ARKIV FÖR MATEMATIK Band 1 nr 4

Mitgeteilt am 13. Oktober 1948 durch T. CARLEMAN und F. CARLSON

Fast-monotone Kettenbrüche

Von FOLKE RYDE

Wir betrachten einen $(n+1)$-gliedrigen Kettenbruch der Form

$$a_1 + \frac{a_1|}{|a_2} + \frac{a_2|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}|}{|a_n} + \frac{a_n|}{|a_{n+1}},$$

wo die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$ ganze, positive Zahlen sind, die folgende Bedingungen erfüllen $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots \geqq a_{n-1} \geqq a_n$. Hinsichtlich der Zahl a_{n+1} können folgende Fälle unterschieden werden:

1. $a_{n+1} = 1$. Der Kettenbruch mag dann ein *monotoner*, nicht-wachsender Kettenbruch genannt werden. Ich habe diese Kettenbrüche in einigen Schriften[1] untersucht.
2. $1 < a_{n+1} \leqq 2\,a_n$.
3. $2\,a_n < a_{n+1}$. Der Kettenbruch mag dann ein *fast-monotoner* Kettenbruch genannt werden.

Hinsichtlich des zweiten Falles gilt folgender Satz:

Aus der Kettenbruchentwicklung

$$a_1 + \frac{a_1|}{|a_2} + \frac{a_2|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}|}{|a_n} + \frac{a_n|}{|a_{n+1}},$$

wo $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$ *solche ganze, positive Zahlen sind, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:* $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots \geqq a_{n-1} \geqq a_n$ *und* $1 < a_{n+1} \leqq 2\,a_n$, *kann immer durch fortgesetzte Entwicklung der Zahl* a_{n+1} *wenigstens* eine *monotone oder fast-monotone Kettenbruchentwicklung erhalten werden.*

[1] Der Algorithmus der monotonen, nicht-wachsenden Kettenbrüche. *Arkiv för matematik, astronomi och fysik.* Bd 31 A. N:o 19 (1944). Diese Schrift wird im Folgenden mit M. K. I bezeichnet.

Über die rekursorische Berechnung der monotonen, nicht-wachsenden Kettenbrüche, *Arkiv för matematik, astronomi och fysik.* Bd 31 B. N:o 12 (1944). Diese Schrift wird im Folgenden mit M. K. II bezeichnet.

Tafel und Nomogramm der monotonen, nicht-wachsenden Kettenbrüche. *Arkiv för matematik, astronomi och fysik.* Bd 34 A. N:o 11 (1947). Diese Schrift wird im Folgenden mit M. K. III bezeichnet.

Eine Produktdarstellung der monotonen, nicht-wachsenden Kettenbrüche. *Arkiv för matematik, astronomi och fysik.* Bd 34 A. N:o 16 (1947). Diese Schrift wird im Folgenden mit M. K. IV bezeichnet.

Denn, wenn a_{n+1} eine *gerade* Zahl bedeutet, führt die Entwicklung

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}a_{n+1} + \frac{\tfrac{1}{2}a_{n+1}|}{|\ 1}$$

zu einer *monotonen* Entwicklung, da $\frac{1}{2}a_{n+1} \leqq a_n$ ist, und, wenn a_{n+1} eine *ungerade* Zahl > 5 bedeutet, führt die Entwicklung

$$a_{n+1} = [\tfrac{1}{2}a_{n+1}] + 1 + \frac{[\tfrac{1}{2}a_{n+1}] + 1|}{|\ 1} + \frac{1\ |}{|[\tfrac{1}{2}a_{n+1}]}$$

zu einer *fast-monotonen* Entwicklung, weil dann

$$[\tfrac{1}{2}a_{n+1}] + 1 = \tfrac{1}{2}a_{n+1} - \tfrac{1}{2} + 1 = \tfrac{1}{2}a_{n+1} + \tfrac{1}{2} \leqq a_n.$$

Denn zufolge der Bedingung $a_{n+1} \leqq 2a_n$ und weil a_{n+1} eine ungerade Zahl bedeutet, ist $a_{n+1} \leqq 2a_n - 1$, das heisst $\frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2} \leqq a_n$. Weiterhin ist $[\frac{1}{2}a_{n+1}] > 2$, da $a_{n+1} > 5$ ist.

Es erübrigt noch die Fälle $a_{n+1} = 5$ und 3 zu behandeln. Im ersten Fall führt die Entwicklung $5 = 3 + \frac{3|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1}$ zu einer *monotonen* Entwicklung, weil $5 \leqq 2a_n - 1$ ist, d. h. $3 \leqq a_n$. Im zweiten Fall führt die Entwicklung $3 = 2 + \frac{2|}{|1} + \frac{1|}{|1}$ zu einer *monotonen* Entwicklung, weil $3 \leqq 2a_n - 1$ ist, d. h. $2 \leqq a_n$.

Da die im vorstehenden Satz erwähnten Kettenbruchentwicklungen immer auf die angegebene Weise zu monotonen, bzw. fast-monotonen Entwicklungen fortgesetzt werden können, können wir im Folgenden von diesem Fall absehen. Dagegen sind die fast-monotonen Kettenbruchentwicklungen als Entwicklungen neuer Art im Verhältnis zu den monotonen Entwicklungen anzusehen, was aus dem folgenden Satz ersichtlich wird:

Aus der fast-monotonen Kettenbruchentwicklung

$$a_1 + \frac{a_1|}{|a_2} + \frac{a_2|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}|}{|\ a_n} + \frac{a_n\ |}{|a_{n+1}}$$

kann nimmer durch fortgesetzte Entwicklung der Zahl a_{n+1} weder eine neue fast-monotone Entwicklung noch eine monotone Entwicklung erhalten werden.

Denn es ist diesfalls nicht möglich, die Zahl a_{n+1} folgendermassen zu entwickeln

$$a_{n+1} = b_1 + \frac{b_1|}{|b_2} + \frac{b_2|}{|b_3} + \cdots + \frac{b_{m-1}|}{|\ b_m} + \frac{b_m\ |}{|b_{m+1}},$$

wo $b_1, b_2, b_3, \ldots b_{m-1}, b_m$ und b_{m+1} ganze, positive Zahlen der Art sind, dass $b_1 \geqq b_2 \geqq b_3 \geqq \cdots \geqq b_{m-1} \geqq b_m$ und wo $b_1 \leqq a_n$ ist. Denn unter den angegebenen Bedingungen ist

$$b_2 + \frac{b_2|}{|b_3} + \cdots + \frac{b_{m-1}|}{|b_m} + \frac{b_m|}{|b_{m+1}} \geqq 1$$

und somit $a_{n+1} \leqq 2 b_1$, d. h. $a_{n+1} \leqq 2 a_n$, was im Widerspruch mit der Annahme steht, dass der gegebene Kettenbruch ein fast-monotoner ist.

Im Folgenden beabsichtige ich die fast-monotonen Kettenbrüche der Hauptsache nach in gleicher Weise zu untersuchen, wie ich in den obenerwähnten Schriften M. K. I—IV die monotonen Kettenbrüche behandelt habe.

I

Die Auseinandersetzungen in M. K. I §§ 1—6 behalten — mutatis mutandis — ihre Gültigkeit auch rücksichtlich der fast-monotonen Kettenbrüche. Folgende Umstände müssen dabei beachtet werden:

1. Der Algorithmus führt zum *Gelenknennerabbruch* bei dem n-ten Gelenk nicht nur für $r_n < 1$ sondern auch für $r_n = 1$, wo r_n der n-te Gelenknenner bedeutet.

2. Der Algorithmus führt zum *Abschluss* bei dem n-ten Gelenk, wenn der n-te Gelenknenner eine ganze Zahl bedeutet, die grösser als der doppelte Wert der n-ten Gelenkzahl ist, d. h. r_n ganz und $r_n > 2 s_n$.

3. Bei jedem Schritt des Algorithmus, wie er in M. K. I § 5 formuliert worden ist, muss die Möglichkeit einer Gelenkzahl $[r_n - \frac{1}{2}] + 1$ beachtet werden: Wenn nämlich $1 < r_n < [r_n] + \frac{1}{2}$ und $[r_n] : (r_n - [r_n])$ eine ganze Zahl bedeutet, liegt Abschluss bei dem $(n + 1)$-ten Gelenk vor für $s_{n+1} = [r_n]$, d. h. $s_{n+1} = [r_n - \frac{1}{2}] + 1$, falls dieser Wert nicht durch die Monotoniebedingung ausgeschlossen ist. Eine noch grössere Gelenkzahl s_{n+1} ist wegen der Beziehung $r_n < [r_n] + 1$ ausgeschlossen. Wegen derselben Beziehung ist die Möglichkeit einer Gelenkzahl $s_{n+1} > [r_n - \frac{1}{2}]$ im Fall $r_n \geqq [r_n] + \frac{1}{2}$ ausgeschlossen. Bei einer Gelenkzahl $s_{n+1} \leqq [r_n - \frac{1}{2}]$ ist Abschluss bei dem $(n + 1)$-ten Gelenk ausgeschlossen. Denn diesfalls wird der $(n + 1)$-te Gelenknenner $\leqq s_{n+1}$, falls $1 < r_n < [r_n] + \frac{1}{2}$ ist, woraus nämlich folgt, dass $[r_n - \frac{1}{2}] \leqq [r_n] - 1$ ist, und somit $s_{n+1} \leqq [r_n - \frac{1}{2}] \leqq [r_n] - 1 \leqq r_n - 1$. Ebenso wird der $(n + 1)$-te Gelenknenner $\leqq 2 s_{n+1}$, falls $r_n \geqq [r_n] + \frac{1}{2}$ ist, da immerfort $[r_n] + 1 > r_n$ ist, woraus folgt, dass $[r_n - \frac{1}{2}] = [r_n]$ und somit $s_{n+1} \leqq [r_n - \frac{1}{2}] = [r_n] \leqq r_n - \frac{1}{2}$. (Der $(n + 1)$-te Gelenknenner, r_{n+1}, ist mit dem n-ten Gelenknenner, r_n, durch die Beziehung

$$r_n = s_{n+1} + \frac{s_{n+1}}{r_{n+1}}$$

verknüpft.) Vgl. die Erörterungen in M. K. I § 2 und 3 oder den letzten Satz dieser Abteilung, woraus ebenso folgt, *dass Abschluss nur bei einer Gelenkzahl* $[r_n - \frac{1}{2}] + 1$ *auftreten kann.*

4. Wenn im Fall $1 < r_n < [r_n] + \frac{1}{2}$ ins besondere $[r_n] = 1$, d. h. $1 < r_n < 3/2$ ist, liegt Abschluss bei dem $(n + 1)$-ten Gelenk vor, wenn und nur wenn r_n eine Zahl der Form $1 + 1/m$ mit m ganz und > 2 ist. Wenn dagegen $[r_n] = 2$,

d. h. $2 < r_n < 5/2$ ist, liegt Abschluss bei dem $(n+1)$-ten Gelenk vor, wenn und nur wenn r_n eine Zahl der Form $2 + 2/m$ mit m ganz und > 4 ist. Die genannten Zahlen gehören zu denjenigen Intervallen, in denen sonst *Gelenkzahlenabbruch* vorliegt.

Eine erhebliche Umarbeitung ist nur bei M. K. I § 8 erforderlich. Es gilt der Satz: *Es gibt keine rationale Zahl zwischen 1 und 3, die sich auf mehr als eine Weise in der Form eines fast-monotonen Kettenbruches entwickeln lässt. Hierbei kann die Zahl 3 durch keine grössere Zahl ersetzt werden.*

Der letzte Teil des Satzes ist evident. Denn die Zahl $3 + \dfrac{1}{2m+1}$ gestattet für jedes $m > 2$ zwei fast-monotone Entwicklungen, nämlich

$$3 + \frac{3\,|}{|\,6m+3} \quad \text{und} \quad 2 + \frac{2|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|m}.$$

Zudem ist $\lim\limits_{m\to\infty}\left(3 + \dfrac{1}{2m+1}\right) = 3.$

Der erste Teil des Satzes kann z. B. folgendermassen ermittelt werden: Wir zerspalten das Intervall $1 \leqq r \leqq 3$ in folgende Teilintervalle (die Bezeichnung ist im Verhältnis zu M. K. I geändert)

$$1 \leqq r \leqq 3/2 \quad (\mathrm{A}) \qquad 3/2 < r < 2 \quad (\mathrm{B})$$
$$2 \leqq r \leqq 5/2 \quad (\mathrm{C}) \qquad 5/2 < r \leqq 3 \quad (\mathrm{D}).$$

Der Fall $r = 1$ führt zu unmittelbarem Abbruch. Im A-Intervall liegt im übrigen Abbruch bei dem zweiten Gelenk vor, wenn nicht der entsprechende Gelenknenner der Form $1 + \dfrac{1}{n}$ mit n ganz und > 2 ist, in welchem Fall Abschluss bei dem ersten Gelenk vorliegt. Der entsprechende Kettenbruch wird $(1_1 : n)$ mit n ganz und > 2 bezeichnet. Der Fall $r = 2$ führt zum Abbruch bei dem ersten Gelenk. Im übrigen liegt Abbruch bei dem zweiten Gelenk im C-Intervall vor, wenn nicht der entsprechende Gelenknenner der Form $2 + \dfrac{2}{n}$ mit n ganz und > 4 ist, in welchem Fall Abschluss bei dem ersten Gelenk vorliegt. Der entsprechende Kettenbruch wird $(2_1 : n)$ mit n ganz und > 4 bezeichnet.

Wenn r zum B-Intervall gehört, kommt der oben im Mom. 3 erwähnte Fall bei dem ersten Schritt nicht vor. — $[-\frac{1}{2}r]$ wird $= 1$ und $[r - \frac{1}{2}] = 1$. s_1 ist nach M. K. I § 5 eindeutig bestimmt und gleich 1. Für r_1 ergibt sich dann, da $r = s_1 + s_1/r_1$ ist, $1 < r_1 < 2$. B-Intervall, bzw. A-Intervall mit nachfolgendem Abbruch oder Abschluss liegt vor. In der Fortsetzung kommen auch nur dieselben Intervalle vor. Die einzigen Zahlen im B-Intervall, die sich in der Form eines fast-monotonen Kettenbruches entwickeln lassen, sind die Zahlen $(1_l : n)$ mit l ganz und > 1 und n ganz und > 2.

Wenn r zum D-Intervall gehört, kommt ebenso der oben im Mom. 3 erwähnte Fall bei dem ersten Schritt nicht vor. — $[-\frac{1}{2}r]$ wird $= 2$ und $[r - \frac{1}{2}] = 2$. s_1 ist eindeutig bestimmt und gleich 2. Für r_1 ergibt sich $2 \leqq r_1 < 4$. C-Intervall, D-Intervall, der Fall $3 < r_1 < 7/2$ oder der Fall $7/2 \leqq r_1 < 4$ liegt vor. Im Fall $3 < r_1 < 7/2$, der vorliegt, wenn $18/7 < r < 8/3$, liegt der in M. K. I § 4 behandelte Fall mit $u = 1$ vor. — $[-\frac{1}{2} r_1]$ wird $= 2$ und $[r_1 - \frac{1}{2}] - ([r] - u - 1)$ ergibt sich gleich 2. Somit wird auch s_2 eindeutig bestimmt und gleich 2. Wegen der Monotoniebedingung ist hier der oben im Mom. 3 erwähnte Fall ausgeschlossen. Für r_2 ergibt sich $4/3 < r_2 < 2$, d. h. entweder ein Teilintervall des A-Intervalls oder das B-Intervall. Doch gibt es im Teilintervall $4/3 < r \leqq 3/2$ des A-Intervalls keinen Abschluss-Fall. Die entsprechenden fast-monotonen Kettenbrüche sind der Form $(2_2 1_l : n)$ mit l ganz und > 1 und n ganz und > 2. — Im Fall $7/2 \leqq r_1 < 4$, der vorliegt, wenn $5/2 < r \leqq 18/7$, liegt der in M. K. I § 4 behandelte Fall mit $u = 0$ vor. — $[-\frac{1}{2} r_1]$ wird $= 2$ und $[r_1 - \frac{1}{2}] - ([r] - u - 1)$ ergibt sich gleich 2. Somit wird auch s_2 eindeutig bestimmt und gleich 2. Für r_2 ergibt sich $1 < r_2 \leqq 4/3$, d. h. ein Teilintervall des A-Intervalls. Die entsprechenden fast-monotonen Kettenbrüche sind der Form $(2_2 1_1 : n)$ mit n ganz und > 2. — Wenn r_1 zum C-Intervall gehört, sind die entsprechenden fast-monotonen Kettenbrüche der Form $(2_2 : n)$ mit n ganz und > 4. — Wenn zuletzt r_1 zum D-Intervall gehört, wiederholt sich der Vorgang. Die entsprechenden fast-monotonen Kettenbrüche sind entweder der Form $(2_m 1_l : n)$ mit m ganz und > 2 und l ganz und $\geqq 1$ und n ganz und > 2 oder der Form $(2_m : n)$ mit m ganz und > 2 und n ganz und > 4.

Wie wir gesehen haben, werden die brauchbaren Gelenkzahlen immer eindeutig bestimmt, wenn $1 \leqq r \leqq 3$. Die entsprechenden fast-monotonen Kettenbrüche sind entweder der Form $(1_l : n)$ mit l ganz und $\geqq 1$ und n ganz und > 2 oder der Form $(2_m : n)$ mit m ganz und $\geqq 1$ und n ganz und > 4 oder der Form $(2_m 1_l : n)$ mit m ganz und $\geqq 2$ und l ganz und $\geqq 1$ und n ganz und > 2.

Es gilt folgender Satz: *Die notwendige und hinreichende Bedingung für einen fast-monotonen Abschluss bei dem n-ten Gelenk*[1] *kann folgenderweise mittelst des $(n-1)$-ten Gelenknenners ausgedrückt werden: Wenn der $(n-1)$-te Gelenknenner als ein irreduzibler Bruch $\frac{p}{q}$ geschrieben wird, muss p einen Faktor enthalten, der $\equiv 1 \pmod{q}$ ist, während das Produkt der anderen Faktoren $< \frac{1}{2} q$ ist.*

Denn, wenn $r_{n-1} = s_n + \frac{s_n}{N}$ ist, so liegt fast-monotoner Abschluss bei dem n-ten Gelenk vor, wenn N eine ganze, positive Zahl $> 2 s_n$ ist. Es ergibt sich dann $r_{n-1} = \frac{p}{q} = \frac{s_n (N+1)}{N}$. Da $\frac{p}{q}$ ein irreduzibler Bruch ist, kann $N = q t$ geschrieben werden, wo t eine ganze, positive Zahl bedeutet. Es ergibt sich dann $\frac{p}{q} = \frac{s_n (q t + 1)}{q t}$. Da $q t + 1 \not\equiv 0 \pmod{t}$ ist, muss $s_n \equiv 0 \pmod{t}$ sein. Es ergibt sich $p = \frac{s_n}{t}(q t + 1)$. p enthält somit einen Faktor, nämlich $q t + 1$, der $\equiv 1 \pmod{q}$ ist, während das Produkt der anderen Faktoren, d. h. $\frac{s_n}{t}$ kleiner als $\frac{1}{2} q$ ist, denn $N = q t$ ist $> 2 s_n$.

[1] Die Erfüllung der Monotoniebedingung wird vorausgesetzt.

Wenn anderseits $r_{n-1} = \frac{p}{q}$, wo p und q teilerfremd sind, wo p einen Faktor, p_1, enthält, der $\equiv 1 \pmod{q}$ ist, während das Produkt der anderen Faktoren, p_2, kleiner als $\frac{1}{2} q$ ist, so ergibt sich

$$r_{n-1} = \frac{p_1 p_2}{q} = \frac{(q t + 1) p_2}{q} = \frac{(q t + 1) p_2 t}{q t} = p_2 t + \frac{p_2 t}{q t},$$

wo die ganze, positive Zahl $q t$ folgende Bedingung erfüllt $q t > 2 p_2 t$, da $q > 2 p_2$ ist. Dann liegt fast-monotoner Abschluss bei dem Gelenk $p_2 t + \frac{p_2 t|}{|}$ vor.

Die Gelenkzahlen 1 und 2 als letzte Gelenkzahlen nehmen hierbei keine Sonderstellung ein.

II

Es gilt folgender Satz, der das Analogon des Satzes in M. K. IV, Abschn. II ist und der sich in gleicher Weise beweisen lässt:

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit der rationalen Zahl r durch einen $(n + 1)$-gliedrigen, fast-monotonen Kettenbruch ist, dass r in folgender Weise in Faktoren zerlegt werden kann

$$r = \varkappa_0 \left(1 + \frac{1}{\varkappa_1}\right) \left(1 - \frac{1}{\varkappa_2}\right) \left(1 + \frac{1}{\varkappa_3}\right) \cdots \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\varkappa_n}\right),$$

wo $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots \varkappa_n$ rationale Zahlen sind, die folgende Bedingungen erfüllen:

1. $\varkappa_0,\ \varkappa_1,\ \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1 - 1}{\varkappa_1 + 1}$ *und* $\frac{(\varkappa_{i+1} - \varkappa_i + (-1)^i)(\varkappa_i - \varkappa_{i-1} + (-1)^{i-1})}{\varkappa_i (\varkappa_i + (-1)^{i-1})}$ *für* $i = 2, 3, \ldots n - 1$ *sollen ganze, positive Zahlen sein.*

2. *Folgende Ungleichungen sollen erfüllt sein:*

$$\varkappa_1 \leqq \varkappa_0$$
$$\varkappa_2 \leqq \varkappa_1 (\varkappa_1 + 1) + \varkappa_1 + 1$$
$$\varkappa_3 \leqq \frac{\varkappa_2 (\varkappa_2 - 1)}{\varkappa_1 + 1} + \varkappa_2 - 1$$

und allgemein für $i = 3, 4, \ldots n - 2$

$$\varkappa_{i+1} \leqq \frac{\varkappa_i (\varkappa_i + (-1)^{i-1})}{\varkappa_{i-1} (\varkappa_{i-1} + (-1)^{i-2})} (\varkappa_{i-1} - \varkappa_{i-2} + (-1)^{i-2}) + \varkappa_i + (-1)^{i-1}$$

und schliesslich für $n > 3$

$$\varkappa_n > 2 \cdot \frac{\varkappa_{n-1} (\varkappa_{n-1} + (-1)^{n-2})}{\varkappa_{n-2} (\varkappa_{n-2} + (-1)^{n-3})} \cdot (\varkappa_{n-2} - \varkappa_{n-3} + (-1)^{n-3}) + \varkappa_{n-1} + (-1)^{n-2}.$$

Für $n = 1, 2,$ und 3 soll die letzte Ungleichung durch bzw.

$$\varkappa_1 > 2\varkappa_0$$

und

$$\varkappa_2 > 2\varkappa_1(\varkappa_1 + 1) + \varkappa_1 + 1$$

$$\varkappa_3 > 2\frac{\varkappa_2(\varkappa_2 - 1)}{\varkappa_1 + 1} + \varkappa_2 - 1$$

ersetzt werden.

Für $n = 1$ wiederfinden wir den letzten Satz in I.

III

Hinsichtlich der in M. K. II hergeleiteten Rekursionsformeln, womit die Anzahl der monotonen, nicht-wachsenden Kettenbrüche berechnet werden kann, sei Folgendes angeführt: Die Anzahl der fast-monotonen Kettenbruchentwicklungen der rationalen Zahl $r = \frac{qk + l - q}{q}$ — wir bezeichnen sie $Nm'(r)$ — kann mit Hilfe folgender Rekursionsformeln berechnet werden:

Es gilt

$$Nm'(1) = 0 \tag{A$_1$}$$

und für k ganz und > 2

$$Nm'(k-1) = \sum_{s=-\left[-\frac{k-1}{2}\right]}^{s=k-2} Nm'\left(\frac{s}{k-1-s}\right). \tag{A$_2$}$$

Es gilt weiterhin

$$Nm'\left(\frac{qk + l - q}{q}\right) = \sum_{s=-\left[-\frac{qk+l-q}{2q}\right]}^{s=k-2} Nm'\left(\frac{sq}{qk + l - q - sq}\right) + \left\{\frac{k-1}{l}\right\} \tag{A$_3$}$$

unter folgenden Bedingungen

1. $q =$ *einer ganzen Zahl* $\geqq 3$,
2. $k =$ *einer ganzen Zahl* $\geqq 2$,
3. $l =$ *einer ganzen, positiven Zahl,*
4. l *und* q *sind teilerfremde Zahlen,*
5. $\frac{l}{q} < \frac{1}{2}$,

6. $\left\{\dfrac{k-1}{l}\right\} = 1$, *wenn* $k - 1 \equiv 0 \pmod{l}$, *wobei der Wert* $l = 1$ *nicht ausgeschlossen ist, und*

$\left\{\dfrac{k-1}{l}\right\} = 0$, *wenn* $k - 1 \not\equiv 0 \pmod{l}$.

Für $k = 2$ *und* 3 *fällt die Summe auf der rechten Seite in Formel* (A_3) *fort.*

Dagegen gilt

$$Nm'\left(\frac{qk+l-q}{q}\right) = \sum_{s=-\left[-\frac{qk+l-q}{2q}\right]}^{s=k-1} Nm'\left(\frac{sq}{qk+l-q-sq}\right) \tag{B}$$

unter folgenden Bedingungen:

1. $q =$ *einer ganzen Zahl* $\geqq 2$,
2. $k =$ *einer ganzen Zahl* $\geqq 2$,
3. $l =$ *einer ganzen, positiven Zahl,*
4. $\dfrac{k-1}{k} \leqq \dfrac{l}{q} < 1$.

Es gilt weiterhin

$$Nm'\left(\frac{qk+l-q}{q}\right) = \sum_{s=-\left[-\frac{qk+l-q}{2q}\right]}^{s=k-2} Nm'\left(\frac{sq}{qk+l-q-sq}\right) + \\ + \sum_{t=-\left[-\frac{(k-1)q}{2l}\right]}^{t=k-1} Nm'\left(\frac{tl}{(k-1)q-tl}\right) \tag{C}$$

unter folgenden Bedingungen

1. $q =$ *einer ganzen Zahl* $\geqq 2$,
2. $k =$ *einer ganzen Zahl* $\geqq 3$,
3. $l =$ *einer ganzen, positiven Zahl,*
4. $\frac{1}{2} \leqq \dfrac{l}{q} < \dfrac{k-1}{k}$.

Für $k = 3$ *fällt die erste Summe auf der rechten Seite in Formel* (C) *fort.*

Hinsichtlich des Falles $l = 0$, d. h. $\dfrac{qk+l-q}{q} = k - 1$, sei zuerst bemerkt, dass $Nm'(k-1)$ für $k = 2$ gleich 0 sein muss, denn eine fast-monotone Kettenbruchentwicklung kann nicht den Schlussnenner 1 haben, was bei den monotonen Kettenbruchentwicklungen der Fall ist. Daher ergibt sich $Nm'(1) = 0$, während $Nm(1) = 1$ ist. — Für $k > 2$ gilt die Formel (A_2). Denn laut dessen, was in M. K. I § 2 angeführt worden ist, können dann nur die folgenden Zahlen als erste Gelenkzahlen auftreten

$$-\left[-\frac{k-1}{2}\right], \quad -\left[-\frac{k-1}{2}\right]+1, \quad \cdots -[-(k-1)]-1,$$

d. h. für $k \equiv 1 \pmod 2$ und $k \geqq 3$ die Zahlen $\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}, \ldots k-2$ und für $k \equiv 0 \pmod 2$ und $k \geqq 4$ die Zahlen $\frac{k}{2}, \frac{k+2}{2}, \ldots k-2$. Wenn die erste Gelenkzahl gleich $k - \varkappa$ gesetzt wird, so ergibt sich

$$k-1 = k-\varkappa+\frac{k-\varkappa}{r_1},$$

wo $r_1 = \frac{k-\varkappa}{k-1-(k-\varkappa)} = \frac{k-\varkappa}{\varkappa-1}$. Für $\varkappa \geqq 2$ ist mithin $r_1 \leqq k-\varkappa$ und jede fast-monotone Entwicklung der Zahl r_1 kann ohne Monotonieabbruch verwertet werden, denn die erste Gelenkzahl jeder solcher Entwicklung ist dann gewiss $< k-\varkappa$. Die in I Mom. 3 besprochene Möglichkeit einer Gelenkzahl $[r-\frac{1}{2}]+1$ im Zusammenhang mit fast-monotonem Abschluss ist hier ausgeschlossen.

Hinsichtlich des Falles $l > 0$ sei zuerst bemerkt, dass es keine Einschränkung der Gemeingültigkeit bedeutet, wenn wir voraussetzen, dass l kleiner als q ist, und dass l und q teilerfremde Zahlen sind. Laut dessen, was in M. K. I § 2 angeführt worden ist, können dabei nur die folgenden Zahlen als erste Gelenkzahlen auftreten, nämlich

$$-\left[-\frac{qk+l-q}{2q}\right], \quad -\left[-\frac{qk+l-q}{2q}\right]+1, \quad \cdots k-1,$$

denn $-\left[-\frac{qk+l-q}{q}\right]-1$ wird diesfalls gleich $k-1$. Der erste Gelenknenner r_1 wird durch folgende Gleichung bestimmt

$$\frac{qk+l-q}{q} = k-\varkappa+\frac{k-\varkappa}{r_1},$$

wo die untere Grenze der ganzen Zahl $\varkappa$ gleich 1 ist. Es ergibt sich

$$r_1 = \frac{(k-\varkappa)q}{qk+l-q-(k-\varkappa)q} = \frac{(k-\varkappa)q}{q(\varkappa-1)+l}.$$

Für $\varkappa \geqq 2$ ergibt sich hieraus $r_1 < k-\varkappa$; jede fast-monotone Entwicklung der Zahl r_1 kann wie oben ohne Monotonieabbruch verwertet werden und fast-monotoner Abschluss bei dem ersten Gelenk ist ausgeschlossen. Nur im Fall $\varkappa = 1$, d. h. $r_1 = \frac{(k-1)q}{l}$, ist eine besondere Untersuchung nötig.

Wenn dann $\frac{l}{q} < \frac{1}{2}$ ist, so ergibt sich $r_1 > 2(k-1)$. Wenn r_1 ganz ist, liegt dann fast-monotoner Abschluss vor. Sonst folgt Monotonieabbruch. Denn die erste Gelenkzahl bei jeder fast-monotonen Entwicklung einer Zahl r_1 muss grösser als $k-1$ sein, wenn r_1 grösser als $2(k-1)$ ist. $r_1 = \frac{(k-1)q}{l}$ ist aber ganz, wenn und nur wenn $k-1 \equiv 0 \pmod{l}$ ist, da l und q teilerfremde Zahlen sind. Das oben Angeführte erklärt das Auftreten des Gliedes $\left\{\frac{k-1}{l}\right\}$ in der Formel (A_3). — Zu demselben Ergebnis führt auch eine Auseinandersetzung, die den letzten Satz in I zum Ausgangspunkt hat. — Die Formel (A_3) behält ihre Gültigkeit auch in den Fällen $k = 2$ und 3. Doch fällt jetzt die Summe auf der rechten Seite fort.

Wenn dagegen $\frac{k-1}{k} \leqq \frac{l}{q} < 1$ und $k \geqq 2$ angenommen wird, so ergibt sich $r_1 = \frac{(k-1)q}{l} \leqq k$; jede fast-monotone Entwicklung der Zahl r_1 kann jetzt ohne Monotonieabbruch verwertet werden, denn die erste Gelenkzahl jeder solcher Entwicklung muss kleiner als k sein. Fast-monotoner Abschluss ist ausgeschlossen, denn r_1 wird nicht grösser als $2(k-1)$. Daher gilt jetzt die Formel (B).

Wenn schliesslich $\frac{1}{2} \leqq \frac{l}{q} < \frac{k-1}{k}$ und daher $k \geqq 3$ angenommen wird, so ergibt sich $k < \frac{(k-1)q}{l} \leqq 2(k-1)$. Laut dessen, was in M. K. I § 2 angeführt worden ist, können dabei nur die folgenden Zahlen als *zweite* Gelenkzahlen auftreten, nämlich

$$-\left[-\frac{(k-1)q}{2l}\right], \quad -\left[-\frac{(k-1)q}{2l}\right]+1, \quad \cdots -\left[-\frac{(k-1)q}{l}\right]-1.$$

Die letzte Zahl ist gewiss $\geqq k$, denn aus $k < \frac{(k-1)q}{l}$ folgt $-\frac{(k-1)q}{l} < -k$ und daher $\left[-\frac{(k-1)q}{l}\right] \leqq -k-1$ und mithin $-\left[-\frac{(k-1)q}{l}\right] \geqq k+1$. Diese letzte Zahl ist mithin ausgeschlossen, denn die zweite Gelenkzahl darf nicht grösser als $k-1$ sein. Da die letzte Zahl in vorstehender Reihe die einzige ist, die zu fast-monotonem Abschluss führen kann (vgl. die Auseinandersetzung bei der ersten Gelenkzahl, die gemeingültig ist), und da Monotonieabbruch bei dem zweiten Gelenk für r_1 ebenso nur bei dieser letzten Zahl vorkommen kann, so ergibt sich, da weiterhin

$$\frac{(k-1)q}{l} = t + \cfrac{t}{\cfrac{tl}{(k-1)q-tl}}$$

ist, die Formel (C).

IV

Tafel der fast-monotonen Kettenbrüche.

Die nachstehende Tafel der fast-monotonen Kettenbrüche ist mit Hilfe der Rekursionsformeln in III berechnet worden. Sie gibt die Anzahl $Nm'\left(\frac{p-q}{q}\right)$ der Entwicklungen der rationalen Zahl $\frac{p-q}{q}$ in der Form fast-monotoner Kettenbrüche für positive, ganzwertige $p \leqq 50$ und positive, ganzwertige $q \leqq p-1$. Wo kein Wert angegeben ist, bedeutet dies, dass $Nm'\left(\frac{p-q}{q}\right)$ hier gleich Null ist. Die Tafel enthält auch die bezüglichen Entwicklungen selbst für jede Bruchzahl $\frac{p-q}{q}$, wo p und q wie oben eingeschränkt sind.[1] Wenn $\frac{p-q}{q}$ eine ganze Zahl, n, bedeutet, wächst $Nm'(n)$ rasch mit n. Daher sind die Entwicklungen diesfalls nur für $n < 20$ angegeben. Wo keine Entwicklung angegeben ist, obgleich $Nm'\left(\frac{p-q}{q}\right)$ nicht gleich Null ist, bedeutet dies, dass der Bruch $\frac{p-q}{q}$ abgekürzt werden kann. Die bezüglichen Entwicklungen können bei dem abgekürzten Bruch nachgeschlagen werden.

Die Tafel ist hinsichtlich der Anzahl der Entwicklungen mit Hilfe einer geometrischen Darstellung des bezüglichen Algorithmus geprüft worden. Diese Darstellung hat die Form eines Nomogramms, der grosse Ähnlichkeit mit dem entsprechenden Nomogramm in M. K. III zeigt.

q	$Nm'\left(\frac{2-q}{q}\right)$
1	0

q	$Nm'\left(\frac{3-q}{q}\right)$
1	0
2	0

q	$Nm'\left(\frac{4-q}{q}\right)$
1	0
2	0

q	$Nm'\left(\frac{5-q}{q}\right)$
1	0
2	0
3	0

q	$Nm'\left(\frac{6-q}{q}\right)$
1	0
2	0
3	0

q	$Nm'\left(\frac{7-q}{q}\right)$	
1	0	
2	0	
3	1	$(1_1:3)$
4	0	

q	$Nm'\left(\frac{8-q}{q}\right)$	
1	1	$(4_1 1_1:3)$
2	0	
3	0	
4	0	

q	$Nm'\left(\frac{9-q}{q}\right)$	
1	1	$(7_1 4_1 1_1:3)$
2	1	$(2_1 1_1:3)$
3	0	
4	1	$(1_1:4)$
5	0	

[1] $(3_1 1_2:4)$ bedeutet hierbei $3+\frac{3|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|4}$ usw.

$$Nm'\left(\frac{10-q}{q}\right)$$

1	3	$(8_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$ $(7_1 2_1 1_1 : 3)$ $(5_1 1_1 : 4)$
2	0	
3	1	$(2_1 : 6)$
4	0	
5	0	

$$Nm'\left(\frac{11-q}{q}\right)$$

1	4	$(9_1 8_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$ $(9_1 7_1 2_1 1_1 : 3)$ $(9_1 5_1 1_1 : 4)$ $(7_1 2_1 : 6)$
2	0	
3	0	
4	1	$(1_2 : 3)$
5	1	$(1_1 : 5)$

$$Nm'\left(\frac{12-q}{q}\right)$$

1	6	$(10_1 9_1 8_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$ $(10_1 9_1 7_1 2_1 1_1 : 3)$ $(10_1 9_1 5_1 1_1 : 4)$ $(10_1 7_1 2_1 : 6)$ $(7_1 1_2 : 3)$ $(6_1 1_1 : 5)$
2–6	0	

$$Nm'\left(\frac{13-q}{q}\right)$$

1	6	$(11_1 10_1 9_1 8_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$ $(11_1 10_1 9_1 7_1 2_1 1_1 : 3)$ $(11_1 10_1 9_1 5_1 1_1 : 4)$ $(11_1 10_1 7_1 2_1 : 6)$ $(11_1 7_1 1_2 : 3)$ $(11_1 6_1 1_1 : 5)$
2	1	$(3_1 1_1 : 5)$
3	1	$(3_1 : 9)$
4	1	$(2_1 : 8)$
5	0	
6	1	$(1_1 : 6)$

$$Nm'\left(\frac{14-q}{q}\right)$$

1	10	$(12_1 11_1 10_1 9_1 8_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$ $(12_1 11_1 10_1 9_1 7_1 2_1 1_1 : 3)$ $(12_1 11_1 10_1 9_1 5_1 1_1 : 4)$ $(12_1 11_1 10_1 7_1 2_1 : 6)$ $(12_1 11_1 7_1 1_2 : 3)$ $(12_1 11_1 6_1 1_1 : 5)$ $(11_1 3_1 1_1 : 5)$ $(10_1 3_1 : 9)$ $(9_1 2_1 : 8)$ $(7_1 1_1 : 6)$
2	0	
3	1	$(2_1 1_1 : 5)$
4	0	
5	1	$(1_2 : 4)$
6	1	
7	0	

$$Nm'\left(\frac{15-q}{q}\right)$$

1	13	$(13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 8_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$ $(13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 7_1 2_1 1_1 : 3)$ $(13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 5_1 1_1 : 4)$ $(13_1 12_1 11_1 10_1 7_1 2_1 : 6)$ $(13_1 12_1 11_1 7_1 1_2 : 3)$ $(13_1 12_1 11_1 6_1 1_1 : 5)$ $(13_1 11_1 3_1 1_1 : 5)$ $(13_1 10_1 3_1 : 9)$ $(13_1 9_1 2_1 : 8)$ $(13_1 7_1 1_1 : 6)$ $(11_1 2_1 1_1 : 5)$ $(9_1 1_2 : 4)$ $(8_1 1_1 : 3)$
2	1	$(5_1 3_1 : 9)$
3–6	0	
7	1	$(1_1 : 7)$

$$Nm'\left(\frac{16-q}{q}\right)$$

1	15	$(14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 8_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$ $(14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 7_1 2_1 1_1 : 3)$ $(14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 5_1 1_1 : 4)$ $(14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 7_1 2_1 : 6)$ $(14_1 13_1 12_1 11_1 7_1 1_2 : 3)$ $(14_1 13_1 12_1 11_1 6_1 1_1 : 5)$ $(14_1 13_1 11_1 3_1 1_1 : 5)$ $(14_1 13_1 10_1 3_1 : 9)$ $(14_1 13_1 9_1 2_1 : 8)$ $(14_1 13_1 7_1 1_1 : 6)$ $(14_1 11_1 2_1 1_1 : 5)$ $(14_1 9_1 1_2 : 4)$ $(14_1 8_1 1_1 : 3)$ $(13_1 5_1 3_1 : 9)$ $(8_1 1_1 : 7)$
2	1	
3	2	$(4_1 : 12)$ $(3_1 2_1 : 8)$
4	0	
5	1	$(2_1 : 10)$
6–8	0	

$$Nm'\left(\frac{17-q}{q}\right)$$

1	19	$(15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 8_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$ $(15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 7_1 2_1 1_1 : 3)$ $(15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 5_1 1_1 : 4)$ $(15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 7_1 2_1 : 6)$ $(15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 7_1 1_2 : 3)$ $(15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 6_1 1_1 : 5)$ $(15_1 14_1 13_1 11_1 3_1 1_1 : 5)$ $(15_1 14_1 13_1 10_1 3_1 : 9)$ $(15_1 14_1 13_1 9_1 2_1 : 8)$ $(15_1 14_1 13_1 7_1 1_1 : 6)$ $(15_1 14_1 11_1 2_1 1_1 : 5)$ $(15_1 14_1 9_1 1_2 : 4)$ $(15_1 14_1 8_1 1_1 : 3)$ $(15_1 13_1 5_1 3_1 : 9)$ $(15_1 8_1 1_1 : 7)$ $(14_1 4_1 1_1 : 3)$ $(13_1 4_1 : 12)$ $(13_1 3_1 2_1 : 8)$ $(11_1 2_1 : 10)$
2	1	$(4_1 1_1 : 7)$
3	1	$(3_1 1_2 : 4)$
4	1	$(3_1 : 12)$
5	1	$(2_1 : 5)$
6	1	$(1_2 : 5)$
7	0	
8	1	$(1_1 : 8)$

$$Nm'\left(\frac{18-q}{q}\right)$$

1 25 $(16_1 15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 8_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$
$(16_1 15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 7_1 2_1 1_1 : 3)$
$(16_1 15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 5_1 1_1 : 4)$
$(16_1 15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 7_1 2_1 : 6)$
$(16_1 15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 7_1 1_2 : 3)$
$(16_1 15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 6_1 1_1 : 5)$
$(16_1 15_1 14_1 13_1 11_1 3_1 1_1 : 5)$
$(16_1 15_1 14_1 13_1 10_1 3_1 : 9)$
$(16_1 15_1 14_1 13_1 9_1 2_1 : 8)$
$(16_1 15_1 14_1 13_1 7_1 1_1 : 6)$
$(16_1 15_1 14_1 11_1 2_1 1_1 : 5)$
$(16_1 15_1 14_1 9_1 1_2 : 4)$
$(16_1 15_1 14_1 8_1 1_1 : 3)$
$(16_1 15_1 13_1 5_1 3_1 : 9)$ $(16_1 15_1 8_1 1_1 : 7)$
$(16_1 14_1 4_1 1_1 : 3)$ $(16_1 13_1 4_1 : 12)$
$(16_1 13_1 3_1 2_1 : 8)$ $(16_1 11_1 2_1 : 10)$
$(15_1 4_1 1_1 : 7)$ $(14_1 3_1 1_2 : 4)$
$(13_1 3_1 : 12)$ $(12_1 2_1 : 5)$
$(11_1 1_2 : 5)$ $(9_1 1_1 : 8)$
2 1
3 0
4 1
5 0
6 0
7 1 $(1_3 : 3)$
8 1
9 0

$$Nm'\left(\frac{19-q}{q}\right)$$

1 29 $(17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 8_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$
$(17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 7_1 2_1 1_1 : 3)$
$(17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 5_1 1_1 : 4)$
$(17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 7_1 2_1 : 6)$
$(17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 7_1 1_2 : 3)$
$(17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 6_1 1_1 : 5)$
$(17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 11_1 3_1 1_1 : 5)$
$(17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 10_1 3_1 : 9)$
$(17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 9_1 2_1 : 8)$
$(17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 7_1 1_1 : 6)$
$(17_1 16_1 15_1 14_1 11_1 2_1 1_1 : 5)$
$(17_1 16_1 15_1 14_1 9_1 1_2 : 4)$
$(17_1 16_1 15_1 14_1 8_1 1_1 : 3)$
$(17_1 16_1 15_1 13_1 5_1 3_1 : 9)$
$(17_1 16_1 15_1 8_1 1_1 : 7)$ $(17_1 16_1 14_1 4_1 1_1 : 3)$
$(17_1 16_1 13_1 4_1 : 12)$ $(17_1 16_1 13_1 3_1 2_1 : 8)$
$(17_1 16_1 11_1 2_1 : 10)$ $(17_1 15_1 4_1 1_1 : 7)$
$(17_1 14_1 3_1 1_2 : 4)$ $(17_1 13_1 3_1 : 12)$
$(17_1 12_1 2_1 : 5)$ $(17_1 11_1 1_2 : 5)$
$(17_1 9_1 1_1 : 8)$ $(16_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$
$(14_1 2_1 1_1 : 3)$ $(11_1 1_3 : 3)$ $(10_1 1_1 : 4)$
2 2 $(7_1 3_1 1_2 : 4)$ $(6_1 2_1 : 5)$
3 1 $(5_1 : 15)$
4 1 $(2_1 1_1 : 7)$
5 0
6 1 $(2_1 : 12)$
7 0
8 0
9 1 $(1_1 : 9)$

$$Nm'\left(\frac{20-q}{q}\right)$$

1 35 $(18_1 17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 8_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$
$(18_1 17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 7_1 2_1 1_1 : 3)$
$(18_1 17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 5_1 1_1 : 4)$
$(18_1 17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 10_1 7_1 2_1 : 6)$
$(18_1 17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 7_1 1_2 : 3)$
$(18_1 17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 12_1 11_1 6_1 1_1 : 5)$
$(18_1 17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 11_1 3_1 1_1 : 5)$
$(18_1 17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 10_1 3_1 : 9)$
$(18_1 17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 9_1 2_1 : 8)$
$(18_1 17_1 16_1 15_1 14_1 13_1 7_1 1_1 : 6)$
$(18_1 17_1 16_1 15_1 14_1 11_1 2_1 1_1 : 5)$
$(18_1 17_1 16_1 15_1 14_1 9_1 1_2 : 4)$
$(18_1 17_1 16_1 15_1 14_1 8_1 1_1 : 3)$
$(18_1 17_1 16_1 15_1 13_1 5_1 3_1 : 9)$
$(18_1 17_1 16_1 15_1 8_1 1_1 : 7)$
$(18_1 17_1 16_1 14_1 4_1 1_1 : 3)$
$(18_1 17_1 16_1 13_1 4_1 : 12)$
$(18_1 17_1 16_1 13_1 3_1 2_1 : 8)$
$(18_1 17_1 16_1 11_1 2_1 : 10)$
$(18_1 17_1 15_1 4_1 1_1 : 7)$
$(18_1 17_1 14_1 3_1 1_2 : 4)$
$(18_1 17_1 13_1 3_1 : 12)$
$(18_1 17_1 12_1 2_1 : 5)$ $(18_1 17_1 11_1 1_2 : 5)$
$(18_1 17_1 9_1 1_1 : 8)$ $(18_1 16_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$
$(18_1 14_1 2_1 1_1 : 3)$ $(18_1 11_1 1_3 : 3)$
$(18_1 10_1 1_1 : 4)$ $(17_1 7_1 3_1 1_2 : 4)$
$(17_1 6_1 2_1 : 5)$ $(16_1 5_1 : 15)$
$(15_1 2_1 1_1 : 7)$ $(13_1 2_1 : 12)$
$(10_1 1_1 : 9)$
2 3
3 3 $(5_1 4_1 1_1 : 7)$ $(4_1 2_1 : 5)$ $(3_1 1_1 : 8)$
4 0
5 0
6 1
7 1 $(1_2 : 6)$
8–10 0

$$Nm'\left(\frac{21-q}{q}\right)$$

1 43
2 2 $(8_1 5_1 : 15)$ $(5_1 1_1 : 9)$
3 0
4 2 $(4_1 : 16)$ $(3_1 2_1 : 5)$
5 1 $(3_1 : 15)$
6–8 0
9 1
10 1 $(1_1 : 10)$

$$Nm'\left(\frac{22-q}{q}\right)$$

1 50
2 4
3 2 $(6_1 : 18)$ $(5_1 2_1 1_1 : 7)$
4–6 0
7 1 $(2_1 : 14)$
8 1
9 0
10 1
11 0

$$Nm'\left(\frac{23-q}{q}\right)$$

1	59	
2	2	$(8_1 3_1 : 15)$ $(6_1 1_1 : 3)$
3	1	$(6_1 5_1 1_1 : 4)$
4	0	
5	1	$(2_1 1_1 : 4)$
6	1	$(2_2 : 5)$
7	1	$(2_1 : 7)$
8	1	$(1_2 : 7)$
9	1	$(1_3 : 4)$
10	0	
11	1	$(1_1 : 11)$

$$Nm'\left(\frac{24-q}{q}\right)$$

1	68	
2	6	
3	1	
4	0	
5	2	$(3_1 2_1 1_1 : 7)$ $(2_1 1_1 : 9)$
6–12	0	

$$Nm'\left(\frac{25-q}{q}\right)$$

1	77	
2	5	$(10_1 6_1 5_1 1_1 : 4)$ $(9_1 2_1 1_1 : 4)$ $(8_1 2_1 : 7)$ $(7_1 1_3 : 4)$ $(6_1 1_1 : 11)$
3	3	$(7_1 : 21)$ $(5_1 2_1 : 14)$ $(4_1 1_1 : 5)$
4	3	$(5_1 : 20)$ $(4_1 3_1 : 15)$ $(3_1 1_1 : 3)$
5	0	
6	1	$(3_1 : 18)$
7	1	$(2_2 1_1 : 3)$
8	1	$(2_1 : 16)$
9–11	0	
12	1	$(1_1 : 12)$

$$Nm'\left(\frac{26-q}{q}\right)$$

1	92	
2	6	
3	4	$(7_1 6_1 1_1 : 3)$ $(6_1 2_1 1_1 : 4)$ $(5_1 1_2 : 7)$ $(4_1 1_1 : 11)$
4	1	
5	1	$(4_1 : 20)$
6	1	
7	0	
8	1	
9	1	$(1_2 : 8)$
10	0	
11	0	
12	1	
13	0	

$$Nm'\left(\frac{27-q}{q}\right)$$

1	108	
2	4	$(11_1 7_1 : 21)$ $(11_1 5_1 2_1 : 14)$ $(11_1 4_1 1_1 : 5)$ $(9_1 2_2 1_1 : 3)$
3	1	
4	2	$(4_1 2_1 : 7)$ $(3_1 1_1 : 11)$
5	2	$(4_1 : 10)$ $(3_1 2_1 : 14)$
6	1	
7	1	$(2_2 : 6)$
8–11	0	
12	1	
13	1	$(1_1 : 13)$

$$Nm'\left(\frac{28-q}{q}\right)$$

1	121	
2	10	
3	5	$(8_1 : 24)$ $(7_1 5_1 : 20)$ $(7_1 4_1 3_1 : 15)$ $(7_1 3_1 1_1 : 3)$ $(6_1 2_2 1_1 : 3)$
4	0	
5	1	$(3_1 1_2 : 7)$
6	1	
7	0	
8	0	
9	1	$(2_1 : 18)$
10	1	
11	1	$(1_3 : 5)$
12	1	
13	0	
14	0	

$$Nm'\left(\frac{29-q}{q}\right)$$

1	142	
2	5	$(12_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$ $(11_1 4_1 : 10)$ $(11_1 3_1 2_1 : 14)$ $(10_1 2_2 : 6)$ $(7_1 1_1 : 13)$
3	2	$(7_1 4_1 : 20)$ $(6_1 2_1 : 8)$
4	1	$(6_1 : 24)$
5	0	
6	2	$(3_1 2_1 1_1 : 4)$ $(2_1 1_1 : 11)$
7	2	$(3_1 : 21)$ $(2_1 1_2 : 3)$
8	0	
9	1	$(2_1 : 9)$
10	1	$(1_2 : 9)$
11	1	$(1_4 : 3)$
12	0	
13	0	
14	1	$(1_1 : 14)$

$$Nm'\left(\frac{30-q}{q}\right)$$

1	158	
2	13	
3	3	
4	1	
5	0	
6	0	
7	1	$(2_1 1_3 : 4)$
8	0	
9	1	
10–13	0	
14	1	
15	0	

$Nm'\left(\dfrac{31-q}{q}\right)$

1	178	
2	6	$(13_1 7_1 4_1 : 20)$ $(13_1 6_1 2_1 : 8)$ $(11_1 3_1 : 21)$ $(11_1 2_1 1_2 : 3)$ $(10_1 2_1 : 9)$ $(9_1 1_4 : 3)$
3	2	$(9_1 : 27)$ $(6_1 1_2 : 4)$
4	1	$(5_1 2_2 : 6)$
5	2	$(5_1 : 25)$ $(4_1 3_1 : 9)$
6	2	$(4_1 : 24)$ $(3_1 2_2 1_1 : 3)$
7	1	$(3_1 : 7)$
8	1	$(2_2 : 7)$
9	0	
10	1	$(2_1 : 20)$
11–14	0	
15	1	$(1_1 : 15)$

$Nm'\left(\dfrac{32-q}{q}\right)$

1	195	
2	15	
3	3	$(9_1 7_1 1_1 : 13)$ $(6_1 1_4 : 3)$ $(5_1 1_1 : 14)$
4	1	
5	2	$(4_1 2_2 : 6)$ $(3_1 1_1 : 4)$
6	2	
7	1	$(3_2 1_1 : 3)$
8	0	
9	1	$(2_2 1_1 : 4)$
10	1	
11	1	$(1_2 : 10)$
12–16	0	

$Nm'\left(\dfrac{33-q}{q}\right)$

1	222	
2	6	$(14_1 9_1 : 27)$ $(14_1 6_1 1_2 : 4)$ $(13_1 5_1 : 25)$ $(13_1 4_1 3_1 : 9)$ $(12_1 3_1 : 7)$ $(8_1 1_1 : 15)$
3	4	
4	2	$(7_1 : 28)$ $(5_1 2_1 : 9)$
5	0	
6	0	
7	1	$(2_1 1_1 : 6)$
8	1	$(3_1 : 24)$
9–11	0	
12	1	
13	1	$(1_3 : 6)$
14	0	
15	1	
16	1	$(1_1 : 16)$

$Nm'\left(\dfrac{34-q}{q}\right)$

1	240	
2	19	
3	4	$(10_1 : 30)$ $(9_1 5_1 2_2 : 6)$ $(8_1 3_1 : 7)$ $(7_1 2_1 : 20)$
4	1	
5	2	$(4_1 2_1 : 9)$ $(3_1 1_1 : 14)$
6	1	
7	2	$(3_1 2_1 1_1 : 3)$ $(2_1 1_1 : 13)$
8	1	
9	1	$(2_3 1_1 : 3)$
10	1	
11	1	$(2_1 : 22)$
12	1	
13–15	0	
16	1	
17	0	

$Nm'\left(\dfrac{35-q}{q}\right)$

1	275	
2	7	$(15_1 9_1 8_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$ $(15_1 9_1 7_1 2_1 1_1 : 3)$ $(15_1 9_1 5_1 1_1 : 4)$ $(15_1 7_1 2_1 : 6)$ $(13_1 2_1 1_1 : 6)$ $(10_1 1_3 : 6)$ $(9_1 1_1 : 5)$
3	4	$(10_1 8_1 1_1 : 7)$ $(9_1 4_1 2_2 : 6)$ $(9_1 3_1 1_1 : 4)$ $(7_1 1_2 : 10)$
4	3	$(7_1 6_1 1_2 : 4)$ $(6_1 3_1 : 7)$ $(4_1 1_1 : 15)$
5	0	
6	1	$(3_1 1_4 : 3)$
7	0	
8	1	$(3_1 : 8)$
9	1	$(2_2 : 8)$
10	0	
11	1	$(2_1 : 11)$
12	1	$(1_2 : 11)$
13	0	
14	0	
15	1	
16	0	
17	1	$(1_1 : 17)$

$Nm'\left(\dfrac{36-q}{q}\right)$

1	296	
2	25	
3	6	
4	1	
5	3	$(6_1 : 30)$ $(5_1 4_1 : 24)$ $(5_1 3_1 2_2 1_1 : 3)$
6	0	
7	1	$(4_1 : 28)$
8	1	
9–13	0	
14	1	
15	0	
16	1	
17	0	

$Nm'\left(\dfrac{37-q}{q}\right)$

1	335	
2	8	$(16_1 10_1 8_1 1_1 : 7)$ $(16_1 9_1 4_1 2_2 : 6)$ $(16_1 9_1 3_1 1_1 : 4)$ $(16_1 7_1 1_2 : 10)$ $(13_1 2_2 : 8)$ $(12_1 2_1 : 11)$ $(10_1 1_1 : 3)$ $(9_1 1_1 : 17)$
3	6	$(11_1 : 33)$ $(10_1 4_1 1_1 : 7)$ $(9_1 3_1 2_1 1_1 : 3)$ $(9_1 2_1 1_1 : 13)$ $(8_1 2_1 : 5)$ $(6_1 1_1 : 8)$
4	2	$(8_1 : 32)$ $(5_1 1_3 : 6)$

5	2	$(6_1:15)$ $(5_1 3_2 1_1:3)$
6	2	$(5_1:30)$ $(4_1 3_1:7)$
7	2	$(4_1:14)$ $(3_1 2_1:6)$
8	0	
9	2	$(3_1:27)$ $(2_1 1_2:4)$
10	1	$(2_3:6)$
11	0	
12	1	$(2_1:24)$
13	0	
14	1	$(1_4:4)$
15–17	0	
18	1	$(1_1:18)$

$$Nm'\left(\frac{38-q}{q}\right)$$

1	363	
2	29	
3	5	$(11_1 10_1 1_3:6)$ $(11_1 9_1 1_1:5)$ $(9_1 3_1:8)$ $(8_1 2_1:11)$ $(6_1 1_1:17)$
4	2	
5	2	$(5_1 3_1:24)$ $(4_1 1_3:6)$
6	1	
7	1	$(3_1 2_1:20)$
8	1	
9	1	$(2_1 1_4:3)$
10	0	
11	0	
12	1	
13	1	$(1_2:12)$
14	0	
15	1	$(1_3:7)$
16	0	
17	0	
18	1	
19	0	

$$Nm'\left(\frac{39-q}{q}\right)$$

1	409	
2	12	$(17_1 11_1:33)$ $(17_1 10_1 4_1 1_1:7)$ $(17_1 9_1 3_1 2_1 1_1:3)$ $(17_1 9_1 2_1 1_1:13)$ $(17_1 8_1 2_1:5)$ $(17_1 6_1 1_1:8)$ $(16_1 6_1:15)$ $(16_1 5_1 3_2 1_1:3)$ $(15_1 4_1:14)$ $(15_1 3_1 2_1:6)$ $(14_1 3_1:27)$ $(14_1 2_1 1_2:4)$
3	6	
4	3	$(8_1 7_1 1_2:10)$ $(6_1 2_1:11)$ $(5_1 1_1:3)$
5	2	$(6_1 4_1 1_1:7)$ $(5_1 2_3 1_1:3)$
6	1	
7	2	$(4_2 1_1:3)$ $(3_1 1_2:10)$
8	2	$(3_2:7)$ $(2_1 1_1:15)$
9	1	
10	1	$(2_2:9)$
11	1	$(2_2 1_1:5)$
12	1	
13–17	0	
18	1	
19	1	$(1_1:19)$

$$Nm'\left(\frac{40-q}{q}\right)$$

1	443	
2	35	
3	6	$(12_1:36)$ $(11_1 8_1:32)$ $(11_1 5_1 1_3:6)$ $(10_1 4_1:14)$ $(10_1 3_1 2_1:6)$ $(9_1 2_3:6)$
4	3	
5	1	
6	3	
7	1	$(3_1 1_2:3)$
8–10	0	
11	1	$(2_2 1_2:3)$
12	1	
13	1	$(2_1:26)$
14	1	
15–20	0	

$$Nm'\left(\frac{41-q}{q}\right)$$

1	496	
2	13	$(18_1 11_1 10_1 9_1 8_1 7_1 4_1 1_1:3)$ $(18_1 11_1 10_1 9_1 7_1 2_1 1_1:3)$ $(18_1 11_1 10_1 9_1 5_1 1_1:4)$ $(18_1 11_1 10_1 7_1 2_1:6)$ $(18_1 11_1 7_1 1_2:3)$ $(18_1 11_1 6_1 1_1:5)$ $(17_1 6_1 4_1 1_1:7)$ $(17_1 5_1 2_3 1_1:3)$ $(16_1 4_2 1_1:3)$ $(16_1 3_1 1_2:10)$ $(15_1 3_1:9)$ $(14_1 2_2 1_1:5)$ $(10_1 1_1:19)$
3	5	$(12_1 11_1 1_3:3)$ $(12_1 10_1 1_1:4)$ $(11_1 5_1 3_1:24)$ $(11_1 4_1 1_3:6)$ $(10_1 2_1 1_1:7)$
4	5	$(9_1:36)$ $(8_1 6_1:15)$ $(8_1 5_1 3_2 1_1:3)$ $(7_1 3_1:27)$ $(7_1 2_1 1_2:4)$
5	2	$(7_1:35)$ $(4_1 1_1:4)$
6	2	$(4_1 2_1:11)$ $(3_1 1_1:17)$
7	1	$(4_1 3_1 1_2:4)$
8	1	$(4_1:32)$
9	1	$(3_2 1_1:4)$
10	1	$(3_1:30)$
11	0	
12	0	
13	1	$(2_1:13)$
14	1	$(1_2:13)$
15–19	0	
20	1	$(1_1:20)$

$$Nm'\left(\frac{42-q}{q}\right)$$

1	530	
2	43	
3	10	
4	2	
5	3	$(6_1 4_1:14)$ $(6_1 3_1 2_1:6)$ $(5_1 2_1:24)$
6	0	
7	0	
8	2	
9	1	

10	1	
11–14	0	
15	1	
16	0	
17	0	
18	1	
19	0	
20	1	
21	0	

$$Nm'\left(\frac{43-q}{q}\right)$$

1	595	
2	10	$(19_1 12_1 11_1 1_3 : 3)$ $(19_1 12_1 10_1 1_1 : 4)$ $(19_1 11_1 5_1 3_1 : 24)$ $(19_1 11_1 4_1 1_3 : 6)$ $(19_1 10_1 2_1 1_1 : 7)$ $(18_1 7_1 : 35)$ $(18_1 4_1 1_1 : 4)$ $(17_1 4_1 3_1 1_2 : 4)$ $(16_1 3_2 1_1 : 4)$ $(14_1 2_1 : 13)$
3	6	$(13_1 : 39)$ $(12_1 8_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$ $(12_1 7_1 2_1 1_1 : 3)$ $(12_1 5_1 1_1 : 4)$ $(11_1 3_1 1_2 : 3)$ $(9_1 2_1 : 26)$
4	4	$(8_1 4_2 1_1 : 3)$ $(8_1 3_1 1_2 : 10)$ $(7_1 2_2 1_1 : 5)$ $(5_1 1_1 : 19)$
5	4	$(7_1 6_1 1_1 : 17)$ $(6_1 2_1 1_1 : 7)$ $(5_1 1_2 : 12)$ $(4_1 1_1 : 9)$
6	3	$(6_1 : 36)$ $(5_1 4_1 : 14)$ $(5_1 3_1 2_1 : 6)$
7	2	$(5_1 : 35)$ $(4_1 2_1 1_1 : 3)$
8	1	$(3_1 2_1 : 11)$
9	3	$(3_2 2_1 1_1 : 3)$ $(3_1 2_1 1_1 : 13)$ $(2_1 1_1 : 8)$
10	2	$(3_1 : 10)$ $(2_1 1_3 : 6)$
11	1	$(2_2 : 10)$
12	0	
13	0	
14	1	$(2_1 : 28)$
15	0	
16	0	
17	1	$(1_3 : 8)$
18–20	0	
21	1	$(1_1 : 21)$

$$Nm'\left(\frac{44-q}{q}\right)$$

1	634	
2	50	
3	6	$(13_1 10_1 1_1 : 19)$ $(12_1 7_1 : 35)$ $(12_1 4_1 1_1 : 4)$ $(11_1 4_1 : 32)$ $(9_1 1_2 : 13)$ $(7_1 1_1 : 20)$
4	4	
5	4	$(7_1 6_1 2_1 : 11)$ $(7_1 5_1 1_1 : 3)$ $(6_1 3_1 : 9)$ $(4_1 1_1 : 19)$
6	2	
7	2	$(4_1 3_1 : 27)$ $(4_1 2_1 1_2 : 4)$
8	0	
9	2	$(3_2 : 8)$ $(2_1 1_1 : 17)$
10–13	0	
14	1	
15	1	$(1_2 : 14)$
16	1	
17–19	0	
20	1	
21	0	
22	0	

$$Nm'\left(\frac{45-q}{q}\right)$$

1	708	
2	18	$(20_1 13_1 : 39)$ $(20_1 12_1 8_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$ $(20_1 12_1 7_1 2_1 1_1 : 3)$ $(20_1 12_1 5_1 1_1 : 4)$ $(20_1 11_1 3_1 1_2 : 3)$ $(20_1 9_1 2_1 : 26)$ $(19_1 7_1 6_1 1_1 : 17)$ $(19_1 6_1 2_1 1_1 : 7)$ $(19_1 5_1 1_2 : 12)$ $(19_1 4_1 1_1 : 9)$ $(18_1 5_1 : 35)$ $(18_1 4_1 2_1 1_1 : 3)$ $(17_1 3_2 2_1 1_1 : 3)$ $(17_1 3_1 2_1 1_1 : 13)$ $(17_1 2_1 1_1 : 8)$ $(16_1 2_2 : 10)$ $(13_1 1_3 : 8)$ $(11_1 1_1 : 21)$
3	13	
4	5	$(10_1 : 40)$ $(9_1 7_1 : 35)$ $(9_1 4_1 1_1 : 4)$ $(8_1 3_2 1_1 : 4)$ $(7_1 2_1 : 13)$
5	1	
6	1	
7–9	0	
10	1	
11	2	$(3_1 : 33)$ $(2_1 1_2 : 5)$
12–16	0	
17	1	$(1_4 : 5)$
18	0	
19	0	
20	1	
21	1	
22	1	$(1_1 : 22)$

$$Nm'\left(\frac{46-q}{q}\right)$$

1	753	
2	59	
3	9	$(14_1 : 42)$ $(13_1 8_1 4_2 1_1 : 3)$ $(13_1 8_1 3_1 1_2 : 10)$ $(13_1 7_1 2_2 1_1 : 5)$ $(13_1 5_1 1_1 : 19)$ $(12_1 5_1 : 35)$ $(12_1 4_1 2_1 1_1 : 3)$ $(11_1 3_1 : 10)$ $(11_1 2_1 1_3 : 6)$
4	2	
5	3	$(8_1 : 40)$ $(7_1 4_1 2_1 : 11)$ $(7_1 3_1 1_1 : 17)$
6	1	
7	3	$(5_2 1_1 : 3)$ $(4_1 2_2 1_1 : 5)$ $(3_1 1_1 : 6)$
8	0	
9	2	$(4_1 : 36)$ $(3_1 2_3 : 6)$
10	1	
11	0	
12	1	
13	1	$(2_2 1_1 : 6)$
14	1	
15	1	$(2_1 : 30)$
16	1	
17	0	
18	1	
19–21	0	
22	1	

$Nm'\left(\frac{47-q}{q}\right)$

1	840	
2	18	$(21_1 13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 8_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$ $(21_1 13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 7_1 2_1 1_1 : 3)$ $(21_1 13_1 12_1 11_1 10_1 9_1 5_1 1_1 : 4)$ $(21_1 13_1 12_1 11_1 10_1 7_1 2_1 : 6)$ $(21_1 13_1 12_1 11_1 7_1 1_2 : 3)$ $(21_1 13_1 12_1 11_1 6_1 1_1 : 5)$ $(21_1 13_1 11_1 3_1 1_1 : 5)$ $(21_1 13_1 10_1 3_1 : 9)$ $(21_1 13_1 9_1 2_1 : 8)$ $(21_1 13_1 7_1 1_1 : 6)$ $(21_1 11_1 2_1 1_1 : 5)$ $(21_1 9_1 1_2 : 4)$ $(21_1 8_1 1_1 : 3)$ $(20_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$ $(17_1 3_1 : 33)$ $(17_1 2_1 1_2 : 5)$ $(14_1 1_4 : 5)$ $(12_1 1_1 : 7)$
3	8	$(14_1 12_1 1_1 : 3)$ $(14_1 11_1 1_1 : 10)$ $(13_1 7_1 6_1 2_1 : 11)$ $(13_1 7_1 5_1 1_1 : 3)$ $(13_1 6_1 3_1 : 9)$ $(13_1 4_1 1_1 : 19)$ $(10_1 2_1 : 14)$ $(8_1 1_1 : 5)$
4	4	$(10_1 9_1 2_1 : 26)$ $(9_1 5_1 : 35)$ $(9_1 4_1 2_1 1_1 : 3)$ $(8_1 2_2 : 10)$
5	1	$(8_1 : 20)$
6	1	$(6_1 4_1 1_1 : 4)$
7	2	$(5_1 4_1 1_1 : 3)$ $(4_1 2_1 : 6)$
8	2	$(4_3 1_1 : 3)$ $(4_1 3_1 1_2 : 10)$
9	1	$(4_1 : 18)$
10	1	$(3_2 2_1 : 6)$
11	2	$(3_1 : 11)$ $(2_1 1_3 : 3)$
12	1	$(2_2 : 11)$
13	0	
14	0	
15	1	$(2_1 : 15)$
16	1	$(1_2 : 15)$
17	0	
18	1	$(1_5 : 3)$
19–22	0	
23	1	$(1_1 : 23)$

$Nm'\left(\frac{48-q}{q}\right)$

1	885	
2	68	
3	15	
4	6	
5	1	$(7_1 3_1 2_1 : 11)$
6	1	
7	4	$(5_1 4_1 2_1 : 11)$ $(5_1 3_1 1_1 : 17)$ $(4_1 2_1 : 13)$ $(3_1 1_1 : 20)$
8	0	
9	2	
10	2	
11	0	
12	0	
13	1	$(2_3 : 8)$
14	0	
15	1	
16–18	0	
19	1	$(1_3 : 9)$
20–24	0	

$Nm'\left(\frac{49-q}{q}\right)$

1	987	
2	16	$(22_1 14_1 12_1 1_1 : 3)$ $(22_1 14_1 11_1 1_1 : 10)$ $(22_1 13_1 7_1 6_1 2_1 : 11)$ $(22_1 13_1 7_1 5_1 1_1 : 3)$ $(22_1 13_1 6_1 3_1 : 9)$ $(22_1 13_1 4_1 1_1 : 19)$ $(22_1 10_1 2_1 : 14)$ $(22_1 8_1 1_1 : 5)$ $(21_1 8_1 : 20)$ $(20_1 5_1 4_1 1_1 : 3)$ $(20_1 4_1 2_1 : 6)$ $(19_1 4_1 : 18)$ $(18_1 3_1 : 11)$ $(18_1 2_1 1_3 : 3)$ $(16_1 2_1 : 15)$ $(12_1 1_1 : 23)$
3	10	$(15_1 : 45)$ $(14_1 8_1 3_1 : 15)$ $(14_1 6_1 1_1 : 3)$ $(13_1 5_2 1_1 : 3)$ $(13_1 4_1 2_2 1_1 : 5)$ $(13_1 3_1 1_1 : 6)$ $(12_1 2_1 1_1 : 4)$ $(11_1 2_2 1_1 : 6)$ $(10_1 1_2 : 7)$ $(8_1 1_1 : 11)$
4	4	$(11_1 : 44)$ $(10_1 7_1 4_1 1_1 : 3)$ $(7_1 1_4 : 5)$ $(6_1 1_1 : 7)$
5	4	$(8_1 7_1 2_1 : 6)$ $(7_1 3_2 : 8)$ $(7_1 2_1 1_1 : 17)$ $(6_1 2_1 : 14)$
6	3	$(7_1 : 42)$ $(6_1 5_1 : 35)$ $(6_1 4_1 2_1 1_1 : 3)$
7	0	
8	2	$(5_1 : 40)$ $(4_1 3_2 1_1 : 4)$
9	2	$(4_1 : 9)$ $(3_1 2_1 : 26)$
10	2	$(3_2 : 9)$ $(2_1 1_1 : 19)$
11	0	
12	1	$(3_1 : 36)$
13–15	0	
16	1	$(2_1 : 32)$
17–20	0	
21	1	
22	0	
23	0	
24	1	$(1_1 : 24)$

$Nm'\left(\frac{50-q}{q}\right)$

1	1034	
2	77	
3	8	$(15_1 14_1 1_4 : 5)$ $(15_1 12_1 1_1 : 7)$ $(14_1 8_1 : 20)$ $(13_1 4_3 1_1 : 3)$ $(13_1 4_1 3_1 1_2 : 10)$ $(12_1 3_1 : 11)$ $(12_1 2_1 1_3 : 3)$ $(8_1 1_1 : 23)$
4	5	
5	3	
6	3	
7	2	$(6_1 : 42)$ $(5_1 3_1 2_1 : 11)$
8	3	
9	2	$(4_2 1_1 : 4)$ $(3_1 1_2 : 13)$
10	0	
11	1	$(3_2 1_1 : 5)$
12	1	
13	0	
14	1	
15	1	
16	1	
17	1	$(1_2 : 16)$
18–23	0	
24	1	
25	0	

Tryckt den 1 april 1949