \rho(s)a(t)$. Pour tout $t_0 \geq \widetilde{t_0}$, considérons la suite croissante $(t_n)_{n\geq 0}$ construite à partir de la récurrence suivante

$$t_{n+1} = t_n + a(t_n)s.$$

On a alors $a(t_{n+1}) \leq \rho(s)a(t_n)$, d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a(t_n) \leq \rho(s)^n a(t_0)$$

[la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ est donc majorée par $t_0 + a(t_0)(1 - \rho(s))^{-1}s$], ce qui implique que

$$\lim_{n\to+\infty} a(t_n) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $t_0 \geq \widetilde{t_0}$, on en déduit facilement que

$$\liminf_{t\to+\infty} a(t) = 0$$

ce qui est en contradiction avec le fait que nécessairement $\lim_{t\to+\infty} a(t) = +\infty$ pour une renormalisation adaptée, d'où finalement $S = +\infty$.

Soit $s > 0$ fixé, on a alors $l(s) \in \mathbb{R}_+^*$, et puisque $F_+(0) = 0$ et

$$\lim_{\tilde{s}\to 0_+} F_-(s + l(s)\tilde{s}) = F_+(s),$$

$$\lim_{\tilde{s}\to 0_+} F_+(s + l(s)\tilde{s}) = F_+(s)$$

on obtient, en passant à la limite dans (19), que $F_+(s) \leq F(s) \leq F_+(s)$, c'est-à-dire que F est continue sur $\mathbb{R}_+$, ce qui montre que pour tous $s, \tilde{s} > 0$, on a en fait,

$$F(s) + F(\tilde{s}) = F(s + l(s)\tilde{s}). \tag{21}$$

Par construction, la fonction F est toujours croissante, mais commençons par remarquer qu'elle est ici strictement croissante. En effet, s'il existait $s_2 > s_1 > 0$ tels que $F(s_2) = F(s_1)$, l'équation (21) considérée avec $s = s_1$ et $\tilde{s}$ suffisamment petit montrerait que pour de tels $\tilde{s}$ on a $F(\tilde{s}) = 0$. L'application F serait notamment dérivable à droite en 0 et on aurait $F'_{\mathrm{d}}(0) = 0$. Cependant à partir de l'égalité (21) on montre alors facilement que F serait dérivable à droite sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout $s > 0$, $0 = F'_{\mathrm{d}}(0) = F'_{\mathrm{d}}(s)l(s)$, ce qui, du fait que $l(s) > 0$, implique que $F'_{\mathrm{d}}(s) = 0$, puis que F est identiquement nulle, d'où la contradiction recherchée, car ceci équivaut à $\nu_R = \delta_{+\infty}$.

Puisque $F(0) = 0$ et que $\lim_{s\to+\infty} F(s) = +\infty$ [sinon $\nu_R(\{+\infty\}) > 0$], on voit que F est en fait un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$, et l'équation (21) détermine uniquement $l(s)$: pour tous $s, \tilde{s} > 0$, on a

$$l(s) = \frac{F^{-1}(F(s) + F(\tilde{s})) - s}{\tilde{s}} \tag{22}$$

[cette quantité ne dépend donc pas de la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ choisie et on a $\lim_{t\to+\infty} a(t + a(t)s)/a(t) = l(s)$].

De plus, si on fixe un $\tilde{s} > 0$, cette expression montre que l'application $]0, +\infty[\ni s \mapsto l(s)$ est continue, et en faisant tendre s vers 0, on voit que $\lim_{s\to 0_+} l(s) = 1$. On peut donc prolonger l en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ en posant $l(0) = 1$.

Montrons maintenant par l'absurde que F est dérivable à droite en 0, en supposant que

$$0 \leq \liminf_{s\to 0_+} \frac{F(s)}{s} < \limsup_{s\to 0_+} \frac{F(s)}{s} \leq +\infty.$$

Il existe alors deux réels $a, b > 0$ tels que $\liminf_{s\to 0_+} F(s)/s < a < b < \limsup_{s\to 0_+} F(s)/s$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)a < b$ et $\tilde{s} > 0$ tel que $0 < s < \tilde{s} \Rightarrow 1 \leq l(s) \leq 1 + \varepsilon$.

Considérons un $0 < s_1 < \tilde{s}$ tel que $F(s_1)/s_1 \geq b$, et définissons une suite $(s_n)_{n\geq 1}$ par la récurrence $s_{n+1} = s_n + l(s_n)s_1$. Pour tout $n \geq 1$, on a alors

$$F(s_{n+1}) = F(s_n) + F(s_1) = (n+1)F(s_1) \geq (n+1)bs_1.$$

Soit $N(s_1) = \inf\{n \,/\, s_{n+1} > \tilde{s}\}$. Du fait que sur $[0, \tilde{s}]$ on a $l(s) \leq 1 + \varepsilon$, il apparaît que pour tout $1 \leq n \leq N$, $s_{n+1} \leq s_n + (1+\varepsilon)s_1 \leq (n+1)(1+\varepsilon)s_1$. Ainsi on a

$$N(s_1) \geq \frac{\tilde{s}}{(1+\varepsilon)s_1}.$$

Cependant, on peut minorer $F(\tilde{s})$ par

$$F(\tilde{s}) \geq F(s_{N(s_1)}) \geq N(s_1)bs_1 \geq (1+\varepsilon)^{-1}b\tilde{s}.$$

D'une manière similaire, en considérant des s_1 proches de 0 tels que $F(s_1)/s_1 \leq a$, on montre que

$$F(\tilde{s}) \leq a\tilde{s}$$

ce qui nous fournit une contradiction.

Ainsi $\lim_{s\to 0_+} F(s)/s$ existe et la preuve ci-dessus permet également de se convaincre que la limite appartient à $\mathbb{R}_+^*$ [en effet, si la limite était nulle, on en déduirait que $F(\tilde{s}) = 0$, et si elle était $+\infty$, il resortirait que $F(\tilde{s}) = +\infty$].

L'application F est donc dérivable à droite en 0 et via (21) on en déduit qu'elle est dérivable à droite sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout $s \geq 0$, $F'_d(s) = F'_d(0)/l(s)$.

Il apparaît donc que F'_{d} est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on déduit immédiatement que F est en fait de classe C^1 et que pour tous $s, \tilde{s} > 0$, on a

$$F'(\tilde{s}) = F'(s + l(s)\tilde{s})l(s). \tag{23}$$

De plus, du fait que F' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, l'application réciproque F^{-1} est également de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, ainsi en réécrivant (22) sous la forme

$$F'(s) = \frac{F'(0)\tilde{s}}{F^{-1}(F(s) + F(\tilde{s})) - s}$$

pour un $\tilde{s} > 0$ fixé, il apparaît que F' est de classe C^1, c'est-à-dire que F est de classe C^2 (puis par récurrence on prouverait que F est de classe C^∞).

En dérivant (à droite) l'égalité (23) en $\tilde{s} = 0$, on voit alors que pour tout $s \geq 0$,

$$F''(0) = F''(s)\left(\frac{F'(0)}{F'(s)}\right)^2$$

et cette équation différentielle s'intègre immédiatement pour montrer que pour tout $s \geq 0$,

$$\frac{1}{F'(s)} = -\frac{F''(0)}{(F'(0))^2}s + \frac{1}{F'(0)}.$$

Le fait que F' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ permet alors de voir (en faisant tendre s vers $+\infty$) que $F''(0) \leq 0$. Distinguons deux cas:

(i) Si $F''(0) = 0$, la condition $F(0) = 0$ montre que F est donnée par

$$\forall\, s \geq 0, \qquad F(s) = F'(0)s$$

ce qui assure que ν_R est une loi exponentielle de moyenne $\lambda_1^{-1} = (RF'(0))^{-1}$.

(ii) Si $F''(0) < 0$, la condition $F(0) = 0$ implique que pour tout $s \geq 0$, on a

$$F(s) = -\frac{(F'(0))^2}{F''(0)} \ln\left[1 - \frac{F''(0)}{(F'(0))^3}s\right]$$

et on obtient que $\nu_R = \mathscr{F}(\lambda_1, \lambda_2)$, avec $\lambda_1 = -R(F'(0))^2(F''(0))^{-1}$ et $\lambda_2 = -(F'(0))^{-3}F''(0)$. $\square$

Remarque 1. Pour la fin de la preuve ci-dessus, il n'était pas nécessaire de faire intervenir la dérivée seconde de F, on aurait pu se contenter d'écrire que pour tout $a > 0$ fixé et tout $s \geq 0$,

$$F(s + l(s)a) = F(s) + F(a) = F(a + l(a)s)$$

et utiliser la bijectivité de F pour voir que

$$F'(s) = \frac{F'(0)}{l(s)} = \frac{aF'(0)}{a + (l(a) - 1)s}.$$

Ainsi par exemple dans le cas où $\nu_R = \mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2)$, on obtient plutôt les valeurs des paramètres λ_1 et λ_2 en termes de $F'(0)$ et $F'(a)$:

$$\lambda_1 = Ra\frac{F'(0)F'(a)}{F'(0) - F'(a)},$$
$$\lambda_2 = \frac{F'(0) - F'(a)}{aF'(a)}.$$

REMARQUE 2. Soient $(a(t))_{t\geq 0}$ et $(\widetilde{a}(t))_{t\geq 0}$ deux familles de renormalisation adaptées. En considérant un point d'adhérence (dans $\overline{\mathbb{R}_+}$) de $\widetilde{a}(t)/a(t)$ et la forme des lois limites, on se rend compte des résultats suivants: il existe $\lambda > 0$ tel que pour t grand $\widetilde{a}(t) \sim \lambda a(t)$, et si $\mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2)$ [respectivement $\mathcal{E}(\lambda_1)$] est la loi limite ν_R obtenue à partir de la renormalisation $(a(t))_{t\geq 0}$, alors $\mathcal{F}(\lambda_1, \lambda\lambda_2)$ [respectivement $\mathcal{E}(\lambda\lambda_1)$] est la loi limite obtenue à partir de $(\widetilde{a}(t))_{t\geq 0}$.

REMARQUE 3. La démonstration précédente a permis de voir que pour tout $s > 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{a(t + a(t)s)}{a(t)} = \frac{F'(0)}{F'(s)} \tag{24}$$

ce qui permet de restreindre a priori le type de renormalisations adaptées. Plus généralement, on vérifierait en reprenant cette preuve que si $\mathbb{R}_+ \ni t \to s(t) \in \mathbb{R}_+$ est une application telle que $\lim_{t\to+\infty} s(t) = s$, alors

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{a(t + a(t)s(t))}{a(t)} = \frac{F'(0)}{F'(s)}$$

ce qui revient à dire que la convergence (24) est uniforme en s sur les compacts de $\mathbb{R}_+$.

Cette dernière remarque permet en fait d'obtenir la proposition suivante.

PROPOSITION 6. (i) *Sous les hypothèses de la proposition* 5, *supposons que* $\nu_R = \mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2)$, *alors pour t grand on a* $a(t) \sim \lambda_2 t$, *il suffit donc dans ces cas de considérer la renormalisation donnée par* $a(t) = t$.

(ii) *Supposons de plus que* β *finisse par être croissant*, *alors pour toute fonction borélienne* G *sur* $\mathbb{R}_+$ *dont l'ensemble des points de discontinuité est négligeable pour la mesure de Lebesgue et qui est majorée pour s grand par* $|G(s)| \leq s^{\eta\lambda_1}$ *avec* $0 < \eta < 1$, *on a*

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[G(\widehat{T}^{(t)})] = \mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2)(G).$$

DÉMONSTRATION. D'après la remarque (2) précédente et le lemme 9 ci-dessous, on peut supposer que $t \to a(t)$ est continue et on en déduit immédiatement que pour tout $s \geq 0$, $\limsup_{t\to+\infty} a(t + a(t)s)/(t + a(t)s) = \limsup_{t\to+\infty} a(t)/t$.

Ecrivons maintenant que

$$\begin{aligned}1+\lambda_2 s &= \lim_{t\to+\infty}\frac{a(t+a(t)s)}{a(t)}\\&= \lim_{t\to+\infty}\frac{a(t+a(t)s)}{t+a(t)s}\frac{t+a(t)s}{a(t)}\\&\geq \limsup_{t\to+\infty}\frac{a(t+a(t)s)}{t+a(t)s}s\\&= \limsup_{t\to+\infty}\frac{a(t)}{t}s\end{aligned}$$

ce qui montre que $\limsup_{t\to+\infty} a(t)/t \leq (1+\lambda_2 s)/s$, et ceci étant satisfait pour tout $s>0$, on obtient déjà que $\limsup_{t\to+\infty} a(t)/t \leq \lambda_2$.

Pour la minoration de $\liminf_{t\to+\infty} a(t)/t$, soit $\varepsilon_1>0$ fixé, posons $s=\lambda_2^{-1}\varepsilon_1+1$ et choisissons $S>s$ et $t_0>0$ suffisamment grands de telle manière que pour tout $t\geq t_0$, on ait

$$t+a(t)s+a(t+a(t)s)\leq t+a(t)S$$

[de tels S et t_0 existent bien, car cette inégalité équivaut à $a(t+a(t)s)/a(t)\leq S-s$].

Nous laissons le lecteur vérifier que le choix de s permet de trouver $\varepsilon_2>0$ suffisamment petit tel que pour tout $s\leq u\leq S$ et tout $x\geq 0$, on soit assuré de

$$\frac{1+\lambda_2 u-\varepsilon_2}{x+u}\geq\frac{1+\varepsilon_1}{x}\wedge(\lambda_2-\varepsilon_1).$$

Soit $t_1\geq t_0$ tel que pour tout $t\geq t_1$ et tout $s\leq u\leq S$, on ait $a(t+a(t)u)/a(t)\geq 1+\lambda_2 u-\varepsilon_2$, ce qui permet alors d'avoir,

$$\frac{a(t+a(t)u)}{t+a(t)u}\geq\frac{\lambda_2+u-\varepsilon_2}{t/a(t)+u}\geq\left((1+\varepsilon_1)\frac{a(t)}{t}\right)\wedge(\lambda_2-\varepsilon_1).$$

En considérant la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ satisfaisant $t_{n+1}=t_n+a(t_n)s$ pour tout $n\geq 1$, on montre facilement par récurrence à partir des estimées précédentes que pour tout $n\geq 2$, et tout $t_n\leq t\leq t_{n-1}+a(t_{n-1})S$, on a $a(t)/t\geq((1+\varepsilon_1)^{n-1}a(t_1)/t_1)\wedge(\lambda_2-\varepsilon_1)$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}t_n=+\infty$ puis qu'en fait

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{a(t)}{t}\geq\lambda_2-\varepsilon_1$$

c'est-à-dire finalement, ε_1 étant arbitrairement petit, que

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{a(t)}{t}\geq\lambda_2$$

d'où le premier résultat annoncé.

Quant au second, du fait que $\mathscr{F}(\lambda_1,\lambda_2)$ est équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, il serait classique si G était bornée, et pour le montrer avec l'hypothèse moins forte de bornitude donnée, il suffit de pouvoir appliquer l'exemple 5 de la fin de la section précédente.

Cependant la croissance de β implique que pour tout $s > 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} R\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}(1+\lambda_2 s)a(t)\exp(-\sigma(M, W)\beta_{t+a(t)s}) = 1$$

or $a(t)(\lambda_2^{-1}+s) \sim t + a(t)s$ et la limite précédente peut donc aussi s'écrire

$$\lim_{t\to+\infty} t\exp(-\sigma(M, W)\beta_t) = R^{-1}\lambda_1$$

ce qui permet de voir qu'il existe une application h: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{t\to+\infty} h(t) = 1$ et pour laquelle l'inégalité (17) est vérifiée avec $k \equiv 0$. □

Si l'évolution β finit par être croissante, on vient de voir que $\nu_R = \mathscr{F}(\lambda_1, \lambda_2)$ implique que pour t grand, $\exp(-\sigma(M, W)\beta_t) \sim R^{-1}\lambda_1 t^{-1}$ et $a(t) \sim \lambda_2 t$ [notamment λ_1 ne dépend pas de la renormalisation adaptée choisie et d'après le point (ii) de la proposition, cette quantité mesure la force de la tension des lois $\widetilde{T}^{(t)}/a(t)$], mais il est clair que la réciproque est vraie également.

En reprenant la première partie de la preuve du point (i) de la proposition précédente, on voit immédiatement que si la loi limite est $\nu_R = \mathscr{E}(\lambda_1)$, alors pour t grand $a(t) \ll t$. Si de plus l'évolution β finit par être croissante, alors

$$\lim_{t\to+\infty} a(t)\exp(-\sigma(M, W)\beta_{t+a(t)s}) = R^{-1}\lambda_1$$

ce qui s'écrit aussi, en tenant compte de (24),

$$\lim_{t\to+\infty} a(t)\exp(-\sigma(M, W)\beta_t) = R^{-1}\lambda_1.$$

On pourrait conjecturer que ceci implique comme ci-dessus que l'inégalité (16) est satisfaite, mais c'est faux comme on peut le vérifier sur l'exemple donné à la fin de cette section (dans le cas où $b < 0$). Néanmoins, sous certaines conditions on peut montrer une tension forte des lois des $\widetilde{T}^{(t)}/a(t)$.

PROPOSITION 7. *Outre les hypothèses de la proposition* 5, *supposons que*

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\delta\beta_u)\left|\frac{d\beta_u}{du}\right| du < +\infty$$

et que $\nu_R = \mathscr{E}(\lambda_1)$. *Soit* $(t_n)_{n\geq 0}$ *une suite croissante et divergente de* $\mathbb{R}_+$ *pour laquelle il existe une constante* $M \geq 1$ *telle que pour tout* n, $a(t_n)/t_n \geq M^{-1}\max_{t\geq t_n} a(t)/t$. *Alors pour toute fonction continue* G *à croissance au plus polynômiale en l'infini, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[G(\widehat{T}^{(t_n)})] = \mathscr{E}(\lambda_1)(G).$$

Notamment on peut toujours trouver une suite $(t_n)_{n\geq 0}$ *telle que ceci soit satisfait, et si l'application* $\mathbb{R}_+^* \ni t \mapsto a(t)/t$ *finit par être décroissante, ou si*

$t \mapsto a(t)$ est dérivable et satisfait pour une constante $M \geq 1$ et tout t assez grand, $\sup_{\tilde{t}\geq t} a'(\tilde{t}) \leq Ma(t)/t$, *alors pour toute fonction G comme ci-dessus,*

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[G(\widehat{T}^{(t)})] = \mathscr{E}(\lambda_1)(G).$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $n \geq 0$ fixé, construisons par récurrence la suite $(t_n^{(p)})_{p\geq 0}$ en posant $t_n^{(0)} = t_n$ et pour tout $p \geq 0$, $t_n^{(p+1)} = t_n^{(p)} + a(t_n^{(p)})$. Par hypothèse sur t_n, on a

$$t_n^{(p+1)} \leq \left(1 + M\frac{a(t_n)}{t_n}\right)t_n^{(p)} \leq \left(1 + M\frac{a(t_n)}{t_n}\right)^{p+1} t_n.$$

Soit $S \geq 1$, et notons $N_n(S) = \sup\{p \geq 0/t_n^{(p+1)} \leq t_n + a(t_n)S\}$, on déduit de ce qui précède que

$$N_n(S) \geq \frac{\ln(1+\varepsilon_n S)}{\ln(1+M\varepsilon_n)} - 2$$

avec $\varepsilon_n = a(t_n)/t_n$.

Cependant, soit $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \geq t_{n_0}$,

$$\int_t^{t+a(t)} \exp(-\sigma(M,W)\beta_u)\,du \geq \frac{\lambda_1}{2R}$$

de telle manière que

$$\begin{aligned}\int_{t_n}^{t_n+a(t_n)S} \exp(-\sigma(M,W)\beta_u)\,du &\geq \sum_{p=0}^{N_n(S)} \int_{t_n^{(p)}}^{t_n^{(p)}+a(t_n^{(p)})} \exp(-\sigma(M,W)\beta_u)\,du \\ &\geq \frac{\lambda_1}{2R} N_n(S).\end{aligned}$$

Soit $A > 0$, montrons qu'il existe $S_0 \geq 1$ et $n_1 \geq n_0$ tels que pour tout $S \geq S_0$ et tout $n \geq n_1$,

$$N_n(S) \geq A\ln(1+S).$$

En effet, posons $\phi_n(S) = \ln(1+\varepsilon_n S) - (A\ln(1+S)+2)\ln(1+M\varepsilon_n)$, en calculant la dérivée de ϕ_n, on voit que si ε_n est suffisamment petit (i.e. n assez grand), alors pour $S \geq AM$, ϕ_n est croissant, or en choisissant $S_0 > AM$ tel que $S_0 - M(A\ln(1+S_0)+2) > 0$, on voit que pour n assez grand $\phi_n(S_0) > 0$, d'où le résultat annoncé.

Par ailleurs, pour $s \in [0, S_0]$, la convergence de $\int_{t_n}^{t_n+a(t_n)s} \exp(-\sigma(M,W)\beta_u)\,du$ vers $R^{-1}\lambda_1 s$ est uniforme, et en regroupant les résultats précédents, il apparaît donc qu'il existe une constante $K_{13} > 0$ telle que pour tout $n \geq n_1$ et tout $s \geq 0$,

$$\widetilde{F}(t_n, s) \geq \frac{A\lambda_1}{2R}\ln(1+s) - K_{13}$$

ce qui, par des arguments similaires à ceux qui amènent à l'exemple 5 de la section précédente, permet de voir que si G est une fonction à croissance au plus polynômiale, alors l'expression $\mathbb{E}[G(\widehat{T}^{(t_n)})]$ reste bornée, et la première partie de la proposition en découle de manière classique.

Quant à la seconde affirmation, le cas où $t \mapsto a(t)/t$ finit par être décroissant est immédiat à traiter, et si $t \mapsto a(t)$ est dérivable, il suffit d'écrire que pour $s \geq t$ et t assez grand,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{a(s)}{s}\right) = \frac{1}{s}\left(a'(s) - \frac{a(s)}{s}\right) \leq \frac{1}{s}\left(M\frac{a(t)}{t} - \frac{a(s)}{s}\right)$$

et d'intégrer en $t \leq s \leq \tilde{t}$ pour obtenir $a(\tilde{t})/\tilde{t} \leq Ma(t)/t$. □

En fait la seconde assertion de cette proposition n'est pas optimale: faisons l'hypothèse supplémentaire que l'évolution β finisse par croître, on peut alors supposer que $a(t) = R^{-1}\lambda_1 \exp(\sigma(M, W)\beta_t)$, car la conclusion est indépendante des renormalisations à une équivalence près entre elles. Cependant pour l'obtenir, on voit d'après (17) qu'il suffit de trouver pour tout $A > 0$ deux constantes $K_{14} > 0$ et $S_0 > 0$ telles que pour tout t assez grand et $s \geq S_0$, on ait $a(t + a_t s) \leq a(t)A^{-1}(1 + s)$, ce qui s'obtient facilement en dérivant en s, sous l'hypothèse que $\lim_{t\to+\infty} a'(t) = 0$ [qui est notamment réalisée si de plus on sait que $t \mapsto a(t)$ finit par être concave, car rappelons que l'on doit avoir ici pour t grand $a(t) \ll t$], qui est un peu moins forte que la condition $a'(t) \leq a(t)/t$ ou plus généralement $\sup_{s\geq t} a'(s) \leq Ma(t)/t$ pour une certaine constante $M \geq 1$ et pour tout t assez grand, permettant d'appliquer la proposition précédente.

Par ailleurs, mais toujours dans le cas d'évolutions obtenues par translations, les lois limites des temps de sortie renormalisés par des homothéties qui ne sont pas adaptées sont en fait portées par $\{0, +\infty\}$, il s'agit donc en quelque sorte de très mauvaises renormalisations.

PROPOSITION 8. *Considérons une famille d'évolutions* $(\beta^{(t)})_{t\geq 0}$ *comme précédemment et satisfaisant les conditions* (5) *et* (6) *pour une renormalisation* $(a(t))_{t\geq 0}$ *non adaptée au problème. Il existe alors une constante* $0 \leq \alpha \leq 1$ *telle que* $\nu_R = \alpha\delta_0 + (1 - \alpha)\delta_{+\infty}$.

DÉMONSTRATION. Rappelons que si $\liminf_{t\to+\infty} a(t) < +\infty$, alors $\nu_R = \delta_{+\infty}$, ainsi on supposera pour la fin de cette preuve que $\lim_{t\to+\infty} a(t) = +\infty$. Pour tout $s > 0$, on désignera à nouveau par $l(s)$ une valeur d'adhérence pour t grand de la quantité $a(t)^{-1}a(t + a(t)s)$. Comme on l'a vu dans la démonstration de la proposition 5, on a nécessairement $l(s) \in [1, +\infty]$, car l'existence d'un $s > 0$ tel que $l(s) < 1$ est contradictoire avec le fait que $\lim_{t\to+\infty} a(t) = +\infty$. On s'intéresse séparément aux trois cas qui peuvent se présenter suivant les valeurs possibles de $F_+(0)$ et $F(+\infty)$:

(i) Si $F_+(0) \in \mathbb{R}_+^* \sqcup \{+\infty\}$ et $F(+\infty) = +\infty$, montrons par l'absurde que $F_+(0) = +\infty$, en supposant que $F_+(0) \in \mathbb{R}_+^*$.

En reprenant le début de la preuve de la proposition 5, on obtient les résultats suivants:

1. Si $l(s) \in [1, +\infty[$, alors (19) est satisfait pour tout $\tilde{s} > 0$, ainsi en faisant tendre $\tilde{s}$ vers 0, on voit que, soit $F(s) = +\infty$, soit $\triangle F(s) = F_+(s) - F_-(s) \geq F_+(s) - F(s) = F_+(0)$.
2. Si $l(s) = +\infty$, alors pour tout $\tilde{s} > 0$, on a $F(s) + F(\tilde{s}) \geq F(+\infty) = +\infty$, ainsi en faisant tendre $\tilde{s}$ vers 0 on obtient $F(s) = +\infty$.

Soit alors $s_0 > 0$ suffisamment petit tel que $F(s_0) < +\infty$, il ne peut exister qu'un nombre fini de valeurs de $0 < s < s_0$ telles que $\triangle F(s) \geq F_+(0)$, cependant pour les autres $0 < s < s_0$ on a nécessairement $F_+(s) = +\infty$, ce qui implique en fait que $F(s_0) = +\infty$, d'où la contradiction cherchée.

En fin de compte, on a donc $F_+(0) = +\infty$, c'est-à-dire $\nu_R = \delta_0$.

(ii) Si $F_+(0) = 0$ et $F(+\infty) < +\infty$, comme précédemment, il apparaît que:

1. Si $l(s) \in [1, +\infty[$, alors (19) est satisfait pour tout $\tilde{s} > 0$, ainsi en faisant tendre $\tilde{s}$ vers $+\infty$, on voit que $F(s) = 0$, et d'autre part en faisant tendre $\tilde{s}$ vers 0, on réalise que $F_+(s) = F(s) = 0$.
2. Si $l(s) = +\infty$, alors pour tout $\tilde{s} > 0$, on a $F(s) + F(\tilde{s}) \geq F(+\infty)$, ainsi en faisant tendre $\tilde{s}$ vers 0, on obtient $F(s) = F(+\infty)$.

De ces constatations, il resort, en considérant par exemple $S = \inf\{s > 0 \,/\, F(s) = F(+\infty)\}$, que nécessairement $S = 0$ et que $F(+\infty) = F_+(0) = 0$, d'où $\nu_R = \delta_{+\infty}$.

(iii) Si $F_+(0) > 0$ et $F(+\infty) < +\infty$, on vérifie comme ci-dessus que si $l(s) \in [1, +\infty[$, alors $\triangle F(s) \geq F_+(0)$. Il en découle immédiatement qu'il existe un ensemble fini $\mathscr{S} \subset \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathscr{S}$,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{a(t + a(t)s)}{a(t)} = +\infty.$$

Soient $s_1, s_2 > 0$ et $s_3 > 0$ tels que $s_2 > s_1$, $s_2 \notin \mathscr{S}$ et $\triangle F(s_3) = 0$. Montrons que

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{t+a(t)s_1+a(t+a(t)s_2)s_3}^{t+a(t)s_2+a(t+a(t)s_2)s_3} b(u)\,du = 0.$$

En effet, soit $0 < s_4 < s_3$, puisque pour t grand on a $a(t + a(t)s_2) \gg a(t)$, il apparaît que

$$\begin{aligned} &t + a(t)s_1 + a(t + a(t)s_2)s_3 - (t + a(t)s_2 + a(t + a(t)s_2)s_4) \\ &\quad = a(t)(s_1 - s_2) + a(t + a(t)s_2)(s_3 - s_4) \to +\infty \quad \text{si } t \to +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi pour t assez grand,

$$\begin{aligned} &\int_{t+a(t)s_1+a(t+a(t)s_2)s_3}^{t+a(t)s_2+a(t+a(t)s_2)s_3} b(u)\,du \\ &\quad \leq \int_{t+a(t)s_2+a(t+a(t)s_2)s_4}^{t+a(t)s_2+a(t+a(t)s_2)s_3} b(u)\,du \\ &\quad = \int_{t+a(t)s_2}^{t+a(t)s_2+a(t+a(t)s_2)s_3} b(u)\,du - \int_{t+a(t)s_2}^{t+a(t)s_2+a(t+a(t)s_2)s_4} b(u)\,du \end{aligned}$$

or le terme de droite tend pour t grand vers $F(s_3) - F(s_4)$, et on conclut en utilisant le fait que $\triangle F(s_3) = 0$.

Pour tout $t \geq 0$ écrivons alors que

$$\begin{aligned}
&\int_t^{t+a(t)s_2} b(u)\,du + \int_{t+a(t)s_2}^{t+a(t)s_2+a(t+a(t)s_2)s_3} b(u)\,du \\
&\quad = \int_t^{t+a(t)s_1} b(u)\,du + \int_{t+a(t)s_1}^{t+a(t)s_1+a(t+a(t)s_1)(a(t+a(t)s_2)/a(t+a(t)s_1))s_3} b(u)\,du \\
&\qquad + \int_{t+a(t)s_1+a(t+a(t)s_2)s_3}^{t+a(t)s_2+a(t+a(t)s_2)s_3} b(u)\,du
\end{aligned} \tag{25}$$

ce qui nous invite à considérer $g(s_2, s_1)$ une valeur d'adhérence pour t grand de $a(t + a(t)s_2)/a(t + a(t)s_1)$ et une suite de $\mathbb{R}_+$ croissante et divergente $(t_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a(t_n + a(t_n)s_2)}{a(t_n + a(t_n)s_1)} = g(s_2, s_1) \ \in \overline{\mathbb{R}_+}.$$

En prenant alors $t = t_n$ dans (25) et en passant à la limite pour n grand, on obtient

$$F(s_1) + F_-(g(s_2, s_1)s_3) \leq F(s_2) + F(s_3) \leq F(s_1) + F_+(g(s_2, s_1)s_3) \tag{26}$$

[avec la convention que $F_-(0) = 0$ et $F_+(+\infty) = +\infty$, et en fait on vérifierait sans peine que ces inégalités sont satisfaites pour tout $s_1 > 0$], puis on discute suivant les valeurs de $g(s_2, s_1)$:

1. Ainsi si $g(s_2, s_1) = 0$, en faisant tendre s_3 vers $+\infty$ [ce qui est possible car l'ensemble des s_3 tels que $\triangle F(s_3) > 0$ est au plus dénombrable], il apparaît que

$$F(s_2) + F(+\infty) \leq F(s_1) + F_+(0)$$

c'est-à-dire $F(s_2) = F_+(0)$ et $F(s_1) = F(+\infty)$, puis $F_+(0) = F(+\infty)$.

2. Si $g(s_2, s_1) \in \mathbb{R}_+^*$, en faisant à nouveau tendre s_3 vers $+\infty$, on voit que

$$F(s_1) + F(+\infty) \leq F(s_2) + F(+\infty) \leq F(s_1) + F(+\infty)$$

c'est-à-dire $F(s_1) = F(s_2)$.

3. Si $g(s_2, s_1) = +\infty$, en laissant cette fois s_3 approcher 0, on obtient

$$F(s_2) + F_+(0) \geq F(s_1) + F(+\infty)$$

d'où $F(s_2) = F(+\infty)$ et $F(s_1) = F_+(0)$.

Supposons par l'absurde que F n'est pas constante sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui précède implique alors en fait qu'il existe un $s_0 > 0$ tel que

$$F(s) = \begin{cases} F_+(0), & \text{si } 0 < s < s_0, \\ F(+\infty), & \text{si } s > s_0 \end{cases}$$

et tel que si $s_1 < s_2 < s_0$ ou si $s_0 < s_1 < s_2$ (toujours avec $s_2 \notin \mathscr{S}$), $g(s_2, s_1) \in \mathbb{R}_+^*$, et si $s_1 < s_0 < s_2$, alors $g(s_2, s_1) = +\infty$.

Mais à partir de (26), on se convainc facilement (en faisant tendre s_3 vers s_0) que pour $s_1 < s_2 < s_0$ ou pour $s_0 < s_1 < s_2$, on a $g(s_2, s_1) = 1$ [et $\lim_{t\to+\infty} a^{-1}(t + a(t)s_1)a(t + a(t)s_2) = 1$]. Plus précisément encore, en reprenant les arguments ci-dessus, on montre que si on fixe $\tilde{s}_1 > s_0$ et si on dispose d'un fonction $\tilde{s}_2\colon \mathbb{R}_+ \to]\tilde{s}_1, +\infty[$ telle que $\lim_{t\to+\infty} \tilde{s}_2(t) \in [\tilde{s}_1, +\infty[$, alors

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{a(t + a(t)\tilde{s}_2(t))}{a(t + a(t)\tilde{s}_1)} = 1.$$

Bien qu'a priori aucune hypothèse de régularité de $t \mapsto a(t)$ ne soit faite, on verra dans un lemme ci-dessous que l'on peut toujours se ramener au cas où elle est de classe C^∞, et on supposera donc désormais qu'elle est continue et à valeurs dans $[1, +\infty[$ [pour ce dernier point il suffit de considérer $1 \vee a(t)$, qui finit par coïncider avec $a(t)$ pour t grand et ne modifie donc pas la loi limite ν_R].

Fixons $s_2 > \tilde{s}_1 > s_0 > s_1$, et considérons un $t \ge 0$, par continuité de l'application $\mathbb{R}_+ \ni \eta \mapsto a(t)\eta + a(t + a(t)\eta)s_1$, il existe $\eta(t) > 0$ tel que la quantité précédente vaille $a(t)\tilde{s}_1$. Notons $T(t) = t + a(t)\eta(t)$, on a alors

$$T(t) + a(T(t))s_1 = t + a(t)\tilde{s}_1,$$

$$\frac{a(T(t))}{a(t)} s_1 = \tilde{s}_1 - \eta(t)$$

cette dernière égalité permettant de voir que $\eta(t) < \tilde{s}_1$.

Soit $\tilde{s}_2(t)$ tel que

$$T(t) + a(T(t))s_2 = t + a(t)\tilde{s}_2(t)$$

on vérifie immédiatement que $\tilde{s}_2$ est donné par

$$\tilde{s}_2(t) = \eta(t) + \frac{s_2}{s_1}(\tilde{s}_1 - \eta(t))$$

d'où $\tilde{s}_1 < \tilde{s}_2(t) < \tilde{s}_1 s_1^{-1} s_2$.

En considérant une suite croissante et divergente $(t_n)_{n\ge 0}$ de $\mathbb{R}_+$ telle que $\tilde{s}_2(t_n)$ converge, en utilisant les résultats précédents et en passant à la limite pour n grand dans

$$\frac{a(T(t_n) + a(T(t_n))s_2)}{a(T(t_n) + a(T(t_n))s_1)} = \frac{a(t_n + a(t_n)\tilde{s}_2(t_n))}{a(t_n + a(t_n)\tilde{s}_1)}$$

on aboutit à la contradiction $+\infty \le 1$.

En résumé, on a donc $F_+(0) = F(+\infty)$, c'est-à-dire

$$\nu_R = (1 - \exp(-RF_+(0)))\delta_0 + \exp(-RF_+(0))\delta_{+\infty}. \qquad \square$$

Il a été commode d'utiliser dans la démonstration précédente le petit résultat auxiliaire suivant.

LEMME 9. *Soit* $(\beta^{(t)})_{t\geq 0}$ *une famille d'évolutions obtenue par translations et satisfaisant les hypothèses* (5) *et* (6) *pour une certaine renormalisation* $(a(t))_{t\geq 0}$ *telle que* $\lim_{t\to+\infty} a(t) = +\infty$. *On peut alors remplacer l'application* $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto a(t)$ *par une fonction* $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \widetilde{a}(t)$ *de classe* C^∞ *de telle manière à ce que les conditions* (5) *et* (6) *soient encore remplies avec la même fonction* F.

Si de plus β est croissante (ou finit par l'être), on montrerait facilement que l'on peut également supposer que $\widetilde{a}$ est croissante.

DÉMONSTRATION. Considérons tout d'abord la nouvelle renormalisation donnée par

$$\forall\, t \geq 0, \qquad \check{a}(t) = a([t])$$

où $[t]$ désigne la partie entière de t, et vérifions que les conditions (5) et (6) sont encore satisfaites avec $\check{a}$:

Soit $s \geq 0$, on écrit

$$\begin{aligned}
&\int_t^{t+\check{a}(t)s} \exp(-\delta\beta_u)\left|\frac{d}{du}\beta_u\right| du \\
&\quad\leq \int_{[t]}^{[t]+a([t])s} \exp(-\delta\beta_u)\left|\frac{d}{du}\beta_u\right| du + \int_{[t]+a([t])s}^{t+a([t])s} \exp(-\delta\beta_u)\left|\frac{d}{du}\beta_u\right| du \\
&\quad\leq \int_{[t]}^{[t]+a([t])s} \exp(-\delta\beta_u)\left|\frac{d}{du}\beta_u\right| du \\
&\qquad + \int_{[t]+a([t])s}^{[t]+a([t])s+a([t]+a([t])s)} \exp(-\delta\beta_u)\left|\frac{d}{du}\beta_u\right| du
\end{aligned}$$

pour t suffisamment grand, et on reconnait là la somme de deux expressions qui convergent vers 0 pour de tels t, d'où (6) pour $\check{a}$.

Ensuite,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_t^{t+\check{a}(t)s} b(u)\,du - F(s)\right| \\
&\quad\leq \left|\int_{[t]}^{[t]+a([t])s} b(u)\,du - F(s)\right| + \int_{[t]}^{t} b(u)\,du + \int_{[t]+a([t])s}^{t+a([t])s} b(u)\,du \\
&\quad\leq \left|\int_{[t]}^{[t]+a([t])s} b(u)\,du - F(s)\right| + 2\exp(-\delta \inf_{u\geq[t]} \beta_u)
\end{aligned}$$

et il est clair que ce dernier membre tend vers 0 pour t grand, puis finalement que (5) est satisfait pour $\check{a}$.

Ainsi, on pourrait déjà remplacer a par une fonction mesurable, mais pour obtenir la régularité, soit une application ρ: $\mathbb{R}_+ \to [0,2]$ de classe C^∞, dont le support est inclus dans $[0,1]$ et telle que $\int \rho(s)\,ds = 1$. On pose

$$\forall\, t \geq 0, \qquad \widetilde{a}(t) = \int_0^1 \check{a}(t+s)\rho(s)\,ds$$

et il est bien connu que la régularité de ρ implique par convolution que $\widetilde{a}$ est également de classe C^∞. D'autre part, en utilisant la majoration $\widetilde{a}(t) \le a([t]) \vee a([t+1])$, on vérifie comme ci-dessus que la condition (6) est encore satisfaite avec $\widetilde{a}$, et en faisant intervenir de plus la minoration $\widetilde{a}(t) \ge a([t]) \wedge a([t+1])$ permet de voir que l'hypothèse (5) est aussi remplie avec la même fonction F. □

Pour finir cette section, nous allons vérifier que les lois décrites dans les propositions 5 et 8 peuvent toutes être effectivement obtenues. Les exemples ci-dessous montreront aussi que pour l'étude du problème de sortie dans le cas d'évolutions obtenues par translations d'une évolution particulière, il ne suffit pas d'avoir un équivalent de cette dernière en temps grand, même pour avoir un comportement qualitatif.

Soit $b \in \mathbb{R}$ et considérons la famille d'évolutions $(\beta^{(t)})_{t\ge 0}$ déduite par translations à partir de l'évolution donnée par

$$\forall\, s \ge 0, \qquad \beta_s = \sigma(M, W)^{-1}\,[\ln(1+s) + b\ln(1+\ln(1+s))] \vee 0.$$

Puisque pour t grand les évolutions $\beta^{(t)}$ finissent par être croissantes, on a vu que pour une renormalisation adaptée $(a(t))_{t\ge 0}$, la limite suivante existe dans $\mathbb{R}_+^*$

$$\lim_{t\to+\infty} a(t)\exp(-\sigma(M, W)\beta_t) = K.$$

Le cas où $b < 0$ (respectivement $b = 0$) nous fournit alors la loi limite $\nu_R = \mathscr{E}(KR)$ [respectivement $\nu_R = \mathscr{F}(R, K)$].

Pour obtenir véritablement toutes les lois $\mathscr{F}(\lambda_1, \lambda_2)$, il suffit de considérer les évolutions construites par translations de l'application β définie pour $B \in \mathbb{R}$ fixé par

$$\forall\, s \ge 0, \qquad \beta_s = \sigma(M, W)^{-1}\,[\ln(1+s) + B] \vee 0.$$

Enfin, intéressons-nous un peu plus précisément aux cas où $b > 0$ [pour lesquels il ne peut exister de renormalisation adaptée, car sinon elle satisferait $a(t) \gg t$]. Du fait que

$$\int_0^{a(t)s} \exp(-\sigma(M, W)\beta_u^{(t)})\,du \\ = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{1+\ln(1+t+a(t)s)}{1+\ln(1+t)}\right), & \text{si } b = 1, \\ (1-b)^{-1}[\ln^{1-b}(1+t+a(t)s) - \ln^{1-b}(1+t)], & \text{sinon} \end{cases}$$

et que l'on sait que l'on est nécessairement dans la situation décrite par la proposition 8, on obtient les résultats suivants:

(i) Si $b > 1$, pour toute renormalisation $(a(t))_{t\ge 0}$, on voit que $\nu_R = \delta_{+\infty}$, et il apparaît facilement que ceci implique la convergence du couple de sortie vers $\delta_{(+\infty,\, y_0)}$.

(ii) Si $b = 1$, pour que la condition (5) soit vérifiée, il faut que la limite suivante existe dans $\overline{\mathbb{R}_+}$:

$$\mu = \lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{1+\ln(1+t+a(t)s)}{1+\ln(1+t)}\right)$$

(celle-ci est alors indépendante de $s > 0$ et se calcule en prenant par exemple $s = 1$), auquel cas $\nu_R = (1-\exp(-R\mu))\delta_0 + \exp(-R\mu)\delta_{+\infty}$.

(iii) On obtient la même loi limite ν_R si $0 < b < 1$, à la condition que

$$\mu = \lim_{t\to+\infty} (1-b)^{-1}[\ln^{1-b}(1+t+a(t)) - \ln^{1-b}(1+t)].$$

Dans ces deux derniers cas, on peut donc obtenir toutes les lois de la forme $(1-\alpha)\delta_0 + \alpha\delta_{+\infty}$, avec $0 \le \alpha \le 1$. Il s'agit d'un résultat général: si

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\delta\beta_u)\left|\frac{d\beta_u}{du}\right| du < +\infty$$

et s'il existe une renormalisation pour laquelle la loi limite est $\nu_R = (1-\alpha)\delta_0 + \alpha\delta_{+\infty}$, avec $0 < \alpha < 1$, alors pour tout $0 \le \widetilde{\alpha} \le 1$, en considérant une renormalisation $\widetilde{\alpha}(t)$ telle que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{\tilde{a}(t)} \exp(-\sigma(M,W)\beta_{t+u})\,du = -R^{-1}\ln(\widetilde{\alpha}) \in \overline{\mathbb{R}_+}$$

(on peut toujours en trouver une satisfaisant ceci), la loi limite est $(1-\widetilde{\alpha})\delta_0 + \widetilde{\alpha}\delta_{+\infty}$.

REFERENCES

[1] BAKRY, D. (1994). L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes. *Lectures on Probability Theory. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXII–1992. Lecture Notes in Math.* **1581**. Springer, Berlin.

[2] CATONI, O. (1991). Applications of sharp large deviations estimates to optimal cooling schedules. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **27** 463–518.

[3] CHIANG, T. S. et CHOW, Y. (1988). On the convergence rate of annealing processes. *SIAM J. Control Optim.* **26** 1455–1470.

[4] CONCORDET, D. (1994). Estimation de la densité du recuit simulé. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **30** 265–302.

[5] DELLACHERIE, C. et MEYER, P. A. (1980). *Probabilités et potentiel; théorie des martingales*. Hermann, Paris.

[6] FREIDLIN, M. I. et WENTZELL, A. D. (1984). *Random Perturbations of Dynamical Systems*. Springer, New York.

[7] GANTERT, N. (1990). Laws of large numbers for the annealing algorithm. *Stochastic Process. Appl.* **3** 309–313.

[8] GEMAN, S. et GEMAN, D. (1984). Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restauration of images. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence* **6** 721–741.

[9] GIDAS, B. (1985). Nonstationary Markov chains and convergence of the annealing algorithm. *J. Statist. Phys.* **39** 73–131.

[10] GÖTZE, F. (1991). Rate of convergence of simulated annealing processes. Préprint.

[11] HAJEK, B. (1988). Cooling schedules for optimal annealing. *Math. Oper. Res.* **13** 311–329.

[12] HOLLEY, R. et STROOCK, D. (1988). Annealing via Sobolev inequalities. *Comm. Math. Phys.* **115** 553–569.

[13] HWANG, C. R. et SHEU, S. J. (1992). Singular perturbed Markov chains and exact behaviors of simulated annealing processes. *J. Theoret. Probab.* **5** 223–249.

[14] KIRKPATRICK, S., GELATT, C. D. et VECCHI, M. P (1983). Optimization by simulated annealing. *Science* **220** 621–680.

[15] MATHIEU, P. (1995). Spectra, exit times and long time asymptotics in the zero-white-noise limit. Préprint.

[16] MICLO, L. (1992). Recuit simulé sans potentiel sur un ensemble fini. *Séminaire de Probabilités* XXVI. *Lecture Notes in Math.* **1526** 47–60. Springer, Berlin.

[17] MICLO, L. (1995). Remarques sur l'ergodicité des algorithmes de recuit simulé sur un graphe. *Stochastic Process. Appl.* **58** 329–360.

[18] MICLO, L. (1995). Problème de sortie discret et théorèmes limites pour les temps d'occupations du recuit simulé. Prépublication 08-96, Laboratoire de Statistique et Probabilités, Univ. Toulouse III.

[19] MICLO, L. (1995). Sur les temps d'occupations des processus de Markov finis inhomogènes à basse température. Préprint.

[20] MICLO, L. (1996). Remarques sur l'hypercontractivité et l'évolution de l'entropie pour des chaînes de Markov finies. *Seminaire de Probabilités XXXI. Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin. A paraître.

[21] ROCKAFELLAR, R. T (1970). *Convex Analysis*. Princeton Univ. Press.

[22] STROOCK, D. W (1993). Logarithmic Sobolev inequalities for Gibbs states. *Dirichlet Forms. Lecture Notes in Math.* **1563** 194–228. Springer, Berlin.

[23] TROUVÉ, A. (1993). Parallélisation massive du recuit simulé. Thèse de doctorat, Univ. Paris 11.

LABORATOIRE DE STATISTIQUE ET PROBABILITÉS
UNIVERSITÉ PAUL SABATIER ET CNRS
118, ROUTE DE NARBONNE
31062 TOULOUSE CEDEX
FRANCE
E-MAIL: miclo@cict.fr