ARKIV FÖR MATEMATIK Band 2 nr 6

Mitgeteilt am 5. Dezember 1951 durch ARNE BEURLING und J. MALMQUIST

Über die Existenz der automorphen Funktionen mit beschränktem Dirichletintegral

Von LEO ULLEMAR

In meiner Arbeit USKILA [1] wurden die symmetrischen Hauptkreisgruppen vom Geschlecht $p = 0$ ohne elliptische Substitutionen in bezug auf die Existenz der eindeutigen nichtkonstanten *beschränkten* automorphen Funktionen klassifiziert. Diese Arbeit bildet eine natürliche Fortsetzung des Gedankenganges. Die genannten Hauptkreisgruppen werden hier in bezug auf die Existenz der eindeutigen nichtkonstanten automorphen Funktionen mit *beschränktem Dirichletintegral* über den Fundamentalbereich klassifiziert. Um ein Kriterium dafür zu erhalten, wird ein neues harmonisches Mass eingeführt, das infolge seines Zusammenhanges mit dem klassischen harmonischen Mass von NEVANLINNA von Interesse sein dürfte.

1. Ein einfach zusammenhängender Teilbereich B_0 des Kreises $|z| < 1$ wird von einer abgeschlossenen Punktmenge E auf dem Kreise $|z| = 1$ und einer offenen Punktmenge E' begrenzt. Die Menge E' besteht aus einer endlichen oder abzählbar unendlichen Anzahl offener punktfremder Orthogonalkreisbogen

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots \tag{1}$$

des Kreises $|z| = 1$. Durch eine lineare Transformation wird immer erreicht, dass der Punkt $z = 0$ ein innerer Punkt von B_0 ist.

Wenn B_0 an irgend einem der Bogen (1), z. B. an b_0, gespiegelt wird, erhält man ein Polygon $\overline{B}_0$, das mit B_0 einen Fundamentalbereich $B = B_0 + \overline{B}_0$ einer symmetrischen Fuchsschen oder fuchsoiden Gruppe G vom Geschlecht $p = 0$ ohne elliptische Substitutionen bildet, je nachdem die Anzahl der Bogen (1) endlich oder unendlich ist.

Problem. *Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer nichtkonstanten eindeutigen automorphen Funktion der Gruppe G zu finden, deren Dirichletintegral begrenzt ist und zwar*

$$\iint_{B_0} |f'(z)|^2\, dx\, dy \le \pi \qquad (z = x + iy). \tag{2}$$

Das entsprechende Problem für die analytischen Funktionen haben AHLFORS und BEURLING [1] gelöst. Diese Ergebnisse finden Anwendung auf unser Problem. Wesentlich für die Lösung ist die Einführung eines neuen harmonischen Masses $\Omega(z, E, G)$, das in Nr. 2 definiert wird.

Wenn $\Omega(O, E, B_0) > 0$ ist, gibt es immer nichtkonstante eindeutige automorphe Funktionen der Gruppe G mit beschränktem Dirichletintegral. Wenn dagegen $\Omega(O, E, B_0) = 0$ ist, reduzieren sich alle solchen Funktionen auf Konstanten.

2. Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das von einer Jordankurve Γ begrenzt wird. E sei eine abgeschlossene Punktmenge auf Γ und E' die Komplementmenge von E in bezug auf Γ.

Das harmonische Mass von NEVANLINNA $\omega(z, E, G)$, hier das *erste harmonische Mass* genannt, kann wie folgt definiert werden:

$$\text{(I)} \qquad \omega(z_0, E, G) = \sup\ u(z_0),$$

wo $u(z)$ eine in G harmonische Funktion ist, die folgenden Bedingungen genügt:

$$\text{(a)} \qquad \overline{\lim_{z \to E'}}\ u(z) \leq 0,$$

$$\text{(b)} \qquad \overline{\lim_{z \to E}}\ u(z) \leq 1.$$

Das hier eingeführte *zweite harmonische Mass* $\Omega(z, E, G)$ wird wie folgt definiert:

$$\text{(II)} \qquad \Omega(z_0, E, G) = \sup\ u(z_0),$$

wo $u(z)$ eine in G harmonische Funktion ist, die folgenden Bedingungen genügt:

$$\text{(a)} \qquad \overline{\lim_{z \to E'}}\ u(z) \leq 0,$$

$$\text{(b')} \qquad D_G(u) \leq \pi.$$

Wie üblich bezeichnen wir

$$D_G(u) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy,$$

$$D_G(u, v) = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Sowohl das erste als das zweite harmonische Mass sind gegenüber der Gruppe der konformen Abbildungen invariant, wie aus den Definitionen unmittelbar hervorgeht.

Die Bedingungen II (a) und (b') definieren eine Funktionenfamilie F_{II}. Diese Familie ist *konvex*, d. h. wenn zwei Funktionen u_1 und u_2 der Familie F_{II} zugehören, gehört auch die Funktion $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ zur Familie F_{II}.

In der Tat folgt aus $\overline{\lim_{z \to E'}}\ u_1(z) \leq 0$ und $\overline{\lim_{z \to E'}}\ u_2(z) \leq 0$ offenbar $\overline{\lim_{z \to E'}}\ \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \leq 0$. Wenn $D(u_1) \leq \pi$ $D(u_2) \leq \pi$, folgt aus der Identität

$$0 \leq D\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right) = \tfrac{1}{4} D(u_1) - 2 D\left(\frac{u_1}{2}, \frac{u_2}{2}\right) + \tfrac{1}{4} D(u_2),$$

dass

$$D\left(\frac{u_1}{2}, \frac{u_2}{2}\right) \leq \tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{1}{8}\pi = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Demnach ist

$$D\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) = \tfrac{1}{4} D(u_1) + 2\, D\left(\frac{u_1}{2}, \frac{u_2}{2}\right) + \tfrac{1}{4} D(u_2)$$

$$\leq \tfrac{1}{4}\pi + 2 \cdot \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}\pi = \pi.$$

Die Funktion $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ genügt also den Bedingungen II (a) und (b′), wenn u_1 und u_2 dies tun; die Familie F_{II} ist konvex.

Satz 1. *Eine Extremalfunktion $u(z)$ in F_{II} ist eindeutig bestimmt durch die Bedingung*

$$u(z_0) = \Omega(z_0, E, G).$$

Für sie gilt

(a′)
$$\lim_{z \to E'} u(z) = 0,$$

(b″)
$$D_G(u) = \pi.$$

In G ist $u(z) \geq 0$.

Offenbar ist das Dirichletintegral einer Extremalfunktion gleich π. Wenn u eine Funktion in F_{II} mit $D(u) = k < \pi$ ist, so ist ja $u\sqrt{\frac{\pi}{k}}$ eine Funktion in F_{II}, die für $z = z_0$ einen grösseren Wert annimmt als u.

Um die Eindeutigkeit der Extremalfunktion zu beweisen, bezeichnen wir zwei Extremalfunktionen u_1 und u_2. Infolge der Konvexität der Familie F_{II} ist dann auch $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ eine Funktion in F_{II}, die ausserdem für $z = z_0$ den Wert $\Omega(z_0, E, G)$ erreicht, also extremal ist. Nach der obigen Bemerkung ist dann $D\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) = \pi$.

Aus den Identitäten

$$D\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) = \tfrac{1}{4} D(u_1) + 2\, D\left(\frac{u_1}{2}, \frac{u_2}{2}\right) + \tfrac{1}{4} D(u_2)$$

und

$$D\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right) = \tfrac{1}{4} D(u_1) - 2\, D\left(\frac{u_1}{2}, \frac{u_2}{2}\right) + \tfrac{1}{4} D(u_2)$$

folgt

$$D\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right) + D\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) = \tfrac{1}{2} D(u_1) + \tfrac{1}{2} D(u_2).$$

Da $D(u_1) = D(u_2) = \pi$ ist, erhalten wir

$$D\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi - \pi = 0.$$

Die Funktion $\frac{1}{2}(u_1 - u_2)$ reduziert sich also auf eine Konstante. Da $u_1(z_0) = u_2(z_0) = \Omega(z_0, E, G)$ ist, hat diese Konstante den Wert Null, was die Eindeutigkeit der Extremalfunktion beweist.

Um schliesslich (a′) zu beweisen, wird in G eine Funktion

$$u^+ = \text{Max}\,(u, 0)$$

definiert, wo u eine Extremalfunktion ist. Wenn $u \geq 0$ ist, gilt

$$\left(\frac{\partial u^+}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^+}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Wenn $u < 0$, ist $u \equiv 0$ und somit ist

$$\left(\frac{\partial u^+}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^+}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Wenn in irgend einem Punkt in G $u < 0$ ist, gilt dieselbe Ungleichung in einer gewissen Umgebung jenes Punktes und nach dem Obigen folgt dann, dass

$$D(u^+) < D(u) = \pi. \tag{3}$$

Um aus dieser Ungleichung einen Widerspruch abzuleiten, definieren wir eine in G harmonische Funktion u_1 mit „denselben Randwerten“ wie u^+. Unter diesem Ausdruck versteht man folgendes. Das Gebiet G wird mit einer Folge einfach zusammenhängender Teilgebiete G_n approximiert, so dass $G_n < G_{n+1}$ und $\lim_{n \to \infty} G_n = G$ ist; jeder abgeschlossene Teilbereich von G ist also in G_n enthalten, sobald n hinreichend gross ist. In G_n wird eine harmonische Funktion v_n definiert, die auf dem Rande von G_n dieselben Werte hat wie u^+. Dass u_1 in G „dieselben Randwerte“ hat wie u^+ bedeutet dann, dass $u_1 \equiv \lim_{n \to \infty} v_n$.

Aus dem Dirichletschen Prinzip folgt für das einfach zusammenhängende Gebiet G die Ungleichung

$$D(u_1) \leq D(u^+). \tag{4}$$

Nach der Definition von u^+ und den Ungleichungen (3) und (4) ist u_1 eine Funktion der Familie F_{II}.

Als Maximum zweier harmonischen Funktionen ist u^+ in G subharmonisch und genügt somit der Ungleichung

$$u^+ \leq u_1, \tag{5}$$

da u_1 in G harmonisch ist. Für $z = z_0$ erhält (5) die Form

$$u^+(z_0) = u(z_0) = \Omega(z_0, E, G) \leq u_1(z_0).$$

Da u_1 andererseits zur F_{II} gehört, ist

$$u_1(z_0) \leq \Omega(z_0, E, G).$$

Es gilt also die Gleichheit

$$u_1(z_0) = \Omega(z_0, E, G),$$

u_1 ist mit der Extremalfunktion identisch und hat das Dirichletintegral $D(u_1) = \pi$. Nach (3) und (4) ist $D(u_1) < \pi$ eine echte Ungleichung. Dieser Widerspruch hat seinen Grund in der Annahme, dass $u < 0$ in irgend einem Punkt von G sei. Eine Extremalfunktion kann also keine negativen Werte annehmen. Die Gleichung (a′) und mit ihr der ganze Satz ist somit bewiesen.

3. Die Extremalfunktion $u(z)$ definiert bis auf eine imaginäre Konstante die konjugierte harmonische Funktion $v(z)$, und somit eine analytische Funktion $t = f(z) = u(z) + i\,v(z)$. Diese Funktion vermittelt eine Abbildung des Gebiets G auf eine Riemannsche Fläche T über die t-Ebene mit dem Flächeninhalt π, deren Projektion in der t-Ebene rechts von der imaginären Achse liegt. Die Punktmenge E' wird auf eine offene Menge abgebildet, deren Projektion in der t-Ebene auf der imaginären Achse liegt.

Andererseits kann das Gebiet G nach dem Riemannschen Abbildungssatz durch eine eineindeutige Funktion $w = w(z)$ auf den Einheitskreis $|w| < 1$ abgebildet werden. Die abgeschlossene Randpunktmenge E wird dann auf eine abgeschlossene Menge E^* auf dem Einheitskreis $|w| = 1$ und ihre Komplementmenge E' auf eine offene Menge $E^{*\prime}$ auf $|w| = 1$ abgebildet. Die Abbildung wird so normiert, dass die Punkte $z = z_0$ und $w = 0$ einander entsprechen. Infolge der Invarianz der harmonischen Masse bei eineindeutiger konformer Abbildung ist

$$\Omega(z_0, E, G) = \Omega(0, E^*, |w| < 1). \tag{6}$$

Die zusammengesetzte Funktion

$$f(z(w)) = g(w) \tag{7}$$

vermittelt eine Abbildung des Einheitskreises $|w| < 1$ auf die Riemannsche Fläche T. Nach der Definition der Funktion $f(z)$ durch die Extremalfunktion $u(z)$ gilt

$$\Omega(0, E^*, |w| < 1) = R\{g(0)\},$$

wo R den reellen Teil der Funktion bezeichnet.

Da der offenen Menge $E^{*\prime}$ bei dieser Abbildung eine offene Menge entspricht, deren Projektion in der t-Ebene auf der imaginären Achse liegt, kann das Spiegelungsprinzip verwendet werden. Die Punkte $w = 0$ und $w = \infty$ sind Spiegelpunkte in bezug auf $E^{*\prime}$, die Projektionen der Bildpunkte $g(0)$ und $g(\infty)$ werden somit Spiegelpunkte in bezug auf die imaginäre Achse. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$\Omega(0, E^*, |w| < 1) = \tfrac{1}{2}\,|g(0) - g(\infty)|. \tag{8}$$

Das Gebiet $|w| > 1$ wird durch $t = g(w)$ auf eine mit T symmetrische Riemannsche Fläche mit Flächeninhalt π abgebildet. Die Funktion $\frac{1}{\sqrt{2}} g(w)$ ist also eine eindeutige analytische Funktion von w, deren Dirichletintegral über die ganze w-Ebene ausserhalb E^* gleich π ist. Für eine solche Funktion gilt nach AHLFORS und BEURLING [1] S. 114 und 124

$$\left| \frac{g(0)}{\sqrt{2}} - \frac{g(\infty)}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{2 \log \frac{1}{\operatorname{cap} E^{*\prime}}}, \tag{9}$$

wo $\operatorname{cap} E^{*\prime}$ die *innere* Kapazität von $E^{*\prime}$ bezeichnet und folgendermassen definiert wird:

Eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von $E^{*\prime}$ wird A genannt und wir bezeichnen

$$V = \inf V(A), \tag{10}$$

wo $V(A)$ das Gleichgewichtspotential von A bedeutet. Die innere Kapazität von $E^{*\prime}$ wird dann durch

$$\operatorname{cap} E^{*\prime} = e^{-V} \tag{11}$$

definiert.

Aus (9) folgt dann

$$|g(0) - g(\infty)| = 2\sqrt{V},$$

welches mit (8)

$$\Omega(0, E^*, |w| < 1) = \sqrt{V}$$

ergibt. Somit ist

$$\operatorname{cap} E^{*\prime} = e^{-\Omega^2(0; E^*)}. \tag{12}$$

Die Punktmenge $E^{*\prime}$ ist eine offene Menge auf dem Einheitskreise. Nach einem nicht veröffentlichten Ergebnis von AHLFORS und BEURLING, das Prof. BEURLING mir mündlich mitgeteilt hat, ist die innere Kapazität von $E^{*\prime}$ grösser als die Kapazität eines Bogens $\bar{E}$ mit gleichem linearen Mass, also

$$\operatorname{cap} \bar{E} \leq \operatorname{cap} E^{*\prime}, \tag{13}$$

wo $\bar{E}$ ein Bogen auf dem Einheitskreise mit

$$m\bar{E} = m E^{*\prime}$$

ist. Gleichheit gilt in (13) nur wenn $E^{*\prime}$ selbst ein Bogen ist.

Bekanntlich gilt für einen Bogen $\bar{E}$

$$\operatorname{cap} \bar{E} = \sin \frac{m\bar{E}}{4}. \tag{14}$$

Andererseits ist, da ja das erste harmonische Mass eines Bogens des Einheitskreises, im Nullpunkte gemessen, nichts anderes ist als der durch 2π dividierte Betrag des entsprechenden Zentriwinkels

$$\omega = \omega(0, E^*, |w| < 1) = \frac{m E^*}{2\pi}. \tag{15}$$

Da E^* und $E^{*\prime}$ Komplementmengen sind, ist

$$m E^* + m E^{*\prime} = 2\pi. \tag{16}$$

Somit ist

$$m \bar{\bar{E}} = m E^{*\prime} = 2\pi - m E^* = 2\pi(1-\omega)$$

und

$$\sin \frac{m \bar{\bar{E}}}{4} = \sin \frac{2\pi(1-\omega)}{4} = \cos \frac{\pi}{2}\omega.$$

Die Kombination von (12)—(16) gibt

$$e^{-\Omega^2(0, E^*)} = \operatorname{cap} E^{*\prime} \geq \operatorname{cap} \bar{\bar{E}} = \cos \frac{\pi}{2} \omega(0, E^*)$$

oder

$$\Omega^2(0, E^*, |w| < 1) \leq -\log \cos \frac{\pi}{2} \omega(0, E^*, |w| < 1). \tag{17}$$

Diese wichtige Ungleichung bindet das erste und zweite harmonische Mass zusammen. Gleichheit gilt nur, wenn E^* ein abgeschlossener Bogen ist.

Nach (17) folgt aus $\omega = 0$, dass $\Omega = 0$ ist, was später zur Anwendung kommt. Wenn E^* die ganze Peripherie des Einheitskreises umfasst, ist $\omega = 1$ und $\Omega = \infty$.

4. Ein wichtiges Hilfsmittel für die Auswertung des ersten harmonischen Masses bildet das „Prinzip der Gebietserweiterung". Ein ähnliches Prinzip gilt für das zveite harmonische Mass. Wir wollen es jedoch das Prinzip der Gebietsverminderung nennen, da ja die Existenz der harmonischen Masse für kleinere Gebiete keineswegs die Existenz derjenigen für grössere Gebiete mit sich führt.

Wieder bezeichnet G ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit Berandung Γ und E eine abgeschlossene Menge auf Γ. Es sei G' ein beliebiges einfach zusammenhängendes Teilgebiet von G unter der einzigen Voraussetzung, dass E auch dem Rande von G' zugehört. Wenn z_0 ein beliebiger Punkt von G' ist, gilt

$$\Omega(z_0, E, G') \leq \Omega(z_0, E, G). \tag{18}$$

Diese Ungleichung enthält das oben erwähnte Prinzip.

Zum Beweise sei $u(z)$ die eindeutig bestimmte Extremalfunktion in G', deren Eigenschaften im Satz 1 aufgezählt sind. Im Gebiet G wird nun eine Funktion $u_1(z)$ folgendermassen definiert:

$$u_1(z) = \begin{cases} u(z), & \text{wenn } z \in G', \\ 0, & \text{wenn } z \in G - G'. \end{cases}$$

Wenn $z \in G'$, ist

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

für $z \in G - G'$ gilt dagegen identisch

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Nach Satz 1 ist dann

$$D_G(u_1) = D_{G'}(u_1) = \pi.$$

Zuerst wird bewiesen, dass $u_1(z)$ in G subharmonisch ist. In der Tat ist $u_1(z)$ in G' mit der harmonischen Funktion $u(z)$ identisch, also subharmonisch. In $G - G'$ hat $u_1(z)$ konstant den Wert Null und ist somit als Konstante subharmonisch. Auf dem Teil L des Randes von G', der innerhalb G liegt, sei ζ_0 ein beliebiger Punkt. Nach der Definition von $u_1(z)$ und dem Satz 1 ist

$$u_1(\zeta_0) = u(\zeta_0) = 0.$$

Nach demselben Satz ist weiter $u(z) \geq 0$ in G' und somit

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_1(\zeta_0 + r e^{i\varphi})\, d\varphi \geq 0.$$

Für $\zeta_0 \in L$ ist also

$$u_1(\zeta_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_1(\zeta_0 + r e^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Die Funktion $u_1(z)$ ist somit im ganzen Gebiet G' subharmonisch.

In G definieren wir nun eine Funktion $u_2(z)$ als die harmonische Funktion mit „denselben Randwerten" wie $u_1(z)$, wo dieser Ausdruck die in Nr. 3 erklärte Bedeutung hat. Nach dem Dirichletschen Prinzip ist dann

$$D_G(u_2) \leq D_G(u_1) = \pi. \tag{19}$$

Die Funktion u_2 ist also eine in G harmonische Funktion mit „denselben Randwerten" wie u_1, die den Bedingungen II genügt. Sie ist also eine „zulässige" Funktion bei der Definition von $\Omega(z_0, E, G)$, und somit ist

$$u_2(z_0) \leq \Omega(z_0, E, G).$$

Andererseits gilt für $u_1(z)$ als eine in G subharmonische Funktion

$$u_1 \leq u_2, \tag{20}$$

da u_2 eine in G harmonische Funktion ist.

Somit ist

$$\Omega(z_0, E, G') = u(z_0) = u_1(z_0) \leq u_2(z_0) \leq \Omega(z_0, E, G),$$

wodurch die Behauptung (18) bewiesen ist.

Satz 2. („*Prinzip der Gebietsverminderung*").

Das zweite harmonische Mass $\Omega(z, E G)$ vermindert sich, wenn man in das Gebiet G den zu E komplementären Teil E' des Randes $\Gamma = E + E'$ hineinschiebt.

5. Nach diesen Vorbereitungen können wir leicht das in Nr. 1 aufgestellte Problem lösen.

An die Stelle des Bereichs G in obigen Betrachtungen tritt von nun an der in Nr. 1 definierte bereich B_0. Es sei $t = f(z)$ die in Nr. 3 durch die Extremalfunktion $u(0, E, B_0)$ definierte analytische Funktion, die B_0 auf eine Riemannsche Fläche T mit dem Flächeninhalt gleich π über die t-Ebene abbildet. Die Projektion von T in der t-Ebene liegt nach dem Satz 1 rechts von der imaginären t-Achse und wird von einer offenen Menge auf der imaginären Achse begrenzt. Diese offene Menge entsteht durch die Abbildung durch $t = f(z)$ mit nachfolgender Projizierung aus der Menge (1) der Orthogonalkreisbogen des Einheitskreises. Wie in Nr. 3 kommt nun das Spiegelungsprinzip zur Anwendung.

Es sei $S_k(z)$ eine Spiegelung des Einheitskreises an einem Bogen b_k der Menge (1) und $S_m S_n(z)$ das Produkt sukzessiver Spiegelungen an b_n und b_m. Alle erzeugenden Substitutionen der in Nr. 1 definierten Gruppe können in der Form $S_m S_n(z)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots; n = 0, 1, 2, \ldots)$ ausgedrückt werden.

Jeder Spiegelung S_k in der z-Ebene entspricht in der t-Ebene eine Spiegelung an der imaginären Achse. Wenn ζ_0 ein beliebiger Punkt im Kreise $|z| < 1$ ist und

$$f(\zeta_0) = t_0 = u(\zeta_0) + i\,v(\zeta_0),$$

wo $u(z)$ die Extremalfunktion $u(0, E, B_0)$ ist, gilt nach dem Spiegelungsprinzip

$$f(S_n(\zeta_0)) = -\bar{t}_0 = -u(\zeta_0) + i\,v(\zeta_0),$$

und

$$f(S_m S_n(\zeta_0)) = -\overline{(-\bar{t}_0)} = u(\zeta_0) + i\,v(\zeta_0) = f(\zeta_0).$$

Die Funktion $f(z)$ wird also durch das Spiegelungsprinzip im ganzen Hauptkreis $|z| < 1$ der Gruppe G definiert, ist dort eindeutig und regulär und invariant in bezug auf alle Substitutionen der Gruppe G. Die Funktion $f(z)$ ist somit eine automorphe Funktion der Gruppe mit dem Dirichletintegral über B_0 gleich π. Im Punkte $z = 0$ hat der reelle Teil $u(z)$ von $f(z)$ den Wert $\Omega(0, E, B_0)$, auf E' ist $u(z)$ gleich Null.

Wenn $\Omega(0, E, B_0) > 0$ ist, kann also $f(z)$ sich nicht auf eine Konstante reduzieren und bildet somit ein Beispiel einer nichtkonstanten eindeutigen automorphen Funktion mit dem Dirichletintegral $\leq \pi$, deren Existenz somit für $\Omega(0, E, B_0) > 0$ bewiesen ist.

Wenn dagegen $\Omega(0, E, B_0) = 0$ ist, folgt aus der Gleichung (12) in Nr. 3, dass cap $E^{*\prime} = 1$ ist, was nach AHLFORS und BEURLING [1] zur Folge hat, dass sich alle ausserhalb E^* eindeutigen analytischen Funktionen mit beschränktem Dirichletintegral auf Konstanten reduzieren. Jeder automorphen Funktion der Gruppe G in der z-Ebene entspricht eine ausserhalb E^* analytische Funktion in der w-Ebene. Da das Dirichletintegral invariant in bezug auf konforme Abbildungen ist, folgt also, dass sich alle eindeutigen automorphen Funktionen der Gruppe G mit beschränktem Dirichletintegral auf Konstanten reduzieren, wenn $\Omega(0, E, B_0) = 0$ ist.

Die obigen Ergebnisse lassen sich in einen Satz zusammenfassen, der alle symmetrischen Hauptkreisgruppen G vom Geschlecht $p = 0$ ohne elliptische Substitutionen in bezug auf die Existenz der nichtkonstanten eindeutigen automorphen Funktionen mit beschränktem Dirichletintegral klassifiziert. Wenn solche Funktionen existieren, wird die Gruppe G dem *positiven Typus* in bezug auf eindeutige automorphe Funktionen mit beschränktem Dirichletintegral zugerechnet. Wenn sich wieder alle eindeutigen automorphen Funktionen von G mit beschränktem Dirichletintegral auf Konstanten reduzieren, gehört die Gruppe G zum *Nulltypus* in bezug auf die genannten Funktionen.

Der Teil E der Begrenzung von B_0, der auf dem Hauptkreise $|z| = 1$ liegt, wird der *Hauptrand* von B_0 genannt. Die früher gemachte Voraussetzung, dass $z = 0$ innerhalb B_0 liegt, ist unwesentlich, da das zweite harmonische Mass bei konformer Abbildung invariant ist.

Satz 3. *Eine symmetrische Hauptkreisgruppe vom Geschlecht $p = 0$ ohne elliptische Substitutionen ist vom positiven Typus oder vom Nulltypus in bezug auf die eindeutigen automorphen Funktionen mit beschränktem Dirichletintegral über B_0, je nachdem das in einem inneren Punkt z_0 von B_0 gemessene zweite harmonische Mass $\Omega(z_0, E, B_0)$ des Hauptrandes E von B_0 positiv oder gleich Null ist.*

Nach AHLFORS und BEURLING [1] ist die Existenz der ausserhalb abgeschlossener linearer Punktmengen nichtkonstanten schlichten begrenzten analytischen Funktionen denselben Bedingungen unterworfen wie die Existenz der nichtkonstanten eindeutigen analytischen Funktionen mit beschränktem Dirichletintegral.

Folgesatz 1. *Eine Gruppe G von oben beschriebener Art ist vom positiven Typus oder vom Nulltypus in bezug auf die eindeutigen schlichten begrenzten automorphen Funktionen, je nachdem das zweite harmonische Mass $\Omega(z_0, E, B_0)$ positiv oder gleich Null ist.*

Der Satz 2 in Nr. 4 kann nun angewendet werden, um ein Kriterium zu erhalten, das schon verwendet werden kann, wenn man nur das zweite harmonische Mass des Hauptrandes E von B_0 in bezug auf den ganzen Hauptkreis kennt.

Nach Satz 2 ist ja

$$\Omega(0, E, B_0) \leq \Omega(0, E, |z| < 1).$$

Wenn nun $\Omega(0, E, |z| < 1) = 0$ ist, folgern wir, dass $\Omega(0, E, B_0) = 0$ ist. Alle eindeutigen automorphen Funktionen mit beschränktem Dirichletintegral über B_0 reduzieren sich somit auf Konstanten.

Folgesatz 2. *Eine notwendige Bedingung für die Existenz eindeutiger nichtkonstanter Funktionen, die automorph in bezug auf eine symmetrische Hauptkreisgruppe G vom Geschlecht $p = 0$ ohne elliptische Substitutionen sind und über B_0 von G ein beschränktes Dirichletintegral haben, ist, dass das in $z = 0$ gemessene zweite harmonische Mass des Hauptrandes E von B_0 in bezug auf den ganzen Hauptkreis positiv ist, d. h. $\Omega(0, E, |z| > 1) > 0$ ist.*

Nach meiner Arbeit [1] ist $mE = 0$ eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sich alle eindeutigen und beschränkten automorphen Funktionen der Gruppe G auf Konstanten reduzieren. Diese Bedingung ist bekanntlich äquivalent mit $\omega(0, E, |z| < 1) = 0$. Nach dem Prinzip der Gebietsverminderung folgt daraus, dass $\omega(0, E, B_0) = 0$, was nach (17) in Nr. 4 zur Folge hat, dass $\Omega(0, E, B_0) = 0$ ist. Alle eindeutigen automorphen Funktionen der Gruppe G mit beschränktem Dirichletintegral reduzieren sich somit auf Konstanten.

Folgesatz 3. *Wenn eine symmetrische Hauptkreisgruppe vom Geschlecht $p = 0$ ohne elliptische Substitutionen vom Nulltypus in bezug auf die eindeutigen und beschränkten automorphen Funktionen ist, ist sie auch vom Nulltypus in bezug auf die eindeutigen automorphen Funktionen mit beschränktem Dirichletintegral.*

Die Umkehrung ist natürlich nicht richtig. Der Folgesatz 3 ist übrigens eine leichte Folge des Folgesatzes 1. Wenn die Gruppe keine nichtkonstanten eindeutigen und beschränkten automorphen Funktionen besitzt, sind natürlich auch die schlichten ausgeschlossen.

LITERATUR. **Ahlfors, L.** and **Beurling, A.**, [1] Conformal invariants and function-theoretic null-sets. Acta Math., Vol. 83, 1950. — **Nevanlinna, R.**, [1] Eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1936. — **Uskila, L.**, [1] Über die Existenz der beschränkten automorphen Funktionen. Ark. f. Mat., Bd. 1, Nr 1, 1949.

Tryckt den 26 mars 1952

Uppsala 1952. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB