SUR UNE RELATION DONNÉE PAR M. CAYLEY. DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler

PAR

CH. HERMITE.

Le n° d'Octobre 1882, du Bulletin des Sciences Mathématiques de M. DARBOUX, contient à la page 215, une équation intéressante pour la théorie des fonctions elliptiques, qui a été découverte par M. CAYLEY, et donnée par l'illustre géomètre sous la forme suivante. Supposons les quatre quantités u, v, r, s, assujetties à la condition

$$u + v + r + s = 0,$$

on aura:

$$\begin{aligned} &- k'^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s \\ &+ \quad \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \\ &- \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = - \frac{k'^2}{k^2} \end{aligned}$$

Cette équation remarquable se démontre facilement au moyen des formules dont je fais usage depuis longtemps dans mes leçons de la Sorbonne, et qui donnent la décomposition en élements simples, des trois quantités:

$$\operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x + a), \qquad \operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x + a), \qquad \operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x + a).$$

Soit

$$Z(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

la première de ces formules, n'est autre que la relation fondamentale de JACOBI, à savoir:

$$\operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a) = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn} a}[Z(x) - Z(x+a) + Z(a)];$$

nous avons ensuite

$$\operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x+a) = \operatorname{cn} a - \frac{\operatorname{dn} a}{k^2 \operatorname{sn} a}[Z(x) - Z(x+a) + Z(a)]$$

$$\operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x+a) = \operatorname{dn} a - \frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{sn} a}[Z(x) - Z(x+a) + Z(a)].$$

Cela étant, si l'on fait $u = x$ et $r + s = a$, de sorte qu'on ait $v = -x - a$, la relation à établir devient

$$\begin{aligned} &k'^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a) \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s \\ +\ &\operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x+a) \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \\ -&\frac{1}{k^2} \operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x+a) \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = -\frac{k'^2}{k^2}. \end{aligned}$$

En employant maintenant les formules que je viens de rappeler, et posant pour abréger:

$$U = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn} a}[Z(x) - Z(x+a) - Z(a)]$$

on trouve

$$\begin{aligned} &U k'^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s + \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s (\operatorname{cn} a - U \operatorname{dn} a) \\ &\qquad - \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s \left(\frac{\operatorname{dn} a}{k^2} - U \operatorname{cn} a\right) = -\frac{k'^2}{k^2} \end{aligned}$$

ou bien:

$$\begin{aligned} &(k'^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s - \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \operatorname{dn} a + \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s \operatorname{cn} a) U \\ &\qquad + \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \operatorname{cn} a - \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s \operatorname{dn} a = -\frac{k'^2}{k^2}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de faire voir que l'on a:

$$k'^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s - \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \operatorname{dn} a + \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s \operatorname{cn} a = 0$$

$$\operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \operatorname{cn} a - \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s \operatorname{dn} a = -\frac{k'^2}{k^2}$$

sous la condition $r + s = a$. Soit $r = -x$, et par conséquent $s = a + x$, les relations que nous obtenons ainsi, à savoir

$$k'^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a) + \operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x+a) - \operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x+a) \operatorname{dn} a = 0$$

$$\operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x+a) \operatorname{cn} a - \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x+a) \operatorname{dn} a = -\frac{k'^2}{k^2}$$

reviennent exactement à celles qui résultent des formules de décomposition en éléments simples que nous venons d'appliquer, en éliminant la quantité désignée par U. On trouve ainsi en effet:

$$\operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x+a) = \operatorname{cn} a - \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a) \operatorname{dn} a$$

$$\operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x+a) = \operatorname{dn} a - k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a) \operatorname{cn} a;$$

or en multipliant la première de ces égalités par $\operatorname{dn} a$, la seconde par $\operatorname{cn} a$, on en conclut, en retranchant membre à membre, la première des deux équations à établir. La suivante s'obtient par un calcul semblable, qui revient à l'élimination de la quantité $\operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a)$.