Communiqué le 12 octobre 1949 par F. CARLSON

Les quantités irrationnelles quadratiques et les substitutions linéaires

Par FOLKE RYDE

Des recherches sur les fractions continues m'ont amené au théorème suivant:

Soit donnée une substitution linéaire $\frac{\alpha\theta+\beta}{\gamma\theta+\delta}$, *dont les coefficients* α, β, γ *et* δ *sont des nombres entiers quelconques avec la seule restriction que* $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. *Soit aussi donnée une équation quadratique irréductible* $p\theta^2+q\theta+r=0$, *dont les coefficients* p, q *et* r *sont des nombres entiers sans aucun facteur commun, d'ailleurs quelconques avec la seule restriction qu'entraîne la condition d'irréductibilité. Cela posé, on peut toujours déterminer — et d'une infinité double de manières — une autre substitution linéaire* $\frac{A\theta+B}{C\theta+D}$, *dont les coefficients* A, B, C *et* D *sont des nombres entiers, tels que l'équation quadratique donnée peut s'écrire sous la forme*

$$\frac{A\theta+B}{C\theta+D}=\frac{\alpha\theta+\beta}{\gamma\theta+\delta}.$$

Nous désignerons dans ce qui suit par (a, b) le plus grand commun diviseur des nombres entiers a et b. Spécialement, nous poserons $(a, 0)=a$ et $(0, b)=b$. Nous désignerons de plus par $x=D_1(a, b\,|\,c)$, $y=D_2(a, b\,|\,c)$ un système de solutions de l'équation diophantienne linéaire $ax+by=c$, à savoir le système de solutions, pour lequel la valeur absolue de x est aussi petite que possible; s'il y a deux systèmes de solutions, pour lesquels les valeurs absolues de x sont égales et plus petites que pour les autres systèmes de solutions, nous désignerons par $x=D_1(a, b\,|\,c)$, $y=D_2(a, b\,|\,c)$ le système de solutions, pour lequel la valeur de x est positive.

Pour démontrer le théorème en question, il suffit de montrer que des nombres entiers A, B, C et D peuvent être déterminés en exprimant que l'équation

$$\frac{A\theta+B}{C\theta+D}=\frac{\alpha\theta+\beta}{\gamma\theta+\delta}, \tag{1}$$

ou, ce qui revient au même, puisque θ est un nombre irrationnel, l'équation

$$(A\theta+B)(\gamma\theta+\delta)-(C\theta+D)(\alpha\theta+\beta)=0 \tag{1'}$$

est identiquement égale à l'équation

$$k\,(p\,\theta^2 + q\,\theta + r) = 0, \tag{2}$$

où k est un nombre entier, différent de zéro. On obtient ainsi les équations

$$A\,\gamma - C\,\alpha = k\,p \tag{3}$$

$$A\,\delta + B\,\gamma - C\,\beta - D\,\alpha = k\,q \tag{4}$$

$$B\,\delta - D\,\beta = k\,r, \tag{5}$$

constituant un système d'équations diophantiennes linéaires homogènes en A, B, C, D et k.

Inversement, si les équations (3), (4) et (5) sont satisfiées par des nombres entiers A, B, C, D et k, $k \neq 0$, l'équation $p\,\theta^2 + q\,\theta + r = 0$ peut s'écrire sous la forme (1).

Pour que l'équation (3) avec $k \neq 0$ admette des solutions en nombres entiers A et C il faut et il suffit, selon la théorie des équations diophantiennes linéaires, que $k\,p : (\gamma, \alpha)$ soit un nombre entier. Mais le plus grand commun diviseur des nombres entiers p et (γ, α) peut s'écrire (p, γ, α), où (p, γ, α) est le plus grand commun diviseur des nombres entiers p, γ et α. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (3) avec $k \neq 0$ admette des solutions en nombres entiers est donc

$$k = \frac{(\gamma, \alpha)}{(p, \gamma, \alpha)} \cdot k_1,$$

où k_1 est un nombre entier, différent de zéro. Le système général de solutions de l'équation (3) peut alors s'écrire

$$A = k_1 \cdot D_1\left(\frac{\gamma}{(\gamma, \alpha)},\quad \frac{-\alpha}{(\gamma, \alpha)} \;\middle|\; \frac{p}{(p, \gamma, \alpha)}\right) + \frac{\alpha}{(\gamma, \alpha)} \cdot n_1$$

$$C = k_1 \cdot D_2\left(\frac{\gamma}{(\gamma, \alpha)},\quad \frac{-\alpha}{(\gamma, \alpha)} \;\middle|\; \frac{p}{(p, \gamma, \alpha)}\right) + \frac{\gamma}{(\gamma, \alpha)} \cdot n_1,$$

où n_1 est un nombre entier quelconque. De même, pour que l'équation (5) avec $k \neq 0$, c'est-à-dire

$$B\,\delta - D\,\beta = k_1 \cdot \frac{(\gamma, \alpha)}{(p, \gamma, \alpha)} \cdot r, \qquad k_1 \neq 0, \tag{5'}$$

admette des solutions en nombres entiers B et D il faut et il suffit que

$$k_1 \cdot \frac{\dfrac{(\gamma, \alpha)\,r}{(p, \gamma, \alpha)}}{(\delta, \beta)}$$

soit un nombre entier. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (5′) admette des solutions en nombres entiers, peut pareillement s'écrire

$$k_1 = \frac{(\delta, \beta)}{\left(\frac{(\gamma, \alpha)\, r}{(p, \gamma, \alpha)}, \delta, \beta\right)} \cdot l,$$

où l est un nombre entier, différent de zéro. Le système général de solutions de l'équation (5) peut alors s'écrire

$$B = l \cdot D_1 \left(\frac{\delta}{(\delta, \beta)}, \frac{-\beta}{(\delta, \beta)} \,\middle|\, \frac{(\gamma, \alpha)\, r}{(p, \gamma, \alpha) \left(\frac{(\gamma, \alpha)\, r}{(p, \gamma, \alpha)}, \delta, \beta\right)} \right) + \frac{\beta}{(\delta, \beta)} \cdot n_2$$

$$D = l \cdot D_2 \left(\frac{\delta}{(\delta, \beta)}, \frac{-\beta}{(\delta, \beta)} \,\middle|\, \frac{(\gamma, \alpha)\, r}{(p, \gamma, \alpha) \left(\frac{(\gamma, \alpha)\, r}{(p, \gamma, \alpha)}, \delta, \beta\right)} \right) + \frac{\delta}{(\delta, \beta)} \cdot n_2,$$

où n_2 est un nombre entier quelconque.

En substituant les expressions obtenues de A, B, C, D et k, la quantité k exprimée en l, dans l'équation (4), on trouve

$$\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma, \alpha)} n_1 - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\delta, \beta)} n_2 = l \cdot N, \qquad l \neq 0, \tag{6}$$

où

$$\begin{aligned} N = q \cdot \frac{(\gamma, \alpha)}{(p, \gamma, \alpha)} \cdot \frac{(\delta, \beta)}{\left(\frac{(\gamma, \alpha)\, r}{(p, \gamma, \alpha)}, \delta, \beta\right)} & - \\ - \gamma \cdot D_1 & \left(\frac{\delta}{(\delta, \beta)}, \frac{-\beta}{(\delta, \beta)} \,\middle|\, \frac{\frac{(\gamma, \alpha)\, r}{(p, \gamma, \alpha)}}{\left(\frac{(\gamma, \alpha)\, r}{(p, \gamma, \alpha)}, \delta, \beta\right)} \right) \\ - \delta \cdot D_1 & \left(\frac{\gamma}{(\gamma, \alpha)}, \frac{-\alpha}{(\gamma, \alpha)} \,\middle|\, \frac{p}{(p, \gamma, \alpha)} \right) \cdot \frac{(\delta, \beta)}{\left(\frac{(\gamma, \alpha)\, r}{(p, \gamma, \alpha)}, \delta, \beta\right)} \\ + \beta \cdot D_2 & \left(\frac{\gamma}{(\gamma, \alpha)}, \frac{-\alpha}{(\gamma, \alpha)} \,\middle|\, \frac{p}{(p, \gamma, \alpha)} \right) \cdot \frac{(\delta, \beta)}{\left(\frac{(\gamma, \alpha)\, r}{(p, \gamma, \alpha)}, \delta, \beta\right)} \\ + \alpha \cdot D_2 & \left(\frac{\delta}{(\delta, \beta)}, \frac{-\beta}{(\delta, \beta)} \,\middle|\, \frac{\frac{(\gamma, \alpha)\, r}{(p, \gamma, \alpha)}}{\left(\frac{(\gamma, \alpha)\, r}{(p, \gamma, \alpha)}, \delta, \beta\right)} \right) \end{aligned} \tag{7}$$

est un nombre entier. Nous supposons d'abord que $N \neq 0$. Pour que l'équation (6) admette des solutions en nombres entiers, il faut et il suffit que

$$l \cdot N : \left(\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma, \alpha)}, \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\delta, \beta)}\right)$$

soit un nombre entier. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (6) admette des solutions en nombres entiers peut alors s'écrire

$$l = \frac{\left(\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma, \alpha)}, \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\delta, \beta)}\right)}{\left(N, \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma, \alpha)}, \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\delta, \beta)}\right)} \cdot m,$$

où m est un nombre entier quelconque, différent de zéro. Le système général de solutions de l'équation (6) peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} n_1 &= m \cdot D_1 \left(\frac{\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma, \alpha)}}{\left(\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma, \alpha)}, \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta, \beta)}\right)}, \frac{-\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta, \beta)}}{\left(\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma, \alpha)}, \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta, \beta)}\right)} \middle| \frac{N}{\left(N, \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma, \alpha)}, \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta, \beta)}\right)} \right) \\ &\quad + \frac{\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta, \beta)}}{\left(\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma, \alpha)}, \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta, \beta)}\right)} \cdot n \\ (8) \qquad n_2 &= m \cdot D_2 \left(\frac{\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma, \alpha)}}{\left(\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma, \alpha)}, \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta, \beta)}\right)}, \frac{-\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta, \beta)}}{\left(\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma, \alpha)}, \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta, \beta)}\right)} \middle| \frac{N}{\left(N, \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma, \alpha)}, \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta, \beta)}\right)} \right) \\ &\quad + \frac{\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma, \alpha)}}{\left(\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma, \alpha)}, \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta, \beta)}\right)} \cdot n, \end{aligned}$$

où n est un nombre entier quelconque.

En substituant les expressions (8) de n_1 et n_2 avec N déterminé selon (7) dans les expressions de A, B, C et D avec

$$l = \frac{\left(\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma, \alpha)}, \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\delta, \beta)}\right)}{\left(N, \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma, \alpha)}, \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\delta, \beta)}\right)} \cdot m$$

à savoir

(9)

$$A = \frac{(\delta,\beta)\left(\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma,\alpha)},\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta,\beta)}\right)}{\left(\dfrac{(\gamma,\alpha)r}{(p,\gamma,\alpha)},\delta,\beta\right)\left(N,\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma,\alpha)},\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta,\beta)}\right)}\cdot m\cdot D_1\left(\frac{\gamma}{(\gamma,\alpha)},\frac{-\alpha}{(\gamma,\alpha)}\,\middle|\,\frac{p}{(p,\gamma,\alpha)}\right) + \frac{\alpha}{(\gamma,\alpha)}\cdot n_1$$

$$B = \frac{\left(\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma,\alpha)},\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta,\beta)}\right)}{\left(N,\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma,\alpha)},\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta,\beta)}\right)}\cdot m\cdot D_1\left(\frac{\delta}{(\delta,\beta)},\frac{-\beta}{(\delta,\beta)}\,\middle|\,\frac{(\gamma,\alpha)r}{(p,\gamma,\alpha)\left(\dfrac{(\gamma,\alpha)r}{(p,\gamma,\alpha)},\delta,\beta\right)}\right) + \frac{\beta}{(\delta,\beta)}\cdot n_2$$

$$C = \frac{(\delta,\beta)\left(\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma,\alpha)},\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta,\beta)}\right)}{\left(\dfrac{(\gamma,\alpha)r}{(p,\gamma,\alpha)},\delta,\beta\right)\left(N,\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma,\alpha)},\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta,\beta)}\right)}\cdot m\cdot D_2\left(\frac{\gamma}{(\gamma,\alpha)},\frac{-\alpha}{(\gamma,\alpha)}\,\middle|\,\frac{p}{(p,\gamma,\alpha)}\right) + \frac{\gamma}{(\gamma,\alpha)}\cdot n_1$$

$$D = \frac{\left(\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma,\alpha)},\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta,\beta)}\right)}{\left(N,\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma,\alpha)},\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta,\beta)}\right)}\cdot m\cdot D_2\left(\frac{\delta}{(\delta,\beta)},\frac{-\beta}{(\delta,\beta)}\,\middle|\,\frac{(\gamma,\alpha)r}{(p,\gamma,\alpha)\left(\dfrac{(\gamma,\alpha)r}{(p,\gamma,\alpha)},\delta,\beta\right)}\right) + \frac{\delta}{(\delta,\beta)}\cdot n_2, \qquad (m\neq 0),$$

nous trouvons les solutions les plus générales du problème proposé sous une forme explicite.

Dans le cas où $N=0$, les expressions (8) de n_1 et n_2 se simplifient aux suivantes

(8′)

$$n_1 = \frac{\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta,\beta)}}{\left(\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma,\alpha)},\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta,\beta)}\right)}\cdot n$$

$$n_2 = \frac{\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma,\alpha)}}{\left(\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma,\alpha)},\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\delta,\beta)}\right)}\cdot n$$

et les expressions (9) de A, B, C et D se réduisent en

$$
(9') \qquad
\begin{aligned}
A &= \frac{(\delta, \beta)}{\left(\frac{(\gamma, \alpha) r}{(p, \gamma, \alpha)}, \delta, \beta\right)} \cdot l \cdot D_1 \left(\frac{\gamma}{(\gamma, \alpha)}, \frac{-\alpha}{(\gamma, \alpha)} \,\middle|\, \frac{p}{(p, \gamma, \alpha)} \right) + \frac{\alpha}{(\gamma, \alpha)} \cdot n_1 \\
B &= l \cdot D_1 \left(\frac{\delta}{(\delta, \beta)}, \frac{-\beta}{(\delta, \beta)} \,\middle|\, \frac{(\gamma, \alpha) r}{(p, \gamma, \alpha)\left(\frac{(\gamma, \alpha) r}{(p, \gamma, \alpha)}, \delta, \beta\right)} \right) + \frac{\beta}{(\delta, \beta)} \cdot n_2 \\
C &= \frac{(\delta, \beta)}{\left(\frac{(\gamma, \alpha) r}{(p, \gamma, \alpha)}, \delta, \beta\right)} \cdot l \cdot D_2 \left(\frac{\gamma}{(\gamma, \alpha)}, \frac{-\alpha}{(\gamma, \alpha)} \,\middle|\, \frac{p}{(p, \gamma, \alpha)} \right) + \frac{\gamma}{(\gamma, \alpha)} \cdot n_1 \\
D &= l \cdot D_2 \left(\frac{\delta}{(\delta, \beta)}, \frac{-\beta}{(\delta, \beta)} \,\middle|\, \frac{(\gamma, \alpha) r}{(p, \gamma, \alpha)\left(\frac{(\gamma, \alpha) r}{(p, \gamma, \alpha)}, \delta, \beta\right)} \right) + \frac{\delta}{(\delta, \beta)} \cdot n_2. \qquad (l \neq 0)
\end{aligned}
$$

Les formules (7), (8) et (9), respectivement (8′) et (9′), maintiennent leur validité dans le cas où l'un ou l'autre des coefficients α, β, γ et $\delta = 0$, ou si $\alpha = \delta = 0$, ou si $\beta = \gamma = 0$, pourvu que l'on remplace partout $(a, 0)$ par a, $(0, b)$ par b, $(p, a, 0)$ par (p, a) et $(p, 0, b)$ par (p, b).

Note. La théorie générale des systèmes d'équations diophantiennes linéaires a été élaborée par Ignaz Heger, Denkschr. Akad. Wiss. Wien, *14*, Abth. II, p. 1 (1858). Vu la nature très simple du système d'équations diophantiennes linéaires que nous avons rencontré ici, à savoir les équations (3), (4) et (5), nous avons pu obtenir des expressions explicites pour les solutions sans avoir eu besoin de recourir aux investigations laborieuses d'Heger. Récemment le problème des systèmes d'équations diophantiennes linéaires homogènes a été élégamment traité par L. W. Griffith, Bull. Amer. Math. Soc. *52*, pp. 734—736 (1946), et W. Givens, Bull. Amer. Math. Soc. *53*, pp. 780—783 (1947). Cependant, leurs solutions contiennent en général plus de paramètres qu'il ne faut.

Tryckt den 16 december 1949.

Uppsala 1949. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB