ARKIV FÖR MATEMATIK Band 8 nr 21

1.69 16 1 Communiqué le 3 Décembre 1969

Remarques sur une classe d'équations indéterminées

Par TRYGVE NAGELL

§ 1. La représentation d'un entier par les formes $Ax^3 + By^3$

1. Introduction. Les plus importants résultats sur la représentation d'un entier par les formes binaires cubiques ont été exposés dans les monographies de Nagell [1][1], p. 41–54, et de Skolem [2], p. 108–112, et dernièrement dans l'excellent livre de Mordell [3] Ch. 24. Vu que ces exposés sont de leur nature très concentrés, il s'ensuit la nécessité de les compléter par des éclaircissements sur l'histoire et la chronologie des découvertes ainsi que par la comparaison des différentes méthodes.

Grâce aux célèbres travaux d'Axel Thue les problèmes des équations diophantiennes de degré supérieur m'ont attiré dès le début. J'ai commencé par l'étude des équations simples de la forme

$$ax^3 + by^3 = c,$$

où les entiers a, b et c sont donnés, et où l'on cherche les solutions en entiers x et y, non nuls.

Dans le présent chapitre nous allons considérer les équations de cette forme particulière. Le cas général sera traité dans le chapitre suivant.

2. Théorème de Delaunay. Dans une note publiée en 1916 Boris Delaunay a annoncé, sans en donner la démonstration, le résultat suivant (voir [4]) :

Théorème 1. *Désignons par θ le nombre $\sqrt[3]{D}$, où D est un nombre naturel qui n'est pas un cube. Alors, l'équation cubique*

$$x^3 + Dy^3 = 1 \tag{1}$$

possède au plus une seule solution en nombres entiers x et y non nuls. Si x, y est une solution, le nombre $x + y\theta$ est l'unité fondamentale de l'anneau $\mathbf{R}(\theta)$.

Je n'ai observé cette note qu'en 1922. La même année j'ai publié deux mémoires dans lesquels j'ai montré par une méthode très simple que l'équation (1) admet au plus une seule solution; voir [5] et [6]. Ma démonstration de ce résultat étant peu connu, je me permets d'en donner une idée dans le numéro suivant.

3. Méthode de Nagell. Soit ζ l'unité fondamentale de l'anneau $\mathbf{R}(\theta)$, $0 < \zeta < 1$. Pour déterminer les unités (positives) de la forme binaire $c + a\theta$, a et c entiers rationnels, on aura à examiner la suite

$$\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \ldots.$$

[1] Les numéros figurant entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce mémoire

Soit $\eta = \zeta^m$ le premier terme de la suite ayant la forme binaire $\eta = c + a\theta$, et soit

$$\zeta^M = C + A\theta$$

une autre unité binaire; donc $M > m \geqslant 1$. Soit encore $M = mn + r$, avec $0 \leqslant r \leqslant m-1$. Maintenant il est possible de montrer que dans l'équation

$$(c + a\theta)^n = X + Y\theta + Z\theta^2$$

les nombres Y et Z s'annullent jamais (voir [5], Satz II). Donc le cas $r = 0$ est impossible. Posons ensuite

$$\varepsilon = \zeta^r = x + y\theta + z\theta^2,$$

où x, y et z sont des entiers. Par définition z est $\neq 0$. Alors de l'équation

$$\zeta^M = C + A\theta = (c + a\theta)^n (x + y\theta + z\theta^2)$$

il suit, en comparant les coefficients de θ^2,

$$x\left[\binom{n}{2} c^{n-2} a^2 + \dots\right] + y\left[\binom{n}{1} c^{n-1} a + \dots\right] + z\left[c^n + \binom{n}{3} c^{n-3} a^3 d + \dots\right] = 0.$$

Cette relation entraîne

$$z \equiv 0 \pmod{a}. \tag{2}$$

Or, nous avons évidemment les inégalités

$$\left.\begin{aligned} &\eta < \varepsilon < 1,\ 1 < |\varepsilon'| = |\varepsilon''| < |\eta'| = |\eta''|,\\ &|\eta'| = |\sqrt{c^2 - ac\theta + a^2\theta^2} < \sqrt{3}(1 + |a|\theta), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

vu que

$$|c| = |\eta - a\theta| < 1 + |a|\theta.$$

Nous avons de plus

$$\begin{aligned} \varepsilon &= x + y\theta + z\theta^2,\\ \varepsilon' &= x + y\theta\varrho + z\theta^2\varrho^2,\\ \varepsilon'' &= x + y\theta\varrho^2 + z\theta^2\varrho, \end{aligned}$$

ϱ étant une racine l'équation $\varrho^2 + \varrho + 1 = 0$. Donc

$$3z\theta^2 = \varepsilon + \varepsilon'\varrho + \varepsilon''\varrho^2,$$

et à cause de (2)

$$3|a|\theta^2 \leqslant 3|z|\theta^2 < 1 + 2|\varepsilon'|,$$

d'où, en profitant des inégalités (3),

$$3|a|\theta^2 < 1 + 2\sqrt{3}(1 + |a|\theta).$$

Or, pour $|a| \geqslant 1$ et $D \geqslant 8$, nous avons

$$3|a|\theta^2 > 1 + 2\sqrt{3}(1 + |a|\theta).$$

Cette inégalité subsiste encore pour $|a| \geqslant 2$ et $D \geqslant 5$. Le théorème est ainsi démontré pour toutes les valeurs de D, sauf pour $D = 2$, 3, 4 et 7.

En déterminant les unités fondamentales dans tous les corps $\mathbf{K}(\theta)$ pour $D = 2$, 3, 4 et 7, et en appliquant de nouveau le Satz II dans [5] on voit que le théorème est vrai pour toutes les valeurs de D.

Cependant, cette méthode-là ne suffisait pas pour établir la relation entre une solution éventuelle et l'unité fondamentale de l'anneau $\mathbf{R}(\theta)$, relation indiquée par Delaunay dans le Théorème 1.

4. Généralisation de la méthode du numéro précédent. En 1923 j'ai découvert qu'il était possible, en généralisant ma méthode du mémoire [6], d'étendre le résultat à l'équation plus générale

$$Ax^3 + By^3 = C, \tag{4}$$

où $C = 1$ ou $= 3$. Sans rien perdre de la généralité, nous pouvons faire les suppositions suivantes : Les entiers A et B sont positifs et $A > B$. Le nombre AB n'est divisible par le cube d'aucun nombre premier. AB n'est pas divisible par 3, quand $C = 3$. Cela posé, j'ai obtenu le

Théorème 2. *L'équation cubique* (4) *possède au plus une seule solution en nombres entiers x et y différents de zéro. Il y a l'unique exception pour l'équation*

$$2x^3 + y^3 = 3$$

qui possède exactement deux solutions, savoir $x = y = 1$ et $x = 4$, $y = -5$.

La démonstration de ce résultat fut publiée en 1925; voir [7].

Dans le travail [6] j'ai aussi attaqué le problème de l'équation (1) par une méthode différente pour possiblement obtenir une démonstration de la dernière assertion de Delaunay. En effet, j'ai montré que la puissance ε^n d'une unité quelconque ε ne peut être binaire lorsque n est pair ou divisible par 3; pour les autres valeurs de n je n'avais pas encore achevé la recherche.

Le 16 novembre 1923 j'ai reçu une lettre de Delaunay dans laquelle il a indiqué que la démonstration de son résultat sur l'équation (1) a été publiée (en langue russe) à Charkov en 1916 et puis à St. Pétersbourg en 1922; voir les mémoires [8] et [9]. Je n'ai jamais vu les deux mémoires; mais Delaunay m'a informé qu'il a obtenu son résultat en montrant que ε^n n'est jamais binaire pour $n > 1$. Alors, grâce à mes résultats dans [5] et [6], j'ai pu aisément reconstruire la démonstration hypothétique de Delaunay. Trois ans plus tard j'ai appris que nos méthodes étaient en réalité identiques.

5. Théorème général de Nagell et la précision de Ljunggren. Cependant, j'ai découvert qu'on pouvait aller beaucoup plus loin. Ainsi, en généralisant les méthodes des mémoires [5] et [6], et en développant différents procédés nouveaux, j'ai obtenu la précision suivante de mon Théorème 2 :

Théorème 3. *Soient A, B et C des entiers satisfaisant aux mêmes conditions que dans le Théorème* 2. *Lorsque les deux corps cubiques engendrés par les nombres $\sqrt[3]{AB^{-1}}$ et $\sqrt[3]{A_1 B_1^{-1}}$ sont identiques, nous dirons que les deux équations*

$$Ax^3 + By^3 = C \quad \textit{et} \quad A_1 x^3 + B_1 y^3 = C_1$$

appartiennent à la même famille, à la famille du corps $\mathbf{K}(\sqrt[3]{AB^{-1}})$. *Cela posé, on a*

1° *L'équation* (4) *possède au plus une seule solution en nombres entiers x, y, différents de zéro, sauf dans le cas d'exception indiqué plus haut avec deux solutions.*

2° *Parmi toutes les équations qui appartiennent à la même famille, il y en a au plus une seule qui est possible en nombres entiers, sauf dans les cas suivants : Dans la famille du corps* $\mathbf{K}(\sqrt[3]{2})$ *il y a trois équations possibles, savoir*

$$2x^3 + y^3 = 1, \quad 2x^3 + y^3 = 3 \quad \textit{et} \quad 4x^3 + y^3 = 3.$$

Dans la famille du corps $\mathbf{K}(\sqrt[3]{20})$ *il y a deux équations possibles, savoir*

$$20x^3 + y^3 = 1 \quad \textit{et} \quad 5x^3 + 2y^3 = 3.$$

3° *Excluons les cas $B = C = 1$ et $A = 2$, $B = 1$, $C = 3$. Alors, si ξ est l'unité fondamentale du corps engendré par $\sqrt[3]{AB^{-1}}$, $0 < \xi < 1$, on a pour une solution x, y de* (4) *la relation*

$$C^{-1} \cdot [x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B}]^3 = \xi^m, \tag{5}$$

où $m = 2^n$ avec $n \geqslant 0$.

Il existe une infinité de corps dans lesquels $m = 1$, pour chacune des deux valeurs de C.

Il existe une infinité de corps dans lesquels $m = 2$, pour chacune des deux valeurs de C.

4° *La démonstration donne un algorithme pour reconnaître si une équation donnée* (4) *admet une solution ou non et pour déterminer la solution eventuelle.*

Cet algorithme, une éspèce de *descente infinie*, repose sur le fait que la résolution de l'équation $Ax^3 + By^3 = 1$ peut être ramenée à la résolution d'une ou plusieurs équations $A_1 x^3 + B_1 y^3 = 1$, où tous les facteurs premiers de $A_1 B_1$ divisent A ou bien divisent B.

La démonstration de ce résultat fut publiée dans le Journal de mathématiques en 1925; le manuscrit a été reçu par la rédaction en décembre 1923; voir [10].

Il faut y ajouter le résultat suivant de Ljunggren, publié en 1953 (voir [11]) :

Théorème 4. *Dans la formule* (5) *du théorème précédent l'exposant m ne peut prendre que les deux valeurs* 1 *et* 2.

La démonstration, qui est assez compliquée, est effectuée par des raisonnements p-adiques. Le point de départ est l'équation (9), p. 256 dans [10].

6. Précision du Théorème 1. Dans mon travail [10] j'ai aussi montré que le nombre $x + y\theta$ dans le Théorème **1** est l'unité fondamentale du corps $\mathbf{K}(\theta)$, ou dans un nombre fini de cas le carré de cette unité. Plus tard, dans un travail publié en 1930, j'ai pu établir le résultat plus précis que voici :

Théorème 1 bis. *Sous les mêmes conditions que dans le Théorème* 1 *le nombre* $x+y\theta$ *est l'unité du corps* $\mathbf{K}(\theta)$ *ou bien il est le carré de cette unité. La dernière possibilité se présente seulement dans les trois cas suivants :*

$$-19+7\sqrt[3]{20}=(1+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{50})^2;$$

$$-8+3\sqrt[3]{19}=\left[\frac{2+2\sqrt[3]{19}-\sqrt[3]{361}}{3}\right]^2;$$

$$-3+\sqrt[3]{28}=\left[\frac{-1-\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{98}}{3}\right]^2.$$

Pour la démonstration voir [12].

§ 2. La représentation d'un entier par la forme binaire cubique générale

7. Théorèmes sur la représentation de l'unité. Nous désignons par $((a, b, c, d))$ la forme binaire cubique (irréductible)

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3, \tag{6}$$

où a, b, c et d sont des entiers rationnels. Quand il s'agit de déterminer une limite supérieure du nombre de représentations de l'unité par cette forme, il suffit évidemment de considérer les formes du type

$$((1, p, q, r)),$$

où p, q et r sont des entiers rationnels. Nous supposons d'abord que le discriminant de la forme soit négatif.

Dans une note dans les Comptes Rendus, Paris 1920 (voir [13]), Delaunay a annoncé le résultat suivant :

Théorème 5. *Le nombre de représentations de l'unité par la forme* (6) *est au plus égal à* 4. *Il y a une seule exception pour les formes équivalente à la forme* $((1, 0, -1, 1))$ *de discriminant* -23; *dans ce cas il y a exactement 5 représentations. Si la forme n'est pas équivalente à une forme* $((1, p, q, 1))$, *elle admet au plus* 2 *représentations.*

Dans cette note Delaunay donne de sa démonstration une très courte esquisse, difficile à comprendre. Toutefois, il s'ensuivit que sa méthode était basée sur son « algorithme de rehaussement », méthode caracterisée par le passage d'un anneau $\mathbf{R}$ à un autre anneau contenu dans $\mathbf{R}$ mais différent de $\mathbf{R}$.

J'ai observé la note de Delaunay en 1924 alors que j'avais déjà commencé à étudier le même problème. Mes premiers résultats là-dessus furent publiés dans le journal Mathematische Zeitschrift en 1928; mon manuscrit a été reçu par la rédaction le 8 février 1926 (voir [14]). Mes résultats sont contenus dans le

Théorème 6. *Le nombre de représentations de l'unité par la forme* (6) *est au plus égal à* 3, *sauf dans les trois cas suivants :*

1° *La forme est équivalente à* $((1, -1, 1, 1))$ *qui admet exactement* 4 *représentations et qui possède le discriminant* -44.

2° *La forme est équivalente à* $((1, 0, 1, 1))$ *qui admet exactement* 4 *représentations et qui possède le discriminant* -31.

3° *La forme est équivalente à* $((1, 0, -1, 1))$ *qui admet exactement 5 représentations et qui possède le discriminant* -23.

D'ailleurs, il résulte immédiatement de ma démonstration (savoir celle du Hilfssatz I) que le nombre de représentations est $\leqslant 2$, si la forme n'est pas équivalente à une forme $((1, p, q, 1))$, quoique je ne l'ai pas indiqué dans l'énoncé du théorème.

Lorsque Delaunay fut informé par la rédaction de Mathematische Zeitschrift sur mon mémoire [14], il m'a écrit le 21 décembre 1926. Dans cette lettre il m'a envoyé une traduction en allemand du mémoire dans lequel il a donné la démonstration complète de son théorème sur le nombre de représentations de l'unité par la forme (6); il s'agit du Théorème 5 et du mémoire [15], dont je ne connais que la traduction mentionnée.

La comparaison des deux mémoires [14] et [15] met en evidence que la démonstration de Delaunay est essentiellement différente de la mienne. La sienne est entièrement basée sur son « algorithme de rehaussement ». La mienne est en réalité une généralisation de ma méthode antérieure pour établir le Théorème 2. Il y a seulement deux lemmes dont la démonstration est presque la même dans les deux mémoires [14] et [15]; ce sont les Hilfssatz I et Hilfssatz II dans [14]. En effet, pour établir Hilfssatz I je me sers en partie de l'algorithme de rehaussement reconstruit d'après l'esquisse donnée dans [13]. J'avais établi Hilfssatz II avant de connaître la note [13].

Dans un travail publié en 1927 j'ai donné le supplément suivant au Théorème 6 (voir [16]) :

Théorème 6 bis. *Il existe une infinité de formes inéquivalentes qui admettent exactement* 3 *représentations de l'unité. Un exemple est donné par les formes* $((1, 0, q, 1))$ *pour* $q \geqslant 2$.

On doit observer que le mémoire [16] fut publié avant le mémoire [14] quoique [16] dépend des résultats de [14]. La cause est le grand retard de la publication de [14].

8. Quelques résultats de Ljunggren. Le problème suivant se soulève : Peut on obtenir un résultat analogue au Théorème 6 lorsque le discriminant de la forme cubique $f(x, y)$ est positif ? C'est possible, mais jusqu'ici on n'a qu'un petit nombre de résultats numériques. Ljunggren a développé une méthode pour résoudre complètement en nombres entiers rationnels x et y les équations diophantiennes de la forme

$$f(x, y) = 1,$$

où $f(x, y)$ est une forme binaire cubique à discriminant positif; voir [17]. En partie, elle est basée sur la méthode p-adique de Skolem. Il a vérifié l'effectivité de sa méthode sur l'exemple

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 1. \tag{7}$$

En effet, il a établi le résultat suivant :

Théorème 7. *L'équation* (7) *n'admet que les six solutions suivantes en nombres entiers rationnels*

$$x=2,\ y=-1;\ x=-3,\ y=-2;\ x=-1,\ y=-1;$$

$$x=1,\ y=0;\ x=1,\ y=3;\ x=0,\ y=1.$$

Les racines de l'équation $x^3-3x+1=0$ sont les nombres $2\cos(2\pi/9)$, $2\cos(4\pi/9)$ et $2\cos(8\pi/9)$. Le corps cyclique engendré par ces nombres a le discriminant 81.

Ljunggren a aussi annoncé le résultat suivant :

Théorème 8. *L'équation diophantienne*

$$x^3+x^2y-2xy^2-y^3=1 \tag{8}$$

n'admet que les neuf solutions suivantes en nombres entiers rationnels :

$$x=0,\ y=-1;\ x=1,\ y=0;\ x=y=-1;$$

$$x=2,\ y=-1;\ x=-1,\ y=1;\ x=-1,\ y=2;$$

$$x=-9,\ y=5;\ x=4,\ y=-9;\ x=5,\ y=4.$$

Les racines de l'équation $x^3+x^2-2x-1=0$ sont les nombres $2\cos(2\pi/7)$, $2\cos(4\pi/7)$ et $2\cos(6\pi/7)$. Le corps cyclique engendré par ces nombres a le discriminant 49.

Ljunggren n'a pas publié sa démonstration de ce théorème. La vérification du résultat a été faite par Baulin; voir [18].

Par la même méthode on peut même établir le

Théorème 9. *L'équation diophantienne*

$$x^3+x^2y-2xy^2-y^3=7 \tag{9}$$

n'admet que les trois solutions suivantes en nombres entiers rationnels :

$$x=1,\ y=-3;\ x=2,\ y=1;\ x=-3,\ y=2.$$

On montre aisément que l'équation (9) est équivalente à l'équation

$$u^3-8u^2v+5uv^2+v^3=1, \tag{9'}$$

dont les trois solutions sont

$$u=1,\ v=0;\ u=0,\ v=1;\ u=v=-1.$$

En 1923 j'ai montré que l'équation diophantienne

$$u^3+3u^2v-6uv^2+v^3=w^3 \tag{10}$$

n'admet pas d'autres solutions en nombres rationnels u, v et w que

$$u=v=-w;\ u=0,\ v=w;\ u=w,\ v=0.$$

Voir [6], p. 21. On voit aisément que ce résultat est équivalent au théorème suivant :

L'équation diophantienne

$$x^3-3xy^2+y^3=3z^3 \tag{11}$$

n'admet pas d'autres solutions en nombres rationnels x, y et z que

$$x = -z,\ y = -2z;\ x = -z,\ y = z;\ x = 2z,\ y = z.$$

Alors, en posant dans (10) et (11) $w = 1$ et $z = 1$ on obtient le

Théorème 10. *Les seules solutions des équations*

$$u^3 + 3u^2v - 6uv^2 + v^3 = 1 \tag{12}$$

et

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 3 \tag{13}$$

sont données par

$$u = v = -1;\ u = 0,\ v = 1;\ u = 1,\ v = 0;$$

$$x = -1,\ y = -2;\ x = -1,\ y = 1;\ x = 2,\ y = 1.$$

Une démonstration du résultat sur l'équation (13) se trouve aussi dans Ljunggren [19], p. 10.

Dans son travail [17] Ljunggren fait observer que l'équation

$$x^3 + px^2y - (p+1)xy^2 + y^3 = 1 \tag{14}$$

possède au moins les cinq solutions suivantes :

$$x = 1,\ y = 0;\ x = 0,\ y = 1;\ x = 1,\ y = 1;\ x = 1,\ y = p;\ x = -p-1,\ y = 1.$$

Le discriminant de la forme est égal à

$$D = (p^2 + p - 3)^2 - 32$$

et il est positif pour $p \geqslant 3$ et pour $p \leqslant -4$. Pour ces valeurs de p les solutions sont distinctes. Il en résulte le

Théorème 11. *Il existe une infinité de formes binaires cubiques, à discriminant positif et inéquivalentes qui admettent au moins 5 représentations de l'unité. Un exemple est donné par l'équation* (14).

En effet, les formes $((1, p, -p-1, 1))$ et $((1, q, -q-1, 1))$ sont équivalentes seulement lorsque

$$(p^2 + p - 3)^2 - 32 = (q^2 + q - 3)^2 - 32.$$

Cela entraîne ou $p = q$ ou $p = -q - 1$.

Si dans (14) $p = 3$ il y aura encore 4 solutions, savoir $x = -1$, $y = -2$; $x = -2$, $y = -3$; $x = 9$, $y = 13$; $x = -5$, $y = -14$. Dans ce cas l'équation (14) sera

$$x^3 + 3x^2y - 4xy^2 + y^3 = 1.$$

Si on remplace ici y par $y - x$ cette équation aura la forme

$$x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3 = 1.$$

Ainsi nous sommes tombés sur l'équation (8) qui possède exactement 9 solutions en vertu du Théorème 8. Vu que le discriminant du corps engendré par les racines de l'équation $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ est égal à 49, nous pouvons énoncer le

Théorème 12. *Si la forme binaire cubique $f(x, y)$ a le discriminant* 49, *l'équation $f(x, y) = 1$ admet exactement* 9 *solutions en nombres entiers rationnels.*

En effet, toutes les formes binaires cubiques de discriminant 49 sont équivalentes, vu qu'il n'y a qu'un seul corps cubique et un seul anneau entier cubique ayant ce discriminant; comparez Levi [20] et aussi Nagell [21], p. 45.

D'une façon analogue nous obtenons en conséquence du Théorème 7 le

Théorème 13. *Si la forme binaire cubique $f(x, y)$ a le discriminant* 81, *l'équation $f(x, y) = 1$ admet exactement* 6 *solutions en nombres entiers rationnels.*

En effet, il n'y a qu'un seul corps cubique et un seul anneau cubique qui possèdent le discriminant 81.

D'ailleurs il existe d'autres cas ayant 6 solutions. En effet, l'équation

$$x^3 + 4x^2y - 5xy^2 + y^3 = 1$$

où le discriminant de la forme est $= 257$ admet les 6 solutions suivantes :

$$x = 0,\ y = 1;\ x = 1,\ y = 0;\ x = y = 1;$$

$$x = 1,\ y = 4;\ x = -5,\ y = 1;\ x = 7,\ y = 9.$$

Je ne sais pas s'il y en a d'autres.

Il y a encore beaucoup de problèmes à résoudre à propos de l'équation

$$f(x, y) = 1 \tag{15}$$

lorsque $f(x, y)$ est une forme binome cubique à discriminant positif. Désignons par M le nombre de solutions de cette équation. Alors j'ai montré que $M = 0$ pour une infinité de classes de formes $f(x, y)$, même si l'on exige que le triplet de corps engendré par les équations $f(x, 1) = 0$ soit constant; voir [22], théorème 1 pour $n = 3$.

Dans ce numéro nous avons présenté le petit nombre de résultats connus jusqu'ici sur la quantité M.

Je propose les *hypothèses* suivantes :

1° On a toujours $M \leqslant 9$.

2° Si $M = 9$ le discriminant de $f(x, y)$ est $= 49$.

3° Seulement pour un nombre fini de classes de formes on a $6 \leqslant M \leqslant 8$.

4° Chacune des valeurs $M = 1$, 2, 3, 4 et 5 est obtenue par une infinité de classes de formes.

5° Soient $f(x, y)$ et $f_1(x, y)$ deux formes qui engendrent le même triplet de corps. Alors, si le discriminant D de $f(x, y)$ est plus petit que le discriminant D_1 de $f_1(x, y)$, on a $M \geqslant M_1$.

9. Remarques. Il faut observer que les méthodes de Delaunay ainsi que les miennes ne donnent, dans le cas général, aucun procédé pour décider sur la solubilité d'une équation donnée ni pour effectivement déterminer toutes les représentations eventuelles, exception faite de certains cas particuliers.

Toutes les recherches relatées jusqu'ici sont caractérisées par l'emploi des méthodes de la théorie des nombres (surtout la théorie des unités algébriques) et par la tendance constructive, une tendance qui, pour le moment, n'est que partiellement réussie. Le but principal dans ces recherches est toujours de découvrir le *caractère arithmétique* des solutions des problèmes, quoique souvent on doit se contenter de pouvoir établir une limite supérieure du nombre de solutions. Il faut souligner que ces recherches sont entièrement indépendantes de celles de Thue.

Pour faire ses résultats plus accessibles, Delaunay a publié des traductions de ses mémoires principaux dans le journal Mathematische Zeitschrift; voir [23] et [24]. Il a aussi publié un mémoire particulier sur l'algorithme de rehaussement; voir [25].

Dans un petit nombre de cas on a réussi, à l'aide de cet algorithme, de déterminer toutes les solutions d'une équation donnée; voir [24] et [12]. Pourtant, il est invraisemblable que cet algorithme, un peu trivial, puisse donner la solution complète dans le cas général.

§ 3. Résultat de Thue précisé dans le cas cubique

10. Soit donnée la forme binaire $f(x, y)$ à coefficients entiers rationnels, irréductible et de degré ≥ 3; et soit de plus M un nombre naturel. Alors, d'après le célèbre théorème de Thue, l'équation diophantienne

$$f(x, y) = M \tag{16}$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers rationnels x et y. Il est bien connu que la démonstration de ce résultat s'appuie exclusivement sur des faits algébriques (approximation de nombres algébriques, propriétés des polynomes etc.). Des raisonnements arithmétiques n'y entrent point (arithmétique = théorie des nombres *entiers*). La méthode ne permet pas de décider sur la solubilité de l'équation (16) dans le cas général. Si celle-ci est résoluble la méthode ne donne aucun procédé pour trouver *toutes* les solutions, exception faite de certains cas particuliers. Cependant, il est possible d'obtenir une limite supérieure du nombre de solutions de (16) en fonction des coefficients. On a même soupçonné qu'il serait possible d'obtenir une limite qui ne dépend ni de M ni des coefficients de la forme. Siegel a, le premier, montré que cette hypothèse est vrai pour les formes cubiques à discriminant positif. En 1929 il a, en effet, établi le résultat suivant (voir [26]) :

Théorème 14. *Lorsque la forme $f(x, y)$ est cubique avec un discriminant positif $>\gamma M^{33}$, où γ est une certaine constante positive, l'équation* (16) *admet au plus* 18 *solutions en nombres entiers rationnels x et y.*

La démonstration repose sur l'emploi de la théorie des fonctions hypergéométriques; l'idée de cet emploi vient de Thue.

En appliquant la même méthode dans le cas d'un discriminant négatif L. Fjellstedt a obtenu le résultat analogue (voir [27]) :

Théorème 15. *Lorsque la forme $f(x, y)$ est cubique avec un discriminant négatif D tel que $|D| > \gamma_1 M^{33}$, où γ_1 est une certaine constante positive, l'équation* (16) *admet au plus 14 solutions en nombres entiers rationnels x et y.*

De plus, si $|D| > \gamma_1 M^{57}$, l'inégalité diophantienne

$$0 < f(x, y) \leq M$$

admet au plus 14 *solutions en nombres rationnels entiers x et y.*

Les constantes γ et γ_1 peuvent être déterminées. Il est évident que ces théorèmes ne peuvent servir aux calculs numériques.

La démonstration de ces deux théorèmes est entièrement algébrique, exception faite d'un lemme élémentaire sur les coefficients de certains polynomes (Satz 5 chez Siegel).

§ 4. Théoremes sur les familles d'équations diophantiennes

11. Introduction. Il existe une certaine catégorie de théorèmes sur les équations diophantiennes à deux indéterminées qui n'a pas attiré l'attention autant qu'elle le mérite. Je parle d'un type de théorèmes regardant la solubilité des équations appartenant à un ensemble limité par les propriétés des coefficients, lesquels sont soumis à certaines restrictions. Il s'agit des ensembles d'équations de la forme

$$Ax^n - By^n = C, \quad (n > 1) \tag{17}$$

où A et B sont des nombres naturels variables, satisfaisant aux conditions suivantes : On a $(A, B) = 1$. Le produit AB n'est divisible par aucune puissance a^n, où a est un nombre premier. Le nombre $\sqrt[n]{AB^{-1}}$ est toujours du n-ième degré. Le corps $\mathbf{K}$ engendré par ce nombre est le même pour toutes les valeurs de A et B. On dit alors que les équations (17) appartiennent à la même famille, à la famille du corps $\mathbf{K}$. C est un nombre naturel, premier à AB, et diviseur de n ou, dans certains cas, diviseur de $2n$. Dans le Théorème 21 le nombre C varie d'une manière différente. Lorsque n est impair nous supposons que $A < B$.

Cela posé, on a montré, pour certaines valeurs de C, qu'il y a, dans l'ensemble (17), au plus une seule équation (exceptionnellement deux équations) admettant des solutions en nombres entiers x et y avec $xy \neq 0$.

Ce résultat est vraiment surprenant. On en aura l'impression que les équations diophantiennes binaires de degré supérieur admettant des solutions entières soient rares.

Passons maintenant aux résultats particuliers. Nous commençons avec les cas $n = 2$, 3, 4 et 6.

12. Le cas $n = 2$. Dans un travail publié en 1955, j'ai établi le résultat suivant (voir [28] et [29]) :

Théorème 16. *Soit donné le nombre naturel $D > 1$, qui n'est divisible par aucun carré > 1. De plus, soient A et B des nombres naturels variables tels que $AB = D$. Soit enfin $C = 1$ ou $= 2$, et soit $(C, D) = 1$. Alors, abstraction faite de l'équation $x^2 - Dy^2 = 1$, il y a exactement une et une seule équation parmi les équations*

$$Ax^2 - By^2 = C,$$

qui est résoluble en nombres entiers x et y.

La méthode de démonstration est indépendante de la théorie des formes binaires quadratiques. Par une méthode analogue on obtiendra les résultats plus généraux :

Théorème 17. *Soient A, B, C et D des nombres naturels définis comme au théorème précédent. Soit p un nombre premier fixe qui ne divise pas $2D$, et désignons par m le* *nombre d'équations résolubles en nombres entiers x et y parmi les équations*

$$Ax^2 - By^2 = Cp. \tag{18}$$

Alors on a ou $m=0$ ou $m=2$.

Pour les formes définites on aura le

Théorème 17 bis. *Soient A, B, C, D et p définis comme au théorème précédent et soit $A < B$. Si m désigne le nombre d'équations résolubles en nombres entiers x et y parmi les équations*

$$Ax^2 + By^2 = Cp, \tag{18 bis}$$

on a ou $m=0$ ou $m=1$.

Dans le cas exceptionnel $D=1=A=B$, $p\equiv 1 \pmod 4$ on a évidemment $m=2$.

13. Le cas $n=3$. Dans la seconde partie du Théorème 3 du présent travail nous avons déjà annoncé le résultat qu'il nous faut dans ce cas. Sous les mêmes conditions que dans ce théorème nous avons alors :

Théorème 18. *Parmi toutes les équations qui appartiennent à la même famille (pour $C=1$ ou $=3$), il y en a au plus une seule qui est résoluble en nombres entiers x et y avec $xy \neq 0$, sauf dans les cas suivants : Dans la famille du corps $\mathbf{K}(\sqrt[3]{2})$ il y a trois équations résolubles, savoir*

$$2x^3 + y^3 = 1, \quad 2x^3 + y^3 = 3 \quad \textit{et} \quad 4x^3 + y^3 = 3.$$

Dans la famille du corps $\mathbf{K}(\sqrt[3]{20})$ il y a deux équations résolubles, savoir

$$20x^3 + y^3 = 1 \quad \textit{et} \quad 5x^3 + 2y^3 = 3.$$

14. Le cas $n=4$. On doit à Ljunggren le résultat que voici :

Théorème 19. *Supposons dans (17) que $n=4$ et qu'on ait $C=1, 2, 4$ ou 8. Alors, il y a, parmi les équations (17) de la même famille, au plus une seule équation qui est résoluble en nombres naturels x et y. Il y a la seule exception dans la famille du corps $\mathbf{K}(\sqrt[4]{5})$, où les deux équations*

$$x^4 - 5y^4 = 1 \quad \textit{et} \quad x^4 - 5y^4 = -4$$

sont résolubles.

Pour la démonstration voir [30].

15. Le cas $n=6$. Dans ce cas Ljunggren a établi le

Théorème 20. *Supposons dans (17) que $n=6$ et qu'on ait $C=1, 2, 3, 4$ ou 6. Alors, il y a, parmi les équations (17) de la même famille, au plus une seule équation qui est résoluble en nombres naturels x et y.*

Pour la démonstration voir [31].

16. Remarques sur les numéros précédents. Dans les numéros 11, 12, 13, 14 et 15 les méthodes pour établir les résultats sont partout arithmétiques; elles sont en premier lieu basées sur la théorie des unités dans les corps quadratiques, cubiques, biquadratiques et même corps du sixième degré. Dans tous les cas les méthodes permettent de décider s'il existe une équation résoluble dans la famille et, dans le cas affirmatif, de la trouver et la résoudre.

Illustrons un peu la théorie par l'exemple numérique suivant : Prenons $n=3$, et soit $\mathbf{K}(\sqrt[3]{10})$ le corps de la famille. Alors, les équations de la famille sont

$$x^3+10y^3=1,\ x^3+10y^3=3,\ 4x^3+5y^3=1,\ 4x^3+5y^3=3,$$
$$2x^3+25y^3=1,\ 2x^3+25y^3=3,\ x^3+100y^3=1,\ x^3+100y^3=3.$$

Ici on voit que la seule équation résoluble en nombres entiers non nuls est

$$4x^3+5y^3=1.$$

D'après le Théorème 18 toutes les autres équations sont sans solutions en nombres entiers $\neq 0$. Un fait curieux est que toutes ces équations sont résolubles si considérées comme des congruences pour un module quelconque; voir [36].

On trouve aisément que dans la famille du corps $\mathbf{K}(\sqrt[3]{21})$ il n'y a aucune équation résoluble.

Soit toujours $n=3$, et soit m le nombre de nombres premiers différents qui divisent AB. Alors, le nombre d'équations dans la famille est égal à 2^{m+1} si AB n'est pas divisible par 3, et égal à 2^m dans le cas contraire.

Il y a des résultats analogues sur le nombre d'équations dans la famille quand $n=2$, 4 et 6.

17. Les résultats d'Ekenstam. Dans les cas $n=5$ et $n\geqslant 7$ l'application des méthodes arithmétiques à l'équation (17) deviendra trop compliquée, et il est invraisemblable qu'on puisse obtenir des résultats par cette voie. En conséquence, Ekenstam a attaqué le problème avec d'autres méthodes. Ses recherches sont surtout basées sur les propriétés des fonctions hypergéométriques, ainsi que chez Siegel dans le travail [26]. Voici le résultat principal d'Ekenstam :

Théorème 21. *Soient A_ν, B_ν et C_ν des nombres naturels, tels que $(A_\nu B_\nu, C_\nu)=1$ et que $A_\nu B_\nu = T_\nu$ ne soit divisible par aucune puissance a^n, où a est un nombre premier et n un nombre naturel fixe $\geqslant 4$. Considérons toutes les équations diophantiennes*

$$|A_\nu x^n - B_\nu y^n| = C_\nu, \tag{19}$$

pour $\nu=1, 2,$ etc., appartenant à la même famille. Posons min. $T_\nu = T$ *et* max. $C_\nu = C$ *pour $\nu=1, 2,$ etc. Supposons qu'on ait*

$$\sqrt[4]{T^{n-5}} \geqslant C^f n^{n+2} \quad \textit{pour} \quad n\geqslant 6,$$
$$\sqrt{T} \geqslant 12000\, C^6 \quad \textit{pour} \quad n=5,$$
$$\sqrt{T} \geqslant 16384\, C^6 \quad \textit{pour} \quad n=4,$$

où $f=n$ lorsque $6\leqslant n\leqslant 13$ et $f=\frac{4}{3}(n-3)$ lorsque $n\geqslant 14$. Cela étant, il y a parmi les équations (19) appartenant à la même famille au plus une seule qui admet des solutions en nombres naturels x et y, premiers entre eux.

En outre, il a établi le

Théorème 22. *Parmi toutes les équations*

$$|Ax^n - By^n| = 1$$

appartenant à la même famille il y a pour $n \geqslant 5$ *au plus deux équations qui admettent des solutions en nombres naturels* x *et* y.

De plus, Ekenstam a établi le résultat suivant, que je présente sous la forme corrigée donnée par Hyyrö :

Théorème 23. *Soient* $d \geqslant 2$ *et* $n \geqslant 5$ *des entiers donnés. Alors, l'équation*

$$|x^n - d^s y^n| = 1,$$

où $x \geqslant 2$, $y \geqslant 1$, $0 \leqslant s < n$, *et* $x \geqslant 3$ *pour* $n=5$ *et* $n=6$, *admet au plus une seule solution en nombres entiers positifs* s, x *et* y.

Pour les démonstrations voir Ekenstam [32] et Hyyrö [33].

Il est évident que le Théorème 21 d'Ekenstam ne peut être effectif que pour des très grandes valeurs des coefficients. Le cas $n=3$ ne se laisse pas traiter par la méthode d'Ekenstam. Précisément comme dans les cas de Siegel et Fjellstedt dans le § 3 la méthode ne donne aucun algorithme pour déterminer les quantités qu'on cherche.

Note 1. Je profite de l'occasion pour corriger un lapsus dans mon travail [34]. Il s'agit de la démonstration du Lemme 7, p. 383. En supposant $N=6$ et $M=1$ j'ai obtenu les relations

$$r = 2pq - p^3 \quad \text{et} \quad q = -\tfrac{1}{2}p^2 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5p^4+4}.$$

Le nombre $5p^4+4$ doit donc être un carré. Alors on a les trois possibilités $p=0$ et $p=\pm 1$. Il y a cependant encore la possibilité $p=\pm 12$, valeur que j'ai manquée. En effet, j'ai montré dans [34] que la relation $5p^4+4=h^2$ entraîne l'équation

$$a^4 - 5b^4 = \pm 1,$$

où $\pm 2ab = p$. D'après un résultat de Ljunggren (voir [34], Satz XIV et Satz XVI) cette équation n'admet que les solutions $a=3$, $b=2$ (signe supérieur) en nombres naturels.

Nous aurons donc $p=\pm 12$, ce qui entraîne ou $q=89$ ou $q=-233$. Or, d'après l'inégalité (5″) dans [34] nous avons $q \geqslant -1$. Ainsi il suffit de supposer $q=89$. Pour $p=+12$ nous obtenons alors $r=408$. Or, d'après l'inégalité (5) dans [34] nous aurons $q \geqslant p+r-1=419$, relation impossible. Pour $p=-12$ nous obtenons alors $r=-408$. Or, d'après l'inégalité (5′) dans [34] nous aurons $q \geqslant -p-r-1=419$, la même relation impossible. Par conséquent, le Lemme 7 se trouve complètement démontré.

Note 2. A propos des deux premiers paragraphes je dois mentionner le livre de Delone et Faddeev sur les irrationnalités cubiques publié en anglais en 1964; voir [35]. Dans ce livre il y a, entre autres, un chapitre sur la représentation des entiers par les formes binaires cubiques à discriminant négatif, où les résultats de Delaunay (Delone) sont exposés avec les démonstrations. Il est évident que cet exposé donne une idée fausse et injuste de mes méthodes et résultats dans ce domaine. Je viens de présenter, au commencement de ce mémoire, les faits sur les découvertes et les méthodes en question rangés dans l'ordre chronologique.

Note 3. Dans le livre [3] de Mordell il y a, dans les pages 302–304, la question de l'équation $y^2-1=x^p$, p nombre premier $\geqslant 5$. On y trouve *in extenso* une démonstration de l'impossibilité de cette équation pour $|y|>1$ par le chinois Chao Ko. Cette démonstration, qui est très ingénieuse, repose sur le lemme suivant : Pour que l'équation en question soit possible il faut que y soit divisible par p. Ko a annoncé que ce lemme fut publié dans un travail dans les Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Szechuanensis, t. 2, 1960. Or, ce travail n'a pas été accessible à moi et non plus à Mordell. Cependant, la démonstration de ce lemme a été donnée par moi dans un mémoire publié en 1921; voir [37]. On se démande si la démonstration eventuelle de Ko est la même que la mienne. Le lemme n'est pas un résultat superficiel, ainsi qu'il est indiqué dans le livre de Mordell, p. 302, ligne 7 d'en bas.

On doit se rappeler que le théorème sur l'équation en question a été établi par moi 30 ans avant Ko, exception faite de la moitié des nombres premiers $p\equiv 1 \pmod 8$ pour lesquels le nombre 2 est un résidue biquadratique; voir [38] et [39]. Par conséquent, c'est seulement pour 1/8 des valeurs de p que le résultat de Ko est nouveau. Alors on est vraiment étonné de voir que le théorème est caractérisé comme le « théorème de Chao Ko »; voir [3], p. 304, ligne 6 d'en bas. Dans le travail [39] j'ai recapitulé toutes mes recherches sur l'équation $y^2-1=x^p$.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

1. Nagell, T., L'analyse indéterminée de degré supérieur. Gauthier Villars et Cie, Paris 1929.
2. Skolem, Th., Diophantische Gleichungen. Springer, Berlin 1938.
3. Mordell, L. J., Diophantine Equations. Academic Press, London and New York 1969.
4. Delaunay, B., Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t. 162 (1916).
5. Nagell, T., Vollständige Lösung einiger unbestimmten Gleichungen dritten Grades. Videnskapsselsk. Skrifter, Mat.-Naturv. Klasse, Kristiania 1922, No. 14.
6. Nagell, T., Über die Einheiten in reinen kubischen Zahlkörpern. Videnskapsselsk. Skrifter, Mat.-Naturv. Klasse, Kristiania 1923, No. 11.
7. Nagell, T., Über einige kubische Gleichungen mit zwei Unbestimmten. Mathematische Zeitschrift, Bd. 24, 1925.
8. Delaunay, B., Solution complète de l'équation $X^3\varrho+Y^3=1$ (en russe). Publ. Soc. Math. Charkow 1916.
9. Delaunay, B., Solution complète de l'équation $X^3q+Y^3=1$ (en russe). Bull. Acad. Sc. de Russie 1922.
10. Nagell, T., Solution complète de quelques équations cubiques à deux indéterminées. Journ. de Math., 9e sér., t. 4, Paris 1925.
11. Ljunggren, W., On an improvement of a theorem of T. Nagell concerning the diophantine equation $Ax^3+By^3=C$. Math. Scandinavica, t. 1, Copenh. 1953.
12. Nagell, T., Einige Gleichungen von der Form $ay^2+by+c=dx^3$. Avhdl. Norske Vidensk. Akad. Oslo, Matem.-naturv. klasse 1930, No. 7.
13. Delaunay, B., Représentation d'un nombre entier par une forme cubique à discriminant négatif. Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris, t. 171, 1920.
14. Nagell, T., Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativer Diskriminante. Mathematische Zeitschrift, Bd. 28, Berlin 1928.
15. Delaunay,' B., Le nombre de représentations d'un nombre entier par une forme cubique à discriminant négatif. Bull. Acad. Sci. URSS, 1922 (en russe).
16. Nagell, T., Zahlentheoretische Notizen VII. Zur Theorie der binären kubischen Formen mit negativer Diskriminante. Norsk Matem. For. Skr., Ser. 1, Nr. 17, Oslo 1927.
17. Ljunggren, W., Einige Bemerkungen über die Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit positiver Diskriminante. Acta mathematica, t. 75, Stockholm 1942.
18. Baulin, V. J., Sur une équation indéterminée du troisième degré à discriminant positif (en langue russe). Tul'sk. Gos. Ped. Inst. Učen. Zap. Fiz.-Mat. Nauk, Vyp. 7 (1960).
19. Ljunggren, W., Einige Sätze über unbestimmte Gleichungen von der Form $Ax^4+Bx^2+C=Dy^2$. Vidensk. Akad. Skrifter, Matem.-naturv. klasse, Oslo 1943, No. 9.

20. LEVI, F., Kubische Zahlkörper und binäre kubische Formenklassen. Berichte d. Sächsischen Ges. d. Wiss., Math.-Phys. Klasse, Bd. 66, Leipzig 1914.
21. NAGELL, T., Zur Theorie der kubischen Irrationalitäten. Acta mathematica, t. 55, Stockholm 1929.
22. NAGELL, T., Sur quelques propriétés arithmétiques des formes binaires à coefficients entiers. Arkiv f. matem., Bd. 7, nr. 7, Stockholm 1967.
23. DELAUNAY, B., Vollständige Lösung der unbestimmten Gleichung $X^3q + Y^3 = 1$ in ganzen Zahlen. Mathem. Zeitschr., Bd. 28, Berlin 1928.
24. DELAUNAY, B., Über die Darstellung der Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativer Diskriminante. Mathem. Zeitschr., Bd. 31, Berlin 1930.
25. DELAUNAY, B., Sur l'algorithme de rehaussement (en russe). Journ. Math. Ges. Leningrad 1927.
26. SIEGEL, C. L., Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. Abhandl. preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl., Nr. 1, Berlin 1929.
27. FJELLSTEDT, L., On the number of representations of integers by binary cubic forms with a negative discriminant. Publ. no. 3, Depart. Math. Uppsala University 1969.
28. NAGELL, T., On a special class of Diophantine equations of the second degree. Arkiv för matem., Bd. 3, Nr. 2, Stockholm 1954.
29. NAGELL, T., Contributions to the theory of a category of Diophantine equations of the second degree with two unknowns. Nova Acta Reg. Soc. Scient. Upsaliensis, Ser. IV, Vol. 16, No. 2, Uppsala 1955.
30. LJUNGGREN, W., Einige Eigenschaften der Einheiten reeller quadratischer und rein-biquadratischer Zahlkörper. Vidensk. Akad. Skrifter, Matem.-naturv. klasse, Nr. 12, Oslo 1936.
31. LJUNGGREN, W., Solution complète de quelques équations du sixième degré à deux indéterminées. Archiv for matem. o. naturv., Bd. 48, Nr. 7, Oslo 1946.
32. AF EKENSTAM, A., Contributions to the theory of the Diophantine equation $Ax^n - By^n = C$. Dissertation, Uppsala 1959.
33. HYYRÖ, S., Über die Gleichung $ax^n - by^n = z$ und das Catalansche Problem. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Series A. 1. 355, Helsinki 1964.
34. NAGELL, T., Sur les unités dans les corps biquadratiques primitifs du premier rang. Arkiv för matem., Bd. 7, nr. 27, Stockholm 1968.
35. DELONE, B. N. et D. K. FADDEEV, The theory of irrationalities of the third degree. Vol. 10, Translations of Mathematical Monographs, American Math. Soc., Providence, Rhode Island 1964.
36. NAGELL, T., On the solvability of some congruences. Kgl. Norske Vidensk. Selsk. Forhandl. Bd. 27, Nr. 3, Trondheim 1954.
37. NAGELL, T., Sur l'impossibilité de l'équation indéterminée $z^p + 1 = y^2$. Norsk Matematisk Forenings Skrifter, Ser. I, Nr. 4, Oslo 1921.
38. NAGELL, T., Sur une équation diophantienne à deux indéterminées. Kgl. Norske Vidensk. Selsk. Forhandl. Bd. 7, Nr. 38, Trondheim 1935.
39. NAGELL, T., Remarques sur une catégorie d'équations diophantiennes à deux indéterminées. Arkiv för matematik, Bd. 8, Nr. 7, Stockholm 1969.

Errata au travail [7]

P. 428, ligne 9 d'en bas : Remplacer $\mp 2u^2$ par $\mp 2v^2$.

P. 432, ligne 4 d'en bas : Remplacer $+\sqrt[3]{36}$ par $-\sqrt[3]{36}$.

P. 434, ligne 11 : Remplacer z par w.

P. 443, ligne 19 : Il faut lire $\bar{\theta} = \sqrt[3]{3}$.

Errata au travail [10]

P. 209, ligne 9 d'en bas : Remplacer $\sqrt{D}$ par $\sqrt[3]{D}$.

P. 214, ligne 16 : Lire $\sqrt[3]{4}$ au lieu de $\sqrt[4]{4}$.

P. 218, ligne 8 d'en bas : Remplacer xD_2 par yD_2.
P. 225, ligne 3 d'en bas : Lire X^3+DY^3.
P. 242, ligne 11 d'en bas : Lire

$$\Omega(\sqrt[3]{9ac^2}, \sqrt[3]{9bd^2}).$$

P. 244, ligne 9 d'en bas : Même correction qu'en p. 242.
P. 247, ligne 11 d'en bas : Lire $\sqrt[3]{4/3}$.
P. 251, ligne 9 : Lire $7\sqrt[3]{20}-19$.
P. 254, ligne 13 d'en bas : Remplacer uniformément par univoquement.
P. 259, ligne 10 : Il faut lire $z_1=-1$.
P. 268, ligne 11: La congruence doit être $Z \equiv nzx^{n-1} \pmod{g}$.

Errata au travail [14]

P. 27, ligne 14 : Remplacer $\binom{n}{k}$ par $\binom{n-1}{k-1}$.
P. 24, ligne 19 : Ajouter *reelle* entre les mots viei et kubische.

Tryckt den 21 april 1970

Uppsala 1970. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB