ADDITION AU MÉMOIRE "SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES FORMÉES AVEC LES ITÉRÉES SUCCESSIVES D'UNE FRACTION RATIONNELLE" (ACTA, TOME 56).

PAR

GASTON JULIA

à PARIS.

Dans le mémoire cité, j'ai étudié l'allure de la convergence d'une série $\sum_0^\infty a_n R_n(z)$, [R_n étant l'itérée d'ordre n d'une fraction rationnelle], dans le domaine $\varDelta_\alpha$ d'un point double indifférent α à multiplicateur $s = R'(\alpha) = +1$, lorsque $R''(\alpha) \neq 0$ et montré que *la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de $\Sigma a_n R_n$ dans tout domaine $\varDelta$ intérieur à $\varDelta_\alpha$* est:

1°. lorsque $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq \infty$, que Σa_n converge.

2°. lorsque $\alpha = 0$, que $\Sigma \frac{a_n}{n}$ converge.

3°. lorsque $\alpha = \infty$, que $\Sigma n a_n$ converge.

Ayant eu besoin, pour une autre recherche, d'étudier le cas plus général d'un point double indifférent α pour lequel $\alpha = R(\alpha)$ et

$$R'(\alpha) = +1, \quad R''(\alpha) = R'''(\alpha) = \cdots = R^{(p)}(\alpha) = 0, \quad \text{avec} \quad R^{(p+1)}(\alpha) \neq 0,$$

j'ai reconnu que la condition nécessaire et suffisante était alors:

1°. lorsque $\alpha \neq 0$ et $\neq \infty$, que Σa_n converge.

2°. lorsque $\alpha = 0$, que $\Sigma \frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}}$ converge.

3°. lorsque $\alpha = \infty$, que $\Sigma n^{\frac{1}{p}} a_n$ converge, et c'est la démonstration de ce fait que fournissent les lignes suivantes.

I. — Supposons d'abord, que α soit point double indifférent *distinct de l'origine et de l'infini,* et annulant $R''(\alpha)$, $R'''(\alpha)$, $\ldots R^{(p)}(\alpha)$ avec $R^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$ (voir Fatou, mémoire cité N° 12). On aura alors l'expression asymptotique suivante de $Z_n = R_n(z)$ *uniformément valable dans tout domaine intérieur au domaine Δ_α de convergence des R_n vers α:*

$$Z_n - \alpha = w_n + \mu_2 w_n^2 + \cdots + \mu_p w_n^p + \mu_{p+1} w_n^{p+1} + \cdots$$

avec

$$w_n = \left[nap + \frac{b}{a} Ln + C(z) + \varepsilon_n\right]^{-\frac{1}{p}},$$

a et b étant des constantes, $C(z)$ une fonction holomorphe dans Δ_α, et $\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{n^{1-\eta}}\right)$ dans tout domaine intérieur à Δ_α.

Un calcul facile prouve que l'on a alors

$$Z_n = \alpha + \frac{\mu'_1}{n^{\frac{1}{p}}} + \frac{\mu'_2}{n^{\frac{2}{p}}} + \cdots + \frac{\mu'_p}{n} + o\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right), \qquad (\mu'_1 \neq 0)$$

la quantité $o\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right)$ étant en $\frac{1}{n}$ infiniment petite d'ordre $< 1 + \frac{1}{p}$, uniformément à l'intérieur de Δ_α, les μ' étant des constantes.

Par suite, si, en un point ζ intérieur à Δ_α, la série $\Sigma a_n R_n(z)$ converge, la série Σb_n converge, en posant

$$b_n = a_n R_n(\zeta).$$

Les $R_n(\zeta)$ tendant vers $\alpha \neq 0$ sont différents de zéro à partir d'un certain rang: On a alors

$$a_n = \frac{b_n}{R_n(\zeta)} = \frac{b_n}{\alpha}\left[1 + \frac{\lambda_1}{n^{\frac{1}{p}}} + \frac{\lambda_2}{n^{\frac{2}{p}}} + \cdots + \frac{\lambda_p}{n} + o\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right)\right],$$

les λ étant des constantes.

Lorsque Σb_n converge, *il en est de même de $\Sigma \frac{b_n}{n^\nu}$ quelque soit ν positif.* En effet on a alors $b_n = B_n - B_{n-1}$ avec

$$\lim_{n=\infty} B_n = B = \sum_0^\infty b_n.$$

Donc

$$\Sigma \frac{b_n}{n^\nu} = \Sigma \frac{B_n - B_{n-1}}{n^\nu} = \Sigma B_n \left[\frac{1}{n^\nu} - \frac{1}{(n+1)^\nu}\right] = \Sigma \frac{B_n}{n^\nu} \cdot \frac{K_n}{n},$$

la quantité K_n étant bornée quelque soit n, car

$$\frac{K_n}{n} = 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\nu} = \frac{\nu}{n} + \cdots \qquad (\text{Donc} \lim_{n=\infty} K_n = \nu).$$

La série $\Sigma \frac{1}{n^{1+\nu}}$ étant convergente, il en sera de même de $\Sigma \frac{B_n K_n}{n^{1+\nu}}$ et par conséquent de $\Sigma \frac{b_n}{n^\nu}$.

Lorsque Σb_n converge, il en résulte donc que Σa_n *converge.* Réciproquement, si Σa_n converge, il résulte de l'expression

$$a_n R_n = a_n \left[\alpha + \frac{\mu'_1}{n^{\frac{1}{p}}} + \cdots + \frac{\mu'_p}{n} + o\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right)\right]$$

et de la convergence de toute série $\Sigma \frac{a_n}{n^\nu}$, $(\nu > 0)$, que $\Sigma a_n R_n$ *converge uniformément dans tout domaine intérieur à* Δ_α. Σa_n *convergente est donc toujours la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de* $\Sigma a_n R_n(z)$ *dans* Δ_α, *domaine d'un point double indifférent* α *distinct de* 0 *et de l'infini.*

II. — *Supposons maintenant* $\alpha = 0$. ζ étant un point distinct[1] d'un antécédent de α, les $R_n(\zeta)$ sont tous $\neq 0$. Supposons que $\Sigma b_n = \Sigma a_n R_n(\zeta)$ soit convergente. On a ici, en reprenant

$$Z_n = w_n + \mu_2 w_n^2 + \cdots,$$

avec

$$w_n = \left[nap + \frac{b}{a} Ln + C(z) + \varepsilon_n\right]^{-\frac{1}{p}},$$

les expressions asymptotiques

$$w_n^k = n^{-\frac{k}{p}} \left[1 + \lambda_k \frac{Ln}{n} + \mu_k \frac{C(z)}{n} + o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right)\right] \cdot \theta_k$$

d'où l'on déduit pour Z_n

[1] Il est bien connu que α *appartient ici à la frontière de* Δ_α. [Voir mon mémoire sur l'itération.] Il n'a donc aucun antécédent intérieur à Δ_α; *tout point* ζ *intérieur à* Δ_α *est donc distinct des antécédents de* α.

$$Z_n = \frac{\text{I}}{n^{\frac{1}{p}}} H\left(n^{-\frac{1}{p}}\right) + \frac{Ln}{n} \cdot \frac{H_1\left(n^{-\frac{1}{p}}\right)}{n^{\frac{1}{p}}} + \frac{C(z)}{n} \cdot \frac{H_2\left(n^{-\frac{1}{p}}\right)}{n^{\frac{1}{p}}} + o\left(\frac{\text{I}}{n^{2+\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right),$$

H, H_1, H_2 étant des fonctions d'un argument holomorphes au voisinage de l'origine, avec $H(\text{o}) \neq \text{o}$. On a, dans ces conditions,

$$a_n = b_n \cdot \frac{\text{I}}{Z_n} = n^{\frac{1}{p}} \cdot b_n \cdot \left[h\left(n^{-\frac{1}{p}}\right) + \frac{Ln}{n} h_1\left(n^{-\frac{1}{p}}\right) + \frac{C(z)}{n} \cdot h_2\left(n^{-\frac{1}{p}}\right) + o\left(\frac{\text{I}}{n^{2-\varepsilon}}\right)\right],$$

les h étant, comme les H, holomorphes autour de l'origine, et $h(\text{o}) \neq \text{o}$.

Il en résulte que

$$\frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}} = b_n \left[\beta_0 + \frac{\beta_1}{n^{\frac{1}{p}}} + \cdots + \frac{\beta_p}{n} + \frac{Ln}{n} \cdot \beta' + \frac{C(z)}{n} \cdot \beta'' + o\left(\frac{\text{I}}{n^{1+\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right)\right],$$

les β étant des constantes.

La série Σb_n étant convergente, il en sera de même de $\Sigma \frac{b_n}{n^\nu}$ pour $\nu > \text{o}$, et aussi de $\Sigma b_n \cdot \frac{Ln}{n}$ comme on l'a prouvé au N° 12 du mémoire des Acta cité précédemment. Evidemment $\Sigma b_n\, o\left(\frac{\text{I}}{n^{1+\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right)$ converge absolument.

La convergence de $\Sigma a_n R_n(z)$ en un point ζ intérieur à Δ_α (quelqu'il soit) entraîne la convergence de $\Sigma \frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}}$.

Réciproquement, si $\Sigma \frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}}$ converge, on a:

$$a_n R_n(z) = \frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}} \left[H + \frac{Ln}{n} \cdot H_1 + \frac{C(z)}{n} \cdot H_2 + o\left(\frac{\text{I}}{n^{2-\varepsilon}}\right)\right]$$

que l'on peut réduire à

$$a_n R_n(z) = \frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}} \left[\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{n^{\frac{1}{p}}} + \cdots + \frac{\gamma_p}{n} + \frac{Ln}{n} \cdot \gamma' + \frac{C(z)}{n} \cdot \gamma'' + o\left(\frac{\text{I}}{n^{1+\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right)\right]$$

et la convergence de $\Sigma \frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}}$ entraîne, en vertu de ce qui précède, celle de tous les termes du type $\Sigma \frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{\gamma_k}{n^{\frac{k}{p}}}$, du type $\Sigma \frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{Ln}{n} \gamma'$, et du type $C(z) \cdot \gamma'' \cdot \Sigma \frac{a_n}{n^{1+\frac{1}{p}}}$.

Donc $\Sigma a_n R_n(z)$ converge uniformément dans tout domaine intérieur à Δ_α et même dans tout domaine, intérieur ou non, où l'expression asymptotique précédente de Z_n est valable uniformément.

La condition nécessaire et suffisante pour la convergence de $\Sigma a_n R_n(z)$ dans le domaine de convergence des R_n vers $\alpha = 0$ où $R(0) = 0$, $R'(0) = 1$, $R''(0) = R'''(0) = \cdots = R^{(p)}(0) = 0$, $R^{(p+1)}(0) \neq 0$ est que $\Sigma \frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}}}$ soit convergente.

III. — Reste à examiner le cas où $\alpha = \infty$. On aurait, en ramenant α à l'origine par $z = \frac{1}{t}$, $R(z) = \frac{1}{\varrho(t)}$, $R_n(z) = \frac{1}{\varrho_n(t)}$ l'expression asymptotique suivante pour les R_n (déduite de celle des ϱ_n étudié au N° II.).

$$Z_n = R_n(z) = n^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{H + \frac{Ln}{n} \cdot H_1 + \frac{C(z)}{n} \cdot H_2 + o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right)},$$

où H, H_1, H_2 sont des fonctions de $n^{-\frac{1}{p}}$ holomorphes au voisinage de l'origine, avec $H(0) \neq 0$.

Supposons $\Sigma a_n R_n(z)$ convergente en un point ζ intérieur à Δ_α et par conséquent[1] non antécédent de $\alpha = \infty$ c'est-à-dire non pôle des R_n et posons $a_n R_n(\zeta) = b_n$.

Il viendra

$$a_n = \frac{b_n}{R_n(\zeta)} = \frac{b_n}{n^{\frac{1}{p}}} \left[H + \frac{Ln}{n} \cdot H_1 + \frac{C(z)}{n} \cdot H_2 + o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right) \right]$$

et, par conséquent

$$n^{\frac{1}{p}} \cdot a_n = b_n \left[\mu_0 + \frac{\mu_1}{n^{\frac{1}{p}}} + \cdots + \frac{\mu_p}{n} + \mu' \cdot \frac{Ln}{n} + \mu'' \cdot \frac{C(z)}{n} + o\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}-\varepsilon}}\right) \right].$$

---

[1] Même observation que dans la note (1) du numéro II; α étant point frontière de Δ_α n'a aucun antécédent à l'intérieur de Δ_α.

La convergence de Σb_n entraîne, en raisonnant comme au N° II, celle de $\Sigma n^{\frac{1}{p}} a_n$ et réciproquement, la convergence de $\Sigma n^{\frac{1}{p}} a_n$ entraîne celle de $\Sigma a_n R_n(z)$, uniformément dans tout domaine de Δ_α, ne contenant pas de pôles des R_n, et où l'expression asymptotique ci-dessus donnée pour Z_n est valable uniformément (en particulier dans tout domaine intérieur à Δ_α).

En définitive, *lorsque* $\alpha = \infty$ *est point double indifférent de* $[z \mid R(z)]$, *au voisinage duquel on a le développement de Laurent*

$$R(z) = z + \frac{r_{p-1}}{z^{p-1}} + \frac{r_p}{z^p} + \cdots \qquad (r_{p-1} \neq 0 \text{ et } p \geq 2),$$

la condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_0^\infty a_n R_n(z)$ *converge dans le domaine* Δ_∞ *est que* $\sum_0^\infty a_n \cdot n^{\frac{1}{p}}$ *soit convergente.*