

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES FONCTIONS DÉRIVABLES D'UNE VARIABLE RÉELLE.

PAR

A. GORNY

à CLERMONT-FERRAND.

Table des matières.

	Pag.
Préface	317
<i>Chapitre I.</i> Quelques inégalités entre les maxima des dérivées successives d'une fonction	319
<i>Chapitre II.</i> Application des inégalités précédentes à l'étude des classes de fonctions indéfiniment dérivables	327
<i>Chapitre III.</i> Sur les fonctions données par l'intégrale de Stieltjès $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} dV(t)$	339
<i>Chapitre IV.</i> Sur la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle limites de suites de fonctions analytiques	345

Préface.

Ce mémoire apporte une contribution à l'étude et à la classification des fonctions d'une variable réelle. Une place relativement importante y est consacrée aux classes de fonctions indéfiniment dérivables. Ces recherches, qui n'ont été abordées d'une manière systématique que depuis peu d'années, doivent leur origine à la théorie des fonctions quasi-analytiques où MM. Denjoy, Carleman et Mandelbrojt, poursuivant des idées de MM. Borel et Hadamard, ont obtenu des résultats d'une grande portée. Cependant l'étude des fonctions quasi-analytiques ne fait pas directement partie de ce travail, c'est plutôt sur les classes générales de fonctions indéfiniment dérivables d'une variable réelle, ainsi que sur la représentation

des fonctions d'une variable réelle par des suites de fonctions analytiques que portent nos efforts.

En partant de certaines inégalités entre les maxima des modules des dérivées d'une fonction de variable réelle, qui sont démontrées au chapitre I, j'énonce dans le chapitre II, quelques résultats concernant les classes de fonctions indéfiniment dérivables. Je donne notamment la condition, nécessaire et suffisante, pour l'identité de deux classes de fonctions définies sur tout l'axe réel, la condition nécessaire étant d'ailleurs celle de M. Mandelbrojt, la démonstration du fait que le produit de deux fonctions d'une telle classe appartient également à cette classe, etc.

Le chapitre III est consacré à l'élaboration de quelques résultats concernant une classe particulière de fonctions définies sur tout l'axe réel, notamment celles qui sont représentables par une intégrale de Stieltjès $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} dV(t)$. J'étudie les limitations de la fonction croissante $V(t)$ en fonction des bornes des dérivées successives de $f(x)$. Ces résultats constituent une extension des évaluations connues, par les travaux de MM. de la Vallée Poussin et Mandelbrojt, des coefficients de Fourier d'une fonction périodique.

Enfin le chapitre IV est consacré à des généralisations, assez faciles, de théorèmes connus de MM. S. Bernstein et de la Vallée Poussin sur la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle suivant la nature de leur meilleure approximation par des polynomes ou des expressions trigonométriques. J'énonce dans ce chapitre quelques théorèmes sur la dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle, limite d'une suite de fonctions analytiques quelconques.

La plupart des résultats obtenus dans ce travail, ont été communiqués à l'Académie des Sciences.¹

Je suis heureux d'exprimer ici ma vive gratitude à M. S. Mandelbrojt, Professeur au Collège de France, qui s'est toujours intéressé à mes recherches et dont les conseils et les encouragements me furent toujours très précieux. Qu'il me soit aussi permis de remercier MM. Hadamard et Montel qui ont bien voulu présenter mes Notes à l'Académie des Sciences.

¹ Comptes rendus, T. 206, 1938, p. 733, 1245 et 1872. T. 208; 1939, p. 1864.

CHAPITRE I.

Quelques inégalités entre les maxima des dérivées successives d'une fonction.

1. Dans ce chapitre nous démontrons quelques inégalités entre les bornes supérieures des dérivées d'une fonction, définie sur un segment fini ou infini. La méthode suivie est celle que j'avais indiquée dans deux Notes aux Comptes rendus¹, où j'ai également donné quelques applications de ces inégalités à l'étude des classes de fonctions indéfiniment dérivables d'une variable réelle. Ces relations furent depuis retrouvées par M. H. Cartan² qui les démontre d'une manière analogue. J'ai adopté dans ce qui suit la forme que leur avait donné M. Cartan.

Des inégalités analogues furent établies par plusieurs auteurs, on pourrait notamment citer des travaux de Landau³, Hadamard⁴, Hardy et Littlewood⁵ et Neder.⁶ Cependant, ou bien, comme c'est le cas des relations de Landau et M. Hadamard, elles ne concernent que les maxima de trois dérivées successives, ou bien, comme dans les travaux de Hardy et Littlewood et ceux de M. Neder, la détermination des coefficients n'est pas faite d'une manière assez avantageuse, ce qui les rend inapplicables pour le but que nous poursuivons, notamment dans l'étude des classes de fonctions indéfiniment dérivables. D'ailleurs même sous leur forme actuelle elles sont certainement susceptibles d'être améliorées, et, en particulier, le facteur exponentiel en k qui figure au second membre des inégalités (11)—(14) peut certainement être réduit, bien que ceci importe peu pour les applications que nous avons en vue. En ce qui concerne notamment l'inégalité (14) pour les fonctions définies sur tout l'axe réel, M. Kolmogoroff a récemment⁷

¹ *Sur les maxima des modules d'une fonction et de ses dérivées* (T. 206, 1938, p. 1245). *Sur les fonctions indéfiniment dérivables* (T. 206, 1938, p. 1872).

² H. Cartan, *Sur les inégalités entre les maxima des dérivées successives d'une fonction*. Comptes rendus T. 208, 1939, p. 414.

³ Landau, *Einige Ungleichungen für zweimal differentiiierbare Funktionen*. Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Vol. 13, 1913.

⁴ Hadamard, *Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées*. Société mathématique de France, Comptes rendus des Séances de l'année 1914.

⁵ Hardy et Littlewood, *Contribution to the arithmetic theory of series*. Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Vol. 11, part 6, 1912.

⁶ Neder, *Abschätzungen für die Ableitungen einer reellen Funktion eines reellen Arguments*. Mathematische Zeitschrift T. 31, 1930.

⁷ Kolmogoroff, *Une généralisation de l'inégalité de M. J. Hadamard entre les bornes supérieures des dérivées successives d'une fonction*. Comptes rendus, T. 207, 1938, p. 764.

précisé notre résultat. Dans la relation définitive qu'il obtient le facteur exponentiel $16(2e)^k$ est remplacé par une constante inférieure à $\frac{\pi}{2}$ pour toutes les valeurs de n et k . Sa méthode paraît être essentiellement différente de celle que nous avons suivie.

2. Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x , possédant une dérivée n -ième bornée dans l'intervalle $[0, 1]$. Désignons par M_0, M_1, \dots, M_n , la suite des maxima de la fonction et de ses dérivées dans l'intervalle considéré:

$$\max |f(x)| = M_0, \max |f'(x)| = M_1, \dots, \max |f^{(n)}(x)| = M_n.$$

Soit $P_{n-1}(x)$ le polynôme de meilleure approximation¹ de degré $n - 1$ de $f(x)$ dans notre intervalle, c'est-à-dire le polynôme qui s'écarte le moins de $f(x)$ sur le segment fermé $[0, 1]$. On sait que la différence $f(x) - P_{n-1}(x)$ atteint le maximum de sa valeur absolue avec des signes alternés en $n + 1$ points de l'intervalle et, par conséquent, cette différence s'annule n fois au moins dans ce même intervalle. En remarquant que le polynôme identiquement égal à zéro s'écarte de M_0 de la fonction $f(x)$, on trouve

$$|P_{n-1}(x)| \leq 2M_0.$$

Posons

$$f(x) = P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x),$$

et dérivons k fois ($k < n$) les deux membres, on a

$$f^{(k)}(x) = P_{n-1}^{(k)}(x) + R_{n-1}^{(k)}(x),$$

$$|f^{(k)}(x)| \leq |P_{n-1}^{(k)}(x)| + |R_{n-1}^{(k)}(x)|.$$

D'après ce qu'on vient de voir $P_{n-1}(x)$ peut être considéré comme polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[0, 1]$. On en déduit, par suite d'une évaluation connue de la dérivée k -ième du reste,

$$|R_{n-1}^{(k)}(x)| < \frac{M_n}{(n-k)!}.$$

¹ Voir pour ce qui concerne les propriétés des polynômes de la meilleure approximation: De la Vallée Poussin, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, p. 74 et suiv. S. Bernstein, *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques* (Collection Borel).

3. Pour avoir une borne supérieure de $P_{n-1}^{(k)}(x)$ nous utiliserons les importantes relations de Markoff et Bernstein qui donnent le maximum de la dérivée d'ordre k d'un polynôme de degré n sur un segment.¹ Soit $P_n(x)$ un polynôme de degré n . Si le module maximum de ce polynôme sur un segment de longueur $2h$ est égal à M on a alors aux extrémités de cet intervalle (et aussi dans tout l'intervalle)

$$(1) \quad |P_n^{(k)}(x)| \leq \frac{2^k n(n+k-1)! k!}{h^k(n-k)! (2k)!} M,$$

tandis qu'au milieu de l'intervalle on a les inégalités

$$(2) \quad |P_n^{(2p+1)}(x)| \leq \frac{2^{2p}(2n+1)(n+p)!}{h^{2p+1}(n-p)!} M,$$

$$(2') \quad |P_n^{(2p)}(x)| \leq \frac{2^{2p} 2n(n+p-1)!}{h^{2p}(n-p)!} M.$$

Observons ici qu'il résulte de ces relations que l'ordre du module de la dérivée d'un polynôme est plus grand aux extrémités de l'intervalle qu'en un point intérieur, on trouve, en effet, qu'aux extrémités la croissance du module de la dérivée k -ième peut être de l'ordre de n^{2k} , tandis qu'au milieu de l'intervalle elle n'est que de l'ordre de n^k . Cette distinction entre l'intervalle ouvert et l'intervalle fermé se retrouvera à plusieurs reprises dans la suite de ce travail.

4. Les inégalités (1) donnent

$$|P_{n-1}^{(k)}(x)| \leq \frac{2^{2k}(n-1)(n+k-2)! k!}{(n-k-1)! (2k)!} 2M_0,$$

pour toute valeur de x dans l'intervalle fermé $[0, 1]$, et finalement on trouve

$$(3) \quad |f^{(k)}(x)| \leq \frac{2^{2k+1}(n-1)(n+k-2)! k!}{(n-k-1)! (2k)!} M_0 + \frac{M_n}{(n-k)!},$$

pour $0 \leq x \leq 1$, $0 < k < n$.

¹ Ces importantes inégalités ont été déduites des recherches sur les polynômes extrémales par des considérations assez délicates. Voir S. Bernstein *Leçons sur les propriétés extrémales* ... p. 28 et suiv. Comme l'a montré M. Montel on peut obtenir des inégalités analogues, qui, bien qu'étant moins précises, suffisent cependant pour notre but, par des considérations plus simples de la théorie des fonctions. Voir P. Montel. *Sur les polynômes d'approximation*, Bulletin de la société mathématique de France t. 46, 1918.

Simplifions l'expression des coefficients de M_0 et M_n dans le second membre de l'inégalité précédente.

On a

$$(n-1)(n+k-2)! < (n+k-1)!$$

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-k-1)!} < n^{2k}$$

on a aussi

$$k! < \sqrt{2\pi} k^{k+1/2} e^{-k+\frac{1}{12}}$$

$$(2k)! > \sqrt{2\pi} (2k)^{2k+1/2} e^{-2k}$$

$$\begin{aligned} (n-k)! &= \frac{n!}{n(n-1)\dots(n-k+1)} = \frac{n!}{n^k \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)} \\ &> \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n^k} > n^{n-k} e^{-n} \end{aligned}$$

et finalement la relation (3) devient

$$(4) \quad M_k < 2 \frac{n^{2k}}{k^k} e^k M_0 + \frac{M_n e^n}{n^{n-k}}$$

Considérons maintenant la fonction $f_1(x) = f(ax)$ où a est compris entre 0 et 1. Cette fonction est encore dérivable sur le segment $[0, 1]$ et on a

$$f_1^{(k)}(x) = a^k f^{(k)}(ax), \quad f_1^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax),$$

et l'application de l'inégalité (4) à la fonction $f_1(x)$ donne

$$(5) \quad M_k < 2 \frac{n^{2k}}{k^k} e^k a^{-k} M_0 + \frac{M_n e^n a^{n-k}}{n^{n-k}}$$

Cherchons le minimum du second membre pour les valeurs de a comprises entre 0 et 1.

On a évidemment

$$M_k < 4 \max \left(\frac{n^{2k} e^k a^{-k} M_0}{k^k}, \frac{M_n e^n a^{n-k}}{n^{n-k}} \right).$$

Or des deux fonctions de a qui figurent au second membre de l'inégalité précédente, la première est décroissante et la seconde croissante et il est facile de voir,

en représentant graphiquement ces deux fonctions, qu'on obtiendra la meilleure expression pour le second membre en donnant à a la valeur correspondant au point d'intersection, dans le cas où cette valeur appartient à l'intervalle $[0, 1]$, ou bien, en posant $a = 1$ dans la première fonction, si la valeur correspondante au point d'intersection est en dehors de l'intervalle, on trouve ainsi

$$M_k < 4 \frac{n^{2k}}{k^k} M_0 a^{-k},$$

où

$$a = \min \left[1, \left(\frac{n^{n+k} M_0}{k^k e^{n-k} M_n} \right)^{\frac{1}{n}} \right].$$

Comme, pour $1 \leq k \leq n$,

$$\left(\frac{ne}{k} \right)^k > ne$$

et comme le second membre est une fonction décroissante de a , on trouve

$$M_k < 4 \frac{n^{2k}}{k^k} e^k M_0 \alpha^{-k},$$

avec

$$\alpha = \min \left[1, \left(\frac{n^n M_0}{e^n M_n} \right)^{\frac{1}{n}} \right],$$

ce qui peut également s'écrire

$$M_k < 4 \frac{n^{2k}}{k^k} e^k M_0 \beta^k,$$

avec

$$\begin{aligned} \beta &= \max \left[1, \left(\frac{e^n M_n}{n^n M_0} \right)^{\frac{1}{n}} \right] = \\ &= \frac{M_0^{-\frac{1}{n}} e}{n} \max \left[(n^n M_0 e^{-n})^{\frac{1}{n}}, M_n^{\frac{1}{n}} \right] \\ &< \frac{M_0^{-\frac{1}{n}} e}{n} \max \left[(n! M_0)^{\frac{1}{n}}, M_n^{\frac{1}{n}} \right], \end{aligned}$$

car

$$n! > n^n e^{-n}.$$

D'où l'on tire finalement

$$M_k < 4 \left(\frac{n}{k}\right)^k e^{2k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}},$$

M'_n designant la plus grande des deux quantités M_n et $M_0 n!$.

Nous avons supposé que l'intervalle de définition de la fonction avait la longueur 1, il est facile d'obtenir une inégalité valable pour un intervalle de longueur quelconque δ en considérant la fonction $f(\delta x)$ dans l'intervalle $(0, 1)$; on trouve

$$(6) \quad M_k < 4 \left(\frac{n}{k}\right)^k e^{2k} M_0^{1-\frac{k}{n}} M'_n \frac{k}{n},$$

$$M' = \max [M_n, M_0 n! \delta^{-n}].$$

En particulier, si la fonction $f(x)$ est définie sur un intervalle de longueur infinie, on a

$$(7) \quad M_k \leq 4 e^{2k} \left(\frac{n}{k}\right)^k M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}},$$

M_0, M_k, M_n désignant cette fois-ci les bornes supérieures de $|f(x)|, |f^{(k)}(x)|$ et $|f^{(n)}(x)|$.

5. On obtient des inégalités analogues, valables pour le milieu du segment, en partant des relations correspondantes pour les polynomes. Soit, en effet, $f(x)$ une fonction possédant une dérivée d'ordre n dans un intervalle de longueur 2. Posons encore

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

$P_n(x)$ étant le polynome de meilleure approximation de degré n de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle considéré. On aura, en particulier, au milieu du segment

$$|f^{(2p+1)}(x)| \leq |P_n^{(2p+1)}(x)| + |R_n^{(2p+1)}(x)|;$$

or, en vertu des relations de Bernstein et Markoff, on a

$$|P_n^{(2p+1)}(x)| \leq \frac{2^{2p} (n+p)! (2n+1)}{(n-p)!} {}_2 M_0$$

et comme

$$\begin{aligned} \frac{(n+p)!}{(n-p)!} &= (n+p)(n+p-1)\dots(n-p+1) \\ &= (n+p) n^{2p-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) < 2 n^{2p} \end{aligned}$$

on a finalement

$$|P_n^{(2p+1)}(x)| < 2^{2p+4} n^{2p+1} M_0;$$

comme, d'autre part,

$$|R_n^{(2p+1)}(x)| \leq \frac{M_n}{(n-2p)!} < \frac{M_n e^n}{n^{n-2p-1}}$$

on trouve donc finalement, pour le milieu du segment

$$|f^{(2p+1)}(x)| < 2^{2p+4} n^{2p+1} M_0 + \frac{M_n e^n}{n^{n-2p-1}}.$$

La même inégalité a d'ailleurs aussi lieu pour la dérivée d'ordre $2p$, comme on le voit par un calcul analogue, donc

$$|f^{(k)}(x)| < 2^{k+3} n^k M_0 + \frac{M_n e^n}{n^{n-k}} \quad (0 < k < n)$$

d'où l'on tire, comme dans le cas du segment fermé,

$$|f^{(k)}(x)| < 2^{k+3} n^k M_0 a^{-k} + \frac{M_n e^n a^{n-k}}{n^{n-k}}, \quad (0 \leq a \leq 1),$$

$$|f^{(k)}(x)| < 2 \max \left(2^{k+3} n^k M_0 a^{-k}, \frac{M_n e^n a^{n-k}}{n^{n-k}} \right),$$

$$|f^{(k)}(x)| < 2^{k+4} n^k M_0 a^{-k},$$

où

$$\alpha = \min \left[1, \left(\frac{2^{k+3} n^n M_0 e^{-n}}{M_n} \right)^{\frac{1}{n}} \right]$$

et finalement

$$(8) \quad |f^{(k)}(x)| < 16 (2e)^k M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$$

avec

$$M'_n = \max (M_n, M_0 n!).$$

De même, on trouvera, dans le cas d'un intervalle de longueur 2δ , au milieu de l'intervalle

$$(9) \quad |f^{(k)}(x)| < 16 (2e)^k M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$$

avec

$$M' = \max (M_n, M_0 n! \delta^{-n}).$$

En particulier, si la fonction est définie sur tout l'axe réel, on en déduit, en considérant un intervalle de longueur 2δ autour du point d'abscisse x , qu'on a alors pour toute valeur de x

$$|f^{(k)}(x)| < 16(2e)^k M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$$

et, en faisant tendre δ vers l'infini, on trouve finalement

$$(10) \quad |f^{(k)}(x)| < 16(2e)^k M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

où M_i est maintenant la borne supérieure de $|f^{(i)}(x)|$.

6. Résumons les résultats obtenus¹

Théorème. Soit $f(x)$ une fonction n fois dérivable définie sur un intervalle fermé I de longueur δ , et soit

$$|f(x)| \leq M_0, \quad |f^{(n)}(x)| \leq M_n;$$

on a pour toute valeur de x de l'intervalle I et lorsque $0 < k < n$

$$(11) \quad |f^{(k)}(x)| < 4e^{2k} \left(\frac{n}{k}\right)^k M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}},$$

tandis qu'au milieu de l'intervalle on a:

$$(12) \quad |f^{(k)}(x)| < 16(2e)^k M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}},$$

avec

$$M_n = \max(M_n, M_0 n! \delta^{-n}),$$

δ désignant la longueur de l'intervalle.

En particulier, si la fonction est définie sur un demi-axe, on a

$$(13) \quad |f^{(k)}(x)| < 4e^{2k} \left(\frac{n}{k}\right)^k M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}, \quad (0 \leq x < +\infty),$$

et, dans le cas où la fonction est définie sur tout l'axe, on a

$$(14) \quad |f^{(k)}(x)| < 16(2e)^k M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}.$$

M_0 et M_n désignent respectivement, dans les deux dernières relations, les bornes supérieures de $|f(x)|$ et de $|f^{(n)}(x)|$.

¹ Voir Gorny, Comptes rendus, 206, 1938, p. 1245 et 1872 et H. Cartan, Comptes rendus 208, 1939, p. 416, l'énoncé donné ici est, à la valeur des constantes près, celui de M. Cartan.

CHAPITRE II.

Application des inégalités précédentes à l'étude des classes de fonctions indéfiniment dérivables.

1. Considérons l'ensemble de fonctions de la variable réelle x définies et indéfiniment dérivables dans l'intervalle fermé $[a, b]$ et y satisfaisant aux limitations

$$|f^{(n)}(x)| \leq c^n m_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

m_n étant une suite de nombres positifs et c une constante indépendante de n . Un tel ensemble de fonctions indéfiniment dérivables sera dit *Classe* $\{m_n\}$ *de fonctions*. Comme exemples de telles classes citons la classe des fonctions analytiques sur le segment fermé $[a, b]$, qu'on obtiendra en posant $m_n = n!$ ou bien les classes de fonctions quasi-analytiques de MM. Denjoy et Carleman, etc.

Parmi les applications que les inégalités trouvées dans le chapitre précédent sont susceptibles de fournir, il y a d'abord lieu de mentionner la réponse à la question suivante:

Quelle est la condition, nécessaire et suffisante, pour que deux classes de fonctions indéfiniment dérivables $\{m_n\}$ et $\{m'_n\}$ soient identiques, c'est-à-dire pour que toute fonction d'une des classes appartienne également à l'autre et inversement.

Dans ce qui suit nous répondons à cette question dans le cas le plus simple, où l'intervalle de définition de la classe comprend tout l'axe réel¹.

Cette condition peut s'énoncer de la manière suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour que les classes $\{m_n\}$ et $\{m'_n\}$ soient identiques est qu'on ait $0 < \alpha < \sqrt[n]{\frac{\bar{m}_n}{\bar{m}'_n}} < \beta < \infty$, \bar{m}_n et \bar{m}'_n étant les termes des plus grandes suites dont le logarithme est convexe et qui sont inférieures aux termes des suites m_n et m'_n .

Le fait que cette condition est nécessaire a été établi par M. Mandelbrojt;

¹ Signalons à ce propos que dans plusieurs Notes récentes aux C. R. (t. 208, 1939) MM. Mandelbrojt et H. Cartan, en se basant sur les inégalités développées au chapitre précédent, ont réussi à donner une réponse complète à cette question dans le cas d'un intervalle fini, ouvert ou fermé. Au lieu des suites dont le logarithme est convexe \bar{m}_n et \bar{m}'_n déduites de la considération du polygone de Newton, dont il sera question plus tard, on fait ici intervenir d'autres suites *réctifiées* dont la définition est d'ailleurs également due à M. Mandelbrojt (Voir par exemple l'ouvrage *Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions* p. 95 et suiv. et *La régularisation des fonctions*. Hermann, Paris 1938.)

nous en donnons ici une nouvelle démonstration, qui présente, croyons nous, un certain intérêt vu le nouveau lemme que nous employons à cet effet.

Nous rappelons dans ce qui suit la définition des suites \bar{m}_n et \bar{m}'_n à l'aide du polygone de Newton.

La suffisance de la condition précédente résulte sans difficulté des inégalités du chapitre précédent, tandis que pour montrer que cette condition est également nécessaire, nous nous servons du lemme suivant, qui constitue la réciproque de ces inégalités:

Quelle que soit la suite A_n dont le logarithme est convexe, on peut déterminer une fonction $f(x)$ indéfiniment dérivable sur tout l'axe réel et satisfaisant aux limitations

$$A_n \leq \max |f^{(n)}(x)| \leq c^{n+1} A_n,$$

c étant une constante numérique indépendante de la suite A_n .

L'inégalité (14) du chapitre I et sa réciproque caractérisent ainsi, d'une manière assez satisfaisante pour notre but, la suite des bornes supérieures des modules des dérivées successives d'une fonction définie sur tout l'axe réel.

Une autre question qui est abordée dans ce chapitre est la suivante: le produit de deux fonctions d'une classe $\{m_n\}$ appartient-il encore à cette même classe? Tandis que la réponse est, comme nous le montrons, affirmative dans le cas d'un intervalle infini, il n'en est plus de même, en général, dans le cas d'un intervalle de longueur finie.

2. Rappelons d'abord la définition du polygone de Newton attaché à une suite¹. Soit $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ une suite de termes, représentons graphiquement cette suite dans le plan xOy , en faisant correspondre au terme u_n le point de coordonnées (n, u_n) , et considérons une demi-droite passant par le point $A_0(O, u_0)$ et orientée suivant la direction négative de Oy ; faisons ensuite tourner notre droite dans le sens positif autour du point A_0 jusqu'à sa première rencontre avec un autre point de la suite. Soit A_1 le dernier point de la suite qui se trouve alors sur la demi-droite; le segment A_0A_1 formera le premier côté du polygone de Newton. Faisons ensuite tourner la demi-droite dans le même sens autour de A_1 jusqu'à sa rencontre suivante avec les points de la suite; nous obtiendrons ainsi le segment A_1A_2 qui formera le deuxième côté du polygone, et ainsi de suite... Nous obtenons ainsi le polygone de Newton de la suite

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

¹ Voir Hadamard, Journal de Mathématiques 1893, p. 174.

Désignons par u'_n l'ordonnée, correspondant à l'abscisse n , de la ligne polygonale obtenue; on a évidemment $u'_n \leq u_n$, les u'_n formant la plus grande suite convexe dont les termes sont inférieures aux termes de la suite u_n .

On voit d'ailleurs qu'on a

$$u'_n = \underline{\text{borne}}_{\substack{k \geq 0, l \geq 0}} \left(\frac{k u_{n-l} + l u_{n+k}}{k + l} \right) \quad (l \leq n)$$

(dans le cas où k et l sont nuls simultanément on remplacera $\frac{k u_{n-l} + l u_{n+k}}{k + l}$ par u_n).

Il en résulte que si u_n et v_n sont deux suites telles que $u_n \leq v_n$, on a aussi $u'_n \leq v'_n$, et que la suite de Newton de la suite $n\alpha + u_n$, où α est une constante, est égale à $n\alpha + u'_n$. On a en effet

$$\begin{aligned} (n\alpha + u_n)' &= \underline{\text{borne}}_{\substack{k \geq 0, l \geq 0}} \left[\frac{k [n-l]\alpha + u_{n-l} + l [(n+k)\alpha + u_{n+k}]}{k + l} \right] = \\ &= \underline{\text{borne}} \left(n\alpha + \frac{k u_{n-l} + l u_{n+k}}{k + l} \right) \\ &= n\alpha + \underline{\text{borne}} \left(\frac{k u_{n-l} + l u_{n+k}}{k + l} \right) = n\alpha + u'_n. \end{aligned}$$

Soit maintenant $\{A_n\}$ une suite de nombres positifs; considérons la suite $\{\log A_n\}$ et la suite de Newton correspondante $(\log A_n)'$, et soit $\bar{A}_n = e^{(\log A_n)'}$; nous appellerons $\{\bar{A}_n\}$ la suite rectifiée de la suite $\{A_n\}$.

On a évidemment, d'après ce qui précède,

$$\bar{A}_n = \underline{\text{borne}} \left(A_{n+k}^{\frac{l}{k+l}} A_{n-l}^{\frac{k}{k+l}} \right), \quad (k \geq 0, 0 \leq l \leq n)$$

et $\overline{c_n A^n} = c^n \bar{A}_n$, c ne dépendant pas de n , et si $A_n \leq B_n$, on a aussi $\bar{A}_n \leq \bar{B}_n$.

Il est maintenant facile de voir que la proposition (14) du chapitre I peut s'énoncer de la manière suivante:

Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable sur tout l'axe $(-\infty < x < +\infty)$, supposons qu'on ait pour la fonction et ses dérivées les inégalités $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), on a alors nécessairement, pour tout k entier positif:

$$(1) \quad |f^{(k)}(x)| < c^k \bar{M}_k$$

où \bar{M}_k désigne la suite rectifiée de la suite M_n et où c est une constante numérique ($c < 100$).

3. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant:

Théorème. Une condition nécessaire et suffisante pour que deux classes $\{m_n\}$ et $\{m'_n\}$ de fonctions, définies pour toutes les valeurs positives ou négatives de x , $(-\infty < x < +\infty)$, soient équivalentes est que l'on ait

$$(2) \quad 0 < \alpha < \sqrt[n]{\frac{\bar{m}_n}{\underline{m}_n}} < \beta < \infty.$$

Démonstration. La condition est suffisante. Soit, en effet, $f(x)$ une fonction appartenant à la classe $\{m_n\}$, montrons que, sous l'hypothèse $\bar{m}_n < \beta^n \underline{m}'_n$, cette fonction appartient également à la classe $\{m'_n\}$.

M_n désignant la borne supérieure de $|f^{(n)}(x)|$ pour $(-\infty < x < +\infty)$, on a, d'après la relation (1), les propriétés signalés des suites rectifiées et en tenant compte de la définition des classes $\{m_n\}$ et $\{m'_n\}$

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(x)| &\leq M_n < c^n \bar{M}_n < c^n \alpha^n \bar{m}_n \\ &= (c\alpha)^n \bar{m}_n < (c\alpha\beta)^n \underline{m}'_n \leq (c\alpha\beta)^n m'_n, \end{aligned}$$

c , α et β étant des constantes. La fonction $f(x)$ appartient donc aussi à la classe $\{m'_n\}$, ce qui prouve que la condition est suffisante.

4. La condition est nécessaire. Démontrons la proposition suivante:

Soit A_n une suite de termes dont le logarithme est convexe, on peut construire une fonction $F(x)$ indéfiniment dérivable pour toutes les valeurs de x et telle qu'on ait

$$(3) \quad A_n \leq \max |F^{(n)}(x)| \leq 10.4^n \cdot A_n$$

quel que soit $n \geq 0$.

La suite $\log A_n$ étant convexe, on a, pour tout $k \geq 1$,

$$A_k^2 \leq A_{k-1} A_{k+1},$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} \geq \frac{A_k}{A_{k-1}},$$

c'est-à-dire que la suite $\frac{A_{k+1}}{A_k}$ est croissante. Nous supposons pour fixer les idées que $\frac{A_{k+1}}{A_k}$ est supérieur à un, ce qui est sans importance dans la démonstration qui suit.

La suite $\frac{A_{k+1}}{A_k}$ tend pour k augmentant indéfiniment vers une limite finie ou infinie. Supposons d'abord que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_{k+1}}{A_k} = \infty,$$

et considérons la suite

$$1, 2, 4, \dots, 2^n, 2^{n+1}, \dots$$

Envisageons les termes de la suite croissante $\frac{A_{k+1}}{A_k}$, qui se trouvent dans un des intervalles

$$[1, 2], [2, 4], \dots, [2^n, 2^{n+1}], \dots$$

Soit $[2^{n_0}, 2^{n_0+1}]$ le premier de ces intervalles contenant les termes

$$\frac{A_1}{A_0}, \frac{A_2}{A_1}, \dots, \frac{A_{n_1}}{A_{n_1-1}},$$

c'est-à-dire

$$2^{n_0} \leq \frac{A_1}{A_0} \leq \frac{A_2}{A_1} \leq \dots \leq \frac{A_{n_1}}{A_{n_1-1}} \leq 2^{n_0+1}.$$

Soit de même $[2^{n_1}, 2^{n_1+1}]$ l'intervalle suivant contenant les termes

$$\frac{A_{n_1+1}}{A_{n_1}}, \dots, \frac{A_{n_2}}{A_{n_2-1}},$$

.....

$[2^{n_k}, 2^{n_k+1}]$ le k -ième intervalle contenant les termes

$$\frac{A_{n_k+1}}{A_{n_k}}, \frac{A_{n_k+2}}{A_{n_k+1}}, \dots, \frac{A_{n_{k+1}}}{A_{n_{k+1}-1}}$$

et ainsi de suite.

On a finalement la disposition suivante:

$$\begin{aligned} 1 \leq 2^{n_0} \leq \frac{A_1}{A_0} \leq \frac{A_2}{A_1} \leq \dots \leq \frac{A_{n_1}}{A_{n_1-1}} \leq 2^{n_0+1} \leq 2^{n_1} \leq \frac{A_{n_1+1}}{A_{n_1}} \leq \dots \leq \frac{A_{n_2}}{A_{n_2-1}} \leq \\ \leq 2^{n_1+1} \leq 2^{n_2} \leq \dots \leq 2^{n_k} \leq \frac{A_{n_k+1}}{A_{n_k}} \leq \dots \leq \frac{A_{n_{k+1}}}{A_{n_{k+1}-1}} \leq 2^{n_k+1} \leq \dots \end{aligned}$$

avec

$$1 \leq n_0 < n_1 < \dots < n_k < \dots$$

Posons

$$\lambda_k = \left(\frac{A_{n_{k+1}}}{A_{n_k}} \right)^{\frac{1}{n_{k+1} - n_k}};$$

on a

$$A_{n_{k+1}} = A_{n_k} \lambda_k^{n_{k+1} - n_k} = A_{n_p} \prod_{l=p}^k \lambda_l^{n_{l+1} - n_l} \quad (p \leq k).$$

Comme on a, d'autre part,

$$\frac{A_{n_{k+1}}}{A_{n_k}} = \frac{A_{n_{k+1}}}{A_{n_{k+1}-1}} \cdot \frac{A_{n_{k+1}-1}}{A_{n_{k+1}-2}} \cdots \frac{A_{n_{k+1}}}{A_{n_k}},$$

on trouve:

$$2^{n_k (n_{k+1} - n_k)} \leq \frac{A_{n_{k+1}}}{A_{n_k}} \leq 2^{(n_k+1)(n_{k+1} - n_k)},$$

donc:

$$2^{n_k} \leq \lambda_k \leq 2^{n_k+1},$$

et si

$$n_k \leq n \leq n_{k+1},$$

on a

$$2^{n_k (n - n_k)} \leq \frac{A_n}{A_{n_k}} \leq 2^{(n_k+1)(n - n_k)},$$

c'est-à-dire:

$$A_{n_k} 2^{n_k (n - n_k)} \leq A_n \leq A_{n_k} 2^{(n_k+1)(n - n_k)}.$$

Considérons à présent la fonction périodique

$$f_k(x) = A_{n_k} \frac{\cos \lambda_k x}{\lambda_k^{n_k}}.$$

On a:

$$\max |f_k^{(n_k)}(x)| = A_{n_k}, \quad \max |f_k^{(n_{k+1})}(x)| = A_{n_{k+1}}.$$

Soit, pour $n_k \leq n \leq n_{k+1}$,

$$A_n^{(k)} = \max |f_k^{(n)}(x)|;$$

on trouve

$$A_n^{(k)} = A_{n_k} \lambda_k^{n - n_k},$$

d'où l'on tire

$$A_{n_k} 2^{n_k (n - n_k)} \leq A_n^{(k)} \leq A_{n_k} 2^{(n_k+1)(n - n_k)},$$

$$1 \leq \frac{A_n^{(k)}}{A_n} \leq \frac{2^{(n_k+1)(n - n_k)}}{2^{n_k (n - n_k)}},$$

$$1 \leq \frac{A_n^{(k)}}{A_n} \leq 2^{n - n_k} < 2^n.$$

Considérons maintenant la fonction

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{n_k} \cos \lambda_k x}{\lambda_k^{n_k}}.$$

Envisageons une dérivée d'ordre pair n , $n_k \leq n < n_{k+1}$, pour fixer les idées, et posons

$$\begin{aligned} f(x) &= A_{n_k} \frac{\cos \lambda_k x}{\lambda_k^{n_k}} + A_{n_{k+1}} \frac{\cos \lambda_{k+1} x}{\lambda_{k+1}^{n_{k+1}}} + \sum_{p=0}^{k-1} A_{n_p} \frac{\cos \lambda_p x}{\lambda_p^{n_p}} + \sum_{p=k+2}^{\infty} A_{n_p} \frac{\cos \lambda_p x}{\lambda_p^{n_p}} \\ &= f_1^*(x) + f_2^*(x) + F_1(x) + F_2(x). \end{aligned}$$

Pour $x = 0$ tous les termes sont du même signe et atteignent le maximum de leur module, de même que leurs dérivées d'ordre pair.

Comme on vient de voir, on a

$$A_n \leq \max |f_1^{*(n)}(x)| \leq 2^n A_n;$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \max |f_2^{*(n)}(x)| &= A_{n_{k+1}} \lambda_{k+1}^{n-n_{k+1}} = \\ &= A_n \frac{A_{n_{k+1}}}{A_n} \cdot \lambda_{k+1}^{n-n_{k+1}} \leq A_n 2^{(n_k+1)(n_{k+1}-n) + (n_k+1)(n-n_{k+1})} = A_n \end{aligned}$$

(en tenant compte de la relation $\lambda_k \leq 2^{n_k+1} \leq \lambda_{k+1}$).

On trouve de même

$$\begin{aligned} \max |F_1^{(n)}(x)| &= \sum_{p=0}^{k-1} A_{n_p} \lambda_p^{n-n_p} \leq \sum_{p=0}^{k-1} A_{n_p} \lambda_p^{n_{p+1}-n_p} \lambda_p^{n_{p+2}-n_{p+1}} \dots \lambda_k^{n-n_k} \\ &= \sum_{p=0}^{k-1} A_{n_k} \lambda_k^{n-n_k} < k A_n 2^n < n 2^n A_n. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \max |F_2^{(n)}(x)| &= \sum_{p=k+2}^{\infty} A_{n_p} \lambda_p^{n-p} \\ &= \sum_{p=k+2}^{\infty} A_{n_k} \lambda_k^{n-n_k} \lambda_k^{n_{k+1}-n} \lambda_{k+1}^{n_{k+2}-n_{k+1}} \dots \lambda_{p-1}^{n_{p-1}-n_{p-1}} \lambda_p^{n-n_p} = \\ &= \sum_{p=k+2}^{\infty} (A_{n_k} \lambda_k^{n-n_k}) \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_p}\right)^{n_{k+1}-n} \left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_p}\right)^{n_{k+2}-n_{k+1}} \dots \left(\frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p}\right)^{n_{p-1}-n_{p-1}}, \end{aligned}$$

et il résulte d'autre part des relations $2^{np} \leq \lambda_p \leq 2^{n_{p+1}}$ que tous les rapports

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_p}, \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_p}, \dots, \frac{\lambda_{p-2}}{\lambda_p}$$

sont inférieurs à $\frac{1}{2}$.

On en déduit

$$|F_{\frac{1}{2}}^{(n)}(x)| < 2^n A_n \sum_{p=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^{n_{p-1}-n}} \leq 2^n A_n.$$

Finalement on tire de ce qui précède

$$A_n \leq \max |f^{(n)}(x)| \leq \max |f_1^{**}(x)| + \max |f_2^{**}(x)| + \max |F_1(x)| + \max |F_2(x)|,$$

$$A_n \leq \max |f^{(n)}(x)| \leq 2^n A_n + n 2^n A_n + 2 \cdot 2^n A_n \leq (3 + n) 2^n A_n,$$

où n est nombre pair, l'inégalité à droite étant d'ailleurs vraie pour toutes les valeurs de n .

On voit de la même manière que la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{n_k} \frac{\sin \lambda_k x}{\lambda_k^{n_k}}$$

satisfait pour les valeurs impaires de n aux mêmes inégalités.

Comme d'autre part, pour $x=0$, la dérivée d'ordre n d'une des fonctions est toujours nulle, la dérivée du même ordre de l'autre atteignant alors son maximum, on trouve facilement qu'en posant,

$$F(x) = f(x) + \varphi(x),$$

on aura

$$A_n \leq \max |F^{(n)}(x)| \leq 10.4^n A_n,$$

et notre proposition est démontrée.

Examinons maintenant encore rapidement le cas où $\frac{A_{k+1}}{A_k}$ tend vers une limite finie λ .

Soient encore, comme précédemment,

$$[2^{n_0}, 2^{n_0+1}], [2^{n_1}, 2^{n_1+1}], \dots, [2^{n_p}, 2^{n_p+1}]$$

les intervalles, en nombre fini, contenant des termes de la suite $\frac{A_{k+1}}{A_k}$, le nombre λ faisant partie du dernier intervalle. On a

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_{k+1}}{A_k} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{A_m}{A_{n_p}} \right)^{\frac{1}{m-n_p}}, \quad 2^{n_p} \leq \lambda \leq 2^{n_p+1}.$$

Comme dans le raisonnement ci-dessus, on voit que la fonction

$$F(x) = \sum_{k=0}^p A_{n_k} \frac{\cos \lambda_k x}{\lambda_k^{n_k}} + \sum_{k=0}^p A_{n_k} \frac{\sin \lambda_k x}{\lambda_k^{n_k}}$$

où, comme précédemment,

$$\lambda_k = \left(\frac{A_{n_{k+1}}}{A_{n_k}} \right)^{\frac{1}{n_{k+1} - n_k}},$$

pour $0 \leq k < p$, et $\lambda_p = \lambda$, satisfait aux conditions de l'énoncé: Ce qui démontre notre proposition dans tous les cas;

Il est maintenant facile de voir que la condition

$$0 < \alpha < \sqrt[n]{\frac{\bar{m}_n}{\bar{m}'_n}} < \beta < \infty$$

est nécessaire pour que les deux classes $\{m_n\}$ et $\{m'_n\}$ soient identiques.

Le logarithme de la suite \bar{m}_n est, en effet, convexe, nous pouvons donc construire une fonction $\omega(x)$ satisfaisant aux inégalités

$$(4) \quad \bar{m}_n < \max |\omega^{(n)}(x)| < 10.4^n \bar{m}_n.$$

Cette fonction devant également appartenir à la classe $\{m'_n\}$, donc aussi à la classe $\{\bar{m}'_n\}$, d'après (4). On aura donc

$$\bar{m}_n < \beta^n \bar{m}'_n,$$

où β est une constante, d'où l'on tire

$$\sqrt[n]{\frac{\bar{m}_n}{\bar{m}'_n}} < \beta < \infty$$

et, d'une manière analogue, on voit qu'on a aussi

$$\sqrt[n]{\frac{\bar{m}'_n}{\bar{m}_n}} < \frac{1}{\alpha} < \infty.$$

La condition est donc bien nécessaire.

5. Une conséquence immédiate de la relation (1) est le théorème suivant:

Théorème. *Le produit de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, définies pour toutes les valeurs réelles de x et appartenant à une classe $\{m_n\}$, appartient également à cette même classe.*

En effet, soit $h(x) = f(x)g(x)$, on a

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

d'où, à cause des relations

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x)| &\leq c^k \bar{m}_k, & |g^{(n-k)}(x)| &\leq c'^{n-k} \bar{m}_{n-k}, \\ |h^{(n)}(x)| &< \sum_{k=0}^n C_n^k c^k m_0^{1-\frac{k}{n}} m_n^{\frac{k}{n}} c'^{n-k} m_0^{\frac{k}{n}} m_n^{1-\frac{k}{n}} < (c+c')^n m_0 m_n. \end{aligned}$$

La fonction $h(x)$ appartient donc effectivement à la classe $\{m_n\}$.

On voit de la même manière comme conséquence des relations (13) Chap. I que, plus généralement, le produit de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ de la classe $\{m_n\}$, définie sur la demi-droite $(0, \infty)$ appartient encore à cette classe. On voit, en effet, comme précédemment, que $h(x) = f(x)g(x)$ satisfait aux inégalités:

$$\begin{aligned} |h^{(n)}(x)| &< \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{n}{k}\right)^k c^k m_0^{1-\frac{k}{n}} m_n^{\frac{k}{n}} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k} c'^n m_0^{\frac{k}{n}} m_n^{1-\frac{k}{n}} < \\ &< (c+c')^n m_0 m_n \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k}, \end{aligned}$$

or

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k < e^{n-k}, \quad \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k} < e^k,$$

d'où

$$|h^{(n)}(x)| < (2e)^n (c+c')^n m_0 m_n,$$

ce qui démontre la proposition.

6. Signalons encore comme conséquence immédiate de l'inégalité (1) et de la proposition réciproque (3) l'énoncé suivant:

Une condition nécessaire et suffisante pour que sur tout l'axe réel la dérivée de toute fonction de la classe $\{m_n\}$ appartienne aussi à cette classe est que l'on ait

$$\sqrt[n]{\frac{\bar{m}_{n+1}}{\bar{m}_n}} < a < \infty.$$

La condition est suffisante. On a alors, en effet, pour la dérivée $f'(x)$ d'une fonction $f(x)$ de la classe $\{m_n\}$, d'après l'inégalité (1),

$$\left| \frac{d^n f'(x)}{dx^n} \right| < c^{n+1} \bar{m}_{n+1} < a^n c^{n+1} \bar{m}_n < A k^n m_n,$$

ce qui prouve que $f'(x)$ appartient à la classe $\{m_n\}$.

La condition est nécessaire. Si l'on considère, en effet, la fonction $\omega(x)$ définie précédemment, on a, en appliquant encore l'inégalité (1), $\omega'(x)$ devant appartenir à la classe $\{m_n\}$,

$$\alpha \bar{m}_{n+1} < \max |\omega^{(n+1)}(x)| < c^n \bar{m}_n,$$

ce qui prouve notre proposition.

7. Nous avons vu ci-dessus que le produit de deux fonctions d'une classe $\{m_n\}$, définie sur toute la droite ou même sur une demi-droite, appartient encore à cette même classe. Ceci n'est plus vrai, en général, pour les classes de fonctions définies sur un intervalle fermé fini quelconque.

En effet, soit $P_n(x)$ un polynôme de degré n . Ce polynôme appartient sur tout segment fini à la classe $\{m_k\}$ définie de la manière suivante:

$$m_k = 1, \text{ pour } 0 \leq k \leq n, \quad m_k = 0, \text{ si } k > n.$$

Or le polynôme de degré $2n$ $[P_n(x)]^2$ n'appartient évidemment pas à la classe $\{m_k\}$.

On peut d'ailleurs déterminer également d'autres classes moins triviales répondant au même but, comme le montre l'exemple suivant:

Considérons la fonction $f(x)$ définie, dans l'intervalle $[0, 1]$, par la série entière

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m^m}}{m^{m^m}}.$$

Les coefficients étant positifs, la fonction $f(x)$, ainsi que ses dérivées, atteignent leurs maxima au point $x = 1$. Cette fonction appartient à la classe $\{m_n\}$ définie de la manière suivante: pour $k^k < n \leq (k+1)^{k+1}$, posons $m_n = (k+1)^k (k+1)^{k+1}$, sauf pour $n = 2k^k$, où l'on posera $m_n = 1$. On a, en effet, quel que soit n , $k^k < n \leq (k+1)^{k+1}$:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(1) &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(k+p)^{(k+p)} [(k+p)^{k+p} - 1] \cdots [(k+p)^{k+p} - n]}{(k+p)^{(k+p)^{k+p}}} < \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(k+p)^{(k+p)(k+1)^{k+1}}}{(k+p)^{(k+p)^{k+p}}} \\ &= (k+1)^{k(k+1)^{k+1}} + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(k+p)^{(k+p)(k+1)^{k+1}}}{(k+p)^{(k+p)^{k+p}}} < \\ &< (k+1)^{k(k+1)^{k+1}} + \sum_{p=1}^{\infty} p^{-p} < 2(k+1)^{k(k+1)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Si $n = (k + 1)^{k+1}$, on a d'ailleurs

$$f^{(n)}(1) > \frac{[(k + 1)^{k+1}]!}{(k + 1)^{(k+1)^{k+1}}} > e^{-n} (k + 1)^{k(k+1)^{k+1}},$$

d'autre part, pour $n = 2k^k$, on voit facilement que

$$\begin{aligned} f^{(n)}(1) &< \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(k+p)^{(k+p) 2k^k}}{(k+p)^{(k+p)^{k+p}}} = \sum_{p=1}^{\infty} (k+p)^{(k+p) [2k^k - (k+p)^{k+p-1}]} \\ &< \sum_{p=1}^{\infty} (p+1)^{-\frac{p+1}{4}} < 10, \quad \text{si } k > 1. \end{aligned}$$

La fonction $f(x)$ appartient donc bien à la classe $\{m_n\}$. Mais on constate aisément que la fonction $g(x) = [f(x)]^2$ n'appartient pas à cette classe. On a, en effet,

$$g^{(2n)}(1) = \sum_{k=0}^{2n} c_{2n}^k f^{(k)}(1) f^{(2n-k)}(1) > [f^{(n)}(1)]^2;$$

donc, pour $n = k^k$, ($k = 1, 2, \dots$), on a

$$g^{(2n)}(1) > e^{-2n} k^{2(k-1)k^k},$$

d'où

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{g^{(2n)}(1)} = \infty, \quad n = k^k, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Ce qui montre que la fonction $g(x)$ n'appartient pas à la classe $\{m_n\}$ précédemment définie. Contrairement donc à ce qui a lieu pour les classes de fonctions définies sur tout l'axe, ou sur un demi-axe, le produit de deux fonctions d'une classe définie sur un intervalle fermé n'appartient pas, en général, à cette classe.

8. Nous avons toutefois même dans le cas d'un intervalle fermé fini la proposition suivante:

Théorème. Soit $\{m_n\}$ une classe de fonctions définie sur un segment fermé fini, désignons par $\{m'_n\}$ le plus grand des deux quantités m_n et $n!$, c'est-à-dire

$$m'_n = \max(m_n, n!);$$

le produit de deux fonctions de la classe $\{m_n\}$ appartient à la classe $\{m'_n\}$.

On en déduit, en particulier, le corolaire suivant:

Si la classe $\{m_n\}$ de fonctions, définies sur un segment fermé fini, est telle qu'elle contient toutes les fonctions analytiques sur ce segment, le produit de deux fonctions de la classe appartient encore à cette même classe.

La démonstration résulte de l'inégalité (11) Chap. I

$$|f^{(k)}(x)| < 4 e^{2k} \left(\frac{n}{k}\right)^k M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$$

avec

$$M_n' = \max(M_n, M_0 n! \delta^{-n}).$$

Si l'on pose $h(x) = f(x)g(x)$, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ appartenant à la classe $\{m_n\}$:

$$|f^{(n)}(x)| \leq c^n m_n, \quad |g^{(n)}(x)| \leq c'^n m_n,$$

d'où:

$$\begin{aligned} |h^{(n)}(x)| &\leq \sum_{k=0}^n C_n^k |f^{(k)}(x)| |g^{(n-k)}(x)| \\ &< 4 A m_0 m_n' e^{2n} \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k} c^k e'^{n-k}, \end{aligned}$$

en posant

$$m_n' = \max(m_n, n!), \quad A = \max(1, m_0 \delta^{-n}),$$

on a finalement, en tenant compte de

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k < e^{n-k}, \quad \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k} < e^k,$$

$$|h^{(n)}(x)| < 4 A e^{3n} (e + e')^n m_0 m_n',$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

On pourrait, d'une manière analogue¹, énoncer une proposition concernant le produit de deux fonctions d'une classe $\{m_n\}$ définie dans un intervalle ouvert, en donnant une définition convenable d'une telle classe et en utilisant les inégalités valables pour le segment ouvert.

CHAPITRE III.

Sur les fonctions données par l'intégrale de Stieltjès:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dV.$$

1. Nous allons dans ce chapitre énoncer quelques propositions sur une famille particulière de fonctions, définies sur tout l'axe réel, notamment celles qui

¹ Voir H. Cartan, Comptes rendus 208, 1939, p. 416.

sont représentables par l'intégrale de Stieltjès convergente $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} dV(t)$, où $V(t)$ est une fonction croissante et bornée de la variable t ($-\infty < t < +\infty$). Chemin faisant nous énoncerons également quelques propriétés des fonctions données par certaines séries de la forme $\sum_1^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$ qui généralisent les séries de Fourier, les a_n pouvant être quelconques. Nous démontrons notamment la proposition suivante:

Si $f(x)$, représentable sur tout l'axe par l'intégrale de Stieltjès convergente $\int e^{ixt} dV(t)$, où $V(t)$ est une fonction croissante et bornée, possède une dérivée d'ordre n de module inférieur à M_n , on a, quelle que soit $a > 0$,

$$V(t+a) - V(t) < \frac{c M_n}{|t|^n},$$

où $c = c(a)$ est une constante indépendante de n .

Démonstration. Soit δ une quantité réelle et posons

$$\varphi_n(x, \delta) = \frac{\mathcal{A}_n f(x)}{\delta^n},$$

$\mathcal{A}_n f(x)$ désignant la différence d'ordre n de la fonction $f(x)$. Nous supposons pour plus de généralité que $V(t)$ est à variation bornée. On a:

$$\mathcal{A}_n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k f[x + (n-k)\delta].$$

On a donc

$$(1) \quad \varphi_n(x, \delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \left(\frac{e^{it\delta} - 1}{\delta} \right)^n dV(t).$$

Et comme, par hypothèse, on a

$$|f^{(n)}(x)| \leq M_n,$$

il en résulte, évidemment, qu'on a aussi

$$|\varphi_n(x, \delta)| \leq M_n \sqrt[n]{2},$$

cette relation pouvant d'ailleurs s'écrire

$$|\varphi_n(x, \delta)| \leq M_n,$$

si la fonction $f(x)$ est réelle.

Multiplions par $\frac{e^{-ix\alpha} - 1}{-ix}$ les deux membres de (1) il vient, α étant un nombre positif,

$$\begin{aligned} \varphi_n(x, \delta) \cdot \frac{e^{-ix\alpha} - 1}{-ix} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left(\frac{e^{it\delta} - 1}{\delta} \right)^n \frac{e^{-ix\alpha} - 1}{-ix} dV \\ &= -\frac{1}{ix} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left(\frac{e^{i(t+\alpha)\delta} - 1}{\delta} \right)^n dV(t + \alpha) \\ &\quad + \frac{1}{ix} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \left(\frac{e^{it\delta} - 1}{\delta} \right)^n dV(t). \end{aligned}$$

D'où l'on déduit, en intégrant par parties et en posant

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \int_t^{t+\alpha} \left(\frac{e^{it\delta} - 1}{\delta} \right)^n dV(t), \\ \varphi_n(x, \delta) \left(\frac{e^{-ix\alpha} - 1}{-ix} \right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} V_1(t) dt. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que $V_1(t)$ est une fonction absolument intégrable, on a, en effet, $\bar{V}(t)$ désignant la variation totale de V ,

$$\begin{aligned} |V_1(t)| &\leq \left(\frac{2}{\delta} \right)^n \int_t^{t+\alpha} |dV| = \left(\frac{2}{\delta} \right)^n (\bar{V}(t + \alpha) - \bar{V}(t)) \\ \int_a^b |V_1(t)| dt &\leq \left(\frac{2}{\delta} \right)^n \int_a^b (\bar{V}(t + \alpha) - \bar{V}(t)) dt \\ &= \left(\frac{2}{\delta} \right)^n \left[\int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \bar{V}(t) dt - \int_a^b \bar{V}(t) dt \right] = \left(\frac{2}{\delta} \right)^n \int_0^\alpha (\bar{V}(b + \tau) - \bar{V}(a + \tau)) d\tau, \end{aligned}$$

où la différence $\bar{V}(b + \tau) - \bar{V}(a + \tau)$ tend uniformément vers 0 lorsque a et b augmentent indéfiniment.

En multipliant une deuxième fois par $\frac{e^{-ix\alpha} - 1}{-ix}$, on trouve, d'une manière analogue,

$$(2) \quad \varphi_n(x, \delta) \cdot \left(\frac{e^{-ix\alpha} - 1}{-ix} \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} W(t, \alpha, \delta) dt,$$

avec

$$(3) \quad \begin{aligned} W(t, \alpha, \delta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} V_1(\xi, \alpha, \delta) d\xi \\ &= \int_t^{t+\alpha} d\xi \int_{\xi}^{\xi+\alpha} \left(\frac{e^{i\tau\delta} - 1}{\delta} \right)^n dV(\tau). \end{aligned}$$

Comme pour la fonction $V_1(t)$, on constate encore que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |W(t, \alpha, \delta)| dt$$

existe; on a, en effet,

$$\int_a^b |W(t, \alpha, \delta)| dt < \int_a^b \left(\int_t^{t+\alpha} |V_1(\xi)| d\xi \right) dt = \int_0^\alpha \left(\int_{a+\tau}^{b+\tau} |V_1(\xi)| d\xi \right) d\tau,$$

or, comme on vient de le voir, l'intégrale

$$\int_{a+\tau}^{b+\tau} |V_1(\xi)| d\xi$$

tend vers 0 si a et b augmentent indéfiniment; $W(t)$ est d'ailleurs une fonction continue de t .

Comme d'autre part, la fonction

$$\varphi_n(x, \delta) \cdot \left(\frac{e^{-ix\alpha} - 1}{-ix} \right)^2$$

est absolument intégrable, car

$$\left| \varphi_n(x, \delta) \cdot \left(\frac{e^{-ix\alpha} - 1}{-ix} \right)^2 \right| < \frac{8M_n}{x^2},$$

on peut appliquer le théorème d'inversion de Fourier à la relation (2) et on trouve

$$W(t, \alpha, \delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x, \delta) \left(\frac{e^{-ix\alpha} - 1}{-ix} \right)^2 dx.$$

D'où

$$(4) \quad |W(t, \alpha, \delta)| < \frac{A M_n}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \left(\frac{e^{-ix\alpha} - 1}{-ix} \right)^2 \right| dx < A M_n \alpha,$$

la constante A pouvant être 1 ou $\sqrt{2}$ suivant que la fonction $f(x)$ est réelle ou non.

Faisons maintenant tendre δ vers 0, en remarquant que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{e^{i\delta t} - 1}{\delta} = it$$

on tire de (3) et (4)

$$(5) \quad \left| \int_t^{t+\alpha} d\xi \int_{\xi}^{\xi+\alpha} x^n dV(x) \right| < 2 M_n \alpha.$$

2. Avant de poursuivre la démonstration du théorème, signalons quelques conséquences qu'on peut tirer de la relation (5) sur la nature de la fonction $V(t)$.

En intervertissant l'ordre d'intégration on trouve

$$\int_t^{t+\alpha} d\xi \int_{\xi}^{\xi+\alpha} x^n dV(x) = \int_t^{t+\alpha} (x-t) x^n dV(x) + \int_{t+\alpha}^{t+2\alpha} (t+2\alpha-x) x^n dV(x),$$

et en faisant le changement de variable $u = t + \alpha$

$$\int_{u-\alpha}^u (x-u+\alpha) x^n dV(x) + \int_u^{u+\alpha} (u+\alpha-x) x^n dV(x)$$

la formule de la moyenne de Bonnet donne, d'autre part,

$$\alpha \int_{u_0}^u x^n dV + \alpha \int_u^{u_1} x^n dV$$

u_0 et u_1 satisfaisant aux inégalités

$$u - \alpha < u_0 < u < u_1 < u + \alpha$$

et d'après (5)

$$\left| \int_{u_0}^u v^n dV + \int_u^{u_1} v^n dV \right| < A M_n$$

si l'on fait tendre α vers 0, on trouve finalement

$$|V(u + 0) - V(u - 0)| < \frac{A M_n}{|u|^n}.$$

Énonçons une conséquence de cette relation

$$\text{Soit } f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n e^{i\lambda_n x} \text{ avec}$$

$$|\lambda_i - \lambda_k| > a > 0, \quad \text{si } i \neq k$$

une fonction possédant une dérivée d'ordre n bornée,

$$|f^{(n)}(x)| \leq M_n.$$

On a l'évaluation suivante des coefficients

$$|a_k| \leq \frac{2 M_n}{|\lambda_k|^n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

on a donc pour la fonction et ses $n - 2$ premières dérivées

$$f^{(k)}(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (i \lambda_m)^k a_m e^{i\lambda_m x}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n - 2).$$

Si, en particulier, cette fonction est indéfiniment dérivable on aura

$$|a_k| < \frac{2}{T(|\lambda_k|)}$$

où

$$T(x) = \max \frac{x^n}{M_n}^1$$

et quelle que soit $k \geq 0$

$$f^{(k)}(x) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (i \lambda_n)^k e^{i\lambda_n x}.$$

3. Supposons maintenant que $V(t)$ est une fonction croissante de t , la relation (5) s'écrit alors

¹ Pour les séries de Fourier on obtient ainsi l'évaluation de M. Mandelbrojt.

$$\left| \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \varphi(x) \tau_n dV \right| < 2 M_n \alpha$$

avec

$$\varphi(x) = x - t + \alpha, \quad \text{si} \quad t - \alpha \leq x \leq t,$$

et

$$\varphi(x) = t + \alpha - x, \quad \text{pour} \quad t \leq x \leq t + \alpha,$$

la formule de la moyenne donne alors

$$|\tau_0|^n \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \varphi(x) dV < 2 M_n \alpha, \quad t - \alpha \leq \tau_0 \leq t + \alpha,$$

et en intégrant par parties, on en déduit:

$$\int_t^{t+\alpha} (V(x) - V(x - \alpha)) dx < \frac{2 M_n \alpha}{|\tau_0|^n}.$$

Si l'on remplace ici t par $t - \alpha$ et en ajoutant la relation ainsi obtenue à la précédente, on trouve

$$\int_{t+\alpha}^{t+2\alpha} V(x) dx - \int_t^{t+\alpha} V(x - \alpha) dx < \frac{4 M_n \alpha}{|\tau_1|^n},$$

avec

$$t - \alpha \leq \tau_1 \leq t + 2\alpha,$$

et il en résulte finalement

$$V(t + \alpha) - V(t) < \frac{4 C M_n}{t^n},$$

C étant une constante, indépendante de n . C'est la relation énoncée au début de ce chapitre.

CHAPITRE IV.

Sur la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle limites de suites de fonctions analytiques.

1. Dans ce chapitre nous démontrons d'abord quelques propositions qui constituent la généralisation, aux suites de fonctions analytiques quelconques, des théorèmes de MM. S. Bernstein et de la Vallée Poussin, sur la

dérivabilité des fonctions limites des suites de polynomes ou d'expressions trigonométriques.

Bien que la démonstration de ces généralisations puisse se déduire, sans grandes difficultés, des résultats de M. S. Bernstein sur la meilleure approximation des fonctions analytiques par des polynomes, j'ai cependant préféré donner une démonstration indépendante, qui pourrait présenter quelque utilité dans des recherches analogues; la méthode suivie s'apparente d'ailleurs à celle dont s'est servi M. Montel dans sa démonstration des formules de S. Bernstein et Markoff sur les dérivées des polynomes.¹

Les propositions de ce chapitre peuvent être considérablement précisées et permettent, par exemple, de déterminer des limitations des dérivées successives des fonctions limites. J'espère avoir un jour l'occasion d'y revenir.

Un autre théorème démontré dans ce chapitre établit une relation entre les zéros des fonctions analytiques de la suite donnée et la dérivabilité de la fonction limite. L'approximation exigée, pour pouvoir affirmer l'existence des dérivées de la fonction limite, est bien moindre lorsque les fonctions de la suite ne s'annulent pas dans le voisinage du segment considéré, que dans le cas général. La méthode suivie est ici inspirée de celle dont s'est servi M. Ostrowski, dans un mémoire connu, pour des recherches d'une nature différente. Ces questions ont été, à ma connaissance, peu étudiées.² On pourrait encore ici donner des limitations des dérivées successives de la fonction limite et dire, par exemple, dans quel cas cette fonction appartient à une classe donnée, disons, la classe des fonctions analytiques. Je n'ai cependant pas développé ici ces questions d'une manière systématique.

2. Soit $f(z)$ une fonction analytique holomorphe dans un domaine D contenant dans son intérieur un segment de l'axe réel, que nous supposons être le segment $(-1, 1)$, par exemple. Supposons qu'on a dans ce domaine $|f(z)| < M$, et sur le segment $[-1, 1]$ $|f(x)| < m$. Considérons la fonction $h(z)$ harmonique régulière dans le domaine D et telle qu'on ait

¹ Dans cet ordre d'idées il y a lieu de signaler encore un théorème de M. S. Bernstein concernant la dérivabilité des fonctions limites des suites de fonctions entières de degré fini. Voir S. Bernstein. *Leçons sur les propriétés extrémales . . .*, p. 105.

² On peut cependant encore signaler des propositions d'une nature voisine de M. S. Bernstein, *Sur la distribution des zéros des polynomes tendant vers une fonction continue positive sur un segment donné*. Journal de Mathématiques pures et appliquées 9-ième série, 8, 1929, p. 327.

$h(z) = 0$ sur le segment $(-1, 1)$, $h(z) = 1$ sur la frontière de D .

La fonction sousharmonique

$$\log |f(z)| - (1 - h(z)) \log m - h(z) \log M$$

étant négative ou nulle sur la frontière de $D - d$ (d désignant le segment $[-1, 1]$) est négative dans tout ce domaine, on a donc

$$|f(z)| \leq m^{1-h(z)} M^{h(z)}$$

pour tout $z \in D$.

On en tire par l'application de la formule de Cauchy

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-x)^{k+1}},$$

γ étant une cercle de rayon r autour du point x , entièrement contenue dans D ,

$$(1) \quad |f^{(k)}(x)| \leq \frac{\max_{z \text{ sur } \gamma} |f(z)| k!}{r^k} \leq \frac{\max (m^{1-h(z)} M^{h(z)}) k!}{r^k}.$$

Lorsque z tend vers un point du segment $[-1, 1]$ la fonction $h(z)$ tend vers 0. Nous allons donner une évaluation de l'ordre de cet infiniment petit.

Soit E une ellipse de foyers $-1, 1$, dont la somme des demi-axes est égale à σ et dont l'intérieur est entièrement contenu dans le domaine D . Considérons la fonction harmonique $g(z)$

$$g(z) = \frac{\log |z + \sqrt{z^2 - 1}|}{\log \sigma},$$

la détermination étant choisie de manière que le module de $z + \sqrt{z^2 - 1}$ soit supérieur à l'unité dans le domaine \mathcal{A} doublement connexe dont la frontière est constituée par l'ellipse E et par le segment $[-1, 1]$. Dans ce domaine la fonction $g(z)$ est harmonique, et on a

$$g(z) = 1 \text{ sur l'ellipse } E, \quad g(z) = 0 \text{ sur le segment } d.$$

Comme dans \mathcal{A} $h(z) < 1$, on a donc sur la frontière de \mathcal{A}

$$h(z) \leq g(z)$$

et cette relation est valable dans tout le domaine \mathcal{A} .

Soit le cercle γ de centre x entièrement contenu dans l'ellipse E , ce qui a

lieu, par exemple, si $r < \frac{(\sigma-1)^2}{2\sigma}$; nous allons déterminer une borne supérieure de $g(z)$ pour z sur le cercle γ .

3. Supposons d'abord que x est un point intérieur du segment. Soit, pour fixer les idées $0 \leq x < 1$, posons

$$1 - x = \alpha, \quad 1 + x = \beta, \quad 0 < \alpha \leq 1 \leq \beta < 2.$$

En remarquant que $|z + \sqrt{z^2 - 1}|$ représente la demi-somme des axes $2a$ et $2b$ de l'ellipse de foyers $-1, 1$ passant par le point d'affixe z , on trouve, φ désignant l'angle $\arg(z - x)$:

$$\begin{aligned} 2a &= |z - 1| + |z + 1| = \sqrt{\alpha^2 + r^2 - 2\alpha r \cos \varphi} + \sqrt{\beta^2 + r^2 + 2\beta r \cos \varphi} \\ &= \alpha \sqrt{1 - \frac{2\alpha r \cos \varphi - r^2}{\alpha^2}} + \beta \sqrt{1 + \frac{2\beta r \cos \varphi + r^2}{\beta^2}}, \end{aligned}$$

et, en supposant $r < \frac{\alpha}{20}$, on a

$$|2r\alpha \cos \varphi - r^2| < 3r\alpha, \quad |2r\beta \cos \varphi + r^2| < 3r\beta$$

et

$$\begin{aligned} 2a &< \alpha + \beta - \frac{2r\alpha \cos \varphi - r^2}{2\alpha} + \frac{2r\beta \cos \varphi + r^2}{2\beta} + 18 \frac{r^2}{\alpha^2} \\ &\leq 2 + 20 \frac{r^2}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

D'où finalement

$$a < 1 + 10 \frac{r^2}{\alpha^2};$$

On a d'autre part

$$b = \sqrt{\alpha^2 - 1} < \sqrt{20 \frac{r^2}{\alpha^2} + 100 \frac{r^4}{\alpha^4}} < 5 \frac{r}{\alpha},$$

done

$$a + b = |z + \sqrt{z^2 - 1}| < 1 + 10 \frac{r}{\alpha}$$

d'où l'inégalité

$$(2) \quad g(z) = \frac{\log |z + \sqrt{z^2 - 1}|}{\log \sigma} \leq \frac{10}{\alpha \log \sigma} r.$$

Donc, $h(z)$ désignant la fonction harmonique égale à un sur la frontière du domaine D et à 0 sur le segment $[-1, 1]$, supposé intérieur à ce domaine, on a

sur le cercle γ de rayon r ($r < \frac{\alpha}{20}$) dont le centre x est un point intérieur du segment $(-1, 1)$

$$(3) \quad h(z) \leq \frac{10}{\alpha \log \sigma} r$$

α désignant la distance du point d'abscisse x aux extrémités du segment et σ la demi-somme des axes de la plus grande ellipse entièrement contenue dans le domaine D .

4. On peut trouver, d'une manière analogue, une borne supérieure de la fonction $h(s)$ valable sur le segment fermé. Les notations étant les mêmes, on a, en supposant $r < \frac{1}{100}$

$$2a = |z - 1| + |z + 1| < 2 + 2r,$$

$$b = \sqrt{a^2 - 1} = \sqrt{2r + r^2} < 2\sqrt{r},$$

donc

$$|z + \sqrt{z^2 - 1}| = a + b \leq 1 + 2\sqrt{r} + r \leq 1 + 3\sqrt{r},$$

$$\frac{\log |z + \sqrt{z^2 - 1}|}{\log \sigma} \leq \frac{3\sqrt{r}}{\log \sigma}.$$

Donc sur tout cercle γ de rayon r ($r < \frac{1}{100}$) dont le centre est un point du segment fermé $(-1, 1)$, on a

$$(4) \quad h(z) \leq \frac{10\sqrt{r}}{\log \sigma}.$$

5. Nous allons maintenant appliquer ces préliminaires à l'étude de la dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle donnée, sur le segment $[-1, 1]$, par une série absolument convergente de fonctions analytiques.

Considérons une série $\sum f_n(z)$ de fonctions analytiques, holomorphes dans un domaine D , contenant le segment $[-1, 1]$, supposons que la série converge uniformément et absolument sur ce segment vers une fonction $F(x)$, et qu'en outre, on a

$$|f_n(z)| \leq M_n, \text{ pour } z \in D \text{ et } |f_n(x)| \leq m_n \text{ si } -1 \leq x \leq 1,$$

avec $m_n < 1$ et tendant vers 0 et $M_n \geq 1$. D'après (1), on aura

$$|f_n^{(k)}(x)| < \frac{\max(m_n^{1-h(z)} M_n^{h(z)}) k!}{r^k}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad |z - x| = r.$$

Soit x un point intérieur de l'intervalle $(-1, 1)$ on trouve, en tenant compte de la relation (3),

$$|f_n^{(k)}| < \frac{m_n^{1-\lambda r} M_n^{\lambda r}}{r^k} \cdot k!, \quad \lambda = \frac{10}{(1 - |x|) \log \sigma}, \quad r < \frac{1 - |x|}{20}.$$

Posons dans cette relation, pour n assez grand:

$$r = \frac{k}{\lambda \log \frac{M_n}{m_n}},$$

on en déduit

$$(5) \quad |f_n^{(k)}(x)| < (c\lambda)^k m_n \left[\log \frac{M_n}{m_n} \right]^k.$$

Il en résulte la conséquence suivante:

Théorème I. *La fonction $F(x) = \sum f_n(x)$, où les fonctions $f_n(x)$ et les quantités m_n et M_n sont définies comme précédemment, possédera en tout point intérieur du segment $(-1, 1)$ une dérivée continue d'ordre k si la série*

$$\sum m_n \left(\log \frac{M_n}{m_n} \right)^k$$

converge.

Par une transformation facile nous en déduisons le théorème suivant:

Théorème I'. *Soit $F_n(z)$ une suite de fonctions analytiques, holomorphes dans un domaine D , contenant le segment $[-1, 1]$. Supposons que sur ce segment la suite $F_n(x)$ converge vers la fonction $F(x)$, et qu'on ait*

$$|F_n(z)| \leq M_n, \quad \text{si } z \in D \quad \text{et} \quad |F_n(x) - F(x)| \leq m_n \quad \text{si } -1 < x < 1,$$

m_n et M_n^{-1} tendant vers 0 en décroissant, si la série

$$\sum m_n \left(\log \frac{M_{n+1}}{m_n} \right)^k$$

converge la fonction $F(x)$ possédera une dérivée continue d'ordre k en tout point intérieur du segment $(-1, 1)$.

Il suffirait, en effet, de considérer la série $\sum_n f_n(x)$ avec $f_n(z) = F_{n+1}(z) - F_n(z)$, on a alors

$$|F_{n+1}(z) - F_n(z)| \leq M_n + M_{n+1} < 2M_{n+1},$$

$$|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq |F_{n+1}(x) - F(x)| + |F_n(x) - F(x)| \leq m_{n+1} + m_n \leq 2m_n,$$

il suffirait alors d'appliquer le théorème I.

6. Nous pouvons mettre cet énoncé sous une forme équivalente plus simple, en exigeant seulement que la série

$$\sum_n m_n (\log M_{n+1})^k$$

soit convergente.

A cet effet remarquons d'abord que si la série $\sum_n m_n \left(\log \frac{1}{m_n}\right)^k$ est convergente, les deux séries

$$\sum_n m_n \left(\log \frac{M_{n+1}}{m_n}\right)^k \text{ et } \sum_n m_n (\log M_{n+1})^k$$

convergent et divergent simultanément.

a) Si la série $\sum_n m_n \left(\log \frac{M_{n+1}}{m_n}\right)^k$ converge, la série $\sum_n m_n (\log M_{n+1})^k$ converge aussi, ses termes étant moindres que ceux de la première série.

b) Inversement, si la série $\sum_n m_n (\log M_{n+1})^k$ converge, la série $\sum_n m_n \left(\log \frac{M_{n+1}}{m_n}\right)^k$ converge également. Considérons, en effet, d'abord ceux parmi les termes M_{p+1} qui sont plus grands que les termes $\frac{1}{m_p}$, pour la même valeur de p . La contribution des termes correspondants dans la série $\sum_n m_n \left(\log \frac{M_{n+1}}{m_n}\right)^k$ est moindre que

$$\sum'_p m_p (\log M_{p+1})^k < 2^k \sum'_p m_p (\log M_{p+1})^k,$$

l'accent sur le signe \sum' signifiant qu'on ne considère que la suite extraite correspondante.

Envisageons, d'autre part, les termes M_{q+1} qui sont inférieures ou égaux aux termes $\frac{I}{m_q}$ correspondants. Leur contribution dans la série $\sum_n m_n \left[\log \left(\frac{M_{n+1}}{m_n} \right) \right]^k$ est moindre que

$$\sum_q'' m_q \left(\log \frac{I}{m_q^2} \right)^k < 2^k \sum_q'' m_q \left(\log \frac{I}{m_q} \right)^k.$$

La somme de la série $\sum_n m_n \left(\log \frac{M_{n+1}}{m_n} \right)^k$ est donc inférieure à

$$2^k \sum_p m_p' (\log M_{p+1})^k + 2^k \sum_q'' m_q \left(\log \frac{I}{m_q} \right)^k$$

elle converge donc, en vertu de l'hypothèse faite au début.

Or, en supposant qu'une des séries

$$\sum_n m_n \left(\log \frac{M_{n+1}}{m_n} \right)^k, \quad \sum_n m_n (\log M_{n+1})^k$$

converge, il est toujours possible d'extraire une suite partielle d'indices $\{n_p\}$ de manière que les nouvelles séries respectives:

$$\sum_p m_{n_p} \left(\log \frac{M_{n_p+1}}{m_{n_p}} \right)^k, \quad \sum_p m_{n_p} (\log M_{n_p+1})^k$$

ainsi obtenues soient convergentes, la série $\sum_p m_{n_p} \left(\log \frac{I}{m_{n_p}} \right)^k$ étant elle aussi convergente, quel que soit d'ailleurs la valeur de k , et ceci suffit pour démontrer la proposition énoncée. On peut donc, sans restreindre la généralité, supposer que $\sum_n m_n \left(\log \frac{I}{m_n} \right)^k$ converge. Voici, d'après une idée de M. Ostrowski¹, comment on pourrait effectuer ce choix:

Soit m_{n_1} le premier terme inférieur à $\frac{m_1}{2}$, m_{n_2} le premier terme inférieur à $\frac{m_{n_1}}{2}$, \dots , $m_{n_{p+1}}$ le premier terme inférieur à $\frac{m_{n_p}}{2}$, etc. \dots , on a évidemment

¹ A. Ostrowski, *Über vollständige Gebiete gleichmässiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen*. Abhand. d. math. Seminars. Hamburg. T. I, p. 342.

$$m_{n_p} \left(\log \frac{M_{n_{p+1}}}{m_{n_p}} \right)^k \leq 2 m_{n_{p+1}-1} \left(\log \frac{M_{n_{p+1}}}{m_{n_{p+1}-1}} \right)^k,$$

respectivement

$$m_{n_p} (\log M_{n_{p+1}}) \leq 2 m_{n_{p+1}-1} (\log M_{n_{p+1}})^k$$

et la série

$$\sum_p m_{n_p} \left(\log \frac{M_{n_{p+1}}}{m_{n_p}} \right)^k,$$

respectivement

$$\sum_p m_{n_p} (\log M_{n_{p+1}})^k$$

est aussi convergente. Or il est facile de voir que la série

$$\sum_p m_{n_p} \left(\log \frac{1}{m_{n_p}} \right)^k$$

converge quel que soit k , car d'après la définition des m_{n_p} on a $m_{n_p} < 2^{-p}$ et d'autre part $\left(\log \frac{1}{m_{n_p}} \right)^k = o\left(2^{\frac{p}{2}}\right)$.

7. Les considérations qui précèdent nous permettent d'énoncer le théorème suivant

Théorème II. Soit $F_n(z)$ une suite de fonctions analytiques holomorphes dans un domaine D contenant un segment (a, b) de l'axe réel. Supposons que sur ce segment la suite $F_n(x)$ converge vers une fonction $F(x)$ et qu'on ait

$$|F_n(z)| \leq M_n \text{ si } z \in D, \quad |F_n(x) - F(x)| \leq m_n \text{ pour } a \leq x \leq b,$$

où M_n tend en croissant vers l'infini m_n tendant en décroissant vers 0. S'il est possible d'extraire une suite partielle d'indices

$$n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$$

telle que la série

$$\sum_p m_{n_p} (\log n_{p+1})^k$$

converge, la fonction $F(x)$ possédera une dérivée continue d'ordre k en tout point intérieur du segment (a, b) .

8. On pourrait énoncer des propositions analogues, mais valables pour un intervalle fermé, en partant des relations (4) au lieu de (3):

Théorème III. $F(x)$, $f_n(z)$, m_n et M_n ayant la même signification que dans le théorème I. Si la série

$$\sum_p m_n \left(\log \frac{M_n}{m_n} \right)^{2k}$$

converge, la fonction $F(x)$ possédera une dérivée continue d'ordre k dans l'intervalle fermé $[a, b]$.

Théorème III'. $F(x)$, $F_n(z)$, m_n et M_n ayant la même signification que dans le théorème II. Si la série

$$\sum_n m_n (\log M_{n+1})^{2k}$$

converge, la fonction $F(x)$ possédera une dérivée d'ordre k dans l'intervalle fermé $[a, b]$.

Pour le prouver, il suffirait de remarquer qu'on a comme conséquence des relations (1) et (4):

$$|f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{m_n^{1-\lambda V_r} M_n^{\lambda V_r}}{r^k} k!, \quad \lambda = \frac{3}{\log \sigma}, \quad r < \frac{1}{100};$$

si dans cette relation on pose

$$r = \frac{k^2}{25 \left(\log \frac{M_n}{m_n} \right)^2},$$

on en déduit, pour des valeurs suffisamment grandes de n

$$|f^{(n)}(x)| \leq \left(\frac{50e}{k} \right)^k m_n \left(\log \frac{M_n}{m_n} \right)^{2k}.$$

On peut maintenant reprendre sans modifications notables les considérations ci-dessus concernant l'intervalle ouvert et les propositions énoncées en résultent.

9. Ces théorèmes généraux contiennent, en particulier, comme on le constate sans difficulté, les résultats bien connus de MM. S. Bernstein et De la Vallée Poussin concernant l'approximation des fonctions d'une variable réelle par des suites de polynomes ou d'expressions trigonométriques.¹

¹ Voir par exemple Ch. De la Vallée Poussin, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle* Chap. IV et V et S. Bernstein *Sur la meilleure approximation des fonctions continues* (Mémoires publiés par la classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique. Collection in - 4. 2^e Série t. IV, 1912).

Dans les cas d'une suite de polynomes $P_n(x)$ de degré n , convergeant sur un segment $[a, b]$ vers une fonction $F(x)$, on peut poser $M_n = MA^n$, M et A étant indépendants de n . Il résulte, en effet, d'un théorème bien connu de M. S. Bernstein¹, qu'un polynome $P_n(x)$ de degré n inférieur à M sur un segment de longueur 2σ , reste inférieur à $M\left(\frac{R}{\delta}\right)^n$ sur une ellipse ayant ses foyers aux extrémités du segment, et pour demi-somme des axes R .

Nous obtenons donc dans le cas des polynomes, et en nous bornant, par exemple, au segment ouvert, la proposition suivante:

Soit une suite de polynomes $P_{n_p}(x)$ de degrés croissants $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ tendant vers une fonction $F(x)$ sur un segment $[a, b]$ de l'axe réel. Cette fonction possédera, en tout point intérieur du segment, une dérivée continue d'ordre k , si la série

$$\sum_p m_{n_p} n_{p+1}^k,$$

où $m_{n_p} = \max_{a \leq x \leq b} |F(x) - P_{n_p}(x)|$ tend vers 0 en décroissant, converge.

En posant, par exemple, $n_p = 2^p$, on en tire, en particulier, la proposition bien connue suivante:

Si pour toute valeur de n la fonction $F(x)$ peut être approchée par des polynomes de degré n avec une approximation inférieure à $\frac{A}{n^{\alpha+a}}$, où $\alpha > 0$, cette fonction possédera une dérivée continue d'ordre k en tout point intérieur au segment (a, b) .

On obtient sans difficulté des propositions analogues pour l'intervalle fermé.

10. Examinons encore rapidement les cas de l'approximation d'une fonction périodique par des expressions trigonométriques. Si nous considérons une suite $T_n(z)$ de polynomes trigonométriques de degré n , convergeant sur l'axe réel vers une fonction périodique, il est facile de voir que la croissance de la suite M_n dans un domaine entourant l'axe réel est encore, comme dans le cas des polynomes, de l'ordre exponentiel par rapport au degré du polynome trigonométrique; on aura donc les mêmes théorèmes, sauf que dans le cas d'une fonction périodique il n'y a pas lieu de considérer le cas d'un intervalle fermé. On a la proposition suivante, facile à démontrer, et qui est analogue au théorème de Bernstein sur les polynomes:

¹ S. Bernstein. *Leçons sur les propriétés extrémales* . . . p. 112.

$T_n(z)$ étant un polynôme trigonométrique d'ordre n , inférieur à M sur l'axe réel, on a sur toute droite d'ordonnée y , parallèle à l'axe réel

$$|T_n(z)| \leq M e^{n|y|}.$$

En effet, considérons la transformation $t = e^{iz}$. Elle transforme le demi-plan supérieur en l'extérieur du cercle unité et on a

$$T_n(z) = \frac{P_{2n}(t)}{t^n},$$

où $P_{2n}(t)$ est un polynôme de degré $2n$ en t . Comme par hypothèse on a, sur le cercle unité, $|P_{2n}(t)| \leq M$, on en déduit les relations

$$|T_n(z)| = \left| \frac{P_{2n}(t)}{t^n} \right| \leq M |t|^n = M e^{ny}.$$

D'où comme dans le cas des polynômes, la proposition suivante:

Soit $T_{n_p}(x)$ une suite d'expressions trigonométriques d'ordres croissants $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ tendant sur l'axe réel vers une fonction périodique $F(x)$. Cette fonction possédera en tout point une dérivée continue d'ordre k , si la série

$$\sum_p m_{n_p} n_{p+1}^k,$$

où $m_{n_p} = \max |F(x) - T_{n_p}(x)|$ tend vers 0 en décroissant, converge.

11. Nous allons maintenant particulariser la nature des suites de fonctions analytiques considérées, en supposant que les fonctions $F_n(z)$, tendant vers la fonction $F(x)$ sur le segment fermé $[a, b]$, ne s'annulent pas dans un domaine D entourant ce segment, et que, d'autre part, la fonction continue $F(x)$ est différente de 0 sur ce même segment, cette fonction étant susceptible de prendre, comme dans tout ce qui précède, des valeurs complexes. Considérons la fonction $\log F(x)$, dont nous précisons la détermination de manière que $\log F(o)$ ¹ ait sa partie imaginaire dans l'intervalle semi-ouvert $[0, 2\pi)$ et on prolonge $\log F(x)$ d'une manière continue le long du segment $[a, b]$ à partir du point 0. Considérons, de même, la suite de fonctions $\log F_n(z)$ dont nous fixerons la détermination de la manière suivante: $F_n(o)$ tendant par hypothèse vers $F(o)$, il existera une détermination de $\log F_n(o)$ qui convergera vers $\log F(o)$, qu'on

¹ Nous supposons que 0 est un point intérieur du segment (a, b) .

trouvera en choisissant l'argument Φ_n de $F'_n(o)$ dans l'intervalle $(\Phi - \varepsilon, \Phi + \varepsilon)$, Φ désignant l'argument de $F'(o)$ et ε une quantité positive inférieure à π . Ceci est évidemment toujours possible pour n assez grand, à cause de la convergence de la suite $F'_n(o)$. La fonction $\log F'_n(z)$ sera prolongée d'une manière continue dans tout le domaine D à partir de la valeur initiale $\log F'_n(o) = \log |F'_n(o)| + i\Phi_n$.

Envisageons maintenant la différence

$$\log F'_n(x) - \log F'(x) = \log \frac{F'_n(x)}{F'(x)}.$$

D'après la détermination qui a été choisie pour les logarithmes, cette différence est une fonction continue de x sur le segment $[a, b]$ et elle tend vers 0 au point $x = o$. Ses différentes déterminations différant entre eux d'un multiple de $2\pi i$, elle tendra nécessairement vers 0 en tout point du segment fermé $[a, b]$, et on aura

$$(6) \quad \log \frac{F'_n(x)}{F'(x)} = \log \left(1 + \frac{F'_n - F'}{F'} \right) = \frac{F'_n - F'}{F'} - \frac{1}{2} \left(\frac{F'_n - F'}{F'} \right)^2 + \dots,$$

$$\left| \log \frac{F'_n(x)}{F'(x)} \right| < \frac{m_n}{m} + \frac{1}{2} \left(\frac{m_n}{m} \right)^2 + \dots < \frac{2m_n}{m}, \quad \left(\text{si } M_n < \frac{m}{2} \right),$$

où m désigne le minimum de $F'(x)$ dans (a, b) .

On a, d'autre part, dans le domaine D :

$$\Re \log F'_n(z) = \log |F'_n(z)| \leq \log M_n.$$

Il en résulte, d'après une relation de Borel et Hadamard sur la limitation du module d'une fonction holomorphe dans un cercle¹, connaissant une borne supérieure de sa partie réelle, qu'on a, dans tout domaine D_1 intérieur au domaine D , l'évaluation:

$$(7) \quad |\log F'_n(z)| \leq A \log M_n,$$

où A ne dépend pas de n .

En considérant la suite $\log F'_n(x)$, et en tenant compte des relations (6) et (7), on trouve comme conséquence du théorème II la proposition suivante:

Théorème IV. *Soit $F'_n(z)$ une suite de fonctions analytiques holomorphes dans un domaine D et ne s'y annulant pas. Supposons que sur un segment $[a, b]$ de*

¹ Voir, par exemple, G. Julia, *Principes géométriques d'analyse* T. I. p. 70—72.

l'axe réel contenu dans le domaine la suite $F_n(x)$ tend vers une fonction $F(x)$ différentiable de \circ sur ce segment et qu'on ait

$$|F_n(z)| \leq M_n \text{ si } z \in D, |F_n(x) - F(x)| \leq m_n \text{ pour } a \leq x \leq b,$$

où M_n^{-1} et m_n tendent vers \circ en décroissant. Si la série

$$\sum_n m_n (\log \log M_{n+1})^k$$

converge, la fonction $F(x)$ possédera une dérivée continue d'ordre k , en tout point intérieur du segment (a, b) .

On a évidemment une relation analogue dans le cas de l'intervalle fermé.

