ARKIV FÖR MATEMATIK Band 3 nr 54

Communiqué le 10 septembre 1958

Sur une classe d'équations exponentielles

Par Trygve Nagell

§ 1

1. Soient donnés les nombres entiers positifs, premiers entre eux deux à deux,

$$A, M_1, M_2, \ldots, M_m, B, N_1, N_2, \ldots, N_n, C, \tag{1}$$

et considérons l'équation exponentielle

$$A\, M_1^{x_1} M_2^{x_2} \ldots M_m^{x_m} - B\, N_1^{y_1} N_2^{y_2} \ldots N_n^{y_n} = C, \tag{2}$$

où les inconnus $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots y_n$

doivent être des nombres entiers $\geqslant 0$.

Nous allons établir le résultat suivant:

Théorème 1. *L'équation diophantienne* (2) *n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers* $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n \geqslant 0$.

Démonstration: Posons, pour $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$x_i = \mu_i + 3\varkappa_i,$$

et, pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$y_i = \nu_i + 3\lambda_i,$$

où μ_i et ν_i sont des entiers tels que $0 \leqslant \mu_i \leqslant 2$, $0 \leqslant \nu_i \leqslant 2$. Si nous posons ensuite

$$A_1 = A \cdot M_1^{\mu_1} M_2^{\mu_2} \ldots M_m^{\mu_m}$$

$$B_1 = B \cdot N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} \ldots N_n^{\nu_n},$$

$$X = M_1^{\varkappa_1} M_2^{\varkappa_2} \ldots M_m^{\varkappa_m},$$

$$Y = N_1^{\lambda_1} N_2^{\lambda_2} \ldots N_n^{\lambda_n},$$

l'équation (2) sera remplacée par 3^{m+n} équations de la forme

$$A_1 X^3 - B_1 Y^3 = C. \tag{3}$$

D'après un théorème bien connu d'*Axel Thue* chacune des équations (3) n'admet qu'un nombre limité de solutions en nombres entiers X et Y, quand A_1, B_1 et C sont donnés. Ainsi le théorème 1 se trouve demontré.

On peut aussi indiquer une limite supérieure du nombre des solutions de l'équation (2). En effet, d'après certains résultats sur les équations diophantiennes cubiques l'équation (3) admet au plus $3C$ solutions en nombres entiers positifs X et Y premiers entre eux; voir [1] et [2].[1] Ainsi il s'ensuit que l'équation (2) peut admettre au plus $3^{m+n+1}C$ solutions.

Cependant, cette démonstration nous ne donne pas la solution complète du problème. Pour cela il fallait 1° un critère pour reconnaître si l'équation (2) est résoluble ou non, et 2° un algorithme pour déterminer toutes les solutions de (2) s'il y en a.

2. Pour $C=1$ et $C=2$ le théorème 1 a déjà été établi par Störmer; voir [3] et [4]. Sa méthode de démonstration donne aussi un algorithme pour déterminer toutes les solutions de l'équation (2) dans ces cas. Elle repose sur le lemme suivant:

Soit D un nombre entier positif qui n'est pas un carré parfait, et soient x et y des nombres entiers positifs satisfaisant à l'équation

$$x^2 - Dy^2 = 1. \tag{4}$$

Alors, si tous les diviseurs premiers de y divisent D, les nombres x et y sont les solutions fondamentales de (4).

Ce lemme reste encore vrai si on remplace l'équation (4) par l'équation

$$x^2 - Dy^2 = 4, \tag{5}$$

et si on exige que x et y soient *impairs*; voir [4], Theorem 17. A l'aide de ce résultat j'ai montré comment on peut déterminer toutes les solutions de (2) dans le cas de $C=4$; voir [4], Theorem 22.

Aussi dans le cas de $C=3$ on peut résoudre le problème complètement. En effet, j'ai montré ailleurs comment on peut déterminer toutes les solutions de (3) pour $C=3$; voir [2].

Pour $C \geqslant 5$ nous n'avons pas encore de méthode générale pour résoudre l'équation (2) complètement.

§ 2

3. Soient donnés les nombres entiers positifs, premiers entre eux deux à deux,

$$A, M_1, M_2, \ldots, M_m, B, N_1, N_2, \ldots, N_n, C, R_1, R_2, \ldots, R_r, \tag{6}$$

et considérons l'équation exponentielle

$$A\, M_1^{x_1} M_2^{x_2} \ldots M_m^{x_m} - B\, N_1^{y_1} N_2^{y_2} \ldots N_n^{y_n} = C\, R_1^{z_1} R_2^{z_2} \ldots R_r^{z_r} \tag{7}$$

qui est une généralisation naturelle de l'équation (2). Ici les inconnus

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_r$$

doivent être des nombres entiers $\geqslant 0$.

(1) Les numéros figurant entre crochets renvoient à la Bibliographie placée à la fin de ce Mémoire.

Il est vraisemblable que le nombre des solutions de l'équation diophantienne (7) est limité. En effet, si nous posons pour $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$x_i = \mu_i + 4\varkappa_i,$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $$y_i = \nu_i + 4\lambda_i,$$

et pour $i = 1, 2, \ldots, r$, $$z_i = \varrho_i + 4\sigma_i,$$

où μ_i, ν_i et ϱ_i sont des entiers tels que $0 \leqslant \mu_i \leqslant 3$, $0 \leqslant \nu_i \leqslant 3$, $0 \leqslant \varrho_i \leqslant 3$, et si nous posons ensuite

$$A_1 = A \cdot M_1^{\mu_1} M_2^{\mu_2} \ldots M_m^{\mu_m},$$

$$B_1 = B \cdot N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} \ldots N_n^{\nu_n},$$

$$C_1 = C \cdot R_1^{\varrho_1} R_2^{\varrho_2} \ldots R_r^{\varrho_r},$$

$$X = M_1^{\varkappa_1} M_2^{\varkappa_2} \ldots M_m^{\varkappa_m},$$

$$Y = N_1^{\lambda_1} N_2^{\lambda_2} \ldots N_n^{\lambda_n},$$

$$Z = R_1^{\sigma_1} R_2^{\sigma_2} \ldots R_r^{\sigma_r},$$

l'équation (7) sera remplacée par 4^{m+n+r} équations de la forme

$$A_1 X^4 - B_1 Y^4 = C_1 Z^4. \tag{8}$$

Pour des A_1, B_1 et C_1 donnés l'équation (8) représente une quartique aux coordonnées homogènes X, Y, Z, de genre 3. D'après une hypothèse de Siegel les courbes algébriques de genre $\geqslant 2$ n'admettent qu'un nombre fini de points rationnels. Alors il est vraisemblable que l'équation (8) n'admette qu'un nombre limité de solutions en nombres entiers X, Y, Z, premiers entre eux. En tout cas, on ne connait aucune équation de ce type admettant une infinité de solutions.

4. Considérons ensuite le cas spécial

$$a^x = b^y + c^z, \tag{9}$$

où a, b et c sont des entiers positifs donnés. Il y a une infinité d'équations de ce type qui sont résolubles. En effet, si on prend $a = b + c$, l'équation (9) aura la solution $x = y = z = 1$.

D'autre part il est facile d'indiquer des équations du type (9) qui n'admettent aucune solution. Ainsi l'équation

$$7^x = p^y + 2^z$$

est impossible quand p est un nombre premier $\equiv 1$, 2 ou 4 (mod. 7). En effet, on a

$$\left(\frac{-1}{7}\right) = \left(\frac{-2}{7}\right) = \left(\frac{-p}{7}\right) = \left(\frac{-2p}{7}\right) = -1.$$

Examinons en outre l'équation

$$2^x = p^y + q^z, \tag{10}$$

où p et q sont des nombres premiers impairs. Pour $x=1$ on aura $y=z=0$. Pour $x=2$ on aura $p=3$, $y=1$ et $z=0$. Quand $x \geqslant 3$, il faut évidemment qu'on ait ou $p \equiv -1 \pmod{8}$ ou $q \equiv -1 \pmod{8}$ ou $p+q \equiv 0 \pmod{8}$. Ainsi on peut conclure : Si $p \equiv q \pmod{8}$ et si $p \equiv 1, 3$ ou $5 \pmod{8}$, l'équation (10) n'admet aucune solution autre que $x=1$, $y=z=0$ et $x=2$, $p=3$, $y=1$, $z=0$.

Ces exemples montrent qu'on peut parfois obtenir la solution complète de l'équation (9) en la considérant comme une congruence pour de modules convenables.

Une méthode plus générale et plus effective pour traiter l'équation (9) est là suivante. Adjoignons le nombre $\sqrt{-1}$ (quand y et z sont tous les deux pairs), le nombre $\sqrt{-bc}$ (quand y et z sont tous les deux impairs), le nombre $\sqrt{-c}$ (quand y est pair et z impair) ou le nombre $\sqrt{-b}$ (quand y est impair et z pair). Alors le terme à droite de (9) sera le produit de deux nombres entiers du corps quadratique imaginaire correspondant, et on peut procéder d'une manière connue.

Dans la suite nous allons examiner tous les cas dans lesquels a, b et c sont des nombres premiers $\leqslant 7$. Nous aurons alors à traiter les neuf cas suivants : $a=5$, $b=3$, $c=2$; $a=3$, $b=5$, $c=2$; $a=2$, $b=5$, $c=3$; $a=7$, $b=3$, $c=2$; $a=3$, $b=7$, $c=2$; $a=2$, $b=7$, $c=3$; $a=7$, $b=5$, $c=2$; $a=5$, $b=7$, $c=2$; $a=2$, $b=7$, $c=5$.

§ 3

5. Dans le cas $a=5$, $b=3$, $c=2$ l'equation sera

$$5^x = 3^y + 2^z. \tag{11}$$

Soit d'abord $z=1$. Alors une solution est $x=y=1$. Nous pouvons supposer que $x>1$ et $y>1$. En prenant l'équation

$$5^x = 3^y + 2 \tag{12}$$

modulo 8, on voit que x et y doivent être impairs. Cette équation peut s'écrire

$$5\,(5^{x-1}-1) = 3\,(3^{y-1}-1). \tag{13}$$

Il en résulte que $y \equiv 1 \pmod{4}$. Alors le terme à droite est divisible par 16, donc $x \equiv 1 \pmod{4}$. Ainsi le terme à gauche est divisible par $5^2+1=26$. Donc le terme à droite est divisible par 13. Cela entraine que $y \equiv 1 \pmod{6}$ et le terme à droite est alors divisible par $3^3+1=28$ et ainsi par 7. Alors il résulte de (13) que $x-1$ est divisible par 6. Donc $5^{x-1}-1$ serait divisible par 9, ce qui est en contradiction avec (13).

Soit ensuite $z=2$. Alors une solution est $x=1$, $y=0$. Soit $y>0$. En prenant l'équation

$$5^x = 3^y + 4 \tag{14}$$

modulo 3, on voit que x doit être pair. Alors on conclut de (14) qu'on doit avoir

$$5^{\frac{1}{2}x} - 2 = 1 \quad \text{et} \quad 5^{\frac{1}{2}x} + 2 = 3^y,$$

ce qui est impossible.

Soit enfin $z \geqslant 3$. En prenant l'équation (11) modulo 8, on voit que x et y doivent être pairs. Donc on aura évidemment

$$5^{\frac{1}{2}x} - 3^{\frac{1}{2}y} = 2, \qquad 5^{\frac{1}{2}x} + 3^{\frac{1}{2}y} = 2^{z-1}.$$

Or, nous avons déjà montré que la première de ces équations n'admet pas d'autres solutions que $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y = 1$.

Nous avons ainsi demontré le

Théorème 2. *La solution complète de l'équation* (11) *est donnée par* $x = y = z = 1$; $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$; $x = y = 2$, $z = 4$.

6. Dans le cas $a = 3$, $b = 5$, $c = 2$ l'équation sera

$$3^x = 5^y + 2^z. \tag{15}$$

Soit d'abord $z = 1$. Si $x = 1$ on aura $y = 0$. Si $x = 3$ on aura $y = 2$. Si on considère l'équation

$$3^x = 5^y + 2 \tag{16}$$

modulo 3 on voit que y doit être pair. Employant le module 5 on voit que x doit être impair. Si on pose

$$U = 5^{\frac{1}{2}y} \quad \text{et} \quad V = 3^{\frac{1}{2}(x-1)},$$

l'équation (16) peut s'écrire

$$U^2 - 3V^2 = -2.$$

D'après un théorème de Mahler (voir [4], Theorem 16) cette équation est satisfaite seulement par les valeurs $U = V = 1$ et $U = 5$, $V = 3$, vu que V est une puissance de 3. Nous aurons donc les solutions $y = 0$, $x = 1$ et $y = 2$, $x = 3$.

Soit ensuite $z = 2$. Alors on voit que x doit être pair. Donc l'équation peut s'écrire

$$(3^{\frac{1}{2}x} - 2)(3^{\frac{1}{2}x} + 2) = 5^y,$$

d'où

$$3^{\frac{1}{2}x} - 2 = 1,$$

c'est-à-dire $x = 2$ et $y = 1$.

Soit enfin $z \geqslant 3$. Dans ce cas on voit que les nombres x et y doivent être tous les deux pairs. Donc on conclut de (15) que

$$3^{\frac{1}{2}x} - 5^{\frac{1}{2}y} = 2, \quad 3^{\frac{1}{2}x} + 5^{\frac{1}{2}y} = 2^{z-1}.$$

Or, nous venons de montrer que la première de ces équations n'admet que les solutions suivantes: $x = 2$, $y = 0$ ce qui entraine que $z = 3$; $x = 6$, $y = 4$ ce qui ne donne aucune solution de (15).

En résumant les résultats nous aurons

Théorème 3. *La solution complète de l'équation* (15) *est donnée par* $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$; $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$; $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$; $x = 2$, $y = 0$, $z = 3$.

7. Dans le cas $a = 2$, $b = 5$, $c = 3$ l'équation sera

$$2^x = 5^y + 3^z. \tag{17}$$

Quand $x = 1$ on aura $y = z = 0$. Pour $x = 2$ on aura $y = 0$, $z = 1$ et pour $x = 3$ il faut que $y = z = 1$. Quand $x \geqslant 3$ on voit aisément que y et z doivent être impairs. Si on pose

$$y = 2c + 1, \quad z = 2b - 1,$$

l'équation (17) peut s'écrire

$$3 \cdot 2^x = 3^{2b} + 15 \cdot 5^{2c}. \tag{18}$$

Dans le corps quadratique engendré par $\sqrt{-15}$ une base est donnée par $1, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-15})$, et le nombre des classes d'idéaux est égal à 2. L'idéal (2) est le produit de deux idéaux premiers différents

$$\mathfrak{p}_2 = \left(2, \frac{1+\sqrt{-15}}{2}\right), \quad \mathfrak{p}_2' = \left(2, \frac{1-\sqrt{-15}}{2}\right),$$

et l'on a

$$(2) = \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_2',$$

$$\mathfrak{p}_2^2 = \left(\frac{1+\sqrt{-15}}{2}\right).$$

L'idéal (3) est le carré d'un idéal premier

$$(3) = (3, \sqrt{-15})^2 = \mathfrak{p}_3^2 = \mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}_3'.$$

Nous avons de plus $\mathfrak{p}_2 \not\sim (1)$, $\mathfrak{p}_3 \not\sim (1)$ et

$$\mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 = \left(\frac{-3+\sqrt{-15}}{2}\right), \qquad \mathfrak{p}_2' \mathfrak{p}_3 = \left(\frac{-3-\sqrt{-15}}{2}\right).$$

Il résulte de (18) que

$$\left(\frac{3^b \pm 5^c \sqrt{-15}}{2}\right) = \mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}_2^{x-2}, \tag{19}$$

où le signe n'est pas determiné. En se rappelant que $\mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \sim (1)$, que $\mathfrak{p}_2 \not\sim (1)$ et que le nombre des classes d'idéaux est égal à 2, on en conclut que *x est impair*. En prenant le carré on tire de (19)

$$\left(\frac{3^{2b} - 15 \cdot 5^{2c} \pm 2 \cdot 3^b 5^c \sqrt{-15}}{4}\right) = \mathfrak{p}_3^2 \mathfrak{p}_2^{2x-4} = (3) \left(\frac{1+\sqrt{-15}}{2}\right)^{x-2}. \tag{20}$$

Posons pour tous les n entiers positifs

$$(1 + \sqrt{-15})^n = A_n + B_n \sqrt{-15},$$

où A_n et B_n sont des nombres entiers rationnels,

$$A_n = \sum_{k=0} (-1)^k \binom{n}{2k} 15^k,$$

$$B_n = \sum_{k=1} (-1)^{k-1} \binom{n}{2k-1} 15^{k-1}.$$

Supposons que $n = pm$, où p et m sont des entiers positifs. Alors on a

$$A_n + B_n \sqrt{-15} = (A_p + B_p \sqrt{-15})^m.$$

Si n est impair on en déduit aisément que A_n *est divisible par* A_p *et que* B_n *est divisible par* B_p.

Si nous posons $x - 2 = n$, nous aurons de (20)

$$\pm(2^{n-2} \cdot 3^{2b-1} - 2^{n-2} \cdot 5^{2c+1}) = A_n = 1 - \binom{n}{2} 15 + \binom{n}{4} 15^2 - + \cdots \pm \binom{n}{n-1} 15^{\frac{1}{2}(n-1)}, \tag{21}$$

$$\pm 2^{n-1} \cdot 3^{b-1} 5^c = B_n = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} 15 + - \cdots \pm \binom{n}{n} 15^{\frac{1}{2}(n-1)}. \tag{22}$$

Supposons d'abord que $c > 0$ et $b > 1$. Alors il résulte de (22) que n est divisible par 15. Donc B_n doit être divisible par B_{15}. Nous avons

$$2\sqrt{-15}\, B_{15} = (1 + \sqrt{-15})^{15} - (1 - \sqrt{-15})^{15}.$$

En posant $\mathfrak{p} = (4 + \sqrt{-15})$ on a $\mathfrak{p}\mathfrak{p}' = (31)$ et

$$1 + \sqrt{-15} \equiv -3 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Donc

$$2\sqrt{-15}\,(1 + \sqrt{-15})^{15} B_{15} = (1 + \sqrt{-15})^{30} - 16^{15} \equiv 3^{30} - 4^{30} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Ainsi B_{15} est divisible par 31. Mais on voit de (22) que B_n n'est pas divisible par 31.

Quand $c = 0$ et $b = 1$ on aura la solution $x = 3$, $y = z = 1$.

Supposons ensuite que $b = 1$. Alors l'équation sera

$$2^x = 5^y + 3. \tag{23}$$

Une solution est donnée par $x = 3$, $y = 1$. Une autre solution est $x = 7$, $y = 3$. Nous pouvons alors supposer que $x > 7$ et $y > 3$. x est impair. Il résulte de (23) que y doit être impair. L'équation (23) peut s'écrire

$$2^7 (2^{x-7} - 1) = 5^3 (5^{y-3} - 1). \tag{24}$$

Il en résulte que $\qquad y - 3 \equiv 0 \pmod{2^5};$

donc $\qquad y \equiv 3 \pmod 4.$

Le terme à droite dans (24) est alors divisible par $\frac{1}{2}(5^2 + 1) = 13$. On en conclut que

$$x - 7 \equiv 0 \pmod 3.$$

Le terme à gauche dans (24) est alors divisible par $2^3 - 1 = 7$. On en conclut que

$$y - 3 \equiv 0 \pmod 3.$$

Par conséquent, si nous posons

$$x = 1 + 3\alpha, \qquad y = 3\beta$$

et

$$u = 2^{\alpha}, \qquad v = 5^{\beta},$$

nous aurons

$$2u^3 - v^3 = 3.$$

Or, nous avons montré ailleurs (voir [2], Théorème 2) que cette équation n'admet pas d'autres solutions que $u = 1$, $v = -1$; $u = 4$, $v = 5$. Les dernières valeurs donnent la solution de (23) $x = 7$, $y = 3$.

Il reste à examiner le cas de $c = 0$ et $b > 1$ $(z \geqslant 3)$, c'est-à-dire l'équation

$$2^x = 5 + 3^z. \tag{25}$$

Une solution est donnée par $x = 5$, $z = 3$. Les exposants x et z sont impairs. Nous pouvons alors supposer que $x \geqslant 7$ et $z \geqslant 5$. Il résulte de (22) que n est divisible par 3. Donc $x = n + 2 \equiv 2 \pmod{3}$. L'équation (25) peut s'écrire

$$2^5(2^{x-5} - 1) = 3^3(3^{z-3} - 1).$$

Puisque $x - 5$ est divisible par 3, le terme à gauche est divisible par $2^3 - 1 = 7$. Alors on voit que $z - 3$ est divisible par 6 et par conséquent z par 3. Donc, si nous

posons

$$x = 2 + 3\alpha, \qquad z = 3\beta$$

et

$$u = 2^{\alpha}, \qquad v = 3^{\beta},$$

nous aurons

$$4u^3 - v^3 = 5. \tag{26}$$

Dans le corps cubique engendré par le nombre $\theta = \sqrt[3]{2}$ l'unité fondamentale est $\theta - 1$ (celle qui est située entre 0 et 1), et puis la norme de $\theta^2 + 1$ est égale à 5. Alors il résulte de (26) que

$$u\theta^2 - v = (\theta^2 + 1)(\theta - 1)^N. \tag{27}$$

Ici N est positif vu que

$$0 < \frac{u\theta^2 - v}{\theta^2 + 1} < 1.$$

On aura de (27)

$$0 = -\binom{N}{1} + \binom{N}{4}2 - \binom{N}{7}2^2 + \cdots + 2\left[\binom{N}{2} - \binom{N}{5}2 + \binom{N}{8}2^2 - \cdots\right] \tag{28}$$

et

$$(-1)^N 2^{\alpha} = 1 - \binom{N}{3}2 + \binom{N}{6}2^2 - \cdots + \binom{N}{2} - \binom{N}{5}2 + \binom{N}{8}2^2 - \cdots. \tag{29}$$

Il résulte de (29) que $\binom{N}{2}$ est impair et de (28) que N est pair. Donc $N \equiv 2 \pmod{4}$ et nous aurons de (28) modulo 4 :

$$0 \equiv -2 + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{3 \cdot 4} + N(N-1)$$

$$\equiv -2 + \tfrac{1}{2}(N-2) + 2 \pmod{4},$$

c'est-à-dire

$$N \equiv 2 \pmod{8}.$$

Donc on aura de (29) modulo 4 :

$$(-1)^N 2^\alpha \equiv 1 - \tfrac{1}{3} N(N-1)(N-2) + \tfrac{1}{2} N(N-1) - \frac{N(N-1)(N-2))N-3)(N-4)}{3 \cdot 4 \cdot 5} \pmod{4}$$

d'où

$$(-1)^N 2^\alpha \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{4}.$$

Or, cela est impossible puisque $\alpha \geqslant 3$.

Ainsi nous avons établi le

Théorème 4. *La solution complète de l'équation* (17) *est donnée par* $x = 1$, $y = z = 0$; $x = 2$, $y = 0$, $z = 1$; $x = 3$, $y = z = 1$; $x = 5$, $y = 1$, $z = 3$; $x = 7$, $y = 3$, $z = 1$.

8. Dans le cas $a = 7$, $b = 3$, $c = 2$ l'équation sera

$$7^x = 3^y + 2^z. \tag{30}$$

En considérant cette équation modulo 8 on voit qu'elle est impossible pour $z = 1$.

Quand $z = 2$ on voit que x et y doivent être impairs tous les deux. Dans ce cas une solution est $x = y = 1$. L'équation peut s'écrire

$$7(7^{x-1} - 1) = 3(3^{y-1} - 1).$$

Pour que le terme à droite soit divisible par 7 il faut que $y - 1$ soit divisible par 3. Alors ce terme est divisible par $\frac{1}{2}(3^3 - 1) = 13$. Il faut donc que $x - 1$ soit divisible par 3. Alors le terme à gauche serait divisible par 9, ce qui est impossible.

Soit ensuit $z \geqslant 3$. Alors on voit aisément que x et y doivent être pairs tous les deux. Donc, si $x = 2u$, $y = 2v$, nous aurons de (30)

$$7^u + 3^v = 2^{z-1}, \qquad 7^u - 3^v = 2.$$

Or, nous venons de montrer que la dernière de ces équations est impossible. Ainsi nous avons le

Théorème 5. *L'équation* (30) *n'a pas d'autres solutions que* $x = y = 1$, $z = 2$.

9. Dans le cas $a = 3$, $b = 7$, $c = 2$ l'équation sera

$$3^x = 7^y + 2^z. \tag{31}$$

Soit d'abord $z = 1$. En prenant le module 8 on voit que si x est pair, y doit être impair, et si x est impair, y doit être pair. Dans le dernier cas (31) peut s'écrire

$$(7^{\frac{1}{2}y})^2 - 3\,(3^{\frac{1}{2}(x-1)})^2 = -2 \tag{32}$$

et dans le premier cas

$$(3^{\frac{1}{2}x})^2 - 7\,(7^{\frac{1}{2}(y-1)})^2 = 2. \tag{33}$$

D'après un théorème de Mahler (voir [4] Theorem 16) les équations (32) et (33) n'admettent aucune autre solution que $x=1$, $y=0$ (l'équation (32)) et $x=2$, $y=1$ (l'équation (33)).

Quand $z=2$, on voit, en regardant l'équation modulo 8, que x et y doivent être impairs tous les deux. Or, cela est impossible puisque 3 est un non-reste quadratique modulo 7.

Soit enfin $z \geqslant 3$. Alors on aura

$$3^x \equiv (-1)^y \pmod{8},$$

c'est-à-dire x et y doivent être pairs tous les deux. En posant $x=2u$, $y=2v$ on conclut de (31) que

$$3^u - 7^v = 2, \quad 3^u + 7^v = 2^{z-1}.$$

Or, nous venons de montrer que la première de ces équations admet les deux solutions $u=2$, $v=1$ et $u=1$, $v=0$. De la seconde équation on aura alors $z=5$ et $z=3$. Cela correspond aux valeurs suivantes : $x=4$, $y=2$ et $x=2$, $y=0$.

En résumant nous avons le résultat :

Théorème 6. *L'équation* (31) *n'admet pas d'autres solutions que les suivantes* : $x=1$, $y=0$, $z=1$; $x=2$, $y=1$, $z=1$; $x=2$, $y=0$, $z=3$; $x=4$, $y=2$, $z=5$.

10. Dans le cas $a=2$, $b=7$, $c=3$, l'équation sera

$$2^x = 7^y + 3^z. \tag{34}$$

Si $x=1$, on aura $y=z=0$. Pour $x=2$ on aura $y=0$, $z=1$. Pour $x=3$ on aura $y=1$, $z=0$.

Soit enfin $x>3$. Alors il resulte de (34) que

$$-3^z \equiv (-1)^y \text{ mod. } 8).$$

Donc y est impair et z pair. On ne peut pas avoir $z=0$, puisque 7^y n'est jamais $\equiv -1 \pmod{16}$. Donc $z \geqslant 2$. Alors on aura de (34)

$$2^x \equiv (-2)^y \pmod{9}.$$

On en conclut que x est pair. En posant $x=2u$ et $z=2v$ on déduit de (34) que

$$2^u - 3^v = 1, \quad 2^u + 3^v = 7^y.$$

Or, nous venons de montrer que la première de ces équations n'admet aucune autre solution que $u=1$, $v=0$ et $u=2$, $v=1$. Seulement les dernières valeurs de u et v sont compatibles avec la deuxième équation qui donne alors $y=1$. Nous aurons donc la solution $x=4$, $y=1$, $z=2$ de (34).

Nous avons ainsi le résultat suivant :

Théorème 7. *L'équation* (34) *n'admet pas d'autres solutions que les suivantes* : $x=1$, $y=z=0$; $x=2$, $y=0$, $z=1$; $x=3$, $y=1$, $z=0$; $x=4$, $y=1$, $z=2$.

11. Dans le cas de $a=7$, $b=5$, $c=2$, l'équation sera

$$7^x = 5^y + 2^z. \tag{35}$$

Quand $z=1$ on aura $$(-1)^x \equiv 5^y + 2 \pmod{8},$$

d'où suit que x et y sont impairs. L'équation (35) peut s'écrire dans ce cas

$$7(7^{x-1}-1) = 5(5^{y-1}-1),$$

d'où l'on conclut que $x \equiv 1 \pmod{4}$. Le terme à gauche est alors divisible par $\frac{1}{2}(7^2+1) = 25$. Or, cela est impossible si $y > 1$. Donc la seule solution dans ce cas est $x=y=1$.

Quand $z=2$ on aura

$$(-1)^x \equiv 5^y + 4 \pmod{8},$$

d'où suit que x est pair et y impair. En posant $x=2u$ on aura alors

$$7^u - 2 = 1, \qquad 7^u + 2 = 5^y,$$

ce qui est impossible.

Soit enfin $z \geqslant 3$. Dans ce cas on voit que x et y doivent être pairs tous les deux. En posant $x=2u$ et $y=2v$ on conclut de (35) que

$$7^u + 5^v = 2^{z-1}, \qquad 7^u - 5^v = 2.$$

D'après ce que nous venons de montrer tout à l'heure, la dernière équation admet la seule solution $u=v=1$, ce qui n'est pas compatible avec la première équation.

Donc nous avons le résultat suivant :

Théorème 8. *L'équation* (35) *n'admet qu'une seule solution* : $x=y=z=1$.

12. Dans le cas de $a=5$, $b=7$, $c=2$, l'équation sera

$$5^x = 7^y + 2^z. \tag{36}$$

Soit d'abord $z=1$. Alors l'équation est impossible puisque dans ce cas le terme à droite est toujours divisible par 3.

Soit ensuite $z=2$. Une solution est donnée par $x=1$, $y=0$. Quand $y>0$, il faut que x soit pair vu que 5 est un non-reste quadratique modulo 7. Alors on aura modulo 3 :

$$5^x \equiv 1 \equiv 7^y + 4 \equiv 5 \pmod{3}$$

ce qui est impossible.

Soit enfin $z \geqslant 3$. Dans ce cas on aura modulo 8

$$5^x \equiv (-1)^y \pmod{8}$$

d'où suit que x et y doivent être pairs tous les deux. On aura donc modulo 3

$$5^x \equiv 1 \equiv 7^y + 2^z \equiv 1 + (-1)^z \pmod{3},$$

ce qui est impossible.

En résumant nous avons ainsi le résultat :

Théorème 9. *L'équation* (36) *n'admet qu'une seule solution* : $x=1$, $y=0$, $z=2$.

13. Dans le cas de $a=2$, $b=7$, $c=5$, on aura l'équation

$$2^x = 7^y + 5^z. \tag{37}$$

Si $x=1$, on aura $y=z=0$. Si $x=2$, l'équation (37) est impossible. Si $x=3$, on aura $y=1$, $z=0$.

Soit enfin $x>3$. Modulo 8 on aura

$$0 \equiv (-1)^y + 5^z \pmod{8},$$

d'où l'on conclut que y est impair et z pair. Modulo 3 on aura alors

$$(-1)^x \equiv 1 + (-1)^z \equiv -1 \pmod{3}.$$

Donc x est impair. Nous posons $n=x-2$. Ici n est impair et $\geqslant 3$. Posons de plus $y=2b+1$ et $z=2a$. Alors l'équation (37) peut s'écrire

$$2^n = 2^{x-2} = \frac{5^{2a} + 7\cdot 7^{2b}}{4}. \tag{38}$$

Dans le corps quadratique engendré par $\sqrt{-7}$ le nombre des classes d'idéaux est égal à 1. On a

$$2 = \frac{1+\sqrt{-7}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{-7}}{2}.$$

Alors il résulte de (38) que

$$\frac{\pm 5^a \pm 7^b\sqrt{-7}}{2} = \left[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right]^n. \tag{39}$$

Posons maintenant $$(1+\sqrt{-7})^n = A_n + B_n\sqrt{-7},$$

où A_n et B_n sont des nombres entiers rationnels. Si n est impair, on a

$$A_n = 1 - \binom{n}{2}7 + \binom{n}{4}7^2 - + \cdots \pm \binom{n}{n-1}7^{\frac{1}{2}(n-1)},$$

et $$B_n = \binom{n}{1} - \binom{n}{3}7 + \binom{n}{5}7^2 - + \cdots \pm \binom{n}{n}7^{\frac{1}{2}(n-1)}.$$

Si on suppose que $n=mp$, où m et p sont des nombres entiers positifs, on aura

$$A_n = A_p^m - \binom{m}{2}A_p^{m-2}B_p^2\cdot 7 + \cdots \pm \binom{m}{m-1}A_p B_p^{m-1}\cdot 7^{\frac{1}{2}(m-1)}$$

et $$B_n = \binom{m}{1}A_p^{m-1}B_p - \binom{m}{3}A_p^{m-3}B_p^3\cdot 7 + \cdots \pm \binom{m}{m}B_p^m\cdot 7^{\frac{1}{2}(m-1)}.$$

On conclut de là que A_n est divisible par A_p et que B_n est divisible par B_p quand p est un diviseur de n.

Il suit de (39) que

$$\pm 2^{n-1}\cdot 5^a = A_n = 1 - \binom{n}{2} 7 + \binom{n}{4} 7^2 - + \cdots, \tag{40}$$

et

$$\pm 2^{n-1}\cdot 7^b = B_n = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} 7 + \binom{n}{5} 7^2 - + \cdots. \tag{41}$$

Supposons d'abord que $b > 0$. Alors il résulte de (41) que n est divisible par 7. Donc A_n est divisible par A_7. Nous avons

$$A_7 = 1 - \binom{7}{2} 7 + \binom{7}{4} 7^2 - \binom{7}{6} 7^3 = -832 = -2^6 \cdot 13.$$

Or, le terme à gauche dans (40) n'est pas divisible par 13. Donc on n'aura aucune solution dans ce cas.

Soit ensuite $b = 0$, c.-à-d. $y = 1$. Si $a = 0$, on a $z = 0$; cela correspond à une solution avec $x = 3$. Si $a = 1$ on a $z = 2$, ce qui correspond à une solution avec $x = 5$. Supposons enfin $a \geqslant 2$. Alors il résulte de (40) que

$$2A_n = (1+\sqrt{-7})^n + (1-\sqrt{-7})^n$$

est divisible par 25. On vérifie aisément que n doit être divisible par 15 quand on a

$$(1+\sqrt{-7})^n \equiv -(1-\sqrt{-7})^n \pmod{25}.$$

Alors A_n est divisible par A_5. On a

$$A_5 = 1 - \binom{5}{2} 7 + \binom{5}{4} 7^2 = 176 = 2^4 \cdot 11.$$

Or, le terme à gauche dans (40) n'est pas divisible par 11.

Donc nous avons le résultat suivant :

Théorème 10. *L'équation* (37) *n'admet que les solutions suivantes*: $x = 1$, $y = z = 0$; $x = 3$, $y = 1$, $z = 0$; $x = 5$, $y = 1$, $z = 2$.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

1. T. Nagell, Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativer Diskriminante. Mathematische Zeitschrift, Bd. *28*, 1928.
2. T. Nagell, Solution complète de quelques équations cubiques à deux indéterminées. Journal de Mathématiques, tome *IV*, 1925.
3. C. Störmer, Quelques théorèmes sur l'équation de Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ et leurs applications. Videnskapsselskabets Skrifter, I. Matem-naturv. klasse, No. 2, Kristiania 1897.
4. T. Nagell, Contributions to the theory of a category of diophantine equations of the second degree with two unknowns. Nova Acta Reg. Soc. Scient. Upsaliensis, Ser. IV, Vol. *16*, No. 2, Uppsala 1955.

T. NAGELL, *Sur une classe d'équations exponentielles*

Errata à ce travail :

Page 27 à gauche, ligne 4 d'en bas doit être remplacée par

$$(2 + x\sqrt{-2A})^2 = (2)\,(c + d\sqrt{-2A})^{q^{\alpha-\beta}}$$

Page 28 à gauche, dans ligne 7 il faut lire $K(\sqrt{-A})$.
Page 29 à gauche, dans ligne 4 il faut remplacer $2z^2$ par $2z^3$.
Page 29 à gauche, dernière ligne, lire : x and y.
Page 29 à droite, ligne 10, lire : $0 \leqslant \beta < \alpha$.
Page 33 à gauche, ligne 9, lire : $Ax^3 - C$.
Page 33 à gauche, ligne 16, remplacer $\frac{3}{2}$ par $\frac{4}{3}$.
Page 33 à gauche, ligne 24, remplacer $U_n\sqrt{D}$ par $U_n + V_n\sqrt{D}$.

Tryckt den 27 november 1958

Uppsala 1958. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB