Communiqué le 10 Septembre 1958 par T. Nagell

Sur l'approximation diophantienne des formes linéaires

Par Nikola Obrechkoff

On doit à Dirichlet le théorème classique suivant :

Désignons par $t \geqslant 1$ un nombre réel et par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\varkappa$ $\varkappa$ nombres réels arbitraires. Alors il existe $\varkappa$ nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$, non tous nuls, tels que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} &|\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_\varkappa x_\varkappa - y| < \frac{1}{t_\varkappa}, \\ &|x_\mu| \leqslant t, \quad \mu = 1, 2, \ldots, \varkappa \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

où y est un nombre entier convenable.

Dans [1] on a toujours le signe d'inégalité. Dans ce travail nous démontrons une inégalité précise et générale.

1. *Considérons la forme linéaire*

$$f = \sum_{\mu=1}^{n_1} a_{1\mu} x_\mu^{(1)} + \sum_{\mu=1}^{n_2} a_{2\mu} x_\mu^{(2)} + \cdots + \sum_{\mu=1}^{n_p} a_{p\mu} x_\mu^{(p)},$$

où $a_{1\mu}, a_{2\mu}, \ldots, a_{p\mu}$ sont des nombres réels arbitraires et $n_1, n_2, \ldots, n_p$ sont des nombres entiers et positifs. Soit encore $m_1, m_2, \ldots, m_p$ des nombres entiers et positifs. Alors il existe des nombres entiers $x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \ldots, x_{n_\nu}^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, non tous nuls, les nombres de chaque groupe $x_\mu^{(\nu)}$, $1 \leqslant \mu \leqslant n_\nu$, étant du même signe (c'est-à-dire non négatifs ou non positifs) et tels que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} &|f - y| \leqslant \frac{1}{\mu}, \qquad M = (n_1 m_1 + 1)(n_2 m_2 + 1) \ldots (n_p m_p + 1), \\ &|x_\mu^{(\nu)}| \leqslant m_\nu, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant n_\nu, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant p. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

L'égalité dans (2) *est atteinte.*

Dans la démonstration nous appliquons le principe de Dirichlet sous la forme suivante : Supposons que les nombres réels

$$0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 1,$$

sont rangés par ordre de la valeur non décroissante. Alors ils existent au moins deux nombres voisins, dont la différence est plus petite que $1/(n+1)$, ou tous ces nombres sont les nombres suivants

$$0, \frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \ldots, \frac{n}{n+1}, 1.$$

En effet la somme des nombres $\alpha_1, \alpha_2-\alpha_1, \alpha_3-\alpha_2, \ldots, \alpha_n-\alpha_{n-1}, 1-\alpha_n$ est égale à 1. Donc un au moins de ces nombres sera plus petit que $1/(n+1)$, ou tous ces nombres seront égaux à $1/(n+1)$.

Donnons maintenant aux variables $x_\mu^{(\nu)}$, $1 \leqslant \mu \leqslant n_\nu$, $(\nu=1,2,\ldots,p)$ les systèmes des valeurs correspondantes, $(\nu=1,2,\ldots,p)$,

$$\left.\begin{array}{cccccc}
x_1^{(\nu)} & x_2^{(\nu)} & \cdots & x_{n_\nu-2}^{(\nu)} & x_{n_\nu-1}^{(\nu)} & x_{n_\nu}^{(\nu)} \\
m_\nu & m_\nu & \cdots & m_\nu & m_\nu & m_\nu \\
m_\nu & m_\nu & \cdots & m_\nu & m_\nu & m_{\nu-1} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
m_\nu & m_\nu & \cdots & m_\nu & m_\nu & 0 \\
m_\nu & m_\nu & \cdots & m_\nu & m_{\nu-1} & 0 \\
m_\nu & m_\nu & \cdots & m_\nu & m_{\nu-2} & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
m_\nu & m_\nu & \cdots & m_\nu & 0 & 0 \\
m_\nu & m_\nu & \cdots & m_{\nu-1} & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right\} \tag{3}$$

Le nombre de ces systèmes sera égal à $(n_1 m_1+1)(n_2 m_2+1)\cdots(n_p m_p+1)=M$. Désignons ces systèmes simplement par $y_1^{(s)}, y_2^{(s)}, \ldots, y_N^{(s)}$ où $N=n_1+n_2+\cdots+n_p$, $1 \leqslant s \leqslant M$. Les valeurs correspondantes de la forme f seront

$$f^{(s)}=a_1 y_1^{(s)}+a_2 y_2^{(s)}+\cdots+a_N y_N^{(s)}.$$

Désignons comme d'habitude par $[x]$ le plus grand nombre entier qui ne surpasse pas le nombre réel x et par $\{x\}$ la différence $x-[x]$. Considérons les nombres $1, \{f^{(s)}\}, s=1,2,\ldots,\mu$. Il y aura au moins une différence

$$\{f^{(\alpha)}\}-\{f^{(\beta)}\}=f^{(\alpha)}-f^{(\beta)}-y,$$

(y un nombre entier) dont la valeur absolue ne surpasse pas $1/M$, ou le nombre $1-\{f^{(\sigma)}\}$, $\{f^{(\sigma)}\}=\max(\{f^{(1)}\},\{f^{(2)}\},\ldots,\{f^{(\mu)}\})$, sera au plus égal à $1/M$. Désignons par $x_\mu'^{(\nu)}$, $1 \leqslant \mu \leqslant n_\nu$ $(1 \leqslant \nu \leqslant p)$, les valeurs des variables dans $f^{(\alpha)}$ et par $x_\mu''^{(\nu)}$, $1 \leqslant \mu \leqslant n_\nu$ $(1 \leqslant \nu \leqslant p)$ les valeurs correspondantes dans $f^{(\beta)}$, c'est-à-dire

$$f^{(\alpha)}=\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{n_\nu} a_{\nu\mu} x_\mu'^{(\nu)}, \qquad f^{(\beta)}=\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{n_\nu} a_{\nu\mu} x_\mu''^{(\nu)}.$$

On aura alors
$$f^{(\alpha)}-f^{(\beta)}=\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\mu-1}^{n_\nu} a_{\nu\mu}(x_\mu'^{(\nu)}-x_\mu''^{(\nu)})$$

et les nombres $x_\mu'^{(\nu)}-x_\mu''^{(\nu)}$, $1 \leqslant \mu \leqslant n_\nu$ de chaque groupe sont du même signe. Le cas où $1-\{f^{(\sigma)}\} \leqslant 1/M$ se traite de la même manière.

Nous démontrerons maintenant que dans (2) le signe d'égalité est atteint. Pour cela considérons la forme suivante

$$f=\frac{y_1}{\lambda_1}+\frac{y_2}{\lambda_1\lambda_2}+\cdots+\frac{y_p}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p}, \tag{4}$$

où $y_\nu=\sum_{\mu=1}^{n_\nu}x_\mu^{(\nu)}$, $1\leqslant\nu\leqslant p$ et $\lambda_\nu=n_\nu m_\nu+1$, $1\leqslant\nu\leqslant p$. Montrons que la forme

$$S=Mf=\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_p y_1+\lambda_3\lambda_4\ldots\lambda_p y_2+\cdots+\lambda_p y_{p-1}+y_p$$

prend les valeurs $0,1,2,\ldots,M-1$, lorsque les variables $x_\mu^{(\nu)}$ prennent les valeurs (3). En effet la plus grande valeur de φ est égale à

$$\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_p(\lambda_1-1)+\lambda_3\lambda_4\ldots\lambda_p(\lambda_2-1)+\cdots+\lambda_p(\lambda_{p-1}-1)+\lambda_p=M-1$$

et la plus petite est égale à zéro. D'autre part les valeurs de la forme sont différentes. Supposons au contraire que

$$\begin{aligned}\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_p y_1'+\lambda_3\lambda_4\ldots\lambda_p y_2'+\cdots+\lambda_p y_{p-1}'+y_p'&\\ =\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_p y_1''+\lambda_3\lambda_4\ldots\lambda_p y_2''+\cdots+\lambda_p y_{p-1}''+y_p''.&\end{aligned} \tag{5}$$

On aura
$$y_p'\equiv y_p''\ (\mathrm{mod}\ \lambda_p)$$

d'où il découle que $y_p'=y_p''$, puisque $|y_p'-y_p''|<\lambda_p$. L'égalité (5) prend la forme

$$\begin{aligned}\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{p-1}y_1'+\lambda_3\lambda_4\ldots\lambda_{p-1}y_2'+\cdots+y_{p-1}'&\\ =\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{p-1}y_1''+\lambda_3\lambda_4\ldots\lambda_{p-1}y_2''+\cdots+y_{p-1}'',&\end{aligned}$$

d'où il suit que
$$y_{p-1}'\equiv y_{p-1}''\ (\mathrm{mod}\ \lambda_{p-1}).$$

De cette congruence on obtient $y_{p-1}'=y_{p-1}''$ etc. Donc la forme (4) prend les valeurs

$$0,\frac{1}{M},\frac{2}{M},\ldots,\frac{M-2}{M}=1-\frac{2}{M},\frac{M-1}{M}=1-\frac{1}{M}.$$

Il est evident alors que pour cette forme dans (2) on aura le signe d'égalité.

Dans des cas particuliers du théorème 1 on obtient :

2. *Soient $n_1,n_2,\ldots,n_\varkappa$ des nombres positifs et entiers et désignons par $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_\varkappa$ des nombres réels arbitraires. Alors il existe des nombres entiers $x_1,x_2,\ldots,x_\varkappa$ non tous égaux à zéro et un nombre entier y tels que l'on ait*

$$\left.\begin{aligned}|\omega_1x_1+\omega_2x_2+\cdots+\omega_\varkappa x_\varkappa-y|\leqslant\frac{1}{(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_\varkappa+1)},\\ |x_1|\leqslant n_1,\ |x_2|\leqslant n_2,\ \ldots,\ |x_\varkappa|\leqslant n_\varkappa,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Dans (6) l'égalité est atteinte.

3. *Soient $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\varkappa$ des nombres entiers et positifs et soient $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_\varkappa$ des nombres réels arbitraires. Alors ils existent $\varkappa$ nombres entiers x_p non négatifs et un nombre entier y pour lesquels on a*

$$\left.\begin{array}{c} |\omega_1 x_1 + \omega_2 \omega_2 + \cdots + \omega_\varkappa x_\varkappa - y| \leqslant \dfrac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\varkappa + 1}, \\ 0 \leqslant x_p \leqslant \lambda_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \varkappa, \quad \sum_{p=1}^{\varkappa} x_p > 0. \end{array}\right\} \tag{7}$$

L'égalité dans (7) *est atteinte.*

On doit à A. Thue le théorème remarquable :

Soient a et b des nombres entiers et m un nombre entier positif. Alors la congruence

$$a x + b y \equiv 0 \pmod m \tag{8}$$

a toujours des solutions en nombres entiers x et y, qui ne sont pas en même temps égaux à zéros et pour lesquels on a

$$|x| \leqslant \sqrt{m}, \qquad |y| \leqslant \sqrt{m}.$$

Une démonstration par le principe de Dirichlet de ce théorème a été donnée par M. Nagell [1], qui en même temps a étudié le nombre des solutions de (8) lorsque m est un nombre premier. Le même théorème a été géneralisé pour plusieurs variables :

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_\varkappa$ des nombres entiers et m un nombre entier et positif. Alors la congruence

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_\varkappa x_\varkappa \equiv 0 \pmod m$$

a toujour des solutions en nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$, non tous égaux à zéro, qui satisfont aux conditions

$$|x_p| \leqslant \sqrt[\varkappa]{m}, \qquad p = 1, 2, \ldots, \varkappa.$$

Nous démontrerons que ces théorèmes découlent du théorème 2 et en même temps nous allons les généraliser.

4. *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_\varkappa$ des nombres entiers arbitraire et m un nombre entier et positif. Soient encore $n_1, n_1, \ldots, n_\varkappa$ des nombres entiers et positifs, pour lesquels on a*

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \ldots (n_\varkappa + 1) > m. \tag{9}$$

Alors la congruence

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_\varkappa x_\varkappa \equiv 0 \pmod m \tag{10}$$

a toujours des solutions en nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$ non tous égaux à zero, qui satisfont aux conditions

$$|x_1| \leqslant n_1, \; |x_2| \leqslant n_2, \; \ldots, \; |x_\varkappa| \leqslant n_\varkappa.$$

La condition (9) *ne peut pas être remplacée par la condition*

$$(n_1+1)(n_2+1)\dots(n_\varkappa+1)\leqslant m. \tag{11}$$

En effet d'après le théorème 2 il existe des nombres entiers $x_1, x_2, \dots, x_\varkappa$, non tous égaux à zéro pour lesquels on a

$$\left|\frac{a_1}{m}x_1+\frac{a_2}{m}x_2+\cdots+\frac{a_\varkappa}{m}x_\varkappa-y\right|\leqslant\frac{1}{(n_1+1)(n_2+1)\dots(n_\varkappa+1)}. \tag{12}$$

Ici y est un nombre entier convenable. De (9) et de (12) il découle

$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_\varkappa x_\varkappa-my|<1,$$

d'où il suit que $$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_\varkappa x_\varkappa=my,$$

puisque le nombre dans la partie gauche de (13) est entier.

Supposons maintenant que la congruence (10) a toujours des solutions en nombres entiers $x_1, x_2, \dots, x_\varkappa$, satisfaisants aux conditions $|x_p|\leqslant n_p$, $1\leqslant p\leqslant\varkappa$, $\sum_{p=1}|x_p|>0$, quels que soient les nombres entiers $a_1, a_2, \dots, a_\varkappa$, en supposant encore que pour les nombres $n_1, n_2, \dots, n_\varkappa$ on a l'inégalité (11). Alors la congruence

$$x_1+(n_1+1)x_2+(n_1+1)(n_2+1)x_3+\cdots+ \\ +(n_1+1)(n_2+1)\dots(n_{\varkappa-1}+1)x_\varkappa\equiv 0 \pmod m \tag{14}$$

aura des solutions en nombres entiers $x_1, x_2, \dots, x_\varkappa$, pour lesquels on a

$$|x_p|\leqslant n_p, \qquad 1\leqslant p\leqslant\varkappa, \qquad \sum_{p=1}^{\varkappa}|x_p|>0.$$

Alors la valeur absolue de la partie gauche dans (14) ne surpasse pas le nombre

$$n_1+(n_1+1)n_2+(n_1+1)(n_2+1)n_3+\cdots+(n_1+1)(n_2+1)\dots(n_{\varkappa-1}+1)n_\varkappa= \\ =(n_1+1)(n_2+1)\dots(n_\varkappa+1)-1\leqslant m-1,$$

c'est-à-dire sera plus petite que m. Donc on aura

$$x_1+(n_1+1)x_2+(n_1+1)(n_2+1)x_3+\cdots+(n_1+1)(n_2+1)\dots(n_{\varkappa-1}+1)x_\varkappa=0. \tag{15}$$

De cette égalité il suit que le nombre n_1+1 divise x_1, c'est-à-dire $x_1=0$. De (15) on obtient

$$x_2+(n_2+1)x_3+\cdots+(n_2+1)(n_3+1)\dots(n_{\varkappa-1}+1)x_\varkappa=0,$$

d'où l'on voit que $x_2=0$ etc.

5. *Soient* $a_1, a_2, \dots, a_\varkappa$ *des nombres entiers arbitraires et* m *un nombre entier positif. Soient encore* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\varkappa$ *des nombres entiers positifs pour lesquels on a*

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\varkappa>m-1. \tag{16}$$

Alors la congruence

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_\varkappa x_\varkappa\equiv 0 \pmod m$$

a toujours des solutions en nombres entiers non négatifs qui satisfont aux conditions

$$0 \leqslant x_p \leqslant \lambda_p, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \varkappa, \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_\varkappa > 0.$$

On ne peut pas remplacer la condition (16) *par la condition*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\varkappa \leqslant m - 1.$$

D'après le théorème 3 l'inégalité

$$\left| \frac{a_1}{m} x_1 + \frac{a_2}{m} x_2 + \cdots + \frac{a_\varkappa}{m} x_\varkappa - y \right| \leqslant \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\varkappa}$$

a des solutions en nombres entiers non négatifs $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$, satisfaisant aux conditions

$$0 \leqslant x_p \leqslant \lambda_p, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \varkappa, \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_\varkappa > 0.$$

Pour démontrer la deuxième partie du théorème considérons la congruence

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_\varkappa \equiv 0 \pmod{m}. \tag{17}$$

Si $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$ est une solution de (17) avec les conditions

$$0 \leqslant x_i \leqslant \lambda_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, \varkappa,$$

la partie gauche de (17) ne surpasse pas le nombre $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\varkappa < m$ et par suite on aura l'égalité

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_\varkappa = 0,$$

d'où et de (18) il découle que $x_1 = x_2 = \cdots = x_\varkappa = 0$.

LITTERATURE

1. T. NAGELL, Sur un théorème d'Axel Thue. Arkiv för Matematik, *1*, 1951, 481–496.
2. LARS FJELLSTEDT, Einige Sätze über lineare Kongruenzen. Arkiv för Matematik, *3*, 1956, 271–275.
3. N. OBRECHKOFF, Sur l'approximation des nombres irrationnels. Annuaire de l'Université de Sofia, *45*, 1948–1949, 179–199.

Tryckt den 14 november 1958

Uppsala 1958. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB