SCHERING'S BEWEIS DES RECIPROCITÄTS-SATZES

FÜR DIE QUADRATISCHEN RESTE[1]

DARGESTELLT MIT HÜLFE DES ZEICHENS $[x]$

VON

JACOB HACKS

in BONN.

Die verallgemeinerte characteristische Zahl für den Rest n und für den Modul m, wo n und m ungerade relative Primzahlen sind, wird (nach SCHERING) definiert als die Anzahl der in den $\frac{m-1}{2}$ Brüchen

$$\frac{1 \cdot n}{m}, \quad \frac{2 \cdot n}{m}, \quad \frac{3 \cdot n}{m}, \quad \ldots, \quad \frac{\frac{m-1}{2} \cdot n}{m}$$

vorkommenden absolut kleinsten negativen Reste. Nun ist offenbar, wenn $[x]$ die grösste in einer Zahl x enthaltene ganze Zahl bezeichnet,

$$\left[\frac{sn}{m} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{sn}{m}\right] = 1 \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem der absolut kleinste Rest von $\frac{sn}{m}$ negativ oder positiv ist. Bezeichnet man also die oben definierte characteristische Zahl mit μ, so kommt

$$\mu = \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{sn}{m} + \frac{1}{2}\right] - \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{sn}{m}\right].$$

[1] Nachr. d. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen 1879, p. 217.

ν sei die characteristische Zahl für m in Bezug auf den Modul n, dann ist ebenso

$$\nu = \sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{sm}{n} + \frac{1}{2}\right] - \sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{sm}{n}\right];$$

es ergibt sich demnach mit Benutzung eines zuerst von GAUSS (Werke II, p. 5) bewiesenen Satzes

$$(1) \qquad \mu + \nu = \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{sn}{m} + \frac{1}{2}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{sm}{n} + \frac{1}{2}\right] - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}.$$

Nun ist

$$(2) \qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{sn}{m} + \frac{1}{2}\right] = \sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{sm}{n} + \frac{1}{2}\right],$$

wie sich auf folgende Weise zeigen lässt. Es ist nach dem auf solche Functionen, die mit wachsendem Argumente fortwährend wachsen, ausgedehnten DIRICHLET'schen Satze (Acta Mathematica, Bd. 10, p. 16 sqq.)

$$(3) \qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{sm}{n} + \frac{1}{2}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{n(2s-1)}{2m}\right] = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2},$$

$$(4) \qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{sn}{m} + \frac{1}{2}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{m(2s-1)}{2n}\right] = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}.$$

Ferner ist

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{sm}{n} + \frac{1}{2}\right] = \sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2sm+n}{2n}\right]$$

$$= \left[\frac{\frac{n-1}{2} \cdot 2m + n}{2n}\right] + \left[\frac{\frac{n-3}{2} \cdot 2m + n}{2n}\right] + \dots + \left[\frac{2 \,.\, 2m + n}{2n}\right] + \left[\frac{2m+n}{2n}\right]$$

$$= \left[\frac{n(m+1)}{2n} - \frac{m}{2n}\right] + \left[\frac{n(m+1)}{2n} - \frac{3m}{2n}\right] + \dots + \left[\frac{n(m+1)}{2n} - \frac{(n-2)m}{2n}\right]$$

$$= \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} - \sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{m(2s-1)}{2n}\right].$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in (3) ergibt sich[1]

$$(5) \qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{n(2s-1)}{2m}\right] = \sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{m(2s-1)}{2n}\right],$$

und hieraus in Verbindung mit (3) und (4) die Richtigkeit von (2).[2] (1) nimmt nunmehr folgende Gestalt an

$$\mu + \nu = 2\sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{sm}{n} + \frac{1}{2}\right] - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2},$$

oder

$$\mu + \nu \equiv \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \pmod 2.$$

---

[1] Den Beweis der Gleichung (5) hat mir Herr SCHAFSTEIN in Bonn mitgeteilt.

[2] Ein anderer Beweis der Gleichung (2) findet sich bei BUSCHE, *Über eine Beweismethode in der Zahlentheorie,* Göttingen 1883.