

# SUR LA SÉRIE DE DIRICHLET ET LA SÉRIE DE FACULTÉS.

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

Extrait d'une lettre à M. N. E. NÖRLUND.

Je viens de trouver parmi mes papiers de l'année 1910 la note suivante que vous trouverez peut être avoir encore quelque intérêt.

Dans une conférence que j'ai faite au congrès de Rome<sup>1</sup> j'ai communiqué le théorème suivant :

$$(1) \quad FA(x-a) = \lim_{\alpha=0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu}}{\alpha^{\nu}} (x-a)^{\nu}; \quad a \text{ réel positif.}$$

Dans une lettre intéressante que M. M. RIESZ m'a adressée<sup>2</sup> il démontre entre autres théorèmes concernant les séries de Dirichlet et qui sont analogues à ceux que j'avais démontrés pour les séries de puissances, le théorème remarquable que voici :

$$(2) \quad fa(s) = \lim_{\alpha=0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{k_{\nu}}{\alpha^{\lambda_{\nu}}} e^{-\lambda_{\nu}s} : 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{\nu+1} < \dots \quad \lim_{\nu=\infty} \lambda_{\nu} = \infty.$$

Dans mon théorème  $FA(x)$  désigne la branche uniforme d'une fonction monogène  $F(x)$  qu'on obtient en continuant la série  $\mathfrak{P}(x-a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}(x-a)^{\nu}$  le long de chaque vecteur sorti de zéro jusqu'au premier point singulier. Chez M. Riesz  $fa(s)$  est la branche uniforme d'une fonction monogène  $f(s)$  qu'on obtient en con-

---

<sup>1</sup> „Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe“. Atti del IV congresso internazionale dei matematici. (Roma 6-11 Aprile 1908.) Vol. I page 82.

<sup>2</sup> 6 Octobre 1910 „Sur la représentation analytique des fonctions définies par des séries de Dirichlet“. Voir Acta Mathematica t. 35 pages 253-270.

tinuant la branche fonctionnelle définie par la série de Dirichlet

$$d(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} k_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} s}$$

supposée convergente pour les valeurs suffisamment grandes de la partie réelle de la variable  $s$ , le long de chaque parallèle à l'axe réel jusqu'au premier point singulier.

De la même manière que j'avais formé des constantes  $c_{\nu}$ , coefficients de la série  $\mathfrak{P}(x-a)$  définissant la fonction  $F(x)$  une expression arithmétique d'un seul tenant qui représente la branche  $FA(x-a)$ , M. Riesz est parvenu à former des constantes  $k_{\nu}$ , dans la série  $d(s)$  une expression arithmétique d'un caractère tout semblable à la mienne et qui représente la branche  $fa(s)$ . C'est sans doute un résultat d'une certaine importance qui marque un progrès dans la théorie des séries de Dirichlet.

On peut obtenir dans le même ordre d'idées encore une nouvelle expression de  $fa(s)$ .

M. E. Cahen a énoncé le théorème, facile à démontrer<sup>1</sup> que la série :

$$d(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} k_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} s}$$

supposée convergente dans un certain demiplan, est liée pour  $R(s)$  suffisamment grande, à la série analogue

$$D(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} k_{\nu} e^{-\mu_{\nu} s}; \quad \mu_{\nu} = e^{\lambda_{\nu}}$$

par la relation :

$$d(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} D(x) x^{s-1} dx.$$

Mettons :

$$x = e^{-\omega}$$

et on obtient :

$$d(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} k_{\nu} e^{-e^{\lambda_{\nu}} \omega} \right) e^{-s\omega} d\omega.$$

<sup>1</sup> Encyclopédie des sciences mat. Tome I. Vol. 3. Fasc. 3, page 260. E. CAHEN, Thèses etc. Sur la fonction de Riemann et sur des fonctions analogues, page 25.

On aura donc<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad fa(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \operatorname{Lim}_{\alpha=0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\alpha\omega|} \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} k_{\nu} e^{-e^{\lambda_{\nu}-\omega}} \right) e^{-s\omega} d\omega \\
 &= \frac{1}{\Gamma(s)} \operatorname{Lim}_{\alpha=0} \int_0^{\infty} \frac{1}{\left| \alpha \log \frac{1}{x} \right|} D(x) x^{s-1} dx.
 \end{aligned}$$

La branche  $fa(s)$  est par conséquent représentée partout dans l'étoile  $a$  aussi bien par l'expression:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \operatorname{Lim}_{\alpha=0} \int_0^{\infty} \frac{1}{\left| \alpha \log \frac{1}{x} \right|} D(x) x^{s-1} dx$$

que par l'expression de M. Riesz:

$$\operatorname{Lim}_{\alpha=0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{k_{\nu}}{|\alpha\lambda_{\nu}|} e^{-\lambda_{\nu}s}.$$

Mais je désire surtout attirer l'attention sur un autre théorème qui concerne la série de facultés. On peut démontrer que si la série de facultés:

$$(4) \quad \Omega(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|\nu \cdot a_{\nu}|}{z(z+1)\dots(z+\nu)}$$

converge dans un certain demiplan la série:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} y^{\nu} (1-y)^{\nu-1}$$

est uniformément convergente pour  $0 \leq y \leq 1$ ,  $R(z)$  étant suffisamment grande. En posant

$$\varphi(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} y^{\nu}$$

on a alors l'égalité:

$$\Omega(z) = \int_0^{\infty} \varphi(1-e^{-t}) e^{-tz} dt.$$

<sup>1</sup> c. f. pages 18, 19 dans la note de M. Riesz.

Si nous désignons comme tout à l'heure par  $fa(z)$  la branche uniforme d'une fonction  $f(z)$  qu'on obtient en continuant la branche fonctionnelle définie par la série de faculté  $\Omega(z)$  le long de chaque parallèle à l'axe réel jusqu'au premier point singulier, on aura<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} fa(z) &= \text{Lim}_{\alpha=0} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lfloor \alpha t \rfloor} \varphi(1 - e^{-t}) e^{-tz} dt \\ &= \text{Lim}_{\alpha=0} \int_0^1 \frac{1}{\lfloor \alpha \log \frac{1}{\tau} \rfloor} \cdot \varphi(1 - \tau) \cdot \tau^{z-1} d\tau. \end{aligned}$$

On voit de même<sup>2</sup> que les points singuliers finis de  $fa(s)$  ou ce que j'ai appelé les sommets<sup>3</sup> finis de l'étoile  $a$ , soit  $\xi + i\eta$ , s'obtiennent de la formule:

$$\xi = \lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} \log \log \left( \left| \int_0^1 \frac{1}{\lfloor \alpha \log \frac{1}{\tau} \rfloor} \varphi(1 - \tau) \tau^{-\omega-1+i\eta} \cdot d\tau \right|^{-\omega} \right)$$

où  $\eta$  parcourt les valeurs réelles depuis  $-\infty$  jusqu'à  $+\infty$  et on rejette tous les  $\xi$  non finies et réelles.

On pouvait être tenté d'après ce qui précède de vouloir définir la fonction analytique dans toute sa généralité aussi bien par les constantes  $k$ , (formule 2) ou par les constantes  $a$ , (formule 4) que par les constantes  $c$ , (formule 1). En réalité, il n'en est rien. Les constantes  $k$ , et  $a$ , ne peuvent pas être choisies de manière à définir chaque fonction analytique, elles déterminent seulement une classe de fonctions qui ont une certaine allure dans la proximité d'un point singulier ( $x = 0$ , en mettant  $e^{-s} = x$ ,  $\frac{1}{z} = x$ ).

Ma formule (1) peut de même être généralisée à représenter une fonction dont l'allure aux environs du point  $x = a$ , ce point étant singulier, est caractérisée par les constantes  $c$ .

<sup>1</sup> Pages 18, 19 dans la lettre de M. Riesz.

<sup>2</sup> Voir formule (46) dans la lettre de M. Riesz.

<sup>3</sup> Voir „Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (2<sup>e</sup> note)“. Acta mathematica, t. 24, p. 183.