LA GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE JACOBI-MAYER DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES ET DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS NON LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE D'UNE FONCTION INCONNUE.

PAR

G. PFEIFFER

à KIEW.

Introduction.

Prenons un système de m relations:

$$(A) \qquad \begin{array}{l} H_1(x_1, \ldots x_n, \; p_1, \ldots p_n) = 0, \\ H_2(x_1, \ldots x_n, \; p_1, \ldots p_n) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ H_m(x_1, \ldots x_n, \; p_1, \ldots p_n) = 0, \end{array} \qquad (1)$$

qui lient les variables:

$$x_1, \ldots x_n, \; p_1, \ldots p_n. \qquad (2)$$

Désignons chaque système, équivalent algébriquement au système (1) par:

$$(B) \qquad \begin{array}{l} G_1(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = 0, \\ G_2(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ G_m(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = 0. \end{array} \qquad (3)$$

Admettons, que le système (1) peut être mis sous la forme:

$$(C)\qquad \begin{aligned} F_1 &= p_1 - \varphi_1(x_1, \ldots x_n, p_2, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \\ F_2 &= p_2 - \varphi_2(x_1, \ldots x_n, p_3, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m &= p_m - \varphi_m(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \quad \ldots\ldots \quad p_n) = 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

et, par conséquent, sous la forme:

$$(D)\qquad \begin{aligned} E_1 &= p_1 - \psi_1(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \\ E_2 &= p_2 - \psi_2(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_m &= p_m - \psi_m(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0.^1 \end{aligned} \qquad (5)$$

Le déterminant:

$$\varDelta = \frac{D(H_1, H_2, \ldots H_m)}{D(p_1, p_2, \ldots p_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial H_2}{\partial p_1}, & \ldots & \frac{\partial H_m}{\partial p_1} \\ \frac{\partial H_1}{\partial p_2}, & \frac{\partial H_2}{\partial p_2}, & \ldots & \frac{\partial H_m}{\partial p_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial H_1}{\partial p_m}, & \frac{\partial H_2}{\partial p_m}, & \ldots & \frac{\partial H_m}{\partial p_m} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

n'est pas nul en vertu des connexions (1):

$$\varDelta \neq 0. \qquad (7)$$

D'après le théorème de Laplace:

$$\varDelta = (-1)^{i+k} \sum_{r,s} (-1)^{r+s} \varDelta_{i,k}^{r,s} \frac{D(H_r, H_s)}{D(p_i, p_k)}; \qquad (8)$$

la somme s'étend aux combinaisons r, s des nombres $1, 2, \ldots m$; $\varDelta_{i,k}^{r,s}$ est le mineur du déterminant $\varDelta$, qu'on obtient en supprimant les colonnes r, s et les lignes i, k; i, k étant des nombres arbitraires et distincts, pris d'une manière précise, de la série $1, 2, \ldots m$.

[1] Cela est possible, si dans le système (1) les variables $x_1, \ldots x_n$ ne sont pas liées par une ou plusieurs relations.

En joignant à l'identité (8) les identités:

$$0 = (-1)^{i+k} \sum_{r,s} (-1)^{r+s} \Delta_{i',k'}^{r,s} \frac{D(H_r, H_s)}{D(p_i, p_k)}, \tag{9}$$

où au moins l'un des nombres i', k' est différent des nombres i, k, pris d'une manière précise, nous nous convaincons que le déterminant:

$$\left| \Delta_{i,k}^{r,s} \right| \tag{10}$$

n'est pas nul en vertu des connexions (1):

$$\left| \Delta_{i,k}^{r,s} \right| \neq 0. \tag{11}$$

Ph. Gilbert[1] a établi l'identité:

$$(E_i, E_k) = (p_i - \psi_i, p_k - \psi_k) \equiv \frac{(-1)^{i+k}}{\Delta} \sum_{r,s} (-1)^{r+s} \Delta_{i,k}^{r,s} (H_r, H_s), \tag{12}$$

qui est juste non seulement pour les égalités (1), mais encore pour les égalités:

$$H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \quad \ldots, \quad H_m = a_m, \tag{13}$$

où $a_1, a_2, \ldots a_m$ sont des constantes arbitraires.

En établissant l'identité (12) Ph. Gilbert ne fait pas la supposition que $p_1, p_2, \ldots p_n$ sont des dérivées d'une même fonction z par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots x_n$: l'identité (12) a lieu pour toutes les variables (2), liées par les relations (1).

Les identités, analogues à l'identité (12) concernant les égalités (1), peuvent également être écrites pour les égalités (3):

$$(E_i, E_k) = (p_i - \psi_i, p_k - \psi_k) \equiv \frac{(-1)^{i+k}}{\eta} \sum_{r,s} (-1)^{r+s} \eta_{i,k}^{r,s} (G_r, G_s); \tag{14}$$

les déterminants:

$$\eta = \frac{D(G_1, G_2, \ldots G_m)}{D(p_1, p_2, \ldots p_m)} \quad \text{et} \quad \left| \eta_{i,k}^{r,s} \right| \tag{15}$$

[1] Ph. Gilbert, Sur une propriété de la fonction de Poisson et sur l'intégration des équations aux dérivées partielles (Comptes rendus, t. 91, 1880, pp. 541—544 et pp. 613—616); Sur une propriété de la fonction de Poisson et sur la méthode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, Vol. V, 2 partie, 1881, pp. 1—16).

P. Mansion, Théorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Berlin, 1892, pp. 164—170).

ne sont pas nuls en vertu des connexions (3)

$$\eta \neq 0 \quad \text{et} \quad \left|\eta_{i,k}^{r,s}\right| \neq 0, \tag{16}$$

et pour les égalités (4):

$$(E_i, E_k) = (p_i - \psi_i, p_k - \psi_k) \equiv \frac{(-1)^{i+k}}{\delta} \sum_{r,s} (-1)^{r+s} \delta_{i,k}^{r,s} (F_r, F_s); \tag{17}$$

les déterminants:

$$\delta = \frac{D(F_1, F_2, \ldots F_m)}{D(p_1, p_2, \ldots p_m)} \quad \text{et} \quad \left|\delta_{i,k}^{r,s}\right| \tag{18}$$

ne sont pas nuls en vertu des connexions (4):

$$\delta = 1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \left|\delta_{i,k}^{r,s}\right| \neq 0. \tag{19}$$

Faisons maintenant la supposition que le système des relations (1) est un système complet d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, ne contenant pas la fonction z: les parenthèses de Poisson:

$$(H_r, H_s) \tag{20}$$

sont nulles compte tenu des relations (1).

En vertu de l'identité (12) le système d'équations (5) est en involution: les parenthèses de Poisson:

$$(E_i, E_k) \tag{21}$$

sont identiquement nulles.

En vertu de l'identité (14) et de la seconde inégalité (16) le système (3) est un système complet: les parenthèses de Poisson:

$$(G_r, G_s), \tag{22}$$

grâce aux relations (3), sont nulles.

Grâce à l'identité (17) et à la seconde inégalité (19), le système d'équations (4) est un système complet, mais c'est un système complet d'une espèce particulière: les parenthèses de Poisson:

$$(F_i, F_k), \qquad i < k \tag{23}$$

sont nulles en vertu des connexions:

$$F_{i+1} = 0, \quad F_{i+2} = 0, \ldots \quad F_m = 0. \tag{24}$$

En définitive nous avons le théorème général:

»Si le système (1) d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, qui ne contient pas la fonction z, est complet, alors tout autre système, algébriquement équivalent à lui, est aussi complet»

et une série de conclusions particulières:

»Les systèmes (3), (4) sont complets; le système (5) est en involution».

S'il est possible de réduire le système (1) à l'aspect (U):

$$
(U) \quad
\begin{aligned}
&U_1 = x_1 - \varphi_1(x_2, \dots x_k, x_{k+1}, \dots x_m, x_{m+1}, \dots x_n, \\
&\qquad\qquad p_1, \dots p_k, p_{k+1}, \dots p_m, p_{m+1}, \dots p_n) = 0, \\
&U_2 = x_2 - \varphi_2(x_3, \dots x_k, x_{k+1}, \dots x_m, x_{m+1}, \dots x_n, \\
&\qquad\qquad p_1, \dots p_k, p_{k+1}, \dots p_m, p_{m+1}, \dots p_n) = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&U_k = x_k - \varphi_k(x_{k+1}, \dots x_m, x_{m+1}, \dots x_n, \\
&\qquad\qquad p_1, \dots p_k, p_{k+1}, \dots p_m, p_{m+1}, \dots p_n) = 0, \\
&U_{k+1} = p_{k+1} - \varphi_{k+1}(x_{k+1}, \dots x_m, x_{m+1}, \dots x_n, \\
&\qquad\qquad p_1, \dots p_k, p_{k+2}, \dots p_m, p_{m+1}, \dots p_n) = 0, \\
&U_{k+2} = p_{k+2} - \varphi_{k+2}(x_{k+1}, \dots x_m, x_{m+1}, \dots x_n, \\
&\qquad\qquad p_1, \dots p_k, p_{k+3}, \dots p_m, p_{m+1}, \dots p_n) = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&U_m = p_m - \varphi_m(x_{k+1}, \dots x_m, x_{m+1}, \dots x_n, p_1, \dots p_k, p_{m+1}, \dots p_n) = 0,
\end{aligned}
\qquad (25)
$$

à l'aspect (V):

$$
(V) \quad
\begin{aligned}
&V_1 = x_1 - \omega_1(x_2, \dots x_m, x_{m+1}, \dots x_n, p_1, \dots p_n) = 0, \\
&V_2 = x_2 - \omega_2(x_3, \dots x_m, x_{m+1}, \dots x_n, p_1, \dots p_n) = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&V_m = x_m - \omega_m(x_{m+1}, \dots x_n, p_1, \dots p_n) = 0
\end{aligned}
\qquad (26)
$$

ou, plus généralement, à l'aspect (W), où m quantités de la série (2), non conjuguées entre elles, s'expriment successivement à l'aide des autres, alors de pareils systèmes sont toujours complets.

Les systèmes (Ω), équivalents au système (1), dans lesquels m quantités de la série (2), en partie conjuguées, s'expriment successivement à l'aide des autres, sont également complets, mais ne nous seront pas nécessaires dans ce qui suit.

Passons au système des m relations

$$(\mathfrak{A}) \qquad \begin{aligned} &H_1(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0, \\ &H_2(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &H_m(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0, \end{aligned} \qquad (27)$$

qui lient les variables (2) et la fonction z des variables $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Désignons chaque système, algébriquement équivalent au système (27) par:

$$(\mathfrak{B}) \qquad \begin{aligned} &G_1(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0, \\ &G_2(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &G_m(x_1 \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0. \end{aligned} \qquad (28)$$

Admettons, que le système (27) se réduit aux formes:

$$(\mathfrak{C}) \qquad \begin{aligned} &F_1 = p_1 - \varphi_1(x_1, \ldots x_n, z, p_2, p_3, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \\ &F_2 = p_2 - \varphi_2(x_1, \ldots x_n, z, p_3, p_4, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_m = p_m - \varphi_m(x_1, \ldots x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots\ldots p_n) = 0; \end{aligned} \qquad (29)$$

$$(\mathfrak{D}) \qquad \begin{aligned} &R_0 = z - \varpi_0(x_1, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_{m-1}, p_m, \ldots p_n) = 0, \\ &R_1 = p_1 - \varpi_1(x_1, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_{m-1}, p_m, \ldots p_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &R_{m-1} = p_{m-1} - \varpi_{m-1}(x_1, \ldots x_n, p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \end{aligned} \qquad (30)$$

et, par conséquent, aux formes:

$$(\mathfrak{E}) \qquad \begin{aligned} &E_1 = p_1 - \psi_1(x_1, \ldots x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \\ &E_2 = p_2 - \psi_2(x_1, \ldots x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &E_m = p_m - \psi_m(x_1, \ldots x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0; \end{aligned} \qquad (31)$$

$$(\mathfrak{F})\qquad \begin{aligned} S_0 &= z - \omega_0(x_1, \ldots x_n, p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \\ S_1 &= p_1 - \omega_1(x_1, \ldots x_n, p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_{m-1} &= p_{m-1} - \omega_{m-1}(x_1, \ldots x_n, p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0; \end{aligned} \qquad (32)$$

$$(\mathfrak{G})\qquad \begin{aligned} T_0 &= z - \omega_0 - x_1(p_1 - \omega_1) - \cdots - x_{m-1}(p_{m-1} - \omega_{m-1}) = 0, \\ T_1 &= p_1 - \omega_1 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T_{m-1} &= p_{m-1} - \omega_{m-1} = 0.^{1} \end{aligned} \qquad (33)$$

Les déterminants:

$$\Delta = \frac{D(H_1, H_2, \ldots H_m)}{D(p_1, p_2, \ldots p_m)} \qquad (34)$$

et

$$\nabla = \frac{D(H_1, H_2, \ldots H_m)}{D(z, p_1, \ldots p_{m-1})} \qquad (35)$$

ne sont pas nuls en vertu des connexions (27):

$$\Delta \neq 0 \qquad (36)$$

et

$$\nabla \neq 0. \qquad (37)$$

En regardant z comme fonction des variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ et en profitant de raisonnements analogues aux raisonnements de Ph. Gilbert[2], nous établirons, sans embarras particuliers, l'identité:

$$[E_i, E_k] = [p_i - \psi_i, p_k - \psi_k] \equiv (-1)^{i+k} \sum_{r,s} (-1)^{r+s} \Delta_{i,k}^{r,s} [H_r, H_s], \qquad (38)$$

concernant les relations (27). De pareilles identités peuvent être aussi écrites pour les égalités: (28), (29), (30), (31), (32), (33).

Ayant fait la supposition, que le système des connexions (27) est un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre contenant la fonction z, nous arriverons au théorème général:

---

[1] Pour cela il est nécessaire que le système (27) ne contienne pas de connexions entre $z, x_1, \ldots x_n$ ou entre $x_1, x_2, \ldots x_n$.

[2] Voir le renvoi 1 p. 241.

»Si le système (27) d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, contenant la fonction z, est complet, alors tout autre système, algébriquement équivalent à lui, est aussi complet»

et à une série de conclusions particulières:

»Les systèmes (29), (30), (31), (32) sont complets; le système (33) est en involution.»

En généralisant la méthode de Jacobi de l'intégration des systèmes complets d'équations linéaires et homogènes[1], nous avons introduit les notions: d'un *système* linéaire, homogène *des systèmes complets successifs* et d'un *système des systèmes complets successifs,* généralisant le système de Jacobi.

En réalisant la généralisation de la méthode de Jacobi-Mayer de l'intégration des équations non linéaires et des systèmes complets d'équations non linéaires, qui ne contiennent pas la fonction z ou qui la contiennent, nous introduirons les notions: d'un *système* non linéaire *des systèmes complets successifs* et d'un *système* fondamental *des systèmes complets successifs.*

Le système complet (A) —(1):

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \ldots \quad H_{m-1} = 0, \quad H_m = 0, \tag{39}$$

ne contenant pas la fonction z, pour lequel les parenthèses de Poisson: (H_r, H_s), $(r, s = 1, 2, \ldots m)$ sont nulles, en vertu des égalités (39), s'appellera un *système* non linéaire *des systèmes complets successifs* dans le cas, où les systèmes:

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \ldots \quad H_{m-1} = 0; \tag{40}$$

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \ldots \quad H_{m-2} = 0; \tag{41}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0; \tag{42}$$

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0 \tag{43}$$

sont complets; sont donc égales à zéro les parenthèses de Poisson:

[1] G. Pfeiffer, La généralisation de la méthode de Jacobi de l'intégration des systèmes complets d'équations linéaires et homogènes; la généralisation des recherches correspondantes de Clebsch (Bull. de l'Acad. des Sciences de l'URSS, 1931, pp. 1051—1087).

(H_r, H_s), r, s — combinaisons des nombr. $1, 2, \ldots m-1$, — en vertu des égal. (40);
» » » » » $1, 2, \ldots m-2$, » » » » (41);
. . . .
» » » » » $1, 2, 3$, » » » » (42);
(H_1, H_2) » » » » (43).

Chaque système (40), (41), ... (42), (43) est *un système* non linéaire *des systèmes complets successifs.*

Le système complet (C)—(4):

$$F_m = 0, \quad F_{m-1} = 0, \ldots \quad F_2 = 0, \quad F_1 = 0 \tag{44}$$

est un *système* non linéaire *des systèmes complets successifs,* puisque les systèmes:

$$F_m = 0, \quad F_{m-1} = 0, \ldots \quad F_2 = 0; \tag{45}$$

$$F_m = 0, \quad F_{m-1} = 0, \ldots \quad F_3 = 0; \tag{46}$$

. . . .

$$F_m = 0, \quad F_{m-1} = 0 \tag{47}$$

sont complets. Prenons le pour le *système* fondamental des *systèmes complets successifs,* ne contenant pas la fonction z.

Les systèmes (U), (V), (W), où l'on prend les équations, à partir de la première, et le système (D)—(5), comme système en involution, sont des *systèmes des systèmes complets successifs.*

Le système complet $(\mathfrak{A})$—(27):

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \ldots \quad H_m = 0, \tag{48}$$

contenant la fonction z, s'appellera *système* non linéaire *des systèmes complets successifs* dans le cas où les systèmes:

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \ldots \quad H_{m-1} = 0; \tag{49}$$

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \ldots \quad H_{m-2} = 0; \tag{50}$$

. . . .

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \qquad H_3 = 0; \tag{51}$$

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \tag{52}$$

sont complets.

Les systèmes $(\mathfrak{C})-(29)$, $(\mathfrak{D})-(30)$, $(\mathfrak{E})-(31)$, $(\mathfrak{F})-(32)$, où l'on prend les équations, à partir de la première, et le système $(\mathfrak{G})-(33)$, comme système en involution, sont des *systèmes des systèmes complets successifs.*

C'est le système $(\mathfrak{C})-(29)$, et non le système $(\mathfrak{D})-(30)$ que nous prenons pour *système* fondamental *des systèmes complets successifs.*

Remarque. Le système complet de deux équations, ne contenant pas la fonction z ou la contenant, est à regarder comme un *système des systèmes complets successifs.*

La généralisation de la méthode de Jacobi-Mayer.[1]

La généralisation de la méthode de Jacobi-Mayer, que nous proposons, consiste en ce qui suit: il sera montré, que l'on peut réduire les systèmes complets donnés d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à une forme plus générale que la forme habituelle.

Pour exposer le fond de la méthode de Jacobi-Mayer de l'integration des systèmes complets d'équations non linéaires, ne contenant pas la fonction z, on n'a pas besoin de réduire le système complet donné $(A)-(1)$ à la forme $(D)-(5)$, qui est en involution, — il suffit de le remplacer par le *système* fondamental *des systèmes complets successifs* $(C)-(4)$:

$$(C)\qquad \begin{aligned} F_1 &= p_1 - \varphi_1(x_1, \ldots x_n, p_2, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \\ F_2 &= p_2 - \varphi_2(x_1, \ldots x_n, p_3, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m &= p_m - \varphi_m(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0. \end{aligned} \tag{53}$$ [2]

Ajoutons au système (53) la connexion:

$$\Phi(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n) = a \tag{54}$$

et exigeons que conjointement avec les équations (53) elle donne un système complet. Pour cela il est nécessaire, que les parenthèses de Poisson:

---

[1] G. Pfeiffer, La généralisation de la méthode de Jacobi-Mayer (Comptes rendus, t. 191, 1930, pp. 1107—1109).

[2] Quand $m = 1$, on reçoit une équation.

$$(F_i, \Phi) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \right) =$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \sum_{j=m+1}^{n} \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \right\}, \tag{55}$$

$$i = 1, 2, \ldots m$$

soient nulles en vertu des relations:

$$F_{i+1} = 0, \quad F_{i+2} = 0, \ldots \quad F_m = 0, \tag{56}$$

ou, ce qui est la même chose, en vertu des égalités:

$$E_{i+1} = 0, \quad E_{i+2} = 0, \ldots \quad E_m = 0. \tag{57}$$

Désignons le résultat de la substitution des expressions:

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= \psi_{i+1}(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n), \\ p_{i+2} &= \psi_{i+2}(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_m &= \psi_m \quad (x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n), \end{aligned} \tag{58}$$

dans la fonction:

$$P_i(x_1, \ldots x_n, p_{i+1}, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) \tag{59}$$

par (P_i):

$$(P_i) \equiv P_i(x_1, \ldots x_n, \psi_{i+1}, \ldots \psi_m, p_{m+1}, \ldots p_n), \tag{60}$$

alors la fonction Φ sera l'intégrale du système d'équations linéaires:

$$\begin{aligned} X_1(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_3}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \cdots - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_m}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} - \\ - \sum_{j=m+1}^{n} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_j}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \right\} = 0, \\ X_2(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_3}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \cdots - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_m}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} - \\ - \sum_{j=m+1}^{n} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_j}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \right\} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} - \sum_{j=m+1}^{n} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial p_j}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\} = 0. \end{aligned} \tag{61}$$

La même fonction Φ est l'intégrale d'un système en involution d'équations linéaires:

$$(E_i,\ \Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \sum_{j=m+1}^{n} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial p_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \right) = 0, \tag{62}$$

$$i = 1,\ 2, \ldots m.$$ [1]

De là découle, que le système (61) est complet.

Le système (61) appartient au type des systèmes linéaires homogènes, présentant les *systèmes des systèmes complets successifs*, généralisant le système de Jacobi: ses opérateurs différentielles s'écrivent immédiatement.[2]

Pour l'équation:

$$X_m(f) = 0 \tag{63}$$

et pour les systèmes complets:

$$X_m(f) = 0, \quad X_{m-1}(f) = 0; \tag{64}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_m(f) = 0, \quad X_{m-1}(f) = 0, \ldots \quad X_2(f) = 0 \tag{65}$$

les transformations infinitésimales:

$$X_{m-1}(f), \quad X_{m-2}(f), \ldots \quad X_1(f) \tag{66}$$

sont des opérateurs différentiels.

Attendu que les intégrales indépendantes du système (61) sont indépendantes par rapport aux variables:

$$x_{m+1}, \ldots x_n, \qquad p_{m+1}, \ldots p_n, \tag{67}$$

il existe toujours la connexion (54), qui se résout par rapport à une des variables:

$$p_{m+1}, \ldots p_n, \tag{68}$$

par exemple, p_{m+1}.

Le cours ultérieur des raisonnements est clair.

Dans l'intégration pratique il est souvent avantageux de profiter des formes (U), (V), (W) du système complet donné $(A)-(1)$ au lieu du système $(D)-(5)$ en involution et du *système* fondamental des *systèmes complets succesifs* $(C)-(4)$.

---

[1] Ed. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (Paris, 1921, pp. 274—275).

[2] G. Pfeiffer, Sur les opérateurs d'un système complet d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue (C. R., 1930, t. 190, pp. 909—911).

La différence consiste en ce que les formes (U), (V), (W) peuvent amener à l'intégrale de S. Lie et non pas à l'intégrale de Lagrange.

Depuis les indications de P. Mansion, les résultats de M. N. Saltykow et nos recherches la construction de l'intégrale de Lagrange d'après une intégrale de S. Lie ne présente pas de difficultés.

Il est très intéressant de considérer les systèmes d'équations linéaires qui sont liés aux formes (U), (V), (W) du système $(A)-(1)$.

L'équation:

$$\Phi(x_{k+1}, \dots x_m, x_{m+1}, \dots x_n, p_1, \dots p_k, p_{m+1}, \dots p_n) = a, \tag{69}$$

réunie aux équations (U), donne un système complet, si la fonction Φ est une intégrale du système d'équations linéaires:

$$\begin{aligned}
Y_1(\Phi) = &-\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} + \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + \dots + \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_k} - \\
&-\sum_{j=k+1}^{m}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right\} = 0,\\
Y_2(\Phi) = &-\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + \left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + \dots + \left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_k}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_k} - \\
&-\sum_{j=k+1}^{m}\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right\} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
Y_k(\Phi) = &-\frac{\partial\Phi}{\partial p_k} - \sum_{j=k+1}^{m}\left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right\} = 0, \qquad (70)\\
Y_{k+1}(\Phi) = &\frac{\partial\Phi}{\partial x_{k+1}} - \left[\frac{\partial\varphi_{k+1}}{\partial p_{k+2}}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_{k+2}} - \left[\frac{\partial\varphi_{k+1}}{\partial p_{k+3}}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_{k+3}} - \dots - \left[\frac{\partial\varphi_{k+1}}{\partial p_m}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_m} - \\
&-\sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_{k+1}}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{d x_j} - \left[\frac{\partial\varphi_{k+1}}{\partial x_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right\} = 0,\\
Y_{k+2}(\Phi) = &\frac{\partial\Phi}{\partial x_{k+2}} - \left[\frac{\partial\varphi_{k+2}}{\partial p_{k+3}}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_{k+3}} - \dots - \left[\frac{\partial\varphi_{k+2}}{\partial p_m}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_m} - \\
&-\sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_{k+2}}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \left[\frac{\partial\varphi_{k+2}}{\partial x_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right\} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
Y_m(\Phi) = &\frac{\partial\Phi}{\partial x_m} - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_m}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \left[\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right\} = 0;
\end{aligned}$$

les crochets indiquent, que les quantités:

$$x_1, \ldots x_k, \quad p_{k+1}, \ldots \quad p_m \tag{71}$$

sont remplacées par les fonctions des quantités:

$$x_{k+1}, \ldots x_m, \quad x_{m+1}, \ldots x_n, \quad p_1, \ldots p_k, \quad p_{m+1}, \ldots p_n, \tag{72}$$

fournies par les équations (1).

Le système (70) est complet, il appartient au type des système linéaires homogènes présentant les *systèmes des systèmes complets successifs*, généralisant le système de Jacobi:

L'équation:

$$\Phi(x_{m+1}, \ldots x_n, \quad p_1, \ldots p_n) = a, \tag{73}$$

réunie aux équations (V) donne un système complet, si la fonction Φ est une intégrale du système d'équations linéaires:

$$\begin{aligned} Z_1(\Phi) = & \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} - \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} - \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_3}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} - \cdots - \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_m}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p_m} - \\ & - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_j}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p_j} - \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial p_j}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\} = 0, \\ Z_2(\Phi) = & \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} - \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} - \cdots - \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_m}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p_m} - \\ & - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_j}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p_j} - \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial p_j}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\} = 0, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_m(\Phi) = & \frac{\partial \Phi}{\partial p_m} - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial \omega_m}{\partial x_j}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p_j} - \left(\frac{\partial \omega_m}{\partial p_j}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\} = 0; \end{aligned} \tag{74}$$

les parenthèses ( ) indiquent, que les quantités:

$$x_1, x_2, \ldots x_m \tag{75}$$

sont remplacées par les fonctions des quantités:

$$x_{m+1}, \ldots x_n, \quad p_1, \ldots p_n, \tag{76}$$

trouvées à l'aide des équations (1).

Il n'est pas difficile de comprendre, que les raisonnements exposés pour les systèmes (U), (V) sont aussi applicables au système (W).

Des systèmes (Ω), comme nous avons dit, nous ne profiterons pas, et voilà pourquoi. Les systèmes d'équations linéaires, déterminant la fonction Φ, liés aux systèmes (Ω), sont complets, mais ne présentent pas les *systèmes* linéaires homogènes *des systèmes complets successifs,* généralisant le système de Jacobi.

Pour exposer le fond de la méthode de Jacobi-Mayer de l'intégration des systèmes complets d'équations non linéaires, contenants la fonction z, on n'a pas également besoin de réduire le système complet donné $(\mathfrak{A})-(27)$ à la forme $(\mathfrak{G})-(33)$, qui est en involution, il suffit de le remplacer par le *système* fondamental *des systèmes complets successifs* $(\mathfrak{C})-(29)$:

$$(\mathfrak{C}) \qquad \begin{aligned} F_1 &= p_1 - \varphi_1(x_1, \ldots x_n, z, p_2, p_3, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \\ F_2 &= p_2 - \varphi_2(x_1, \ldots x_n, z, p_3, p_4, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m &= p_m - \varphi_m(x_1, \ldots x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots\ldots p_n) = 0.^1 \end{aligned} \qquad (77)$$

Ajoutons au système (77) la connexion:

$$\Phi(x_1, \ldots x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n) = a \qquad (78)$$

et exigeons, que conjointement avec les équations (77) elle forme un système complet. Pour cela il est nécessaire, que les crochets de Weiler:

$$\begin{aligned} [F_i, \Phi] = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \left\{p_i - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} p_j - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} p_j\right\}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \\ - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} p_j\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p_j}\right\}, \end{aligned} \qquad (79)$$

$$i = 1, 2, \ldots m$$

soient nuls en vertu des relations:

$$F_i = 0, \quad F_{i+1} = 0, \ldots \quad F_m = 0, \qquad (80)$$

---

[1] Quand $m = 1$, on n'aura qu'une équation.

ou ce qui est la même chose, en vertu des égalités:

$$E_i = 0, \quad E_{i+1} = 0, \ldots \quad E_m = 0. \tag{81}$$

Désignons le résultat de la substitution des expressions:

$$\begin{aligned} p_i &= \psi_i \quad (x_1, \ldots x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n), \\ p_{i+1} &= \psi_{i+1}(x_1, \ldots x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_m &= \psi_m \quad (x_1, \ldots x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n) \end{aligned} \tag{82}$$

dans la fonction:

$$Q_i(x_1, \ldots x_n, z, p_i, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) \tag{83}$$

par $[Q_i]$:

$$[Q_i] \equiv Q_i(x_1, \ldots x_n, z, \psi_i, \ldots \psi_m, p_{m+1}, \ldots p_n), \tag{84}$$

alors la fonction Φ sera l'intégrale du système d'équations linéaires:

$$\begin{aligned} X_1(\Phi) = {} & \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2}\right]\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_3}\right]\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \cdots - \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_m}\right]\frac{\partial \Phi}{\partial x_m} + \\ & + \left\{\psi_1 - \sum_{j=2}^{m}\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_j}\right]\psi_j - \sum_{j=m+1}^{n}\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_j}\right]p_j\right\}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \\ & - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_j}\right]\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \left(\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}\right] + \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right]p_j\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p_j}\right\} = 0, \\ X_2(\Phi) = {} & \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_3}\right]\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \cdots - \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_m}\right]\frac{\partial \Phi}{\partial x_m} + \\ & + \left\{\psi_2 - \sum_{j=3}^{m}\left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_j}\right]\psi_j - \sum_{j=m+1}^{n}\left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_j}\right]p_j\right\}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \\ & - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_j}\right]\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \left(\left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j}\right] + \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right]p_j\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p_j}\right\} = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m(\Phi) = {} & \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} + \left\{\psi_m - \sum_{j=m+1}^{n}\left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial p_j}\right]p_j\right\}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \\ & - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial p_j}\right]\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \left(\left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}\right] + \left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\right]p_j\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p_j}\right\} = 0. \end{aligned} \tag{85}$$

Le système d'équations linéaires, lié au système $(\mathfrak{C})-(31)$, est un cas particulier du système (85).

L'ensemble des opérations, auxquelles a été soumis le système $(\mathfrak{C})-(29)$, est applicable aussi au système $(\mathfrak{D})-(30)$.

La connexion:

$$\Phi(x_1, \ldots x_n, \quad p_m, \ldots p_n) = a, \tag{86}$$

réunie aux équations (30), donne un système complet, si les crochets de Weiler:

$$[R_0, \Phi] = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varpi_0}{\partial p_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \sum_{j=m}^{n} \left(p_j - \frac{\partial \varpi_0}{\partial x_j}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \tag{87}$$

et

$$[R_i, \Phi] = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \sum_{j=i+1}^{m-1} \frac{\partial \varpi_i}{\partial p_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \sum_{j=m}^{n} \left(\frac{\partial \varpi_i}{\partial p_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial \varpi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial p_j}\right), \tag{88}$$

$$i = 1, 2, \ldots (m-1),$$

sont nuls en vertu des relations:

$$R_1 = 0, \qquad R_2 = 0, \ldots \quad R_{m-1} = 0 \tag{89}$$

et

$$R_{i+1} = 0, \quad R_{i+2} = 0, \ldots \quad R_{m-1} = 0, \tag{90}$$

ou ce qui est la même chose, en vertu des égalités:

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \ldots \quad S_{m-1} = 0 \tag{91}$$

et

$$S_{i+1} = 0, \quad S_{i+2} = 0, \ldots \quad S_{m-1} = 0. \tag{92}$$

Désignons le résultat de la substitution des expressions:

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= \omega_{i+1}(x_1, \ldots x_n, \ p_m, \ldots p_n), \\ p_{i+2} &= \omega_{i+2}(x_1, \ldots x_n, \ p_m, \ldots p_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{m-1} &= \omega_{m-1}(x_1, \ldots x_n, \ p_m, \ldots p_n), \end{aligned} \tag{93}$$

dans la fonction:

$$Ni(x_1, \ldots x_n, \ p_{i+1}, \ldots p_{m-1}, \ p_m, \ldots p_n) \tag{94}$$

par $[Ni]$:

$$[Ni] = Ni(x_1, \ldots x_n, \ \omega_{i+1}, \ldots \omega_{m-1}, \ p_m, \ldots p_n), \tag{95}$$

alors la fonction Φ est l'intégrale du système d'équations linéaires:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial \varpi_0}{\partial p_j}\right]\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}+\sum_{j=m}^{n}\left(p_j-\left[\frac{\partial \varpi_0}{\partial x_j}\right]\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p_j}=0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}-\sum_{j=i+1}^{m-1}\left[\frac{\partial \varpi_i}{\partial p_j}\right]\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}-\sum_{j=m}^{n}\left(\left[\frac{\partial \varpi_i}{\partial p_j}\right]\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}-\left[\frac{\partial \varpi_i}{\partial x_j}\right]\frac{\partial \Phi}{\partial p_j}\right)=0, \tag{96}$$

$$i=1,2,\ldots(m-1).$$

Le système d'équations linéaires, lié au système $(\mathfrak{F})$—(32), est un cas particulier du système (96).

La fonction Φ de l'équation (86) est, en même temps, l'intégrale du système complet des équations linéaires:

$$[T_0, \Phi]=0, \quad (T_1, \Phi)=0, \ldots \quad (T_{m-1}, \Phi)=0,[1] \tag{97}$$

qui est lié au système en involution $(\mathfrak{G})$—(33); en vertu de cela les systèmes (85), (96) sont complets.

Le système (85) appartient au type de systèmes linéaires homogènes, présentant les *systèmes des systèmes complets successifs*, généralisant le système de Jacobi, pour lesquels s'écrivent immédiatement les opérateurs différentiels[2]; le système (96) ne s'approche pas de ce type, on doit en faire la transformation. De là découle, qu'il faut, avant le système $(\mathfrak{D})$—(30), profiter préférablement du système fondamental $(\mathfrak{C})$—(29).

Exemple.

Prenons le système complet de deux équations:

$$F_1=p_1+\frac{(x_2p_2-x_4p_4)x_4p_2}{x_1p_3}+\frac{(x_3x_4-x_2)p_2}{x_1}=0,$$

$$F_2=p_2-x_1p_3=0; \tag{1}$$

$$(F_1, F_2)=0 \quad \text{en vertu de} \quad F_2=0.$$

[1] Ed. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (Paris, 1921, p. 289).

[2] G. Pfeiffer, Sur les opérateurs d'un système complet d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue. (C. R., 1930, t. 190, pp. 909—911).

Le système (1) est un *système* fondamental des *systèmes complets successifs*.

Ajoutons au système (1) la connexion:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, p_3, p_4) = a \tag{2}$$

et exigeons que les équations (1), (2) donnent un système complet.

La fonction Φ doit être l'intégrale du *système* linéaire homogène *des systèmes complets successifs*, généralisant le système de Jacobi:

$$\begin{aligned} X_1(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \left\{\frac{x_4}{x_1 p_3}[(2x_1 x_2 + x_3)p_3 - x_4 p_4] - \frac{x_2}{x_1}\right\}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \\ - \frac{x_4}{p_3}(x_1 x_2 p_3 - x_4 p_4)\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - x_4^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} - \\ - x_4 p_3 \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} - [(x_1 x_2 + x_3)p_3 - 2x_4 p_4]\frac{\partial \Phi}{\partial p_4} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

$$X_2(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0;$$

$$X_1 X_2(\Phi) - X_2 X_1(\Phi) = \frac{(1 - x_1 x_4)}{x_1} X_2(\Phi).$$

Les intégrales indépendantes de l'équation:

$$X_2(\Phi) = 0 \tag{4}$$

sont les fonctions:

$$\omega_1 = x_1, \quad \omega_2 = x_4, \quad \omega_3 = p_3, \quad \omega_4 = p_4, \quad \omega_5 = x_3 + x_1 x_2. \tag{5}$$

La transformation infinitésimale:

$$X_1(\Phi) \tag{6}$$

est l'opérateur de l'équation (4):

$$\begin{gathered} X_1(\omega_1) = 1, \quad X_1(\omega_2) = -\omega_2^2, \quad X_1(\omega_3) = -\omega_2 \omega_3, \\ X_1(\omega_4) = 2\omega_2 \omega_4 - \omega_3 \omega_5, \quad X_1(\omega_5) = \omega_2 \omega_5. \end{gathered} \tag{7}$$

Formons la fonction:

$$\theta(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) \tag{8}$$

de façon que:

$$X_1(\theta) = \frac{\partial\theta}{\partial\omega_1} - \omega_2^2 \frac{\partial\theta}{\partial\omega_2} - \omega_2\omega_3 \frac{\partial\theta}{\partial\omega_3} + (2\,\omega_2\omega_4 - \omega_3\omega_5)\frac{\partial\theta}{\partial\omega_4} + \omega_2\omega_5\frac{\partial\theta}{\partial\omega_5} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{d\omega}{1} = \frac{d\omega_2}{-\omega_2^2} = \frac{d\omega_3}{-\omega_2\omega_3} = \frac{d\omega_4}{2\,\omega_2\omega_4 - \omega_3\omega_5} = \frac{d\omega_5}{\omega_2\omega_5}. \tag{10}$$

On voit ainsi qu'une intégrale du système:

$$X_1(\Phi) = 0, \qquad X_2(\Phi) = 0 \tag{11}$$

est l'expression:

$$\frac{\omega_3}{\omega_2}. \tag{12}$$

On peut prendre la connexion (2) de la forme:

$$\frac{p_3}{x_4} = a. \tag{13}$$

Les équations (1), (13) amènent au *système* fondamental *des systèmes complets successifs:*

$$\begin{aligned} f_1 &= p_1 + \frac{(x_2p_2 - x_4p_4)x_4p_2}{x_1p_3} + \frac{(x_3x_4 - x_2)p_2}{x_1} = 0,\\ f_2 &= p_2 - x_1p_3 = 0,\\ f_3 &= p_3 - ax_4 = 0;\\ (f_1, f_2) &= 0 \text{ en vertu de } f_2 = 0,\\ (f_1, f_3) &= 0 \text{ en vertu de } f_3 = 0,\\ (f_2, f_3) &\equiv 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Ajoutons au système (14) la connexion:

$$W(x_1, x_2, x_3, x_4, p_4) = b \tag{15}$$

et exigeons, que les équations (14), (15) donnent un système complet.

La fonction W doit être une intégrale du *système* linéaire homogène *des systèmes complets successifs*, généralisant le système de Jacobi:

$$\begin{aligned}Y_1(W) &= \frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{1}{a x_1}\{x_4[a(2x_1x_2+x_3)-p_4]-ax_2\}\frac{\partial W}{\partial x_2} - \\ &\quad - \frac{x_4}{a}(a x_1 x_2 - p_4)\frac{\partial W}{\partial x_3} - x_4^2\frac{\partial W}{\partial x_4} - x_4[a(x_1x_2+x_3)-2p_4]\frac{\partial W}{\partial p_4} = 0,\\ Y_2(W) &= \frac{\partial W}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial W}{\partial x_3} \equiv 0,\\ Y_3(W) &= \frac{\partial W}{\partial x_3} + a\frac{\partial W}{\partial p_4} = 0;\end{aligned} \tag{16}$$

$$Y_1Y_2(W) - Y_2Y_1(W) = \frac{1-x_1x_4}{x_1}Y_2(W),$$

$$Y_1Y_3(W) - Y_3Y_1(W) = x_4Y_3(W),$$

$$Y_2Y_3(W) - Y_3Y_2(W) \equiv 0.$$

Les intégrales indépendantes de l'équation:

$$Y_3(W) = 0 \tag{17}$$

sont les fonctions:

$$\varphi_1 = x_1, \quad \varphi_2 = x_2, \quad \varphi_3 = x_4, \quad \varphi_4 = p_4 - a x_3. \tag{18}$$

La transformation infinitésimale:

$$Y_2(W) \tag{19}$$

est l'opérateur de l'équation (17):

$$Y_2(\varphi_1) = 0, \quad Y_2(\varphi_2) = 1, \quad Y_2(\varphi_3) = 0, \quad Y_2(\varphi_4) = a\varphi_1. \tag{20}$$

Choisissons la fonction:

$$\vartheta(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \tag{21}$$

de façon que:

$$Y_2(\vartheta) = \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi_2} + a\varphi_1\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi_4} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{d\varphi_2}{1} = \frac{d\varphi_4}{a\varphi_1}. \tag{23}$$

De là on déduit, qu'au système:

$$Y_2(W) = 0, \qquad Y_3(W) = 0 \tag{24}$$

appartiennent les intégrales indépendantes:

$$\psi_1 = \varphi_1, \quad \psi_2 = \varphi_3, \quad \psi_3 = \varphi_4 - a\,\varphi_1\,\varphi_2. \tag{25}$$

La transformation infinitésimale:

$$Y_1(W) \tag{26}$$

est l'opérateur du système (24).

Attendu que:

$$\begin{aligned} &Y_1(\varphi_1) = 1, \\ &Y_1(\varphi_2) = \frac{1}{a\,\varphi_1}[\varphi_3(2\,a\,\varphi_1\,\varphi_2 - \varphi_4) - a\,\varphi_2], \\ &Y_1(\varphi_3) = -\varphi_3^2, \\ &Y_1(\varphi_4) = \varphi_3\,\varphi_4, \end{aligned} \tag{27}$$

alors

$$Y_1(\psi_1) = 1, \qquad Y_1(\psi_2) = -\psi_2^2, \qquad Y_1(\psi_3) = 2\,\psi_2\,\psi_3. \tag{28}$$

Formons la fonction;

$$\eta(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \tag{29}$$

de façon que:

$$Y_1(\eta) = \frac{\partial\eta}{\partial\psi_1} - \psi_2^2\,\frac{\partial\eta}{\partial\psi_2} + 2\,\psi_2\,\psi_3\,\frac{\partial\eta}{\partial\psi_3} = 0, \tag{30}$$

$$\frac{d\psi_1}{1} = \frac{d\psi_2}{-\psi_2^2} = \frac{d\psi_3}{2\,\psi_2\,\psi_3}. \tag{31}$$

De là on déduit qu'une intégrale du système:

$$Y_1(W) = 0, \qquad Y_2(W) = 0, \qquad Y_3(W) = 0 \tag{32}$$

est l'expression:

$$\psi_2^2\,\psi_3 = \varphi_3^2\,(\varphi_4 - a\,\varphi_1\,\varphi_2) = x_4^2\,[p_4 - a\,(x_1\,x_2 + x_3)]. \tag{33}$$

La connexion (15) peut être prise de la forme:

$$x_4^2\,[p_4 - a\,(x_1\,x_2 + x_3)] = b. \tag{34}$$

Les équations (14), (34) donnent les expressions des dérivées:

$$\begin{aligned} p_1 &= a\,x_2\,x_4 + b, \\ p_2 &= a\,x_1\,x_4, \\ p_3 &= a\,x_4, \\ p_4 &= a\,(x_1\,x_2 + x_3) + \frac{b}{x_4^2} \end{aligned} \tag{35}$$

et, en même temps, la fonction z:

$$z = a\,x_4\,(x_1\,x_2 + x_3) + \frac{b\,(x_1\,x_4 - 1)}{x_4} + c. \tag{36}$$