ARKIV FÖR MATEMATIK Band 8 nr 18

1.69 06 3 Communiqué le 9 Avril 1969

Sur un type particulier d'unités algébriques

Par Trygve Nagell

§ 1. Introduction

1. Remarques générales. Dans plusieurs travaux j'ai étudié les solutions de l'équation

$$E + E_1 = 1 \tag{1}$$

en unités E et E_1 dans un corps algébrique **K**; voir Nagell [1][1], Hilfssatz IV; [2], p. 346–347; [3], p. 176–177; [4], [5] et [6]. Chowla [7] a le premier montré que l'équation (1) n'admet qu'un nombre fini de solutions, résultat qui a été établi indépendamment par Nagell [4], Théorème 8. Il faut observer que la démonstration de ce résultat ne donne aucune méthode pour déterminer toutes les solutions.

Désignons par m le nombre de solutions de (1) dans un corps donné **K** sans compter la permutation de E et E_1. Si l'on a la solution donnée par (1), on a aussi les deux autres solutions

$$E^{-1} + (-E_1 E^{-1}) = 1, \quad E_1^{-1} + (-E E_1^{-1}) = 1. \tag{1 a}$$

Les trois solutions sont différentes entre elles sauf dans le cas où E et E_1 sont les racines de l'équation $x^2 - x + 1 = 0$. Nous dirons que les trois relations (1) et (1 a) forment un *triplet*. Un triplet est complètement déterminé par une quelconque des unités qui y entrent. Ainsi une unité donnée appartient à un seul triplet dans le corps. Il en résulte que le nombre m de solutions de (1) est divisible par 3 quand le corps **K** ne contient pas le nombre $\sqrt{-3}$. Quand **K** contient ce nombre, on a $m \equiv 1 \pmod 3$.

Lorsque E et $E-1$ sont simultanément des unités dans un corps algébrique nous dirons que E est une *unité exceptionnelle*. Si E est une unité exceptionnelle, le nombre E^{-1} l'est aussi. En effet, la différence

$$E^{-1} - 1 = (1 - E)\, E^{-1}$$

est aussi une unité. On vérifie de même que les quatre nombres

$$1 - E,\ (1-E)^{-1},\ 1 - E^{-1} \quad \text{et} \quad (1 - E^{-1})^{-1}$$

sont aussi des unités exceptionnelles. Les six nombres

$$E,\ E^{-1},\ 1-E,\ 1-E^{-1},\ (1-E)^{-1} \quad \text{et} \quad (1-E^{-1})^{-1}$$

[1] Les numéros figurant entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.

sont différents entre eux, sauf dans le cas où $E^2 - E + 1 = 0$. Exception faite de ce cas, ils constituent un groupe cyclique d'unités exceptionnelles. Dans le cas d'exception il y a, parmi ces six nombres, seulement deux qui sont différents entre eux. Alors le corps contient le nombre $\sqrt{-3}$.

Si E est une unité exceptionnelle, une solution de (1) est donnée par

$$E + (1 - E) = 1.$$

Inversement, dans la relation (1) les nombres E et E_1 sont évidemment des unités exceptionnelles.

D'après le théorème de Chowla, il n'y a qu'un nombre fini d'unités exceptionnelles dans un corps $\mathbf{K}$ donné. Désignons par μ le nombre d'unités exceptionnelles dans $\mathbf{K}$. Alors, d'après ce que nous venons de dire, nous avons $\mu = 2m$.

Si E est une unité exceptionnelle, il est évident que toutes les unités conjuguées sont aussi exceptionnelles.

2. Résultats antérieurs. Dans les travaux [1]–[6] j'ai déterminé toutes les solutions de l'équation (1) dans tous les corps algébriques d'un rang <2. Dans les corps quadratiques et dans les corps cubiques de discriminant négatif il n'y a aucune unité exceptionnelle, sauf dans les cas suivants: Corps quadratiques possédant ou le discriminant -3 avec $m = 1$, ou le discriminant $+5$ avec $m = 3$. Corps cubiques du premier rang possédant le discriminant -23 avec $m = 6$, ou le discriminant -31 avec $m = 3$.

Dans une infinité de corps biquadratiques du premier rang on a $m = 0$; même chose pour $m > 0$. La valeur maximale de m est $= 10$ correspondant aux corps $\mathbf{K}$ ayant le discriminant 117; voir [5], Théorèmes 1–3.

Pour les corps cubiques non-cycliques du second rang j'ai montré l'existence d'une infinité de cas dans lesquels on a $m = 0$; même chose pour $m > 0$. Cela est aussi vrai pour les corps cubiques cycliques. Pour la démonstration voir Nagell [6], §§ 4–5.

Pour les corps biquadratiques d'un rang > 1 nous avons montré par des exemples numériques que: Si le rang $= 2$, le maximum du nombre m est $\geqslant 12$. Si le rang $= 3$, et si le corps est non-abélien le maximum du nombre m est $\geqslant 6$.

Parmi les autres résultats nous notons: Il existe au moins un corps de degré $n \geqslant 5$ tel que $m \geqslant 3(2n - 3)$. Il existe une infinité de corps de degré $n \geqslant 6$ tel que $m \geqslant 3(2n - 5)$.

3. Dans ce mémoire nous allons continuer nos recherches sur l'équation (1) et les unités exceptionnelles dans les corps d'un rang $\geqslant 2$. Le problème de déterminer toutes les unités exceptionnelles dans un corps donné peut toujours être transformé dans le problème de résoudre une ou plusieurs équations diophantiennes en nombres entiers rationnels. Les difficultés augmentent avec le degré et le rang du corps. Grâce à quelques résultats de Ljunggren sur certaines formes binaires cubiques nous sommes réussis à déterminer toutes les unités exceptionnelles dans les deux corps cubiques cycliques, du second rang, engendrés par les nombres $2 \cos (2\pi/7)$ et $2 \cos (2\pi/9)$.

Nous considérons aussi des problèmes des types suivants : 1°) Lorsque le degré n et le rang r sont donnés, montrer qu'il y a une infinité de corps $\mathbf{K}$ dans lesquels $m = 0$ et dans lesquels $m > 0$. 2°) Déterminer une limite supérieure de m pour les corps $\mathbf{K}$ de degré et rang donnés. 3°) Déterminer une limite inférieure du maximum de m pour les corps $\mathbf{K}$ de degré et rang donnés.

§ 2. Remarques sur quelques équations diophantiennes cubiques

4. Il nous faut quelques résultats sur certaines équations diophantiennes. Il est facile d'établir le

Théorème 1. *L'équation diophantienne*

$$u^3+3u^2v-6uv^2+v^3=w^3 \tag{2}$$

n'admet pas d'autres solutions en nombres rationnels u, v *et* w *que*

$$u=v=-w;\ u=0,\ v=w;\ u=w,\ v=0.$$

Cela est évident en vertu de l'identité suivante

$$(u^3-3uv^2+v^3)^3-(3u^2v-3uv^2)^3=(u^3+3u^2v-6uv^2+v^3)(u^2-uv+v^2)^3.$$

En effet, l'équation de Fermat

$$X^3+Y^3+Z^3=0$$

est impossible en nombres rationnels pour $XYZ\neq 0$.

J'ai déjà publié la démonstration du Théorème 1 en 1922; voir Nagell [9], p. 21, et aussi [10], p. 232.

Le Théorème 1 est équivalent au résultat suivant :

Théorème 2. *L'équation diophantienne*

$$x^3-3xy^2+y^3=3z^3 \tag{3}$$

n'admet pas d'autres solutions en nombres rationnels x, y *et* z *que*

$$x=-z,\ y=-2z;\ x=-z,\ y=z;\ x=2z,\ y=z.$$

En effet, on passera de l'équation (2) à l'équation (3) par la transformation birationnelle

$$x=2u-v,\ y=u+v,\ z=w.$$

On observe que les trois points rationnels sur les deux courbes cubiques (2) et (3) ne sont pas en ligne droite. On vérifie aisément qu'aucun des points est un point d'inflexion.

Le résultat particulier suivant est du à Ljunggren [12], p. 10 :

L'équation diophantienne

$$x^3-3xy^2+y^3=3 \tag{4}$$

n'admet que les trois solutions suivantes en nombres entiers rationnels :

$$x=-1,\ y=-2;\ x=-1,\ y=1;\ x=2,\ y=1.$$

Or, la méthode de démonstration de Ljunggren suffit évidemment pour obtenir le résultat plus général du Théorème 2.

Le théorème de Ljunggren sur (4) est équivalent au théorème suivant que j'ai établi en 1919 : voir Nagell [8], p. 11 :

Théorème 3. *L'équation diophantienne*

$$x^2 + x + 1 = 3y^3 \tag{5}$$

n'admet que les deux solutions suivantes en nombres entiers rationnels :

$$x = 1,\ y = 1;\ x = -2,\ y = 1.$$

En effet, celle-ci peut s'écrire

$$\left(\frac{x+2}{3}\right)^3 - \left(\frac{x-1}{3}\right)^3 = y^3.$$

De plus, il résulte de (5) en passant au corps engendré par $\varrho = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$,

$$x - \varrho = (1 - \varrho)(u + v\varrho)^3,$$

où u et v sont des nombres entiers rationnels, tels que $y = u^2 - uv + v^2$. On en obtient évidemment la relation

$$u^3 - 6u^2v + 3uv^2 + v^3 = 1$$

qui peut être transformée dans l'équation (4) par la transformation $x = 2u - v$, $y = u + v$.

5. Ljunggren a developpé une methode pour résoudre complètement en nombres entiers rationnels x et y les équations diophantiennes de la forme

$$F(x, y) = 1, \tag{6}$$

où $F(x, y)$ signifie une forme binaire cubique à discriminant positif; voir [11]. En partie, elle est basée sur la méthode p-adique de Skolem; voir [14], [15] et [16]. Il a vérifié l'effectivité de sa méthode sur l'exemple

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 1. \tag{7}$$

En effet, il a établi le résultat suivant :

Théorème 4. *L'équation diophantienne* (7) *n'admet que les six solutions suivantes en nombres entiers rationnels x et y :*

$$x = 2,\ y = -1;\ x = -3,\ y = -2;\ x = -1,\ y = -1;$$
$$x = 1,\ y = 0;\ x = 1,\ y = 3;\ x = 0,\ y = 1.$$

Les racines de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ sont les nombres $2\cos(2\pi/9)$, $2\cos(4\pi/9)$ et $2\cos(8\pi/9)$. Le corps cyclique engendré par ces nombres a le discriminant 81.

Ljunggren a aussi annoncé le résultat suivant :

Théorème 5. *L'équation diophantienne*

$$x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3 = 1 \tag{8}$$

n'admet que les neuf solutions suivantes en nombres entiers rationnels x et y :

$$x=0,\ y=-1;\ x=1,\ y=0;\ x=y=-1;$$

$$x=2,\ y=-1;\ x=-1,\ y=1;\ x=-1,\ y=2;$$

$$x=-9,\ y=5;\ x=4,\ y=-9;\ x=5,\ y=4.$$

Les racines de l'équation $x^3+x^2-2x-1=0$ sont les nombres $2\cos(2\pi/7)$, $2\cos(4\pi/7)$ et $2\cos(6\pi/7)$. Le corps cyclique engendré par ces nombres a le discriminant 49.

Ljunggren n'a pas publié sa démonstration du Théorème 5. La vérification du résultat a été faite par Baulin [13].

Ljunggren a appliqué le Théorème 4 pour établir le

Théorème 6. *L'équation diophantienne*

$$x^2+x+1=y^3 \tag{9}$$

n'admet que les quatre solutions suivantes en nombres entiers rationnels :

$$x=0,\ y=1;\ x=-1,\ y=1;\ x=18,\ y=7;\ x=-19,\ y=7.$$

Pour la démonstration voir [11], p. 11; comparez aussi Nagell [8], p. 6–7.

Nous avons aussi besoin du résultat suivant :

Théorème 7. *L'équation diophantienne*

$$x^3+x^2y-2xy^2-y^3=7 \tag{10}$$

n'admet que les trois solutions suivantes en nombres entiers rationnels :

$$x=1,\ y=-3;\ x=2,\ y=1;\ x=-3,\ y=2.$$

En effet, par la transformation

$$x=-3u+v,\ y=2u-3v$$

l'équation (10) prendra la forme

$$u^3-8u^2v+5uv^2+v^3=1. \tag{11}$$

Cette équation peut être traitée par la méthode de Ljunggren. Alors on trouvera que les seules solutions sont $u=1$, $v=0$; $u=0$, $v=1$; $u=v=-1$. Nous allons publier la démonstration prochainement.

On montre aisément que l'équation (11) est équivalente à l'équation

$$X^2-3X+9=49\,Y^3.$$

§ 3. Les corps cubiques du second rang

6. Il y a deux espèces de corps cubiques de discriminant positif : Les corps non-abéliens et les corps abéliens et cycliques. Considérons d'abord les corps non-abéliens. Soit ε une unité dans un tel corps. Alors, nous avons montré dans le § 3 de [6] que la condition nécessaire et suffisante pour que ε soit exceptionnelle est que le discriminant soit de la forme

$$D(\varepsilon)=z^4-2z^3-5z^2+6z-23,$$

où z est un entier rationnel, tel que $z\geqslant 5$ ou $z\leqslant -4$. Il résulte du raisonnement dans [6] qu'il suffit de considérer les unités ε qui sont racines de l'équation

$$x^3+(a-1)x^2-ax+1=0,$$

où a est un entier rationnel, tel que $a\geqslant 5$ ou $a\leqslant -4$. Celle-ci peut s'écrire

$$x(x-1)(x+a)+1=0.$$

Si ε est une racine de cette équation, on en voit directement que $\varepsilon-1$ et $\varepsilon+a$ sont des unités. Le discriminant de ε a la valeur

$$a^4-2a^3-5a^2+6a-23,$$

polynome qui peut s'écrire

$$(a^2-a-3)^2-32.$$

On en conclut que le discriminant aura la même valeur si l'on y remplace a par $1-a$ et seulement dans ce cas, lorsque les cas $-3\leqslant a\leqslant 4$ sont exclus. La plus petite valeur du discriminant, $D=257$, est obtenue pour $a=5$ (ou $a=-4$).

Dans le corps engendré par ε nous avons le sextuplet d'unités exceptionnelles dérivées de ε. Vraisemblablement il n'existe aucune autre unité exceptionnelle dans un corps de cette espèce. Nous avons montré qu'on a, dans une infinité de cas, $m=0$ tout aussi bien que $m>0$.

Considérons ensuite le cas des corps cycliques, et résumons les résultats obtenus dans [6] relatifs à ces corps. Dans ce cas les discriminants des nombres entiers sont toujours des carrés partfaits. La condition nécessaire et suffisante pour que l'unité ε soit exceptionnelle est qu'elle soit racine d'une équation

$$x^3-px^2+(p-3)x+1=0, \tag{12}$$

dont le discriminant a l'expression

$$D(\varepsilon)=(p^2-3p+9)^2. \tag{13}$$

Il y a cependant les exceptions suivantes : Les 18 racines ε des équations

$$\left.\begin{array}{ll} x^3+2x^2-x-1=0, & x^3+x^2-2x-1=0,\\ x^3+3x^2-4x+1=0, & x^3-4x^2+3x+1=0,\\ x^3-5x^2+6x-1=0, & x^3-6x^2+5x-1=0,\end{array}\right\} \tag{14}$$

sont des unités, ayant la propriété que $\varepsilon-1$ est aussi une unité. Elles appartiennent au corps cubique cyclique engendré par le nombre $2\cos(2\pi/7)$ et possèdent le discriminant 49.

Nous avons montré qu'on a $m=0$ tout aussi bien que $m>0$ dans une infinité de corps cubiques cycliques; voir les Théorèmes 7 et 8 dans [6].

Dans les deux paragraphes suivants nous allons déterminer toutes les unités exceptionnelles dans les deux corps engendrés par $2\cos(2\pi/7)$ et $2\cos(2\pi/9)$.

§ 4. Le problème dans le corps engendré par 2 cos (2π/7)

7. Nous commençons par quelques relations numériques. Désignons par η une racine de l'équation

$$X^3+X^2-2X-1=0.$$

Alors, les deux autres racines, les conjugués de η, sont

$$\eta'=\frac{-1}{1+\eta}=\eta^2-2=-\eta+\eta^{-1},$$

$$\eta''=-1-\eta^{-1}=1-\eta-\eta^2.$$

Pour les calculs numériques nous avons besoin des relations suivantes :

$$N(\eta)=\eta\eta'\eta''=+1,\ \eta^{-1}=\eta^2+\eta-2,$$

$$\eta^3=-\eta^{-1}+3\eta-1,\ \eta^4=3\eta^2-\eta-1=3\eta^{-1}-4\eta+5,$$

$$\eta^{-2}=5-\eta-2\eta^2=1+\eta-2\eta^{-1},\ \eta(1+\eta)^{-1}=\eta^2-1=1-\eta+\eta^{-1}.$$

Le discriminant du corps $\mathbf{K}(\eta)$ est égal au discriminant de η, c'est-à-dire $=49$. Comme base des entiers dans le corps on peut choisir ou $1, \eta, \eta^2$ ou $1, \eta, \eta^{-1}$.

8. Notre but est de déterminer toutes les unités exceptionnelles dans le corps. Dans le § 3 nous en avons déjà déterminé les 18 que voici :

1°) Les racines de l'équation $x^3+x^2-2x-1=0$, à savoir

$$\eta,\ \eta^2-2,\ 1-\eta-\eta^2.$$

2°) Les racines de l'équation $x^3+3x^2-4x+1=0$, à savoir

$$-4+\eta+2\eta^2,\ 1+\eta-\eta^2,\ -2\eta-\eta^2.$$

3°) Les racines de l'équation $x^3-5x^2+6x-1=0$, à savoir

$$3-\eta-\eta^2,\ \eta+2,\ \eta^2.$$

4°) Les racines de l'équation $x^3+2x^2-x-1=0$, à savoir

$$\eta^2+\eta-2,\ -1-\eta,\ 1-\eta^2.$$

5°) Les racines de l'équation $x^3-4x^2+3x+1=0$, à savoir

$$1-\eta,\ 3-\eta^2,\ \eta+\eta^2.$$

6°) Les racines de l'équation $x^3-6x^2+5x-1=0$, à savoir

$$5-\eta-2\eta^2,\ -\eta+\eta^2,\ 1+2\eta+\eta^2.$$

Toutes ces unités ont le discriminant 49. Ce sont les unités exceptionnelles de *seconde espèce*. Les unités exceptionnelles de *première espèce* sont les racines des équations du type

$$X^3 - pX^2 + (p-3)X + 1 = 0, \tag{15}$$

où p est en nombre entier rationnel quelconque. Cette définition peut être étendue à tous les corps cubiques cycliques.

Le discriminant de cette équation est

$$(p^2 - 3p + 9)^2.$$

Dans les corps cubiques cycliques différents de $\mathbf{K}(\eta)$ toutes les unités exceptionnelles sont de première espèce.

Si ε est une racine de l'équation (15), les deux autres racines sont

$$\varepsilon' = 2 + (p-1)\varepsilon - \varepsilon^2 = (1-\varepsilon)^{-1},$$

$$\varepsilon'' = p - 2 - p\varepsilon + \varepsilon^2 = 1 - \varepsilon^{-1}.$$

Les nombres conjugués sont aussi de première éspèce. Les racines de l'équation inverse

$$X^3 + (p-3)X^2 - pX + 1 = 0$$

sont $\quad \varepsilon^{-1},\ 1-\varepsilon \quad \text{et} \quad (1-\varepsilon^{-1})^{-1} = \varepsilon^2 - (p-1)\varepsilon - 1.$

Ce sont aussi des unités exceptionnelles de première éspèce. La norme de toute unité de première espèce est $= -1$.

Supposons maintenant que ε appartienne au corps $\mathbf{K}(\eta)$ et qu'on ait

$$\varepsilon = x + y\eta + z\eta^{-1} = x - 2z + (y+z)\eta + z\eta^2,$$

où x, y et z sont des nombres entiers rationnels. Alors, les nombres conjugués sont

$$\varepsilon' = x - 2y - z - z\eta + y\eta^2 = x - z + (-y-z)\eta + y\eta^{-1},$$

$$\varepsilon'' = x + y + z - y\eta + (-y-z)\eta^2 = x - y - z + z\eta + (-y-z)\eta^{-1}.$$

Il en résulte évidemment la relation

$$p = 3x - y - 2z. \tag{16}$$

En calculant le nombre $\varepsilon\varepsilon' + \varepsilon\varepsilon'' + \varepsilon'\varepsilon''$ on obtiendra à l'aide de cette expression pour p la relation

$$3x - y - 2z - 3 = 3x^2 - 2xy - 4xz - 2y^2 - z^2 - yz. \tag{17}$$

Ensuite en calculant $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''$ on obtiendra la relation

$$x^3 + y^3 + z^3 - x^2y - 2xy^2 - xyz - xz^2 - 2x^2z + 5yz^2 + 6y^2z = -1. \tag{18}$$

9. A l'aide des formules

$$\varepsilon - \varepsilon' = 2y - z + (2z+y)\eta + (z-y)\eta^2,$$

$$\varepsilon - \varepsilon'' = -y - 3z + (2y+z)\eta + (y+2z)\eta^2,$$

$$\varepsilon' - \varepsilon'' = -3y - 2z + (y-z)\eta + (2y+z)\eta^2$$

on peut calculer le nombre $\sqrt{D(\varepsilon)}$. On aura alors

$$\pm\sqrt{D(\varepsilon)}=7(y^3+y^2z-2yz^2-z^3). \tag{19}$$

D'autre part on a en vertu de (13)

$$\sqrt{D(\varepsilon)}=p^2-3p+9, \tag{20}$$

d'où, à cause de (16),

$$\sqrt{D(\varepsilon)}=(3x-y-2z)^2-3(3x-y-2z)+9.$$

Si l'on élimine x entre cette équation et l'équation (17), on obtient

$$\sqrt{D(\varepsilon)}=7(y^2+yz+z^2). \tag{21}$$

En combinant cette équation avec l'équation (19) nous aurons la relation fondamentale

$$\pm(y^3+y^2z-2yz^2-z^3)=y^2+yz+z^2. \tag{22}$$

Pour simplifier nous écrivons dans la suite R au lieu de $\sqrt{D(\varepsilon)}$.

10. Notre problème est maintenant de résoudre l'équation (22) en nombres entiers rationnels y et z. Si nous posons $(y, z)=d$, $y=dy_1$, $z=dz_1$, où $(y_1, z_1)=1$, l'équation (22) peut s'écrire

$$y_1^3+y_1^2z_1-2y_1z_1^2-z_1^3=\pm\frac{1}{d}(y_1^2+y_1z_1+z_1^2).$$

Pour raccourcir nous désignons par Q le membre à droite dans cette équation. Alors il en résulte

$$(y_1-1)Q=\pm(3y_1+z_1)z_1^2,$$

et de plus

$$(y_1-z_1-1)Q=\pm(2z_1-y_1)y_1z_1.$$

On en conclut

$$3y_1+z_1\equiv 2z_1-y_1\equiv 0 \pmod{Q},$$

ce qui entraine, vu que $(Q, y_1z_1)=1$,

$$7\equiv 0 \pmod{Q}.$$

On aura donc les deux possibilités $Q=1$ et $Q=7$. Par conséquent, l'équation (22) sera remplacée par les deux systèmes suivants

$$\left.\begin{aligned} &y_1^2+y_1z_1+z_1^2=d,\\ &y_1^3+y_1^2z_1-2y_1z_1^2-z_1^3=\pm 1,\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

et

$$\left.\begin{aligned} &y_1^2+y_1z_1+z_1^2=7d,\\ &y_1^3+y_1^2z_1-2y_1z_1^2-z_1^3=\pm 7.\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

D'après les Théorèmes 5 et 7 nous connaissons les solutions y_1 et z_1 dans les deux systèmes.

11. Passons maintenant aux calculs numériques qui nous restent pour la solution complète de notre problème. Nous allons traiter les différentes solutions y_1, z_1 de chacun des deux systèmes pas à pas. A chaque paire y_1, z_1 correspond évidemment une valeur déterminée de d. Il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour d. Le nombre d déterminé on a $y=dy_1$ et $z=dz_1$. Ensuite R sera déterminé par la formule (21) et le nombre p par la formule (20). On aura deux valeurs différentes de p, valeurs dont la somme est $=3$. Enfin on trouvera x à l'aide de la relation (16). A chaque valeur de p on aura deux valeurs de x, dont l'une au plus est acceptable. Il faut bien entendu que x soit entier. De plus il faut contrôler si le nombre obtenu $x+y\eta+z\eta^{-1}$ est une unité exceptionnelle ou non. Cela peut se faire à l'aide des formules (17) et (18). Pour faciliter le contrôle on peut appliquer la proposition suivante :

Soit ε une unité exceptionnelle de première espèce et racine de l'équation

$$\varepsilon^3-p\varepsilon^2+(p-3)\varepsilon+1=0. \tag{A}$$

Posons $\beta=2-\eta$. Alors, si $p\equiv 1$ (mod 7), l'unité ε doit satisfaire à la congruence

$$\varepsilon\equiv -2 \pmod{\beta},$$

et si $p\equiv 2$ (mod 7), à la congruence

$$\varepsilon\equiv 3 \pmod{\beta}.$$

En effet, dans le corps $\mathbf{K}(\eta)$ l'idéal (7) est le cube de l'idéal premier $(2-\eta)=(\beta)$. On a

$$\varepsilon^6-1=(\varepsilon^3-1)(\varepsilon^3+1)\equiv 0 \pmod{\beta}.$$

Premier cas. Supposons d'abord que $\varepsilon^3\equiv 1 \pmod{\beta}$. Vu que $\varepsilon-1$ est une unité on conclut alors que

$$\varepsilon^2+\varepsilon+1\equiv 0 \pmod{\beta}. \tag{B}$$

Nous savons que p^2-3p+9 est toujours divisible par 7. Cela entraîne que p est ou $\equiv 1$ ou $\equiv 2$ (mod 7). Alors il résulte de l'équation (A) que $\varepsilon\equiv 3 \pmod{\beta}$, indépendamment de p. Or, cela est en contradiction avec la congruence (B).

Second cas. Supposons ensuite que $\varepsilon^3\equiv -1 \pmod{\beta}$. Si $\varepsilon\equiv -1 \pmod{\beta}$ on obtient de (A) la congruence $-2p+3\equiv 0 \pmod{\beta}$, d'où $p\equiv -2 \pmod{\beta}$ ce qui est impossible.

Il faut donc que $\varepsilon^2-\varepsilon+1\equiv 0 \pmod{\beta}$. Alors il résulte de (A) qu'on a $p\equiv 3\varepsilon \pmod{\beta}$. On voit aisément que cela vérifie la proposition. Il faut ajouter qu'on a $\eta\equiv 2 \pmod{\beta}$ et $\eta^{-1}\equiv -3 \pmod{\beta}$.

Nous considérons d'abord le système (23).

La solution $y_1=0$, $z_1=\mp 1$. On aura pour commencer $d=1$ et $R=7$, et puis les deux valeurs $p=1$ et $p=2$. Avec $p=1$ nous aurons $x=1$, $y=0$ et $z=1$; pour $p=2$ nous aurons $x=0$, $y=0$ et $z=-1$.

La solution $y_1=\pm 1$, $z_1=0$. Même dans ce cas on aura $d=1$, $R=7$ et $p=1$ ou $=2$. Avec $p=1$ on obtient $x=0$, $y=-1$ et $z=0$; avec $p=2$ on aura $x=1$, $y=1$ et $z=0$.

La solution $y_1=\mp 1$, $z_1=\pm 1$. Aussi dans ce cas on aura $d=1$, $R=7$ et $p=1$ ou $=2$. Avec $p=1$ on obtient $x=0$, $y=+1$ et $z=-1$; avec $p=2$ on aura $x=1$, $y=-1$ et $z=+1$.

La solution $y_1=\pm 2$, $z_1=\mp 1$. Dans ce cas on aura $d=3$, $R=189$ et ou $p=15$ ou $p=-12$. Avec $p=15$ on aura $x=5$, $y=\pm 6$, $z=\mp 3$; avec $p=-12$ on obtient $x=-4$, $y=\mp 6$, $z=\pm 3$. Cependant, on vérifie sans peine que les nombres $5+6\eta-3\eta^{-1}$ et $-4-6\eta+3\eta^{-1}$ ne sont pas des unités. Au contraire, les nombres $5-6\eta+3\eta^{-1}$ et $-4+6\eta-3\eta^{-1}$ sont des unités exceptionnelles.

La solution $y_1=z_1=\mp 1$. Même ici on aura $d=3$, $R=189$ et ou $p=15$ ou $p=-12$. Avec $p=15$ on obtient pour x les deux valeurs $x=2$ et $x=8$; avec $p=-12$ on aura pour x les valeurs $x=-7$ et $x=-1$. On vérifie sans peine que les nombres $2-3\eta-3\eta^{-1}$ et $-1+3\eta+3\eta^{-1}$ ne sont pas des unités, tandis que $8+3\eta+3\eta^{-1}$ et $-7-3\eta-3\eta^{-1}$ sont des unités.

La solution $y_1=\mp 1$, $z_1=\pm 2$. Aussi dans ce cas on aura $d=3$, $R=189$ et ou $p=15$ ou $p=-12$. Avec $p=15$ on obtient $x=8$ et $x=2$; avec $p=-12$ on aura $x=-1$ et $x=-7$. On vérifie sans difficulté que les nombres $2+3\eta-6\eta^{-1}$ et $-1-3\eta+6\eta^{-1}$ sont des unités, tandis que $8-3\eta+6\eta^{-1}$ et $-7+3\eta-6\eta^{-1}$ ne le sont pas.

La solution $y_1=\mp 9$, $z_1=\pm 5$. Dans ce cas on aura $d=61$, $R=7\cdot 61^3=1\,588\,867$, et donc ou $p=1262$ ou $p=-1259$. Avec $p=1262$ on obtient $x=441$; avec $p=-1259$ on obtient $x=-440$. Ainsi nous avons obtenus les unités exceptionnelles

$$441-549\eta+305\eta^{-1},$$
$$-440+549\eta-305\eta^{-1}.$$

La solution $y_1=\pm 4$, $z_1=\mp 9$. Même dans ce cas nous aurons $d=61$, $R=1\,588\,867$, et donc $p=1262$ et $p=-1259$. Avec $p=1262$ on obtient $x=136$; avec $p=-1259$ on aura $x=-135$. Ainsi nous avons obtenus les unités exceptionnelles

$$136+244\eta-549\eta^{-1},$$
$$-135-244\eta+549\eta^{-1}.$$

La solution $y_1=\pm 5$, $z_1=\pm 4$. Aussi dans ce cas nous aurons $d=61$, $R=1\,588\,867$, et donc ou $p=1262$ ou $p=-1259$. Avec $p=1262$ on obtient $x=685$; avec $p=-1259$ on aura $x=-684$. Ainsi nous avons obtenus les unités exceptionnelles

$$685+305\eta+244\eta^{-1},$$
$$-684-305\eta-244\eta^{-1}.$$

Passons ensuite aux solutions de l'équation (10).

La solution $y_1=\pm 1$, $z_1=\mp 3$. Dans ce cas on aura $d=1$, $R=49$ et ou $p=8$ ou $p=-5$. Avec $p=8$ on obtient $x=1$, $y=1$ et $z=-3$; avec $p=-5$ on aura $x=0$, $y=-1$, $z=3$.

La solution $y_1=\pm 2$, $z_1=\pm 1$. Même dans ce cas on aura $d=1$, $R=49$ et ou $p=8$ ou $p=-5$. Avec $p=8$ on obtient $x=4$, $y=2$, $z=1$; avec $p=-5$ on aura $x=-3$, $y=-2$, $z=-1$.

La solution $y_1=\mp 3$, $z_1=\pm 2$. Aussi dans ce cas on aura $d=1$, $R=49$ et ou $p=8$ ou $p=-5$. Avec $p=8$ on obtient $x=3$, $y=-3$, $z=2$; avec $p=-5$ on aura $x=-2$, $y=3$, $z=-2$.

12. En résumant les résultats obtenus dans les numéros précédents, nous pouvons prononcer le résultat suivant :

Théorème 8. *Les unités exceptionnelles dans le corps* **K** $(2\cos(2\pi/7))$ *sont données par le tableau suivant :*

I. *Les unités de seconde espèce de discriminant* 49 *:*

$$\eta,\ -\eta+\eta^{-1},\ -1-\eta^{-1},\ -\eta+2\eta^{-1},\ -1+2\eta-\eta^{-1}, -2-\eta-\eta^{-1},$$
$$1-\eta^{-1}, 2+\eta, 2-\eta+\eta^{-1},\ -1-\eta,\ \eta^{-1},\ -1+\eta+\eta^{-1},$$
$$1-\eta, 1+\eta-\eta^{-1}, 2+\eta^{-1}, 1+\eta-2\eta^{-1}, 2-2\eta+\eta^{-1}, 3+\eta+\eta^{-1}.$$

II. *Les unités de première espèce de discriminant* 49 *:*

$$-\eta,\ -\eta^{-1}, 1+\eta, 1+\eta^{-1}, \eta-\eta^{-1}, 1-\eta+\eta^{-1}.$$

III. *Les unités de discriminant* $7^4=2401$ *:*

$$1+\eta-3\eta^{-1},\ -\eta+3\eta^{-1}, 4+2\eta+\eta^{-1},\ -3-2\eta-\eta^{-1}, 3-3\eta+2\eta^{-1},\ -2+3\eta-2\eta^{-1}.$$

IV. *Les unités de discriminant* $7^2\cdot 3^6=35\,721$ *:*

$$5-6\eta+3\eta^{-1},\ -4+6\eta-3\eta^{-1}, 8+3\eta+3\eta^{-1},$$
$$-7-3\eta-3\eta^{-1}, 2+3\eta-6\eta^{-1},\ -1-3\eta+6\eta^{-1}.$$

V. *Les unités de discriminant* $7^2\cdot 61^6=(1\,588\,867)^2$ *:*

$$441-549\eta+305\eta^{-1},\ -440+549\eta-305\eta^{-1},$$
$$136+244\eta-549\eta^{-1},\ -135-244\eta+549\eta^{-1},$$
$$685+305\eta+244\eta^{-1},\ -684-305\eta-244\eta^{-1}.$$

Donc, il y a 42 unités exceptionnelles dans le corps $\mathbf{K}(\eta)$. Ainsi le nombre m de solutions de l'équation (1) est égal à 21.

§ 5. Le problème dans le corps engendré par $2\cos(2\pi/9)$

13. Nous commençons avec quelques relations numériques. Désignons par η une racine de l'équation

$$X^3-3X+1=0. \tag{25}$$

Alors, les deux autres racines, les conjugués de η, sont

$$\eta'=\frac{1}{1-\eta}=2-\eta-\eta^2=-1-\eta+\eta^{-1},$$
$$\eta''=-2+\eta^2=1-\eta^{-1}.$$

Pour les calculs numériques nous avons besoin des relations suivantes :

$$N(\eta)=\eta\eta'\eta''=-1,\ \eta^{-1}=3-\eta^2,\ \eta^3=3\eta-1,\ \eta^4=3\eta^2-\eta=9-\eta-3\eta^{-1},$$
$$\eta^{-2}=3\eta^{-1}-\eta=9-\eta-3\eta^2,\ (1-\eta)^{-1}=2-\eta-\eta^2=-1-\eta+\eta^{-1},$$
$$\eta(1-\eta)^{-1}=1-\eta-\eta^2=-2-\eta+\eta^{-1}.$$

Le discriminant du corps $\mathbf{K}(\eta)$ est égal au discriminant de η, c'est-à-dire $=81$. Comme base des entiers dans le corps on peut choisir ou $1, \eta, \eta^2$ ou $1, \eta, \eta^{-1}$.

14. Notre but est de déterminer toutes les unités exceptionnelles dans le corps. Ces unités sont toutes de première éspèce.

Soit ε une unité exceptionnelle du corps, racine de l'équation

$$X^3 - pX^2 + (p-3)X + 1 = 0, \tag{26}$$

où p est un nombre entier rationnel. Les deux autres racines sont

$$\varepsilon' = (1-\varepsilon)^{-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon'' = 1 - \varepsilon^{-1}.$$

Vu que ε appartient au corps nous avons

$$\begin{aligned} \varepsilon &= x + y\eta + z\eta^{-1} = x + 3z + y\eta - z\eta^2, \\ \varepsilon' &= x - y + z + (-y-z)\eta + y\eta^{-1}, \\ \varepsilon'' &= x + y + 2z + z\eta + (-y-z)\eta^{-1}. \end{aligned}$$

Il en résulte la relation

$$p = 3x + 3z. \tag{27}$$

En calculant le nombre $\varepsilon\varepsilon' + \varepsilon\varepsilon'' + \varepsilon'\varepsilon''$ on obtiendra à l'aide de l'expression pour p :

$$x^2 - y^2 + 2xz - yz = x + z - 1. \tag{28}$$

Ensuite en calculant $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''$ on obtiendra la relation

$$x^3 - y^3 - z^3 + 3x^2z - 3xy^2 - 6yz^2 - 9y^2z - 3xyz = -1. \tag{29}$$

15. A l'aide des formules

$$\begin{aligned} \varepsilon - \varepsilon' &= y - z + (2y+z)\eta + (z-y)\eta^{-1}, \\ \varepsilon - \varepsilon'' &= -y - 2z + (y-z)\eta + (2z+y)\eta^{-1}, \\ \varepsilon' - \varepsilon'' &= -2y - z + (-y-2z)\eta + (2y+z)\eta^{-1} \end{aligned}$$

on peut calculer le nombre $\sqrt{D(\varepsilon)}$. On aura alors

$$\pm\sqrt{D(\varepsilon)} = 9(y^3 - 3yz^2 - z^3). \tag{30}$$

D'autre part on a en vertu de (13)

$$\sqrt{D(\varepsilon)} = p^2 - 3p + 9, \tag{31}$$

d'où à cause de (27)

$$\sqrt{D(\varepsilon)} = 9[(x+z)^2 - (x+z) + 1].$$

Si l'on élimine x entre cette équation et l'équation (28), on obtient

$$\sqrt{D(\varepsilon)} = 9(y^2 + yz + z^2). \tag{32}$$

En combinant ce résultat avec l'équation (31) nous aurons la relation fondamentale

$$\pm(y^3-3yz^2-z^3)=y^2+yz+z^2. \tag{33}$$

Pour simplifier nous écrirons dans la suite R au lieu de $\sqrt{D(\varepsilon)}$.

16. Notre problème est maintenant de résoudre l'équation (33) en nombres entiers rationnels y et z. Si nous posons $(y, z)=d$, $y=dy_1$, $z=dz_1$, où $(y_1, z_1)=1$, l'équation (33) peut s'écrire

$$y_1^3-3y_1z_1^2-z_1^3=\pm\frac{1}{d}(y_1^2+y_1z_1+z_1^2).$$

Pour raccourcir nous désignons par Q le membre à droite dans cette équation. Alors il en résulte

$$d(y_1-z_1)\mp 1=\frac{3y_1z_1^2}{Q}.$$

Vu que $(Q, y_1z_1)=1$ cela entraine

$$3\equiv 0 \pmod{Q}.$$

Il y a donc deux possibilités $Q=1$, et $Q=3$. Par conséquent, l'équation (33) sera remplacée par les deux systèmes suivants

$$\left.\begin{aligned} y_1^2+y_1z_1+z_1^2&=d,\\ y_1^3-3y_1z_1^2-z_1^3&=\pm 1,\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

et

$$\left.\begin{aligned} y_1^2+y_1z_1+z_1^2&=3d,\\ y_1^3-3y_1z_1^2-z_1^3&=\pm 3.\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

D'après les Théorèmes 4 et 2 nous connaissons les solutions y_1 et z_1 dans les deux systèmes.

17. Passons maintenant aux calculs numériques qui nous restent pour la solution complète de notre problème. Nous allons traiter les différentes solutions y_1, z_1 de chacun des deux systèmes pas à pas. A chaque paire y_1, z_1 correspond évidemment une valeur déterminée de d. Il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour d. Le nombre d déterminé, on a $y=dy_1$ et $z=dz_1$. Ensuite R sera déterminé par la formule (32) et le nombre p par la formule (31). On aura deux valeurs différentes de p, valeurs dont la somme est $=3$. Enfin on trouvera x à l'aide de la relation (27). A chaque valeur de p on aura deux valeurs de x, dont l'une au plus est acceptable. On aura à contrôler si le nombre obtenu $x+y\eta+z\eta^{-1}$ est une unité exceptionnelle ou non. Cela peut se faire à l'aide des formules (28) et (29). Pour faciliter le contrôle on peut appliquer la proposition suivante :

Si $\beta=1+\eta$, toute unité exceptionnelle ε satisfait à la congruence

$$\varepsilon\equiv -1 \pmod{\beta}.$$

En effet, dans le corps $\mathbf{K}(\eta)$ l'idéal (3) est le cube de l'idéal premier $(1+\eta)=(\beta)$. Soit ε une racine de l'équation

$$\varepsilon^3-p\varepsilon^2+(p-3)\,\varepsilon+1=0.$$

On a évidemment $\varepsilon^3 \equiv \varepsilon \pmod{\beta}$ et $\varepsilon^2 \equiv 1 \pmod{\beta}$. Nous avons montré plus haut que p est divisible par 3. Par conséquent, il résulte de l'équation cubique que $\varepsilon - 3\varepsilon + 1 \equiv 0 \pmod{\beta}$, c'est-à-dire

$$\varepsilon \equiv -1 \pmod{\beta}.$$

Il faut ajouter qu'on a $\eta \equiv \eta^{-1} \equiv -1 \pmod{\beta}$.

Nous considérons d'abord le système (34).

La solution $y_1 = 0$, $z_1 = \pm 1$. On aura pour commencer $d = 1$ et $R = 9$, et puis les deux valeurs $p = 0$ et $p = 3$. Avec $p = 0$ nous aurons les deux possibilités $x = \mp 1$, $y = 0$, $z = \pm 1$; avec $p = 3$ nous aurons les deux possibilités $x = 0$, $y = 0$, $z = +1$ et $x = 2$, $y = 0$, $z = -1$. On vérifie aisément que seulement les nombres $1 - \eta^{-1}$ et η^{-1} sont des unités exceptionnelles.

La solution $y_1 = \pm 1$, $z_1 = 0$. Même dans ce cas on aura $d = 1$, $R = 9$, et puis les deux valeurs $p = 0$ et $p = 3$. Avec $p = 0$ nous aurons $x = 0$, $y = \pm 1$, $z = 0$; avec $p = 3$ nous aurons $x = 1$, $y = \pm 1$, $z = 0$. Seulement les nombres η et $1 - \eta$ sont des unités exceptionnelles.

La solution $y_1 = \pm 1$, $z_1 = \mp 1$. Aussi dans ce cas on aura $d = 1$, $R = 9$, et puis les deux valeurs $p = 0$ et $p = 3$. Avec $p = 0$ on aura les possibilités $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \mp 1$. Avec $p = 3$ on obtient ou $x = 0$, $y = -1$, $z = +1$ ou $x = 2$, $y = +1$, $z = -1$. On trouve que seulement $-1 - \eta + \eta^{-1}$ et $2 + \eta - \eta^{-1}$ sont des unités exceptionnelles.

La solution $y_1 = \pm 2$, $z_1 = \pm 1$. Dans ce cas nous aurons $d = 7$, $R = 9 \cdot 7^3 = 3087$, et puis les deux valeurs $p = 57$ et $p = -54$. Avec $p = 57$ on obtient les deux possibilités $x = 12$, $y = 14$, $z = 7$ et $x = 26$, $y = -14$, $z = -7$. On vérifie aisément que seulement le nombre $26 - 14\eta - 7\eta^{-1}$ est une unité exceptionnelle. Avec $p = -54$ on obtient les deux possibilités $x = -25$, $y = 14$, $z = 7$ et $x = -12$, $y = -14$, $z = -7$. On trouve que seulement le nombre $-25 + 14\eta + 7\eta^{-1}$ est une unité exceptionnelle.

La solution $y_1 = \pm 1$, $z_1 = \mp 3$. Dans ce cas on aura aussi $d = 7$, $R = 3087$, et puis les deux valeurs $p = 57$ et $p = -54$. Avec $p = 57$ on obtient les deux possibilités $x = -2$, $y = -7$, $z = 21$ et $x = 40$, $y = 7$, $z = -21$; avec $p = -54$ on aura les deux possibilités $x = -39$, $y = 7$, $z = -21$ et $x = 3$, $y = +7$, $z = -21$. On vérifie que seulement les deux nombres $-2 - 7\eta + 21\eta^{-1}$ et $3 + 7\eta - 21\eta^{-1}$ sont des unités exceptionnelles.

La solution $y_1 = \pm 3$, $z_1 = \mp 2$. Même dans ce cas on aura $d = 7$, $R = 3087$, et les deux valeurs $p = 57$ et $p = -54$. Avec $p = 57$ on obtient les deux possibilités $x = 5$, $y = -21$, $z = 14$ et $x = 33$, $y = 21$, $z = -14$; avec $p = -54$ on aura les deux possibilités $x = -32$, $y = -21$, $z = 14$ et $x = -4$, $y = 21$, $z = -14$. On trouvera que seulement les deux nombres $33 + 21\eta - 14\eta^{-1}$ et $-32 - 21\eta + 14\eta^{-1}$ sont des unités exceptionnelles.

Passons ensuite au système (35).

La solution $y_1 = \pm 1$, $z_1 = \pm 1$. Dans ce cas on aura $d = 1$, $R = 27$, et les deux valeurs $p = 6$ et $p = -3$. Avec $p = 6$ on obtient les deux possibilités $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ et $x = 3$, $y = -1$, $z = -1$. Avec $p = -3$ on aura les deux possibilités $x = 0$, $y = -1$, $z = -1$ et $x = -2$, $y = 1$, $z = 1$. Parmi les quatre nombres ainsi trouvés, seulement $3 - \eta - \eta^{-1}$ et $-2 + \eta + \eta^{-1}$ sont des unités exceptionnelles.

La solution $y_1 = \pm 1$, $z_1 = \mp 2$. Même ici on aura $d = 1$, $R = 27$, et les deux valeurs $p = 6$ et $p = -3$, Avec $p = 6$ on obtient les deux possibilités $x = 0$, $y = -1$, $z = 2$ et $x = 4$, $y = 1$, $z = -2$. Avec $p = -3$ on obtient les deux possibilités $x = -3$, $y = -1$,

$z=2$ et $x=1$, $y=1$, $z=-2$. Parmi les quatre nombres ainsi trouvés, seulement $-\eta+2\eta^{-1}$ et $1+\eta-2\eta^{-1}$ sont des unités exceptionnelles.

La solution $y_1=\pm 2$, $z_1=\mp 1$. On aura même dans ce cas $d=1$, $R=27$, et les deux valeurs $p=6$ et $p=-3$. Avec $p=6$ on obtient les possibilités $x=1$, $y=-2$, $z=1$ et $x=3$, $y=2$, $z=-1$. Avec $p=-3$ on obtient les deux possibilités $x=-2$, $y=-2$ et $z=1$. Parmi les quatre nombres ainsi trouvés ,seulement $3+2\eta-\eta^{-1}$ et $-2-2\eta+\eta^{-1}$ sont des unités exceptionnelles.

18. En résumant les résultats obtenus dans les numéros précédents, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Théorème 9. *Les unités exceptionnelles dans le corps* $\mathbf{K}(2\cos(2\pi/9))$ *sont données par le tableau suivant :*

I. *Les unités de discriminant* 81 :

$$\eta,\ 1-\eta^{-1},\ -1-\eta+\eta^{-1},\ \eta^{-1},\ 1-\eta,\ 2+\eta-\eta^{-1}.$$

II. *Les unités de discriminant* $3^4\cdot 7^6=(3087)^2$:

$$26-14\eta-7\eta^{-1},\ -25+14\eta+7\eta^{-1},$$
$$-2-7\eta+21\eta^{-1},\ 3+7\eta-21\eta^{-1},$$
$$33+21\eta-14\eta^{-1},\ -32-21\eta+14\eta^{-1}.$$

III. *Les unités de discriminant* $3^6=729$:

$$3-\eta-\eta^{-1},\ 3+2\eta-\eta^{-1},\ -\eta+2\eta^{-1}$$
$$-2+\eta+\eta^{-1},\ -2-2\eta+\eta^{-1},\ 1+\eta-2\eta^{-1}.$$

Donc, il y a dans le corps $\mathbf{K}(\eta)$ 18 unités exceptionnelles. Ainsi le nombre m de solutions de l'équation (1) est égal à 9.

La méthode que nous venons d'employer dans les §§ 4 et 5 pourrait sans doute s'appliquer dans un corps cubique cyclique quelconque pour y déterminer toutes les unités exceptionnelles. Cependant, pour arriver au but on serait forcé à résoudre en nombres entiers rationnels u et v certaines équations diophantiennes du type $F(u, v)=1$, où F signifie une forme binaire cubique à coefficients entiers rationnels dont le discriminant est le carré parfait d'un nombre naturel. Il est vraisemblable qu'on puisse résoudre complètement ce type d'équations par la méthode p-adique de Skolem. Nous venons de voir comment cela a été réalisé par Ljunggren dans les cas des plus petits discriminants, à savoir 49 et 81.

§ 6. Le problème dans les corps de degré $\geqslant 4$

19. Corps biquadratiques d'un rang $\geqslant 2$. Pour les corps biquadratiques du premier rang le problème des unités exceptionnelles est complètement résolu; voir [4] et [5].

Dans le travail [6] pous avons montré que le maximum du nombre d'unités exceptionnelles dans les corps biquadratiques du second rang est $\geqslant 24$.

Nous allons y ajouter le résultat :

Théorème 9. *Il y a une infinité de corps biquadratiques du troisième rang dans lesquels le nombre d'unités exceptionnelles est* $\geqslant 18$.

Démonstration. Soit ξ une racine de l'équation

$$x(x^2-1)(x+a)-1=0, \tag{36}$$

où a est un nombre entier rationnel, tel que $|a|\geqslant 4$. D'après un résultat de Schur cette équation est irréductible; voir [6] et [17]. Il est évident que le corps $\mathbf{K}(\xi)$ n'est pas du premier rang. On vérifie aisément que le discriminant de ξ est positif pour $|a|\geqslant 4$. Donc toutes les racines de (36) sont réelles, et le rang du corps est $=3$.

On voit de l'équation (36) que les nombres ξ, $\xi-1$ et $\xi+1$ sont des unités. Alors on a les neuf relations suivantes entre unités :

$$\xi+(1-\xi)=1,\ \xi^{-1}+(1-\xi^{-1})=1,\ (1-\xi)^{-1}+\xi(\xi-1)^{-1}=1;$$
$$(\xi+1)+(-\xi)=1,\ (\xi^{-1}+1)+(-\xi^{-1})=1,\ (1+\xi)^{-1}+\xi(\xi-1)^{-1}=1;$$
$$\xi^2+(1-\xi^2)=1,\ \xi^{-2}+(1-\xi^{-2})=1,\ (-\xi^2+1)^{-1}+\xi^2(\xi^2-1)^{-1}=1.$$

On vérifie sans peine que toutes les relations sont différentes entre elles. Cela démontre le Théorème 9.

Il est possible de montrer que, parmi les corps $\mathbf{K}(\xi)$, il n'y a qu'un nombre fini de corps abéliens.

Si ξ est une racine de l'équation

$$x^4-5x^2+5=0,$$

le corps $\mathbf{K}(\xi)$ est un corps cyclique du troisième rang; voir Nagell [18], Théorème 3. Nous allons montrer qu'il y a au moins 30 unités exceptionnelles dans ce corps. En effet, on vérifie aisément que, dans ce corps, les nombres $\xi-1$, $\xi+1$, $\xi-2$, $\xi+2$, ξ^2-1, ξ^2-2, ξ^2-3 et ξ^2-4 sont des unités. Alors, nous obtenons les relations entre unités, que voici:

$$(\xi-1)+(2-\xi)=1,\ (\xi-1)^{-1}+(\xi-2)(\xi-1)^{-1}=1,\ (2-\xi)^{-1}+(1-\xi)(2-\xi)^{-1}=1;$$
$$(\xi+2)+(-\xi-1)=1,\ (\xi+2)^{-1}+(\xi+1)(\xi+2)^{-1}=1,\ (\xi+2)(\xi+1)^{-1}+(-\xi-1)^{-1}=1;$$
$$(\xi^2-1)+(2-\xi^2)=1,\ (\xi^2-1)^{-1}+(\xi^2-2)^{-1}=1,\ (2-\xi^2)^{-1}+(1-\xi^2)(2-\xi^2)^{-1}=1.$$

Supposons maintenant que $\xi=\sqrt{\tfrac{1}{2}(5+\sqrt{5})}$. Si on passe de ξ à $-\xi$ dans ce système de relations, le système restera le même. Si, au contraire, on passe de ξ au nombre conjugué $\sqrt{\tfrac{1}{2}(5-\sqrt{5})}$, on aura un autre système de relations, exception faite des trois dernières relations qui resteront les mêmes dans leur ensemble. Nous avons ainsi obtenu 15 relations entre unités du corps. Le nombre d'unités exceptionnelles est donc $\geqslant 30$, et nous pouvons énoncer le résultat :

Théorème 10. *Dans les corps biquadratiques, cycliques du troisième rang le maximum du nombre d'unités exceptionnelles est* $\geqslant 30$.

Probablement le maximum est égal à 30.

20. Corps du cinquième degré. Nous allons donner un exemple du cinquième degré. Soit ξ une racine de l'équation

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+a)\mp 1=0, \tag{37}$$

où a est un nombre entier rationnel $\geqslant 4$ ou $\leqslant -1$. Cette équation est irréductible d'après Schur (voir [17]). On montre sans difficulté que toutes les cinq racines sont réelles. Donc le rang du corps $F(\xi)$ est $=4$. Il est évident que ξ, $\xi+1$, $\xi+2$, $\xi+3$ et $\xi+a$ sont des unités du corps. Nous aurons donc les relations suivantes :

$$(\xi+k)+(-\xi-k+1)=1,\ (\xi+k)^{-1}+(\xi+k-1)(\xi+k)^{-1}=1,$$

$$(-\xi-k+1)^{-1}+(-\xi-k)(-\xi-k+1)^{-1}=1, \quad \text{pour} \quad k=1, 2, 3;$$

$$(\xi+h)^2+[-(\xi+h-1)(\xi+h+1)]=1,$$

$$(\xi+h)^{-2}+(\xi+h-1)(\xi+h+1)(\xi+h)^{-2}=1,$$

$$(-\xi-h+1)^{-1}(\xi+h+1)^{-1}+(\xi+h)^2(\xi+h-1)^{-1}(\xi+h+1)^{-1}=1,$$

pour $h=1$ et 2. Vu que ξ est du cinquième degré, il est évident que toutes ces relations sont différentes entre elles. Ainsi nous avons le résultat :

Théorème 11. *Il y a une infinité de corps du cinquième degré dans lesquels le nombre d'unités exceptionnelles est* $\geqslant 30$.

Si on prend dans l'équation (37) $a=4$ (ou $a=-1$), on peut évidemment remplacer le nombre 30 par 42. Nous avons donc le résultat :

Théorème 12. *Dans les corps du cinquième degré le maximum du nombre d'unités exceptionnelles est* $\geqslant 42$.

21. Corps cyclotomiques. Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1. *Soient ξ et η deux racines de l'unité reliées par l'équation*

$$1+\xi+\eta=0. \tag{38}$$

Alors cette relation est nécessairement identique a

$$1+\varrho+\varrho^2=0.$$

En effet, passons de (38) à l'équation imaginairement conjuguée

$$1+\xi^{-1}+\eta^{-1}=0.$$

En éliminant η entre cette équation et (38) on obtient

$$(1+\xi)(1+\xi^{-1})=1,$$

ce qui entraîne

$$1+\xi+\xi^2=0.$$

Soit n un nombre naturel >2. Désignons par ξ une racine n-ième primitive quelconque de l'unité et par $F_n(x)$ le polynome de degré $\varphi(n)$ dont les zéros sont les nombres ξ; le coefficient de la plus haute puissance de x est supposé d'être égal à 1. Alors, il est bien connu qu'on a les résultats suivants :

$$F_n(1) = \begin{cases} p \quad \text{si} \quad n = p^\alpha, \ p \text{ nombre premier,} \\ 1 \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

$$F_n(-1) = \begin{cases} p \quad \text{si} \quad n = 2p^\alpha, \ p \text{ nombre premier,} \\ 1 \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

Voir p. ex. Nagell [19], p. 154. Il en résulte :

Les $\varphi(n)$ nombres $1-\xi$ sont des unités, lorsque n n'est pas la puissance d'un nombre premier. Les $\varphi(n)$ nombres $1+\xi$ sont des unités, lorsque n n'est pas le double d'une puissance d'un nombre premier.

Dans la suite nous supposons que $n \geqslant 5$ et $\neq 6$. Considérons d'abord le cas où n est divisible par au moins deux nombres premiers différents. Alors on a les relations suivantes entre unités

$$\xi + (1-\xi) = 1 \tag{39}$$

pour les $\varphi(n)$ différentes valeurs de ξ. Pour chaque valeur de ξ la relation (39) forme un triplet avec les relations

$$\xi^{-1} + (1-\xi^{-1}) = 1, \tag{40}$$

$$(1-\xi)^{-1} + (-\xi)(1-\xi)^{-1} = 1. \tag{41}$$

Quand ξ varie les équations (39), (40) et (41) forment trois ensembles, chacun constitué de $\varphi(n)$ relations. Il est d'abord évident que toutes les relations de l'ensemble (39) sont différentes entre elles, et cela est aussi vrai pour les ensembles (40) et (41). On voit aussi sans peine que l'ensemble (40) est identique à l'ensemble (39). Au contraire, l'ensemble (41) est différent de l'ensemble (39). En effet, si on avait pour $(a, n) = 1$,

$$(1-\xi)^{-1} = 1 - \xi^a,$$

on aurait

$$1 + \xi^{a-1} - \xi^a = 0,$$

ce qui est impossible d'après le Lemme 1. Si on avait, pour $(a, n) = 1$,

$$(1-\xi)^{-1} = \xi^a,$$

on aurait

$$1 - \xi^a + \xi^{a+1} = 0,$$

ce qui est aussi impossible.

Si n n'est pas de la forme $2p^\alpha$, p nombre premier, on a les relations suivantes entre unités

$$-\xi + (1+\xi) = 1 \tag{42}$$

pour les $\varphi(n)$ différentes valeurs de ξ. De (42) on obtient de la manière ordinaire les deux ensembles de relations

$$-\xi^{-1} + (1+\xi^{-1}) = 1, \tag{43}$$

$$(1+\xi)^{-1} + \xi(1+\xi)^{-1} = 1, \tag{44}$$

chacun des ensembles constitué de $\varphi(n)$ relations. Il est d'abord évident que toutes les relations de l'ensemble (42) sont différentes entre elles, et cela est aussi vrai pour les ensembles (43) et (44). On voit aussi sans peine que l'ensemble (43) est identique à l'ensemble (42). Au contraire, l'ensemble (44) est différent de l'ensemble (42). En effet, si on avait, pour $(a, n)=1$,

$$(1+\xi)^{-1} = 1+\xi^a,$$

on aurait

$$1+\xi^{a-1}+\xi^a = 0,$$

ce qui est impossible d'après le Lemme 1. Si on avait, pour $(a, n)=1$,

$$(1+\xi)^{-1} = \xi^a,$$

on aurait

$$1-\xi^a-\xi^{a+1} = 0,$$

ce qui est aussi impossible.

Supposons ensuite que n ne soit ni de la forme p^α ni de la forme $2p^\alpha$, où p est un nombre premier. Alors, on peut se demander si les ensembles (39) et (42) peuvent avoir des relations communes. En vertu du Lemme 1 on ne peut pas avoir l'égalité

$$-\xi = 1+\xi^a,$$

tandis que l'égalité

$$-\xi = \xi^a \tag{45}$$

est possible si et seulement si n est pair et si

$$a \equiv 1+\tfrac{1}{2}n \pmod{n}.$$

Vu que a est impair, il faut donc que n soit divisible par 4. Donc, si n n'est pas divisible par 4, l'égalité (45) n'est pas possible; cela signifie que les ensembles (39) et (42) sont entièrement différents dans ce cas. Mais si $n\equiv 0 \pmod 4$ les deux ensembles (39) et (42) sont évidemment identiques. On vérifie aisément, par la même méthode, que les ensembles (44) et (39) n'ont pas de relations communes. On montre pareillement que les ensembles (44) et (41) n'ont pas de relations communes.

Pour calculer le nombre des unités exceptionnelles il est pratique de former les triplets pas à pas. Nous prenons comme exemple le cas où $n \neq p^\alpha$ et $\neq 2p^\alpha$, p nombre premier, et $n \not\equiv 0 \pmod 4$. Commençons avec l'unité ξ dans (39) et formons le triplet qui s'en dérive. Dans ce triplet entre l'unité ξ^{-1}. Prenons maintenant une unité ξ^a, $(a, n)=1$, différente de ξ et de ξ^{-1}. Formons ensuite un nouveau triplet dérivé de l'unité ξ^a, où $a \not\equiv \pm 1 \pmod n$, $(a, n)=1$. Puis on formera un troisième triplet dérivé de ξ^b, ou $b \not\equiv \pm a$ et $\not\equiv \pm 1 \pmod n$, $(b, n)=1$. En continuant de cette manière on aura $\frac{1}{2}\varphi(n)$ triplets, où toutes les unités sont différentes entre elles. En prenant comme point de départ la relation (42) on obtiendra avec la même méthode $\frac{1}{2}\varphi(n)$ autres triplets. On aura ainsi $\varphi(n)$ triplets différents. Le nombre d'unités exceptionnelles sera alors $=6\varphi(n)$. Dans tous les autres cas ce nombre sera plus petit et $=3\varphi(n)$.

Il faut observer que toutes les unités qui paraissent dans les relations de (39), (40), (41), (42), (43) et (44) sont du degré $\varphi(n)$. Aux relations d'unités de degré $\varphi(n)$ on peut ajouter les relations qui appartiennent aux sous-corps pour obtenir toutes les relations dans le corps $\mathbf{K}(\xi)$.

En résumant les résultats obtenus nous pouvons énoncer le

Théorème 13. *Désignant par μ le nombre d'unités exceptionnelles de degré $\varphi(n)$ dans le corps cyclotomique $\mathbf{K}(\xi)$ de degré $\varphi(n)$, nous avons obtenu :*

1°) *Si* $n \neq p^{\alpha}$ *et* $\neq 2p^{\alpha}$, *p nombre premier, et* $n \not\equiv 0 \pmod 4$, *on a* $\mu \geqslant 6\varphi(n)$
2°) *Dans tous les autres cas, exception faite du cas* $n = 2^{\beta}$, *on a* $\mu \geqslant 3\varphi(n)$.

Il reste encore à traiter le cas $n = 2^{\beta}$.

Exemples numériques.

I. Considérons le corps engendré par $\xi = \exp((2\pi i)/7)$. D'après le Théorème **13** nous avons $\mu \geqslant 18$. D'après le Théorème 8 il y a dans le souscorps engendré par $2\cos 2\pi/7$ exactement 42 unités exceptionnelles du troisième degré. Par conséquent, on a dans le corps $\mathbf{K}(\xi)$ $\mu \geqslant 60$.

II. Prenons le corps engendré par $\xi = \exp((2\pi i)/9)$. D'après le Théorème **13** nous avons $\mu \geqslant 18$. D'après le Théorème **9** il y a dans le sous-corps engendré par $2\cos(2\pi/9)$ 18 unités exceptionnelles du troisième degré. Dans le sous-corps engendré par $\sqrt{-3}$ il y a les deux unités exceptionnelles ϱ et ϱ^2 racines de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. Par conséquent, dans le corps $\mathbf{K}(\xi)$ on a alors $\mu \geqslant 38$.

III. Considérons finalement le corps engendré par $\xi = \exp((2\pi i)/20)$. D'après le Théorème **13** nous avons $\mu \geqslant 24$ (unités du 8-ième degré). Dans le sous-corps biquadratique imaginaire, cyclique engendré par $\exp((2\pi i)/5)$ il y a 12 unités exceptionnelles imaginaires du quatrième degré et 6 unités exceptionnelles réelles du second degré; voir [4], Théorème **7**. Dans le sous-corps biquadratique réel, cyclique engendré par le nombre $\eta = \sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}$ il y a 30 unités exceptionnelles réelles du quatrième degré, et 6 unités exceptionnelles réelles du second degré (= aux unités du second degré dans le corps $\mathbf{K}$ ($\exp((2\pi i)/5)$). Conclusion : Dans $\mathbf{K}(\xi)$ on a $\mu \geqslant 72$. Pour le corps $\mathbf{K}(\eta)$ voir le Théorème **10** de ce travail.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

1. Nagell, T., Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativer Diskriminante. Mathematische Zeitschrift, Bd. 28, Berlin 1928.
2. Nagell, T., Les points exceptionnels rationnels sur certaines cubiques du premier genre, Acta Arithmetica, 5 (1959), Warszawa.
3. Nagell, T., Les points exceptionnels sur les cubiques $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$, Acta Scientiarum Mathematicarum, XXI (1960), Szeged.
4. Nagell, T., Sur une propriété des unités d'un corps algébrique, Arkiv för matematik, Bd. 5, nr. 25, Stockholm 1964.
5. Nagell, T., Sur les unités dans les corps biquadratiques primitifs du premier rang, Arkiv för matematik, Bd. 7, nr. 27, Stockholm 1968.
6. Nagell, T., Quelques problèmes relatifs aux unités algébriques, Arkiv för matematik, Bd. 8, nr. 14, Stockholm 1969.
7. Chowla, S., Proof of a conjecture of Julia Robinson, Det kgl. norske videnskabers selskabs forhandlinger, Bd. 34, Nr. 20, Trondheim 1961.
8. Nagell, T., Des équations indéterminées $x^2 + x + 1 = y^n$ et $x^2 + x + 1 = 3y^n$, Norsk matematisk forenings skrifter, ser. I, nr. 2, Kristiania 1919.
9. Nagell, T., Über die Einheiten in reinen kubischen Zahlkörpern, Videnskapsakademiets skrifter, Matem.-naturv. klasse, 1923. No. 11. Kristiania.
10. Nagell, T., Solution complète de quelques équations cubiques à deux indéterminées, Journal de mathém., tome IV, 1925.
11. Ljunggren, W., Einige Bemerkungen über die Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit positiver Diskriminante, Acta mathematica, t. 75, Stockholm 1942.
12. Ljunggren, W., Einige Sätze über unbestimmte Gleichungen von der Form $Ax^4 + Bx^2 + C = Dy^2$, Videnskapskademiets skrifter, Matem.-naturv. klasse, 1943. No. 9. Oslo.

13. BAULIN, V. J., Sur une équation indéterminée du troisième degré à discriminant positif (en langue russe). Tul'sk. Gos. Ped. Inst. Učen Zap. Fiz.-Mat. Nauk Vyp 7 (1960), 138–170. — Voir les Mathem. Reviews 33 (2), 1967, p. 1245 (nr. 7298).
14. SKOLEM, TH., Einige Sätze über gewisse Reihenentwicklungen und exponentiale Beziehungen mit Anwendung auf diophantische Gleichungen, Videnskapsakademiets skrifter, Matem.-naturv. klasse, 1933, Nr. 6, Oslo.
15. SKOLEM, TH., Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentialer Gleichungen und diophantischer Gleichungen, 8me Skand. matem. kongr. förh. Stockholm 1934.
16. SKOLEM, TH., Einige Sätze über p-adische Potenzreihen mit Anwendung auf gewisse exponentielle Gleichungen, Mathem. Annalen, Bd. 111, 1935.
17. PÓLYA, G., Aufgaben und Lehrsätze, Bd. 2, Probl. 121, 122, p. 136 et p. 346. Berlin 1928.
18. NAGELL, T., Sur quelques questions dans la théorie des corps biquadratiques, Arkiv för matematik, Bd. 4, nr. 26, Stockholm 1961.
19. NAGELL, T., Contributions à la théorie des corps et des polynomes cyclotomiques, Arkiv för matematik, Bd. 5, nr. 10, Stockholm 1963.

Tryckt den 30 december 1969

Uppsala 1969. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB