UNE EXTENSION NOUVELLE DE LA THÉORIE DES FONCTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DE BOHR.

PAR

J. DELSARTE

à NANCY.

Introduction.

Toutes les extensions actuellement connues de la théorie des fonctions presque-périodiques de BOHR se rattachent à la définition de ces fonctions données par BOCHNER en 1927; elles sont relatives à des fonctions numériques définies sur un groupe abstrait et possédant dans une certaine métrique la propriété de compacité généralisant le plus naturellement celle de BOCHNER pour le groupe des translations dans l'espace euclidien à n dimensions.

Des travaux récents[1] ont d'ailleurs montré que l'introduction des groupes abstraits dans cette question n'y apporte guère plus de généralité, et qu'en fait, les fonctions presque-périodiques de BESICOVITCH représentent à peu près le maximum de ce qu'on peut atteindre.

La généralisation qui fait l'objet de ce mémoire a un point de départ tout différent. Considérons l'équation qui régit les vibrations d'une corde élastique infinie:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0.$$

L'expression bien connue de son intégrale générale

$$F(x;\, t) = f(x + t) + g(x - t)$$

---

[1] Cf. ANDRÉ WEIL: Sur les fonctions presque-périodiques de von NEUMANN; Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 200, p. 38, 1935.

fait apparaître de façon évidente le rôle du groupe des translations sur la droite; il est clair que si les fonctions f et g sont presque-périodiques de Bohr, il en sera de même de l'intégrale générale $F(x;\, t)$ relativement au temps, et cela uniformément par rapport à x. On peut dire que les oscillations d'une corde vibrante infinie se reproduisent presque-périodiquement dans le temps pourvu que les données initiales satisfassent à certaines conditions de presque-périodicité spatiale. Cette constatation est ici tout à fait triviale; cependant elle suggère immédiatement la généralisation suivante: Prenons un opérateur différentiel linéaire du second ordre de caractère elliptique, applicable aux fonctions de n variables réelles, soit

$$\mathfrak{E} f$$

cet opérateur; désignons par $F(x_1;\, x_2;\, \ldots\, x_n;\, t)$ l'intégrale généralisée de l'équation hyperbolique normale

$$\mathfrak{E} F - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

satisfaisant aux conditions de Cauchy

$$F(x_1;\, x_2;\, \ldots\, x_n;\, 0) = f(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n);$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} F(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n;\, t)\right]_{t=0} = g(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n);$$

f et g étant des fonctions continues. On peut alors se poser ce problème: quelles qualités doivent posséder les fonctions de n variables f et g, pour que F soit presque-périodique par rapport au temps, et cela uniformément par rapport aux variables d'espace? Lorsqu'il en sera ainsi, nous dirons que f et g sont presque-périodiques relativement à l'opérateur elliptique à n variables $\mathfrak{E} F$.

Une étude générale de ce genre de question serait sans doute un peu prématurée. Nous nous sommes borné ici à un cas simple, qui a l'avantage de conduire à une théorie en beaucoup de points semblable à celle des fonctions de Bohr, et la contenant d'ailleurs comme cas limite.

L'opérateur $\mathfrak{E}$ que nous utilisons, que nous désignons dans la suite par la notation D, et que nous appelons l'opérateur de Bessel, est un opérateur différentiel du second ordre à une variable, défini par

$$Df = \frac{d^2 f}{d r^2} + \frac{2p+1}{r}\,\frac{d f}{d r}.$$

Dans tout ce mémoire, *p est un nombre réel fixe* dont la valeur absolue est inférieure à $1/2$; on pourrait d'ailleurs tout aussi bien, sans rien changer que quelques petits détails de démonstration, supposer p complexe, sa partie réelle étant en valeur absolue inférieure à $1/2$. Il est vraisemblable que la plupart des résultats obtenus pourraient s'étendre au cas où cette partie réelle est supérieure à $+1/2$, en modifiant convenablement certains procédés; au contraire plus rien ne subsiste quand

$$\Re[p] < -\frac{1}{2}.$$

Il s'agit donc ici de fonctions d'une variable r; les définitions sont les suivantes:

1°) Une fonction $f(r)$, paire, définie et continue dans $(-\infty;\ +\infty)$ est dite presque-périodique J de première classe lorsqu'elle est bornée dans $[-\infty;\ +\infty]$ et que l'intégrale généralisée de l'équation

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2p+1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \tag{1}$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$\Phi(r;\ 0) = 0; \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right]_{t=0} = f(r) \tag{2}$$

est presque-périodique de Bohr par rapport au temps.

2°) Une fonction $f(r)$, paire, définie et continue dans $(-\infty;\ +\infty)$ est dite presque-périodique J de seconde classe lorsque l'intégrale généralisée de

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2p+1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$\Psi(r,\ 0) = f(r); \quad \left[\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right]_{t=0} = 0 \tag{3}$$

est presque-périodique de Bohr par rapport au temps.

3°) Une fonction $f(r)$, paire, définie et continue dans $(-\infty;\ +\infty)$ est dite presque-périodique J absolue lorsqu'elle est à la fois de première et de seconde classe. Alors l'intégrale généralisée de (1) satisfaisant aux conditions initiales (2) est presque-périodique de Bohr par rapport au temps, et cela, quant aux déplacements et quant aux vitesses.

Dans le cas limite $p = -1/2$, les fonctions de première classe sont les fonctions paires bornées admettant une primitive presque-périodique de Bohr; les fonctions de seconde classe sont les fonctions paires presque-périodiques de Bohr.

Voici maintenant les principales propriétés de ces diverses catégories de fonctions.

L'élément simple qui joue le même rôle que l'exponentielle dans la théorie de Bohr, est lié aux fonctions de Bessel; c'est la fonction

$$j(\lambda r) = \frac{2^p \Gamma(p+1)}{(\lambda r)^p} J_p(\lambda r)$$

J_p désignant comme de coutume la fonction de Bessel d'indice p. Lorsque p est égal à $-1/2$, cet élément simple se réduit à $\cos \lambda r$. On a les théorèmes suivants:

I. Si $f(r)$ est presque-périodique J de l'une ou l'autre classe, la limite

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_0^R r^{2p+1} f(r)\, j(\lambda r)\, dr$$

existe et est finie; elle est nulle sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs positives λ_n de λ, valeurs que nous nommerons les exposants de Fourier de la fonction; pour ces valeurs la limite sera désignée par

$$\frac{2^{2p}}{\pi} \Gamma^2(p+1) \frac{a_n}{\lambda_n^{2p+1}}.$$

La série $\Sigma a_n \bar{a}_n / \lambda_n^2$ converge si la fonction est de première classe; c'est la série $\Sigma a_n \bar{a}_n$ qui est dans ce cas, si la fonction est de seconde classe. On a le développement formel

$$f(r) \sim \sum_n a_n j(\lambda_n r). \tag{4}$$

II. Si $f(r)$ est presque-périodique J absolue, il existe une constante positive finie H telle que l'on ait pour tout r

$$|f(r)| < \frac{H}{r^{p+\frac{1}{2}}}.$$

III. Si $f(r)$ et $g(r)$ sont presque-périodiques J absolues, la limite

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_0^R r^{2p+1}f(r)\,g(r)\,dr$$

existe et est finie; elle est nulle si les deux fonctions n'ont aucun exposant de Fourier commun; sinon elle a pour valeur la somme de la série alors convergente

$$\sum\frac{a_n b_n}{\lambda_n^{2p+1}};$$

où les λ_n sont les exposants communs, et les a_n et b_n les coefficients correspondants dans les développements de f et g.

Ce dernier point entraîne que les fonctions presque-périodiques J absolues constituent une variété linéaire dans un espace de Hilbert non dénombrable; le produit scalaire y est défini par

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_0^R r^{2p+1}f(r)\,\bar{g}(r)\,dr$$

et les développements formels (4), pour ces fonctions, convergent au sens de la norme ainsi définie.

Introduisons maintenant l'opérateur

$$f(r|s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi f\left[\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\varphi}\right]\sin^{2p}\varphi\,d\varphi$$

que nous appellerons moyenne circulaire d'ordre p, relative au rayon s. Pour $p=-1/2$, cette moyenne se réduit à

$$\frac{1}{2}[f(r+s)+f(r-s)].$$

Cela étant, signalons encore les résultats que voici:

IV. Si $f(r)$ est presque-périodique J de première ou de seconde classe, il en est de même de n'importe laquelle de ses moyennes circulaires.

V. Si $f(r)$ est presque-périodique J de seconde classe, l'ensemble de ses moyennes circulaires est compact.

On notera que ce dernier fait donne une extension partielle des théorèmes de Bochner.

Lorsque $p = 0$, l'équation (1) se réduit à

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

qui n'est autre que l'équation des ondes cylindriques avec symétrie axiale. Les conclusions précédentes donnent donc les conditions que doit satisfaire l'état initial pour que l'évolution ultérieure de la propagation se fasse presque-périodiquement par rapport au temps. Il est naturel d'examiner au même point de vue l'équation générale des ondes cylindriques:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

Les conditions initiales sont alors données au moyen de fonctions de deux variables; la théorie correspondante pourrait donc se nommer celle des fonctions presque-périodiques J_0 de deux variables. Cette théorie doit conduire à une extension des propositions précédentes, prises pour $p = 0$, à des fonctions de deux variables définies dans tout le plan. Dans un mémoire ultérieur, nous reviendrons sur cette question; nous sommes d'ailleurs déjà en possession des principaux résultats.

Ce qui précède suggère évidemment bien de généralisations; tous les problèmes de propagation, *en milieu indéfini*, avec des conditions aux limites qu'on peut varier à volonté, semblent susceptibles de conduire à des théories analogues. Signalons seulement le cas du plan indéfini percé d'un trou circulaire ou elliptique; il est vraisemblable qu'on serait ainsi amené à des développements suivant certaines combinaisons linéaires de fonctions de Bessel de première et de seconde espèce, ou à des développements en séries de fonctions de Mathieu.

Le présent mémoire est divisé en deux chapitres; dans le premier, nous définissons certains opérateurs linéaires fonctionnels qui transforment l'équation (1) en l'équation des cordes vibrantes, l'élément simple en une fonction trigonométrique, et les fonctions presque-périodiques J en des fonctions de Bohr. C'est sur l'emploi de ces opérateurs qu'est basée toute la théorie. Dans le second chapitre nous établissons les propriétés que nous venons de résumer rapidement.

Les principaux résultats qu'on trouvera ci-dessous ont été publiés dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. (t. 206, p. 573, février 1938; Sur une extension nouvelle de la notion de presque-périodicité.)

CHAPITRE I.

Formules et transformations essentielles.

§ 1. L'identité fondamentale.

1. Définitions et notations.

Dans tout le cours de ce travail, p sera un nombre reel *fixe* dont la valeur absolue est strictement inférieure à $1/2$; r sera une variable réelle susceptible de prendre toutes les valeurs; les fonctions de cette variable que l'on considérera seront définies dans $(-\infty; +\infty)$, elles seront soit paires, soit impaires, elles seront au moins continues. Enfin λ désignera un paramètre réel positif ou nul.

Nous aurons à utiliser certains opérateurs linéaires fonctionnels; ils seront notés par des grandes lettres: D, M, A, B, etc. Si f est la fonction à laquelle on applique l'opérateur, et si g est le résultat de cette opération, on écrira par exemple

$$g = Df;$$

il arrivera parfois qu'il soit expédient d'indiquer la variable dans la fonction g, on posera alors

$$g(r) = D_r f;$$

enfin il pourra être nécessaire de préciser la variable dans la fonction f; cette variable, sorte de variable d'intégration, sera toujours désignée par une lettre grecque, et on aura

$$g(r) = D_r[f(\varrho)].$$

L'élément simple. C'est une fonction paire qui se rattache immédiatement à la fonction de Bessel de première espèce J_p; elle est donnée par la formule

$$j(\lambda r) = \frac{2^p \Gamma(p+1)}{(\lambda r)^p} J_p(\lambda r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{i\lambda r}{2}\right)^{2n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (i\lambda)^{2n} \varphi_n(r). \tag{1}$$

Elle jouera le même rôle que l'exponentielle $e^{\lambda x}$ dans la théorie de Bohr.

L'opérateur de Bessel. C'est l'opérateur

$$D_r[f(\varrho)] = \left[\frac{d^2 f}{d\varrho^2} + \frac{2p+1}{\varrho}\frac{df}{d\varrho}\right]_{\varrho=r}. \tag{2}$$

Il est défini pour les fonctions $f(r)$ deux fois dérivables et dont la dérivée première est nulle pour $r = 0$; il donne une fonction paire ou impaire en même temps que f. Il joue le même rôle, par rapport à l'élément simple, que l'opérateur de dérivation par rapport à l'exponentielle; on a

$$D_r[j(\lambda\varrho)] = (i\lambda)^2 j(\lambda r); \tag{3}$$

et

$$D_r[\varphi_n(\varrho)] = \varphi_{n-1}(r) \qquad (n \geq 1).$$

L'opérateur de moyenne circulaire généralisée. Il est construit avec l'opérateur de Bessel et l'élément simple $j(\lambda r)$, de la même façon que l'opérateur de translation, avec l'exponentielle et l'opérateur de dérivation; il est donc défini par le développement formel suivant, où s est regardé comme un paramètre

$$M_r^s[f(\varrho)] = f(r)\varphi_0(s) + D_r[f(\varrho)]\varphi_1(s) + \cdots + D_r^{(n)}[f(\varrho)]\varphi_n(s) + \cdots$$

Si $F(r, s)$ désigne le résultat de l'application de cet opérateur à la fonction $f(r)$, on constate formellement que l'on a

$$D_r[F(\varrho, s)] = D_s[F(r, \sigma)]. \tag{4}$$

Cette condition indéfinie, jointe aux conditions initiales évidentes

$$F(r, 0) = f(r); \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_{s=0} = 0. \tag{5}$$

détermine le prolongement maximum de l'opérateur, et conduit à l'expression[1]

[1] Pour l'établissement de cette formule, on se reportera au *Journal de Mathématiques pures et appliquées;* T. 17, 1938, fasc. 3, p. 213: *Sur une extension de la formule de Taylor et de la théorie des fonctions moyenne-périodiques.*

$$M_r^s[f(\varrho)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} f\left[\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\varphi}\right] \cdot \sin^{2p}\varphi\, d\varphi; \tag{6}$$

qui a un sens pour toute fonction paire continue. De plus

$$M_r^s[j(\lambda\varrho)] = j(\lambda r)\, j(\lambda s), \tag{7}$$

comme il est bien connu.

L'opérateur de Sonine. C'est l'opérateur

$$A_r[f(\varrho)] = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)} \cdot r \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\sin\theta) \frac{\sin^{2p+1}\theta}{\cos^{2p}\theta}\, d\theta =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)} \int_0^{r} \frac{\varrho^{2p+1} f(\varrho)}{[r^2-\varrho^2]^{p+\frac{1}{2}}}\, d\varrho. \tag{8}$$

Il est défini pour f continue; si f est paire, $g = Af$ est impaire, et inversement; une formule due à Sonine donne

$$A_r[j(\lambda\varrho)] = \frac{\sin\lambda r}{\lambda} \tag{9}$$

qui entraîne

$$A_r[\varphi_n(\varrho)] = \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{10}$$

L'opérateur de Poisson. C'est l'opérateur

$$B_r[f(\varrho)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta\, f(r\sin\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \frac{1}{r^{2p}} \int_0^{r} \frac{f(\varrho)}{[r^2-\varrho^2]^{\frac{1}{2}-p}}\, d\varrho. \tag{11}$$

Il est défini pour f continue; $g = Bf$ est paire ou impaire en même temps que f; une formule due à Poisson donne

$$B_r[\cos\lambda\varrho] = j(\lambda r) \tag{12}$$

qui entraîne

$$B_r\left[\frac{\varrho^{2n}}{(2n)!}\right] = \varphi_n(r). \tag{13}$$

2. Relation entre les opérateurs de Poisson et de Sonine.

Lorsque $f(r)$ possède une dérivée première, la formule $g = Af$ s'inverse par

$$f(r) = B_r[g'(\varrho)].$$

D'une façon générale, on a

$$A_r\{B_\varrho[f(\sigma)]\} = \int_0^r f(\varrho)\,d\varrho. \tag{14}$$

La vérification directe est immédiate; nous ne nous y attarderons pas.

3. Relation entre les opérateurs de Bessel et de Sonine.

Supposons que $f(r)$ soit deux fois dérivable, sa dérivée première étant nulle à l'origine; posons $g = Af$; $h = Df$; on a

$$\frac{d^2 g}{d r^2} = A_r h$$

ou

$$A_r\{D_\varrho[f(\sigma)]\} = \frac{d^2}{d r^2}\{A_r[f(\varrho)]\}; \tag{15}$$

en effet il vient successivement

$$A_r[h(\varrho)] = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)} \int_0^r \left[\frac{d^2 f}{d\varrho^2} + \frac{2p+1}{\varrho}\,\frac{df}{d\varrho}\right] \frac{\varrho^{2p+1}\,d\varrho}{[r^2-\varrho^2]^{p+\frac{1}{2}}};$$

$$g(r) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)} \cdot r \int_0^1 \frac{u^{2p+1} f(ru)}{[1-u^2]^{p+\frac{1}{2}}}\,du$$

$$\frac{d^2 g}{d r^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)} \int\limits_0^1 \frac{u^{2p+1}[2 u f'(r u) + r u^2 f''(r u)]}{[1-u^2]^{p+\frac{1}{2}}}\, d u$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)} \int\limits_0^r \frac{\varrho^{2p+2}[2 f'(\varrho) + \varrho f''(\varrho)]}{r^2 [r^2-\varrho^2]^{p+\frac{1}{2}}}\, d\varrho;$$

puis

$$r^2\left\{A_r[h(\varrho)] - \frac{d^2 g}{d r^2}\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)} \int\limits_0^r \left[\varrho(r^2-\varrho^2)\frac{d^2 f}{d\varrho^2} + \{(2p+1)r^2 - 2\varrho^2\}\frac{d f}{d\varrho}\right] \frac{\varrho^{2p}\, d\varrho}{[r^2-\varrho^2]^{p+\frac{1}{2}}};$$

or

$$\frac{d}{d\varrho}\left[\varrho^{2p+1}(r^2-\varrho^2)\frac{d f}{d\varrho}\right] = \varrho^{2p}\left[\varrho(r^2-\varrho^2)\frac{d^2 f}{d\varrho^2} + \{(2p+1)r^2 - (2p+3)\varrho^2\}\frac{d f}{d\varrho}\right].$$

Une intégration par parties fait disparaître la dérivée seconde, après quoi l'on constate que le second membre est identiquement nul, d'où la relation (15).

4. Relation entre les opérateurs de Bessel et de Poisson.

Les identités (14) et (15) donnent par combinaison une relation entre les opérateurs B et D. Supposons que f soit trois fois dérivable, sa dérivée première étant nulle pour $r = 0$; il en est alors de même de $g = Bf$; désignons par h la dérivée seconde de f, on a

$$D g = B h$$

ou

$$D_r\{B_\varrho[f(\sigma)]\} = B_r\left[\frac{d^2 f}{d\varrho^2}\right]; \tag{16}$$

en effet la formule (14) donne

$$f(r) = \frac{d}{d r} A_r[g(\varrho)];$$

et (15) conduit de même à

$$\frac{df}{dr} = A_r\{D_\varrho[g(\sigma)]\};$$

en inversant, ce qui est légitime à cause de l'existence des dérivées troisièmes, on obtient

$$D_r\{B_\varrho[f(\sigma)]\} = B_r\left[\frac{d^2 f}{d\varrho^2}\right];$$

qui est précisément la formule (16).

5. L'identité fondamentale.

Nous donnerons ce nom à la relation qui existe entre l'opérateur de Sonine et l'opérateur de moyenne circulaire généralisée. Supposons que la fonction $f(r)$ soit une fonction paire deux fois dérivable; la moyenne circulaire

$$F(r, s) = M_r^s[f(\varrho)]$$

est alors l'intégrale de l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type hyperbolique

$$D_r[F(\varrho, s)] = D_s[F(r, \sigma)]$$

satisfaisant aux conditions de Cauchy

$$F(r, 0) = f(r); \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_{s=0} = 0.$$

C'est une fonction paire de r et de s deux fois dérivable; posons

$$\Phi(r, t) = A_t[F(r, \tau)]. \tag{17}$$

Cette fonction est paire par rapport à r et impaire par rapport à t; elle est deux fois dérivable, et sa dérivée première par rapport à r, comme celle de F, est nulle pour $r = 0$. Il vient, de façon évidente

$$D_r[\Phi(\varrho, t)] = A_t\{D_r[F(\varrho, \tau)]\}$$

puis, par (15),

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = A_t\{D_\tau[F(r, \nu)]\}.$$

Compte tenu de la condition indéfinie à laquelle satisfait F, on voit que $\Phi(r, t)$ satisfait à la condition indéfinie

$$D_r[\Phi(\varrho, t)] = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \tag{18}$$

qui est encore une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type hyperbolique; on notera que, pour $p = 0$, elle se réduit à l'équation des ondes cylindriques. Par ailleurs, on constate facilement que

$$\Phi(r, 0) = 0; \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{t=0} = f(r). \tag{19}$$

La formule (17) donne donc l'intégrale de (18) satisfaisant aux conditions de Cauchy (19); pour $p = 0$, on retrouve la formule classique.

Posons maintenant

$$G(r, t) = A_r[\Phi(\varrho, t)] \tag{20}$$

et

$$a(r) = A_r[f(\varrho)]; \tag{21}$$

$G(r, t)$ est une fonction impaire de r et t, $a(r)$ est une fonction impaire de r, toutes deux sont deux fois dérivables, et on a

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = A_r\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(\varrho, t)\right\}$$

puis, par (15),

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = A_r\{D_\varrho[\Phi(\sigma, t)]\}$$

ce qui entraîne, à cause de (18),

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}. \tag{22}$$

Il vient d'autre part

$$G(r, 0) = 0; \qquad \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_{t=0} = a(r) \tag{23}$$

et les formules d'intégration bien connues donnent

$$G(r, t) = \frac{1}{2}\int_0^r [a(t+u) + a(t-u)]\,du = \frac{1}{2}\int_0^t [a(r+u) + a(r-u)]\,du; \tag{24}$$

ces deux aspects symétriques étant dus à l'imparité de la fonction $a(r)$; dès lors, l'inversion de (20) qui est légitime, puisque $\Phi(r, t)$ est deux fois dérivable, permet d'écrire

$$\Phi(r, t) = B_r[G'_\varrho(\varrho, t)]$$

ou encore

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{2} B_r [a(t+\varrho) + a(t-\varrho)] = \frac{1}{2} B_r \{A_{t+\varrho}[f(\sigma)] + A_{t-\varrho}[f(\sigma)]\} \tag{25}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta\, a(t + r\sin\theta)\, d\theta. \tag{25'}$$

On en déduit l'identité fondamentale

$$B_r \{A_{t+\varrho}[f(\sigma)] + A_{t-\varrho}[f(\sigma)]\} = 2 A_t \{M_r^\varrho [f(\sigma)]\}; \tag{26}$$

qu'on peut regarder comme une généralisation de (15); elle se démontre en effet formellement de la façon suivante: l'itération indéfinie de (15) donne, pour tout entier n,

$$\frac{d^{2n}}{dr^{2n}} \{A_r[f(\varrho)]\} = A_r \{D_\varrho^{(n)}[f(\sigma)]\}$$

d'où, compte tenu du développement formel de l'opérateur M, de la formule (13), et de la série de Taylor, la relation en question. Inversement, on passe de (26) à (15) en faisant tendre r vers zéro.

6. Autre forme de l'identité fondamentale.

Supposons que $f(r)$, toujours paire, soit maintenant trois fois dérivable, et posons

$$\Psi(r, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} A_t [F(r, \tau)] \tag{27}$$

qui équivaut à

$$F(r, s) = B_s [\Psi(r, \sigma)] \tag{28}$$

car l'inversion est légitime. $\Psi(r, t)$ est une fonction paire de r et paire de t; elle satisfait, comme $\Phi(r, t)$ à la condition indéfinie

$$D_r[\Psi(\varrho, t)] = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{18}$$

et on a de plus

$$\Psi(r, 0) = f(r); \qquad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \tag{29}$$

de sorte que la formule (27) donne l'intégrale de l'équation (18) satisfaisant aux conditions de Cauchy (29).

Posons maintenant

$$H(r,\ t) = \frac{\partial G}{\partial t} = A_r[\Psi(\varrho,\ t)]; \tag{30}$$

$H(r, t)$ est une fonction impaire de r, paire de t; elle est deux fois dérivable et est solution, comme $G(r, t)$, de l'équation des cordes vibrantes; on a

$$H(r,\ t) = \frac{1}{2}[a(r+t) + a(r-t)].$$

D'ailleurs la formule (21) s'inverse par

$$f(r) = B_r[a'(\varrho)]$$

tandis que (30) s'inverse par

$$\Psi(r,\ t) = B_r[H'_\varrho(\varrho,\ t)] = \frac{1}{2}B_r[a'(\varrho+t) + a'(\varrho-t)].$$

Compte tenu de ces nouvelles formules, (28) s'écrit

$$B_s\{B_r[g(\varrho+\sigma)] + B_r[g(\varrho-\sigma)]\} = 2\,M_r^s\{B_\varrho[g(\sigma)]\}; \tag{31}$$

en remplaçant $a'(r)$ par $g(r)$ qui est une fonction paire seulement assujettie à posséder une dérivée seconde. Cette identité n'est qu'une autre forme de (26); elle peut être considérée comme une extension de (16), de même que (26) est une extension de (15).

§ 2. Généralisation de l'identité fondamentale.

1. Position du problème.

Les résultats du précédent paragraphe peuvent se résumer ainsi: Partant de l'équation (18)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2p+1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

son intégrale $\Phi(r, t)$ satisfaisant aux conditions initiales

$$\Phi(r, 0) = 0; \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{t=0} = f(r)$$

s'exprime par la formule

$$\Phi(r, t) = A_t \{M_r^\tau [f(\varrho)]\}$$

tandis que son intégrale satisfaisant aux conditions initiales

$$\Psi(r, 0) = f(r); \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

est donnée par la formule

$$\Psi(r, t) = \frac{\partial}{\partial t} A_t \{M_r^\tau [f(\varrho)]\}.$$

Ces résultats sont classiques et supposent seulement que $f(r)$ est deux fois dérivable dans le premier cas, trois fois dans le second. D'autre part, en utilisant la transformation de Sonine, qui substitue à l'équation (18) l'équation des cordes vibrantes, nous avons obtenu une autre forme de ces intégrales, à savoir

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{2} B_r \{A_{t+\varrho}[f(\sigma)] + A_{t-\varrho}[f(\sigma)]\}$$

pour la première, et

$$\Psi(r, t) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} B_r \{A_{t+\varrho}[f(\sigma)] + A_{t-\varrho}[f(\sigma)]\}$$

pour la seconde. L'identité de ces deux formes, à quoi équivaut la formule fondamentale (26), a été démontrée en supposant que $f(r)$ est deux fois dérivable dans le premier cas, trois fois dans le second. Or, dans ces identités, les deux membres ont encore un sens lorsque $f(r)$ est seulement supposée continue, — pour l'identité relative à Φ —, ou pourvue d'une dérivée première continue, — pour l'identité relative à Ψ —. Ces identités jouant un rôle important dans les chapitres qui vont suivre, il importe de les étendre aux cas les plus généraux. C'est le but du présent paragraphe.

On peut donner une démonstration directe de la formule (26), la fonction $f(r)$ y étant seulement supposée paire et continue, en utilisant un changement de variables convenable. La transformation dont nous nous servirons, d'ailleurs intéressante par elle même, est un peu compliquée, et exige des développements assez longs. Nous n'indiquerons ici que les étapes principales du calcul.

2. Changement de variables; premier cas.

Développons l'identité (26); en négligeant un facteur constant et en tenant compte de la définition des opérateurs M, A et B, elle devient

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (t + r \sin \varphi) \cos^{2p} \varphi \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f[(t + r \sin \varphi) \sin \theta] \frac{\sin^{2p+1} \theta}{\cos^{2p} \theta} d\theta \right] d\varphi$$

$$= t \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\pi} f[\sqrt{r^2 + t^2 \sin^2 \theta - 2 r t \sin \theta \cos \varphi}] \sin^{2p} \varphi \, d\varphi \right] \frac{\sin^{2p+1} \theta}{\cos^{2p} \theta} d\theta. \quad (26')$$

Pour faciliter le langage, nous emploierons une image géométrique. Rapportons l'espace à un trièdre trirectangle $Oxyz$; le point courant m sera défini par ses coordonnées cylindro-polaires ϱ; ω; z. Soit $f(m) = f(\varrho)$ une fonction de point; soit a un point de Ox à la distance r de l'origine; soit enfin S_t la sphère de centre a, de rayon t; nous prendrons sur cette sphère un système de coordonnées géographiques: θ et φ; la ligne des pôles az' sera la parallèle à Oz, le méridien origine des longitudes sera le demi-plan Oaz', de sorte que les longitudes φ seront comptées à partir du rayon aO. Pour un point m de la sphère, on a

$$\varrho^2 = r^2 + t^2 \sin^2 \theta - 2 r t \sin \theta \cos \varphi.$$

De plus, l'élément d'aire de S_t est donné par

$$d\sigma = t^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

et le second membre de (26') devient, en désignant par σ_t l'hémisphère supérieur,

$$\frac{1}{2t} \int\int_{\sigma_t} f(\varrho) \, | \sin \varphi \operatorname{tg} \theta |^{2p} d\sigma$$

ou encore, en introduisant la cote z du point courant, et l'élément d'aire du plan xOy,

$$\frac{1}{2} \int\int_{\sigma_t} \varrho f(\varrho) \, | \sin \varphi \operatorname{tg} \theta |^{2p} \frac{d\varrho \, d\omega}{z}.$$

Nous supposerons d'abord que t est supérieur à r; l'origine O est alors intérieure à la sphère; on notera que, dans ce cas, le premier comme le second membre de (26′), n'utilisent les valeurs de la fonction f, que dans l'intervalle $[t-r;\ t+r]$.

Nous introduirons deux nouvelles variables angulaires ψ et χ, satisfaisant aux conditions suivantes:

a) l'élément d'aire de la sphère a pour expression

$$d\sigma = t(t + r \sin\psi) \sin\chi \, d\chi \, d\psi;$$

b) la distance du point courant de la sphère à Oz a pour expression

$$\varrho = (t + r \sin\psi) \sin\chi;$$

c) on a de plus la relation

$$|\cos\psi \operatorname{tg}\chi| = |\sin\varphi \operatorname{tg}\theta|.$$

Toutes ces conditions sont remplies si l'on pose

$$\sin\psi = \frac{(\varrho + t)\cos\omega - r}{\varrho + t - r\cos\omega}; \qquad \sin\chi = \frac{\varrho(\varrho + t - r\cos\omega)}{t^2 + \varrho(t + r\cos\omega) - r^2}. \tag{32}$$

Le calcul de $1 \pm \sin\psi$; $1 \pm \sin\chi$ et une discussion facile montrent qu'à tout point m de σ_t correspondent une valeur de ψ comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ ainsi qu'une valeur de χ comprise entre 0 et $+\frac{\pi}{2}$; de plus, quand m décrit σ_t, le point $(\psi; \chi)$ décrit une et une seule fois le champ rectangulaire

$$-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{3\pi}{2}; \qquad 0 < \chi < \frac{\pi}{2}.$$

Enfin on a successivement

$$\varrho = (t + r\sin\psi)\sin\chi;$$

$$\cos\omega = \frac{r(1 + \sin\chi \sin^2\psi) + t(1 + \sin\chi)\sin\psi}{(1 + \sin\chi)(t + r\sin\psi)};$$

$$z^2 = \frac{1 - \sin\chi}{1 + \sin\chi}[t^2(1 + \sin\chi)^2 + 2rt(1 + \sin\chi)\sin\chi\sin\psi - r^2(1 - \sin^2\chi\sin^2\psi)];$$

$$(1+\sin\chi)^2(t+r\sin\psi)^2\sin^2\omega =$$
$$= \cos^2\psi\,[t^2(1+\sin\chi)^2+2\,r\,t(1+\sin\chi)\sin\chi\sin\psi - r^2(1-\sin^2\chi\sin^2\psi)].$$

Les deux dernières de ces relations entraînent

$$z^2 = \varrho^2 \operatorname{cotg}^2\chi \frac{\sin^2\omega}{\cos^2\psi}$$

d'où résulte, dans le triangle ayant pour côtés r; $t\sin\theta$; ϱ, les angles opposés aux côtés ϱ et $t\sin\theta$ étant respectivement φ et ω,

$$|\cos\psi \operatorname{tg}\chi| = \frac{\varrho\sin\omega}{z} = \frac{\varrho\sin\omega}{t\cos\theta} = |\sin\varphi\operatorname{tg}\theta|.$$

Par ailleurs il vient

$$\sin\omega\frac{D(\varrho;\,\omega)}{D(\psi;\,\chi)} = \frac{\cos\psi\cos\chi}{(1+\sin\chi)^2(t+r\sin\psi)}\cdot$$
$$\cdot[t^2(1+\sin\chi)^2+2\,r\,t(1+\sin\chi)\sin\chi\sin\psi - r^2(1-\sin^2\chi\sin^2\psi)];$$

puis

$$d\sigma = \frac{t}{z}\varrho\,d\varrho\,d\omega = t\frac{|\operatorname{tg}\chi\cos\psi|}{\sin\omega}d\varrho\,d\omega = t\frac{|\operatorname{tg}\chi\cos\psi|}{\sin\omega}\left|\frac{D(\varrho;\,\omega)}{D(\psi;\,\chi)}\right|d\psi\,d\chi$$
$$= t\sin\chi\frac{\cos^2\psi}{\sin^2\omega}[t^2(1+\sin\chi)^2+2\,r\,t(1+\sin\chi)\sin\chi\sin\psi -$$
$$- r^2(1-\sin^2\chi\sin^2\psi)]\frac{d\psi\,d\chi}{(1+\sin\chi)^2(t+r\sin\psi)}$$
$$= t\sin\chi(t+r\sin\psi)\,d\psi\,d\chi;$$

moyennant quoi le second membre de (26′) prend la forme

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t+r\sin\psi)f[(t+r\sin\psi)\sin\chi]\,|\cos\psi\operatorname{tg}\chi|^{2p}\sin\chi\,d\chi\right]d\psi; \qquad (33)$$

qui n'est autre que celle du premier membre, aux notations près.

3. Changement de variable; deuxième cas.

Supposons maintenant t inférieur à r; l'origine O est extérieure à la sphère; le second membre de (26′) n'utilise que les valeurs de $f(\varrho)$ dans l'intervalle

$[r-t;\ r+t]$ tandis que le premier membre utilise celles de l'intervalle $[t-r;\ t+r]$. Considérons alors le premier membre de (26′), mis sous la forme (33), faisons la substitution

$$\sin\psi = u; \qquad \sin\chi = v; \tag{34}$$

et posons comme plus haut

$$\varrho = (t + ru)v; \qquad \cos\omega = \frac{r(1 + vu^2) + tu(1 + v)}{(1 + v)(t + ru)}. \tag{35}$$

Dans (33), le point $(u;\ v)$ décrit une et une seule fois le champ rectangulaire $\mathfrak{R}$ défini par les inégalités

$$|u| < 1; \qquad 0 < v < 1.$$

Or, en étudiant les signes de ϱ et de $1 \pm \cos\omega$ on constate que la portion $\mathfrak{A}$ du rectangle $\mathfrak{R}$ pour laquelle ϱ est positif et ω réel, est définie par la seule inégalité

$$v > \frac{r - t}{t + ru}.$$

C'est la portion hachurée de la figure 1, elle est située au dessus de l'arc d'hyperbole équilatère $\alpha\beta$; α et β ont respectivement pour ordonnée et pour abscisse

$$\frac{r - t}{r + t} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{2t}{r}.$$

Nous désignerons encore par $\mathfrak{B}$ la portion du rectangle $\mathfrak{R}$ comprise entre l'arc $\alpha\beta$ et la droite $u = -t/r$; puis par $\mathfrak{C}$ la portion restante. Ceci étant, l'intégrale (33) se décompose en trois parties relatives respectivement aux portions $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$. Nous allons montrer que les intégrales doubles relatives aux portions $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ se compensent exactement.

Nous ferons, pour cela, usage d'une transformation birationnelle possédant les propriétés suivantes:

a) quand le point $(u;\ v)$ décrit la région $\mathfrak{B}$, le point transformé $(u';\ v')$ décrit une et une seule fois la région $\mathfrak{C}$;

b) on a les invariances

$$(t+ru)v = -(t+ru')v'; \quad v^2\frac{1-u^2}{1-v^2} = v'^2\frac{1-u'^2}{1-v'^2}; \quad \frac{du\,dv}{v(1-u^2)} = \frac{du'\,dv'}{v'(1-u'^2)}.$$

On obtient simplement les formules de la transformation en éliminant la variable w entre les trois équations

$$\begin{cases} w = (t + r u) v = -(t + r u') v' \\ 2 r t (1 + u u') - u u' (t^2 + r^2 - w^2) = 0 \end{cases}$$

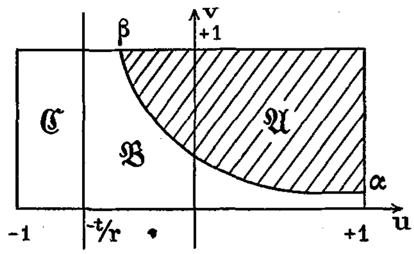

Fig. 1.

ce qui donne

$$u' = \frac{r(2t + ru)(u^2 v^2 - 1) - t^2 u (1 - v^2)}{t(t + 2ru)(1 - v^2) + r^2 (1 - u^2 v^2)}; \quad v' = v \frac{t(t + 2ru)(1 - v^2) + r^2 (1 - u^2 v^2)}{r^2 (1 - u^2 v^2) - t^2 (1 - v^2)}. \tag{36}$$

On trouve ensuite pour le jacobien

$$v(1 - u^2) \frac{D(u'; v')}{D(u; v)} = - v'(1 - u'^2);$$

puis, par un calcul facile

$$(1 - u'^2)[t(t + 2ru)(1 - v^2) + r^2 (1 - u^2 v^2)]^2 =$$

$$= (1 - u^2)[t - r - v(t + ru)][t - r + v(t + ru)][t + r - v(t + ru)][t + r + v(t + ru)];$$

$$(1 - v'^2)[r^2 (1 - u^2 v^2) - t^2 (1 - v^2)]^2 =$$

$$= (1 - v^2)[t - r - v(t + ru)][t - r + v(t + ru)][t + r - v(t + ru)][t + r + v(t + ru)];$$

d'où

$$v^2 \frac{1 - u^2}{1 - v^2} = v'^2 \frac{1 - u'^2}{1 - v'^2};$$

et enfin

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - u'^2)(1 - v'^2)}} \frac{D(u'; v')}{D(u; v)} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - v^2)}}.$$

Si donc $d\sigma$ et $d\sigma'$ sont les éléments d'aires en correspondance des plans $(u; v)$ et $(u'; v')$, on a

$$\left[v^2 \frac{1 - u^2}{1 - v^2}\right]^p v(t + ru) f[(t + ru) v] \frac{d\sigma}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - v^2)}} =$$

$$= - \left[v'^2 \frac{1 - u'^2}{1 - v'^2}\right]^p v'(t + ru') f[(t + ru') v'] \frac{d\sigma'}{\sqrt{(1 - u'^2)(1 - v'^2)}}.$$

Enfin une discussion simple montre bien que les domaines 𝔅 et ℭ sont en correspondance dans la transformation en question. Si on remarque que (33) s'écrit, en utilisant le changement de variables (34),

$$\iint\limits_{\mathfrak{R}} \left[v^2 \frac{1-u^2}{1-v^2}\right]^p v\,(t+r u) f[(t+r u) v] \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}};$$

on voit que la compensation exacte des intégrales étendues à $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ est bien réalisée, et qu'on peut, par suite, remplacer le premier membre de (26′) par l'intégrale précédente, étendue seulement au domaine $\mathfrak{A}$. Mais on peut cette fois revenir aux variables ϱ et ω, par les formules (35); on sait que la quantité sous le signe somme devient alors

$$\varrho f(\varrho) \,|\sin\varphi \operatorname{tg}\theta|^{2p} \frac{d\varrho\, d\omega}{z};$$

où on a introduit comme plus haut la cote z et les coordonnées géographiques θ et φ du point m de l'hémisphère σ_t, ayant pour coordonnées cylindropolaires ϱ; ω; z. On vérifie d'ailleurs facilement que la région du plan (ϱ; ω) qui correspond à la région $\mathfrak{A}$ du plan (u; v), est précisément la base de l'hémisphère σ_t, et que, dans cette région, le jacobien de la transformation ne change pas de signe; de tout ceci résulte que (33) est identique au second membre de (26′).

Il n'y a rien à ajouter à cette démonstration pour traiter le cas de l'identité relative à la fonction $\Psi(r, t)$, puisque cette identité se déduit de celle qu'on vient d'établir en dérivant par rapport à la variable t, opération évidemment légitime dès que la fonction f possède une dérivée première continue.

4. Examen des deux cas limites $p = -1/2$ et $p = +1/2$.

Ces deux cas sont intéressants car ils établissent la liaison entre la théorie qui sera développée dans le chapitre suivant, et la théorie classique de Bohr. C'est pourquoi nous terminerons ce paragraphe en indiquant rapidement ce que deviennent les fonctions, opérateurs, relations que nous venons de considérer pour ces valeurs de p.

a) $p = -1/2$; on a alors

$$j(\lambda r) = \cos \lambda r; \quad \varphi_n(r) = \frac{r^{2n}}{(2n)!} \tag{37}$$

puis

$$D_r[f(\varrho)] = \frac{d^2 f}{d r^2}; \quad M_r^s[f(\varrho)] = \frac{1}{2}[f(r+s) + f(r-s)]; \tag{38}$$

$$A_r[f(\varrho)] = \int_0^r f(\varrho)\, d\varrho; \qquad B_r[f(\varrho)] = f(r); \tag{39}$$

b) $p = + 1/2$; on a cette fois

$$j(\lambda r) = \frac{\sin \lambda r}{\lambda r}; \qquad \varphi_n(r) = \frac{r^{2n}}{(2n+1)!} \tag{37'}$$

puis

$$D_r[f(\varrho)] = \frac{d^2 f}{d r^2} + \frac{2}{r}\frac{d f}{d r}; \qquad M_r^s[f(\varrho)] = \frac{1}{2 r s}[F(r+s) + F(r-s)] \tag{38'}$$

avec

$$F(r) = \int_0^r \varrho f(\varrho)\, d\varrho, \tag{38''}$$

et enfin

$$A_r[f(\varrho)] = r f(r); \qquad B_r[f(\varrho)] = \frac{1}{r}\int_0^r f(\varrho)\, d\varrho. \tag{39'}$$

Enfin dans un cas comme dans l'autre, les relations entre les opérateurs D, M, A, B, qui ont été établies dans ce chapitre sont encore exactes et deviennent triviales.

CHAPITRE II.

Les fonctions presque-périodiques J d'une seule variable.

§ 1. Les fonctions presque-périodiques J de première classe.

1. Définition.

Reprenons[1] l'équation (18_1) du précédent chapitre:

$$D_r[\Phi(\varrho, t)] = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Son intégrale $\Phi(r, t)$ satisfaisant aux conditions initiales

[1] Dans la suite, les renvois au premier chapitre seront affectés de l'indice 1.

$$\Phi(r, 0) = 0; \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{t=0} = f(r); \tag{2; 3}$$

est donnée, comme on l'a vu, par l'une ou l'autre des formules

$$\Phi(r, t) = A_t\{M_r^\varrho[f(\sigma)]\} = \frac{1}{2} B_r\{A_{t+\varrho}[f(\sigma)] + A_{t-\varrho}[f(\sigma)]\}. \tag{4; 5}$$

Ces expressions ont encore un sens lorsque la fonction paire $f(r)$ est seulement supposée continue; $\Phi(r, t)$ sera alors appelée l'intégrale généralisée de (1), satisfaisant aux conditions initiales (2); (3); comme on l'a vu par la formule (25_1), si l'on pose

$$a(r) = A_r[f(\varrho)]; \tag{6}$$

on peut écrire aussi

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta\, a(t + r\sin\theta)\, d\theta = \frac{1}{2} B_r[a(t+\varrho) + a(t-\varrho)]. \tag{7}$$

Tout ceci étant rappelé, nous dirons qu'une fonction continue paire $f(r)$, définie dans $(-\infty; +\infty)$, est presque-périodique J de première classe,

1°) lorsqu'elle est bornée dans $[-\infty; +\infty]$;

2°) lorsque l'intégrale généralisée de (1), satisfaisant aux conditions initiales (2), (3), est, par rapport à la variable t, une fonction presque-périodique de Bohr.

Proposition 1. Il est nécessaire et suffisant, pour que la condition 2° soit remplie, que la fonction $a(r)$ soit une fonction impaire de Bohr.

En effet, (6) montre que $a(r)$ est nécessairement impaire et continue; (7) donne, pour $r = 0$,

$$\Phi(0, t) = a(t);$$

puisque $\Phi(r, t)$ doit être presque-périodique de Bohr par rapport à t, pour toute valeur de r, il est bien nécessaire que $a(r)$ soit presque-périodique; c'est d'ailleurs suffisant, car la formule (7), sous son premier aspect, montre de façon immédiate qu'alors $\Phi(r, t)$ est, quel que soit r, presque-périodique de Bohr par rapport à t, avec le même système de presque-périodes que $a(r)$. Nous pourrons donc écrire, avec la convention habituelle

$$a(r) \sim \sum_n a_n \frac{\sin \lambda_n r}{\lambda_n}; \tag{8}$$

les λ_n étant positifs, et la série

$$\sum_n \frac{a_n \bar{a}_n}{\lambda_n^2} \tag{9}$$

étant convergente.

Il est évident que si $f(r)$ et $g(r)$ sont presque-périodiques J de première classe, il en est de même de $kf(r) + hg(r)$, quelles que soient les constantes h et k. Il en est donc aussi de même de la complexe conjuguée et des parties réelle et imaginaire de $f(r)$.

2. Moyennes circulaires de $f(r)$.

Soit s un nombre réel positif fixé à l'avance; introduisons la moyenne circulaire

$$f_1(r) = F(r, s) = M_r^s[f(\varrho)] \tag{10}$$

où on a repris les notations du précédent chapitre.

Proposition 2. Si $f(r)$ est presque-périodique J de première classe, il en est de même de $f_1(r)$.

$f_1(r)$ est évidemment bornée et continue; introduisons alors, comme plus haut, les fonctions suivantes:

$$F_1(r, t) = M_r^t[f_1(\varrho)]; \tag{11}$$

$$a_1(r) = A_r[f_1(\varrho)]; \tag{12}$$

$$\Phi_1(r, t) = A_t[F_1(r, \tau)]. \tag{13}$$

On a

$$a_1(r) = A_r[F(\varrho, s)] = A_r[F(s, \varrho)] = \Phi(s, r); \tag{14}$$

par suite $a_1(r)$ est une fonction impaire presque-périodique de Bohr par rapport à r, et il en résulte, d'après la proposition (1), que $f_1(r)$ est bien presque-périodique J.

3. Une limitation utile.

Reprenons la fonction $a(r)$ définie par

$$a(r) = A_r[f(\varrho)]$$

et introduisons la fonction continue impaire $b(r)$ telle que

$$r\,b(r) = B_r[\varrho\, a(\varrho)]. \tag{15}$$

Un calcul facile, que nous omettons, donne

$$r^{2p+1}\, b(r) = \int_0^r \varrho^{2p+1} f(\varrho)\, d\varrho. \tag{16}$$

Or, si on se reporte à la définition de l'opérateur de Poisson, on constate que $b(r)$ s'exprime de la façon suivante:

$$b(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a(r \sin\theta) \cos^{2p}\theta \sin\theta\, d\theta. \tag{17}$$

Soit alors α la borne supérieure du module de la fonction presque-périodique de Bohr $a(r)$; la formule précédente montre que

$$|b(r)| \leq \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}. \tag{18}$$

Cette inégalité nous sera utile.

4. Le développement formel des fonctions presque-périodiques J de première classe.

D'après le développement (8) de la fonction $a(r)$, on a

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R a(r) \sin \lambda r\, dr = \begin{cases} 0; & (\lambda \neq \lambda_n) \\ \frac{a_n}{2\lambda_n}; & (\lambda = \lambda_n) \end{cases}; \qquad (\lambda > 0)$$

et si on tient compte de l'expression de $a(r)$ en fonction de $f(r)$, on montre par une transformation classique, que

$$\frac{1}{R} \int_0^R a(r) \sin \lambda r\, dr = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{R} \int_0^R r^{2p+1} f(r) \left[\int_r^R \frac{\sin \lambda \varrho}{[\varrho^2 - r^2]^{p+\frac{1}{2}}}\, d\varrho \right] dr.$$

Par ailleurs une formule connue de la théorie des fonctions de Bessel, (l'intégrale de Mehler-Sonine), donne

$$\int_r^\infty \frac{\sin \lambda \varrho}{[\varrho^2 - r^2]^{p+\frac{1}{2}}} d\varrho = \sqrt{\pi} \frac{\lambda^{2p}}{2^{2p+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p\right)}{\Gamma(p+1)} j(\lambda r).$$

On est donc amené à penser que l'on a

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R a(r) \sin \lambda r \, dr = \frac{\pi \lambda^{2p}}{2^{2p+1} \Gamma^2(p+1)} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R r^{2p+1} f(r) j(\lambda r) \, dr. \tag{19}$$

Pour le vérifier, il suffit évidemment de montrer que l'expression

$$I = \frac{1}{R} \int_0^R r^{2p+1} f(r) \left[\int_R^\infty \frac{\sin \lambda \varrho}{[\varrho^2 - r^2]^{p+\frac{1}{2}}} d\varrho\right] dr \tag{20}$$

a pour limite zéro quand R devient infini. C'est ce que nous allons faire. Pour cela nous décomposerons I en deux parties:

$$I = J + K$$

avec

$$J = \frac{1}{R} \int_0^R r^{2p+1} f(r) \left[\int_R^{R_1} \frac{\sin \lambda \varrho}{[\varrho^2 - r^2]^{p+\frac{1}{2}}} d\varrho\right] dr \tag{21}$$

et

$$K = \frac{1}{R} \int_0^R r^{2p+1} f(r) \left[\int_{R_1}^\infty \frac{\sin \lambda \varrho}{[\varrho^2 - r^2]^{p+\frac{1}{2}}} d\varrho\right] dr; \tag{22}$$

on a posé

$$R_1 = kR = \left[1 + \frac{1}{R^q}\right] R; \tag{23}$$

l'exposant q étant pris supérieur à 1, de sorte que $R_1 - R$ tend vers zéro en même temps que $1/R$.

a) *Etude de J.* Dans l'intervalle $(R;\ R_1)$, la fonction

$$\frac{1}{[\varrho^2 - r^2]^{p+\frac{1}{2}}}$$

est positive et décroissante par rapport à ϱ, il s'ensuit que

$$\left|\int_R^{R_1} \frac{\sin \lambda \varrho}{[\varrho^2 - r^2]^{p+\frac{1}{2}}} d\varrho\right| \leq \frac{R_1 - R}{[R^2 - r^2]^{p+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{R^{q-1}[R^2 - r^2]^{p+\frac{1}{2}}};$$

puis, en désignant par β la borne supérieure du module de $f(r)$ dans $[-\infty; +\infty]$;

$$|J| \leq \frac{\beta}{R^q} \int_0^R \frac{r^{2p+1} dr}{[R^2 - r^2]^{p+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(p+1) \Gamma\left(\frac{1}{2} - p\right) \frac{\beta}{R^{q-1}};$$

q étant choisi supérieur à 1, on voit que J tend vers zéro avec $1/R$.

b) *Etude de K.* $b(r)$ étant définie par la formule (16), introduisons encore la fonction

$$c(r) = r^{2p+1} b(r) = \int_0^r \varrho^{2p+1} f(\varrho)\, d\varrho \tag{24}$$

on peut alors écrire

$$K = \frac{1}{R} \int_0^R c'(r) \left[\int_{R_1}^{\infty} \frac{\sin \lambda \varrho}{[\varrho^2 - r^2]^{p+\frac{1}{2}}} d\varrho\right] dr$$

puis, en intégrant par parties

$$K = \frac{1}{R} \left| c(r) \left[\int_{R_1}^{\infty} \frac{\sin \lambda \varrho}{[\varrho^2 - r^2]^{p+\frac{1}{2}}} d\varrho\right]\right|_{r=0}^{r=R} - \frac{1}{R} \int_0^R c(r) \frac{\partial}{\partial r} \left[\int_{R_1}^{\infty} \frac{\sin \lambda \varrho}{[\varrho^2 - r^2]^{p+\frac{1}{2}}} d\varrho\right] dr.$$

La partie toute intégrée s'écrit encore

$$K_1 = \frac{c(R)}{R} \int_{R_1}^{\infty} \frac{\sin \lambda \varrho}{[\varrho^2 - R^2]^{p+\frac{1}{2}}} d\varrho; \tag{25}$$

car $c(0)$ est nul, et $\int_{R_1}^{\infty} \frac{\sin \lambda \varrho}{\varrho^{2p+1}} d\varrho$ a un sens et est finie. Le second terme est égal, au signe près, à

$$K_2 = \frac{2p+1}{R} \int_0^R r\, c(r) \left[\int_{R_1}^{\infty} \frac{\sin \lambda \varrho}{[\varrho^2 - r^2]^{p+\frac{3}{2}}} d\varrho\right] dr; \tag{26}$$

la dérivation sous le signe somme étant légitime, à cause de l'uniforme convergence de l'intégrale

$$\int_{R_1}^{l} \frac{\sin \lambda \varrho}{[\varrho^2 - r^2]^{p+\frac{3}{2}}} d\varrho$$

lorsque l devient infini. Etudions successivement K_2 et K_1.

Etude de K_2. La quantité

$$\frac{1}{[\varrho^2 - r^2]^{p+\frac{3}{2}}}$$

est une fonction positive et décroissante de ϱ; le second théorème de la moyenne donne donc

$$\int_{R_1}^{\infty} \frac{\sin \lambda \varrho}{[\varrho^2 - r^2]^{p+\frac{3}{2}}} d\varrho = \frac{1}{[R_1^2 - r^2]^{p+\frac{3}{2}}} \int_{R_1}^{R_2} \sin \lambda \varrho \, d\varrho$$

puis, λ n'étant pas nul,

$$\left| \int_{R_1}^{\infty} \frac{\sin \lambda \varrho}{[\varrho^2 - r^2]^{p+\frac{3}{2}}} d\varrho \right| < \frac{2}{\lambda [R_1^2 - r^2]^{p+\frac{3}{2}}}.$$

Tenons compte maintenant de l'inégalité (18) relative à la fonction $b(r)$; elle entraîne

$$|c(r)| \leq \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)} r^{2p+1}, \qquad (r > 0)$$

et par suite

$$|K_2| \leq \frac{4\alpha}{\lambda \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{R} \int_0^R \frac{r^{2p+2} dr}{[R_1^2 - r^2]^{p+\frac{3}{2}}}.$$

Remplaçant au second membre r par Ru et R_1 par kR, il vient

$$|K_2| \leq \frac{4\alpha}{\lambda \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{R} \int_0^1 \frac{u^{2p+2} du}{[k^2 - u^2]^{p+\frac{3}{2}}}.$$

L'intégrale qui apparaît ainsi est une fonction de k définie pour k supérieur à l'unité, et qui devient infinie quand k tend vers l'unité; une intégration par parties donne d'ailleurs

$$\int_0^1 \frac{u^{2p+2}\,du}{[k^2-u^2]^{p+\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(2p+1)(k^2-1)^{p+\frac{1}{2}}} - \int_0^1 \frac{u^{2p}\,du}{[k^2-u^2]^{p+\frac{1}{2}}};$$

le second terme est négatif; il reste fini pour $k = 1$; on a donc

$$\int_0^1 \frac{u^{2p+2}\,du}{[k^2-u^2]^{p+\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{(2p+1)(k^2-1)^{p+\frac{1}{2}}};$$

et

$$|K_2| \leq \frac{2\alpha}{\lambda\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)} \frac{1}{R\,[k^2-1]^{p+\frac{1}{2}}}.$$

Si maintenant on remplace k par $1 + \frac{1}{R^q}$, on trouve

$$|K_2| \leq \frac{\alpha}{\lambda\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{2^{p+\frac{1}{2}}\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)} R^{q\left(p+\frac{1}{2}\right)-1}$$

ce qui montre que K_2 tendra vers zéro avec $1/R$ si $q < \frac{2}{2p+1}$; cette condition est compatible avec $q > 1$, car $p < \frac{1}{2}$.

Etude de K_1. Dans l'expression (25) de K_1, appliquons à l'intégrale le second théorème de la moyenne et tenons compte de la majoration déjà utilisée de la fonction $c(R)$; on trouve ainsi

$$|K_1| \leq \frac{2\alpha}{\lambda\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{1}{R\,[k^2-1]^{p+\frac{1}{2}}}$$

qui tend vers zéro comme K_2; $|K| < |K_1| + |K_2|$ tend donc aussi vers zéro, et il en est de même de $|I| < |J| + |K|$; ce qui achève d'établir notre assertion.

Nous voyons par suite, en revenant à l'équation (19), que l'on peut écrire

$$\frac{\pi\lambda^{2p}}{2^{2p+1}\Gamma^2(p+1)} \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int_0^R r^{2p+1} f(r)\, j(\lambda r)\,dr = \begin{cases} 0; & (\lambda \neq \lambda_n) \qquad (27) \\ \dfrac{a_n}{2\lambda_n}; & (\lambda = \lambda_n). \qquad (28) \end{cases}$$

Cela nous permet d'énoncer le théorème suivant:

Théorème. Si $f(r)$ est presque-périodique J de première classe, l'expression

$$\frac{1}{R}\int_0^R r^{2p+1} f(r) j(\lambda r)\, dr,$$

où λ désigne un nombre positif, a une limite nulle pour R infini, sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de λ, valeurs qui sont celles des exposants de Fourier de l'image presque-périodique

$$a(r) = A_r[f(\varrho)]$$

de la fonction f; pour ces valeurs λ_n de λ, la limite est donnée par l'expression

$$\frac{2^{2p}}{\pi}\Gamma^2(p+1)\frac{a_n}{\lambda_n^{2p+1}},$$

où a_n est le coefficient de Fourier correspondant de l'image $a(r)$.

5. Remarques diverses.

On a, d'après des formules bien connues de la théorie des fonctions de Bessel

$$\frac{1}{R}\int_0^R r J_p(\lambda r) J_p(\mu r)\, dr = \frac{\mu J_p(\lambda R) J_{p-1}(\mu R) - \lambda J_{p-1}(\lambda R) J_p(\mu R)}{\lambda^2-\mu^2}; \qquad (\lambda \neq \mu)$$

$$\frac{1}{R}\int_0^R r J_p^2(\lambda r)\, dr = \frac{R}{2}\{J_p^2(\lambda R) - J_{p-1}(\lambda R) J_{p+1}(\mu R)\};$$

puis, en passant à la limite pour R infini, compte tenu des formules asymptotiques,

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_0^R r^{2p+1} j(\lambda r) j(\mu r)\, dr = 0; \qquad (\lambda \neq \mu) \tag{29}$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_0^R r^{2p+1} j^2(\lambda r)\, dr = \frac{2^{2p}\Gamma^2(p+1)}{\pi\lambda^{2p+1}}. \tag{30}$$

Ce résultat rend évidentes les formules (27) et (28) dans le cas d'une somme finie:

$$f(r) = \sum_{n=1}^{N} a_n j(\lambda_n r).$$

On observa que pour une telle somme on a

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\int_0^R r^{2p+1} f(r)\bar{f}(r)\,d\,r = \frac{2^{2p}\Gamma^2(p+1)}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n\,\bar{a}_n}{\lambda_n^{2p+1}}.$$

Dans le cas général, pour une fonction presque-périodique J de première classe quelconque, la série

$$\sum_n \frac{a_n\,\bar{a}_n}{\lambda_n^{2p+1}}$$

ne sera pas convergente; on voit donc, que pour une telle fonction, il n'y a, en général, aucune raison de penser que l'intégrale

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\int_0^R r^{2p+1} f(r)\bar{f}(r)\,d\,r$$

ait un sens. Comme nous le verrons dans la suite, cette lacune apparente de la théorie disparaîtra lorsque nous aurons défini les fonctions presque-périodiques J absolues.

6. Cas des moyennes circulaires.

Soit toujours s un nombre réel positif fixe, et cherchons à déterminer les coefficients du développement formel de la moyenne circulaire

$$f_1(r) = F(r, s) = M_r^s[f(\varrho)].$$

D'après ce qui précède, il suffit d'évaluer la limite

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\int_0^R a_1(r)\sin\lambda r\,d\,r$$

ou, compte tenu de (14)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_0^R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} a(r+s\sin\theta)\cos^{2p}\theta\sin\lambda r\,d\theta\,d\,r.$$

Posons

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R a(r) \sin \lambda r \, d r = \alpha(\lambda).$$

On sait que

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R a(r + s \sin\theta) \sin \lambda r \, d r = \alpha(\lambda) \cos(\lambda s \sin\theta);$$

cette dernière limite étant atteinte uniformément par rapport à s dans $[0; +\infty]$ et par rapport à θ dans $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$; cela entraîne la possibilité d'intervertir les intégrations et les passages à la limite dans les expressions précédentes, et il vient

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R a_1(r) \sin \lambda r \, d r = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \alpha(\lambda) \cos(\lambda s \sin\theta) \cos^{2p}\theta \, d\theta$$

$$= \alpha(\lambda) j(\lambda s);$$

puis

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R r^{2p+1} f_1(r) j(\lambda r) \, d r = \frac{2^{2p}}{\pi} \Gamma^2(p+1) \cdot \begin{cases} 0\;; & (\lambda \neq \lambda_n) \qquad (31) \\ \dfrac{a_n}{\lambda_n^{2p+1}} j(\lambda_n s); & (\lambda = \lambda^n). \qquad (32) \end{cases}$$

7. **Examen des deux cas limites $p = -1/2$ et $p = +1/2$.**

Il suffit de se reporter aux définitions et aux formules (37_1) etc. du précédent chapitre pour aboutir aux conclusions que voici:

a) $p = -1/2$; les fonctions presque-périodiques J sont les fonctions paires admettant une primitive presque-périodique de Bohr.

b) $p = +1/2$; les fonctions presque-périodiques J sont les quotients par r des fonctions impaires presque-périodiques de Bohr.

De plus, dans les deux cas, ces fonctions doivent être bornées dans $[-\infty; +\infty]$; c'est là une condition globale, pour $p = -1/2$, et une condition locale, relative à $r = 0$, pour $p = +1/2$.

Toutes les propositions établies dans le présent paragraphe subsistent.

§ 2. Les fonctions presque-périodiques J de seconde classe.

1. Définition.

Reprenons l'équation (18_1) du chapitre premier:

$$D_r[\Psi(\varrho, t)] = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}; \tag{33}$$

soit d'autre part $f(r)$ une fonction paire, définie dans $(-\infty; +\infty)$, et que nous supposerons d'abord pourvue d'une dérivée première continue; l'intégrale généralisée de (33) satisfaisant aux conditions initiales

$$\Psi(r, 0) = f(r); \qquad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \tag{34}$$

s'exprime par l'une ou l'autre des deux formules

$$\Psi(r, t) = \frac{\partial}{\partial t} A_t\{M_r^\varrho[f(\sigma)]\} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} B_r\{A_{t+\varrho}[f(\sigma)] + A_{t-\varrho}[f(\sigma)]\}. \tag{35}$$

Si l'on pose, comme plus haut,

$$a(r) = A_r[f(\varrho)]; \tag{36}$$

on a aussi

$$\Psi(r, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta \frac{\partial}{\partial t} a(t + r\sin\theta)\, d\theta.$$

Mais, sous les hypothèses faites, $a(r)$ est aussi une fois dérivable; désignons par $a^*(r)$ sa dérivée; on peut écrire

$$\Psi(r, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta\, a^*(t + r\sin\theta)\, d\theta. \tag{37}$$

Par ailleurs, d'après (14_1) et la relation bien connue entre les opérateurs de Sonine et de Poisson, il vient

$$f(r) = B_r[a^*(\varrho)]. \tag{38}$$

Ces considérations nous permettent de nous affranchir de la restriction de dérivabilité imposée à la fonction f; lorsque la fonction $f(r)$ paire, définie et continue dans $(-\infty; +\infty)$ est telle qu'il existe une autre fonction paire $a^*(r)$ définie et continue dans le même intervalle, satisfaisant à l'équation (38), nous dirons que la fonction $\Psi(r, t)$ définie par la formule (37) est l'intégrale généralisée de (33) satisfaisant aux conditions initiales (34). On notera que (14_1) donne dans ces conditions

$$\int_0^r a^*(\varrho)\, d\varrho = A_r[f(\varrho)] \tag{39}$$

tandis que (37) s'écrit encore

$$\Psi(r, t) = \frac{1}{2} B_r[a^*(t+\varrho) + a^*(t-\varrho)]$$

ou, en intégrant et tenant compte de la parité de la fonction $a^*(r)$,

$$\int_0^t \Psi(r, \tau)\, d\tau = \frac{1}{2} B_r\left[\int_0^{t+\varrho} a^*(\tau)\, d\tau + \int_0^{t-\varrho} a^*(\tau)\, d\tau\right].$$

Si maintenant on utilise (39) ainsi que l'identité fondamentale, on trouve

$$\int_0^t \Psi(r, \tau)\, d\tau = A_t\{M_r^\varrho[f(\sigma)]\} \tag{40}$$

ce qui légitime en un certain sens la généralisation faite.

Ceci étant posé, nous dirons que la fonction $f(r)$, satisfaisant aux conditions précédentes, est presque-périodiques J de seconde classe, lorsque l'intégrale généralisée $\Psi(r, t)$ que nous venons de définir, sera presque-périodique de Bohr par rapport à t, quel que soit r.

Proposition 3. Il est nécessaire et suffisant, pour qu'il en soit ainsi, que la fonction $a^*(r)$ soit une fonction paire de Bohr.

C'est ce qui se voit immédiatement, à partir de (37), et en remarquant que

$$\Psi(0, t) = a^*(t).$$

On constate comme pour les fonctions de première classe (cf. prop. 1), que Ψ est bien, quel que soit r, presque-périodique de Bohr par rapport à t, le système des presque-périodes étant indépendant de r. On est donc autorisé à écrire, suivant les conventions habituelles, lorsque $f(r)$ est presque-périodique J de seconde classe,

$$a^*(r) \sim \sum_n a_n \cos \lambda_n r \tag{41}$$

les λ_n étant positifs *ou nuls*, et la série

$$\sum_n a_n \bar{a}_n$$

étant convergente.

Il est clair que si $f(r)$ et $g(r)$ sont presque-périodiques J de second classe, il en est de même de $k f(r) + h g(r)$, quelles que soient les constantes h et k. Il en est donc aussi de même de la complexe conjuguée et des parties réelles et imaginaires de $f(r)$.

2. Moyennes circulaires de $f(r)$.

Soit s un nombre réel positif fixé à l'avance; introduisons la moyenne circulaire

$$f_1(r) = M_r^s[f(\varrho)]. \tag{42}$$

Proposition 4. Si $f(r)$ est presque-périodique J de seconde classe, il en est de même de $f_1(r)$.

$f_1(r)$ est évidemment paire et continue; la formule (40), prise pour $r = s$, donne

$$\int_0^t \Psi(s, \tau)\, d\tau = A_t\{M_\varrho^s[f(\sigma)]\} = A_t[f_1(\varrho)]$$

ce qui, d'après (14_1), équivaut à

$$f_1(r) = B_r[\Psi(s, \varrho)]. \tag{43}$$

Il existe donc bien une fonction paire et continue $a_1^*(r)$ satisfaisant à

$$f_1(r) = B_r[a_1^*(\varrho)]$$

et cette fonction n'est autre que

$$a_1^*(r) = \Psi(s, r). \tag{44}$$

Elle est par hypothèse presque-périodique de Bohr par rapport à r; d'où notre assertion.

Remarque. Lorsque $f(r)$ est presque-périodique J de seconde classe, la formule (38) entraîne qu'elle est bornée dans $[-\infty; +\infty]$; en effet si α est la borne de $a_1^*(r)$ dans ce même intervalle, on a aussi, d'après cette formule

$$|f(r)| \leq \alpha.$$

3. **Polynomes de Bessel.**

Ce sont les polynomes de la forme

$$\mathfrak{P}(r) = A_1 j(\lambda_1 r) + A_2 j(\lambda_2 r) + \cdots + A_n j(\lambda_n r) \qquad (\lambda_n \geq 0).$$

Une propriété connue de l'opérateur de Poisson, (12_1), permet d'écrire

$$\mathfrak{P}(r) = B_r[P(\varrho)]$$

où $P(r)$ est un polynome trigonométrique pair

$$P(r) = A_1 \cos \lambda_1 r + A_2 \cos \lambda_2 r + \cdots + A_n \cos \lambda_n r.$$

Etant donnée $a^*(r)$, fonction paire presque-périodique de Bohr, on sait qu'il est possible, d'une infinité de manière, de trouver une suite de polynomes trigonométriques pairs convergeant uniformément vers $a^*(r)$ dans $[-\infty; +\infty]$:

$$P_n(r) = \sum_{q=1}^{N_n} A_q^n \cos \lambda_q r \tag{45}$$

les λ_q étant les exposants de Fourier de $a^*(r)$. Cette propriété très précise permet de faire une étude beaucoup plus serrée des fonctions de seconde classe. C'est ce que nous verrons dans le prochain paragraphe. Pour le moment, bornons nous à remarquer qu'en posant

$$\mathfrak{P}_n(r) = B_r[P_n(\varrho)] \tag{46}$$

on a

$$f(r) - \mathfrak{P}_n(r) = B_r[a^*(\varrho) - P_n(\varrho)] \tag{47}$$

ce qui prouve, l'opérateur de Poisson étant borné, que la suite des polynomes de Bessel $\mathfrak{P}_n$ converge uniformément vers $f(r)$ dans $[-\infty; +\infty]$. D'où le théorème:

Théorème. Toute fonction presque-périodique J de seconde classe peut être approchée uniformément dans $[-\infty; +\infty]$ par une suite de polynomes de Bessel, et cela d'une infinité de manière.

4. Le développement formel des fonctions presque-périodiques J de seconde classe.

Nous allons maintenant établir le théorème suivant, tout-à-fait analogue à celui qui a été démontré relativement aux fonctions de première classe.

Théorème. Si $f(r)$ est presque-périodique J de seconde classe, l'expression

$$\frac{1}{R}\int_0^R r^{2p+1} f(r)\, j(\lambda r)\, dr,$$

où λ désigne un nombre positif, a une limite nulle pour R infini, sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de λ, valeurs qui sont celles des exposants de Fourier *non nuls* de l'image presque-périodique $a^*(r)$ de la fonction f, image satisfaisant à la condition

$$f(r) = B_r[a^*(\varrho)].$$

Pour ces valeurs λ_n de λ, la limite est donnée par la formule

$$\frac{2^{2p}}{\pi}\Gamma^2(p+1)\frac{a_n}{\lambda_n^{2p+1}};$$

où a_n est le coefficient de Fourier correspondant de l'image $a^*(r)$.

Avant de démontrer ce théorème, il est commode d'établir le lemme suivant:

Lemme. Lorsque λ est positif, l'intégrale

$$I(x,y) = \int_x^y \frac{r\, j(\lambda r)}{[r^2 - x^2]^{\frac{1}{2}-p}}\, dr$$

est bornée, pour tout x et tout y positifs ou nuls; (y est supposé supérieur à x).

Désignons par m un nombre positif fixé à l'avance; nous distinguerons plusieurs cas:

a) x est supérieur à m;

en tenant compte de l'expression de l'élément simple $j(r)$ en fonction de la fonction de Bessel $J_p(r)$, ainsi que de la valeur asymptotique de cette dernière fonction, on peut écrire

$$j(\lambda r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{2^{p+\frac{1}{2}}\,\Gamma(p+1)}{\lambda^p r^{p+\frac{1}{2}}}\cos\left(\lambda r - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + h(r)$$

de plus, il existe une constante H telle que l'on ait pour toute valeur de r supérieure à m,

$$|h(r)| < \frac{H}{r^{p+\frac{3}{2}}}.$$

Bornons supérieurement chacune des deux parties de $I(x, y)$ provenant de l'expression précédente de $j(\lambda r)$; la partie provenant de $h(r)$ est bornée supérieurement en valeur absolue par

$$H \int_x^y \frac{dr}{r^{\frac{1}{2}+p}[r^2 - x^2]^{\frac{1}{2}-p}} \leq H \int_x^\infty \frac{dr}{r^{\frac{1}{2}+p}[r^2 - x^2]^{\frac{1}{2}-p}} \leq \frac{H}{m^{\frac{1}{2}-p}} \int_1^\infty \frac{du}{u^{\frac{1}{2}+p}[u^2 - 1]^{\frac{1}{2}-p}} \leq$$

$$\leq \frac{H}{2m^{\frac{1}{2}-p}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + p\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{p}{2}\right)}.$$

Quant à la partie provenant du terme en cosinus, nous y poserons

$$r = x + u$$

elle s'écrit alors, en négligeant un facteur constant

$$\cos\left(\lambda x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \int_0^{y-x} \left(\frac{x+u}{2x+u}\right)^{\frac{1}{2}-p} \frac{\cos \lambda u}{u^{\frac{1}{2}-p}} du -$$

$$- \sin\left(\lambda x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \int_0^{y-x} \left(\frac{x+u}{2x+u}\right)^{\frac{1}{2}-p} \frac{\sin \lambda u}{u^{\frac{1}{2}-p}} du;$$

or, la quantité

$$\left(\frac{x+u}{2x+u}\right)^{\frac{1}{2}-p}$$

est une fonction positive et croissante de u, et elle est inférieure à l'unité, de sorte qu'en appliquant le second théorème de la moyenne, on peut affirmer que l'expression précédente est en module inférieure à

$$\left|\int_\xi^{y-x} \frac{\cos \lambda u}{u^{\frac{1}{2}-p}} du\right| + \left|\int_\eta^{y-x} \frac{\sin \lambda u}{u^{\frac{1}{2}-p}} du\right|$$

et il est bien connu que cette expression est bornée, quelles que soient les limites $\xi; \eta; x; y$. Il existe donc un nombre fixe A tel que l'on ait

$$|I(x, y)| < A$$

pour

$$y \geq x \geq m.$$

b) y est inférieur à m;

soit alors B la borne supérieure de la valeur absolue de $j(r)$ dans l'intervalle $(0; m)$. On a de façon évidente

$$|I(x, y)| \leq B \int_x^y \frac{r\,dr}{[r^2-x^2]^{\frac{1}{2}-p}} = \frac{B}{2p+1}[y^2-x^2]^{\frac{1}{2}+p} < \frac{B m^{2p+1}}{2p+1} = A'$$

pour

$$m \geq y \geq x \geq 0.$$

c) x est inférieur à m et y est supérieur à m;

dans ce cas la relation

$$I(x, y) = I(x, m) + I(m, y)$$

donne

$$|I(x, y)| < A + A'$$

ce qui achève d'établir le lemme. Désignons donc maintenant par K la borne supérieure de la valeur absolue de $I(x, y)$ et passons à la démonstration du théorème de développement formel des fonctions presque-périodiques J de seconde classe.

Reprenons nos notations antérieures; soient:

$f(r)$ une fonction presque-périodique J de seconde classe;

$a^*(r)$ son image presque-périodique de Bohr;

$P_n(r)$ une suite de polynomes trigonométriques pairs convergeant uniformément dans $[-\infty; +\infty]$ vers $a^*(r)$, les exposants de Fourier de ces polynomes étant ceux de $a^*(r)$.

Soit enfin

$$\mathfrak{P}_n(r) = B_r[P_n(\varrho)]$$

la suite de polynomes de Bessel convergeant uniformément vers $f(r)$ dans $[-\infty; +\infty]$.

On posera dans la suite

$$A_q^n = 0 \quad \text{pour} \quad q > N_n.$$

Fixons l'indice q, et ε positif aussi petit qu'on le voudra. Choisissons n supérieur à q et assez grand pour que l'on ait quel que soit r

$$|a^*(r) - P_n(r)| < \varepsilon. \tag{48}$$

Par ailleurs (29_1) et (30_1) donnent

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\int_0^R r^{2p+1} j(\lambda_q r)\,\mathfrak{P}_n(r)\,dr = \frac{2^{2p}}{\pi}\,\Gamma^2(p+1)\frac{A_q^n}{\lambda_q^{2p+1}};$$

n étant choisi, prenons encore R assez grand pour que

$$\left|\frac{1}{R}\int_0^R r^{2p+1} j(\lambda_q r)\,\mathfrak{P}_n(r)\,dr - \frac{2^{2p}}{\pi}\,\Gamma^2(p+1)\frac{A_q^n}{\lambda_q^{2p+1}}\right| < \varepsilon. \tag{49}$$

D'autre part une transformation classique donne, en tenant compte de (47) et de l'une des formes de l'opérateur de Poisson,

$$\frac{1}{R}\int_0^R r^{2p+1}\, j(\lambda_q r)\,[f(r) - \mathfrak{P}_n(r)]\,dr =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)}\,\frac{1}{R}\int_0^R I(r, R)\,[a^*(r) - P_n(r)]\,dr;$$

d'où, par application du lemme et de (48),

$$\left|\frac{1}{R}\int_0^R r^{2p+1} j(\lambda_q r)\,[f(r) - \mathfrak{P}_n(r)]\,dr\right| < \frac{2K}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)}\,\varepsilon. \tag{50}$$

Soit alors

$$a^*(r) \sim \sum_n a_n \cos \lambda_n r$$

on a

$$|A_q^n - a_q| < \left[\sum_q |A_q^n - a_q|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_0^R |a^*(r) - P_n(r)|^2\,dr\right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon; \tag{51}$$

et la conjonction de ces différentes inégalités conduit à

$$\left|\frac{1}{R}\int_0^R r^{2p+1} j(\lambda_q r) f(r)\, dr - \frac{2^{2p}}{\pi}\Gamma^2(p+1)\frac{a_q}{\lambda_q^{2p+1}}\right| <$$

$$< \left[\frac{2K}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} + 1 + \frac{2^{2p}}{\pi}\frac{\Gamma^2(p+1)}{\lambda_q^{2p+1}}\right]\varepsilon.$$

On montrerait de même que

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_0^R r^{2p+1} j(\lambda r) f(r)\, dr = 0; \quad \begin{cases}\lambda > 0;\\ \lambda \neq \lambda_q;\end{cases}$$

ce qui achève de prouver notre assertion.

Remarque. Lorsque λ est nul, le théorème n'est plus exact; on le voit en prenant pour fonction $f(r)$ une constante. Cependant, si l'image presque-périodique $a^*(r)$ de la fonction f est de moyenne nulle, la proposition est encore exacte; comme nous n'aurons pas à nous servir de cet énoncé, nous ne nous attarderons pas à l'établir.

On notera encore que, dans le cas général, pour une fonction presque-périodique J de seconde classe, la série

$$\sum_n \frac{a_n \bar{a}_n}{\lambda_n^{2p+1}}$$

diverge, de sorte que, comme pour les fonctions de première classe, il n'y a pas lieu de chercher à donner un sens à la limite

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_0^R r^{2p+1} f(r)\bar{f}(r)\, dr.$$

5. Cas des moyennes circulaires.

Fort peu de choses sont à changer à ce qui a été dit à propos des fonctions de première classe; soit $f(r)$ une fonction de seconde classe, et posons

$$f_1(r) = M_r^s[f(\varrho)]$$

s étant un nombre positif fixe. Pour trouver le développement formel de $f_1(r)$ il suffit d'après ce qui précède, d'évaluer la limite

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R a_1^*(r) \cos \lambda r \, d r$$

où $a_1^*(r)$ est l'image presque-périodique de $f_1(r)$; or, (37) et (44) donnent

$$a_1^*(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta \, a^*(r + s \sin\theta) \, d\theta.$$

Il faut donc évaluer

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} a^*(r + s\sin\theta) \cos^{2p}\theta \cos \lambda r \, d\theta \, d r$$

qui, en posant

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R a^*(r) \cos \lambda r \, d r = \alpha(\lambda)$$

devient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \alpha(\lambda) \cos(\lambda s \sin\theta) \cos^{2p}\theta \, d\theta.$$

On en déduit, comme pour les fonctions de première classe

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R r^{2p+1} f_1(r) \, j(\lambda r) \, d r = \frac{2^{2p}}{\pi} \Gamma^2(p+1) \cdot \begin{cases} \frac{a_n}{\lambda_n^{2p+1}} j(\lambda_n s); & (\lambda = \lambda_n > 0); \\ 0; & (\lambda \neq \lambda_n; \quad \lambda > 0). \end{cases}$$

6. Examen des deux cas limites $p = -1/2$ et $p = +1/2$.

Ici encore les formules (37_1) et la suite donnent sans difficulté

a) $p = -1/2$; les fonctions presque-périodiques J de seconde classe se réduisent aux fonctions paires presque-périodiques de Bohr.

b) $p = +1/2$; les fonctions presque-périodiques J de seconde classe sont les quotients par r des intégrales, entre o et r, de fonctions paires presque-périodiques de Bohr.

Les propositions établies dans ce paragraphe donnent, dans ces deux cas, des énoncés bien connus de la théorie des fonctions de Bohr.

§ 3. Propriétés de compacité des fonctions de seconde classe.

La possibilité d'approcher uniformément une fonction de seconde classe par une suite de polynomes de Bessel laisse prévoir que ces fonctions ont à certains égards des propriétés très voisines de celles des fonctions de Bohr. Nous allons en donner une nouvelle preuve dans ce paragraphe, en étendant aux fonctions de seconde classe les propriétés de compacité des fonctions de Bohr qui ont été découvertes par Bôchner.

1. Premières propriétés.

Soit $f(r)$ une fonction presque-périodique J de seconde classe et soit $a^*(r)$ son image presque-périodique de Bohr:

$$f(r) = B_r[a^*(\varrho)]$$

s étant un nombre positif, considérons la moyenne circulaire

$$f(r \mid s) = M_r^s[f(\varrho)]; \tag{52}$$

on sait que c'est encore une fonction presque-périodique J de seconde classe; nous désignerons son image presque-périodique par $a^*(r \mid s)$; on a

$$f(r \mid s) = B_r[a^*(\varrho \mid s)] \tag{53}$$

et, d'après (44) et (37),

$$a^*(r \mid s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta \, a^*(r + s\sin\theta)\, d\theta; \tag{54}$$

enfin nous venons de voir, dans le précédent paragraphe, que les développements de Fourier de $a^*(r)$ et $a^*(r \mid s)$ sont

$$a^*(r) \sim \sum_n a_n \cos \lambda_n r; \quad a^*(r \mid s) \sim \sum_n a_n j(\lambda_n s) \cos \lambda_n r; \qquad (\lambda_n \geq 0). \tag{55}$$

Nous allons étudier les propriétés de la famille de fonctions $a^*(r \mid s)$, r étant la variable et s le paramètre.

Proposition 5. Les fonctions $a^*(r \mid s)$ sont «également presque-périodiques».

Soit en effet $\varepsilon > 0$, et $l(\varepsilon)$ l'intervalle d'inclusion correspondant pour la fonction $a^*(r)$; soit τ une presque-période relative à ε; on a

$$|a^*(r + \tau) - a^*(r)| < \varepsilon$$

puis par (54), l'opérateur de Poisson étant borné,

$$|a^*(r + \tau \mid s) - a^*(r \mid s)| < \varepsilon$$

d'où la proposition.

Proposition 6. Les fonctions $a^*(r|s)$ sont «également uniformément continues».

$a^*(r)$ étant presque-périodique de Bohr est uniformément continue dans $[-\infty; +\infty]$; si on se donne $\varepsilon > 0$, il lui correspond $h(\varepsilon)$ tel que

$$|r_1 - r_2| < h(\varepsilon)$$

entraîne

$$|a^*(r_1) - a^*(r_2)| < \varepsilon$$

pour tout r_1 et r_2. Il s'ensuit, comme plus haut,

$$|a^*(r_1 \mid s) - a^*(r_2 \mid s)| < \varepsilon$$

d'où la proposition.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. Les fonctions $a^*(r \mid s)$ forment un ensemble majorisable de fonctions paires presque-périodiques de Bohr.

2. L'ensemble $S\{a^*(r)\}$.

Définition. Nous désignerons par $S\{a^*(r)\}$ l'ensemble de toutes les fonctions $a^*(r \mid s)$ lorsque le paramètre s prend des valeurs positives ou nulles, et de leurs fonctions limites, pourvu que la convergence vers ces fonctions limites soit uniforme dans $[-\infty; +\infty]$. Ces fonctions limites $b^*(r)$ sont donc aussi paires et presque-périodiques de Bohr.

Théorème. Pour qu'une fonction paire presque-périodique de Bohr $b^*(r)$ appartienne à l'ensemble $S\{a^*(r)\}$, il faut et il suffit que son développement soit de la forme

$$b(r) = \sum_n a_n j(\lambda_n s_n^*) \cos \lambda_n r$$

avec

$$\lambda_n s_n^* \equiv \lim_{m \to \infty} \lambda_n s_m \qquad \text{(mod. } j)$$

cette dernière condition signifiant que

$$j(\lambda_n s_n^*) = \lim_{m \to \infty} j(\lambda_n s_m)$$

au sens habituel.

La démonstration comprendra deux parties.

1°). Soit $b^*(r)$ une fonction de l'ensemble $S\{a^*(r)\}$; si c'est une fonction $a^*(r \mid s)$ il suffit évidemment de prendre $s_n^* = s$ pour tout n, et $s_m = s$ pour tout m; supposons au contraire que $b^*(r)$ soit limite uniforme dans $[-\infty; +\infty]$ de fonctions $a^*(r \mid s)$, alors

$$b^*(r) = \lim_{m \to \infty} \text{. unif. } a^*(r \mid s_m)$$

et d'après un théorème connu, le développement de $b^*(r)$ est la limite formelle de celui de $a^*(r \mid s_m)$; si donc on a, (les exposants de Fourier des $a(r \mid s_m)$ étant tous les mêmes):

$$b^*(r) \sim \sum_n b_n \cos \lambda_n r$$

on a aussi

$$\frac{b_n}{a_n} = \lim_{m \to \infty} j(\lambda_n s_m).$$

Mais la fonctiou $j(r)$ est continue et bornée inférieurement et supérieurement dans $[-\infty; +\infty]$, et il existe au moins un nombre positif ou nul

$$\sigma_n = \lambda_n s_n^*$$

tel que

$$j(\sigma_n) = \lim_{m \to \infty} j(\lambda_n s_m)$$

donc

$$b_n = a_n j(\lambda_n s_n^*)$$

avec

$$\lambda_n s_n^* \equiv \lim_{m \to \infty} \lambda_n s_m \qquad \text{(mod. } j).$$

2°). Considérons maintenant une série formelle du type précité:

$$\sum_n a_n j(\lambda_n s_n^*) \cos \lambda_n r$$

avec

$$\lambda_n s_n^* \equiv \lim_{m \to \infty} \lambda_n s_m \qquad (\text{mod. } j)$$

et envisageons les fonctions $a^*(r \mid s_m)$; l'ensemble des fonctions $a^*(r \mid s)$ étant majorisable, il suffira de montrer que la suite $a^*(r \mid s_m)$ converge *en moyenne de Bohr* dans $[-\infty; +\infty]$ vers une fonction limite $b^*(r)$ pour pouvoir en déduire que la convergence vers $b^*(r)$ est uniforme, et par suite que $b^*(r)$ est paire et presque-périodique de Bohr; or on a, en prenant les moyennes de Bohr,

$$\mathfrak{M}\{[a^*(r \mid s_{m_1}) - a^*(r \mid s_{m_2})]^2\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{a}_n [j(\lambda_n s_{m_1}) - j(\lambda_n s_{m_2})]^2.$$

Soit alors ε positif arbitrairement petit; choisissons d'abord N tel que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \bar{a}_n < \varepsilon;$$

soit A une borne supérieure de la valeur absolue de $j(r)$ dans $[-\infty; +\infty]$; on a

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \bar{a}_n [j(\lambda_n s_{m_1}) - j(\lambda_n s_{m_2})]^2 < 4 A^2 \varepsilon.$$

Choisissons d'autre part m par la condition

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \bar{a}_n [j(\lambda_n s_{m_1}) - j(\lambda_n s_{m_2})]^2 < \varepsilon$$

pour

$$m_1 \text{ et } m_2 > m.$$

Ceci est possible, une fois N fixé, car

$$\lim_{m \to \infty} j(\lambda_n s_m)$$

existe et est finie; on peut donc prendre m_1 et m_2 assez grands pour que les différences

$$j(\lambda_n s_{m_1}) - j(\lambda_n s_{m_2})$$

soient aussi petites qu'on le veut, pour $n = 1, 2, \ldots, N$. Ce choix étant fait, on aura

$$\mathfrak{M}\{[a^*(r\mid s_{m_1})-a^*(r\mid s_{m_2})]^2\}<(1+4A^2)\,\varepsilon$$

ce qui entraîne, l'ensemble $a^*(r\mid s)$ étant majorisable, la convergence uniforme de la suite $a^*(r\mid s_m)$ vers une fonction $b^*(r)$, paire, presque-périodique de Bohr, ayant nécessairement comme développement celui dont nous sommes partis, et qui appartient à l'ensemble $S\{a^*(r)\}$.

3. Propriétés de compacité.

La fonction $j(r)$ prend toutes ses valeurs dans un intervalle fini déterminé $0;\,a]$; à toute valeur réelle r correspond une valeur et une seule r^* appartenant à cette intervalle et congrue à r modulo j, telle donc que

$$j(r)=j(r^*).$$

Soient alors ϱ_{mn} les points correspondant aux $\lambda_n s_m$ par ce procédé, et ϱ_n les valeurs correspondant aux $\lambda_n s_n^*$; on a

$$\lim_{m\to\infty} j(\varrho_{mn})=j(\varrho_n).$$

La fonction $j(r)$ étant continue dans $[0;\,a]$, et prenant exactement une fois chacune de ses valeurs, il vient

$$\lim_{m\to\infty}\varrho_{mn}=\varrho_n.$$

Considérons maintenant une suite quelconque $a^*(r\mid s_m)$; soit toujours ϱ_{mn} la valeur congrue à $\lambda_n s_m$ dans $[0;\,a]$; par application du principe de Bolzano-Weierstrass et du procédé diagonal, on peut extraire une suite d'indices

$$m_1;\ m_2;\ \ldots;\ m_q;\ \ldots$$

tels que les suites

$$(\varrho_{1m_q});\ (\varrho_{2m_q});\ \ldots;\ (\varrho_{nm_q});\ \ldots$$

aient respectivement des limites

$$\varrho_1;\ \varrho_2;\ \ldots;\ \varrho_n;\ \ldots$$

appartenant à $[0;\,a]$. Nous poserons alors

$$\varrho_n=\lambda_n s_n^*$$

et la suite

$$a^*(r\mid s_{m_q})$$

convergera uniformément vers une fonction $b^*(r)$ de $S\{a^*(r)\}$ ayant pour développement

$$b^*(r) \sim \sum_n a_n j(\lambda_n s_n^*) \cos \lambda_n r;$$

autrement dit:

Théorème. De toute suite $a^*(r \mid s_m)$ on peut extraire une suite partielle $a^*(r \mid s_{m_q})$ convergeant uniformément dans $[-\infty; +\infty]$ vers une fonction paire $b^*(r)$ presque-périodique de Bohr.

C'est la propriété de compacité des fonctions $a^*(r \mid s)$. On en déduit immédiatement la propriété analogue pour les fonctions $f(r \mid s)$, car le passage

$$f(r \mid s) = B_r[a^*(\varrho \mid s)]$$

se fait en utilisant un opérateur borné. Donc:

Théorème. De toute suite $f(r \mid s_m)$ on peut extraire une suite partielle $f(r \mid s_{m_q})$ convergeant uniformément dans $[-\infty; +\infty]$ vers une fonction $g(r)$ presque-périodique J de seconde classe; si $f(r)$ a pour développement formel

$$f(r) \sim \sum_n a_n j(\lambda_n r) \tag{56}$$

$g(r)$ a un développement de la forme

$$g(r) \sim \sum_n a_n j(\lambda_n s_n^*) j(\lambda_n r) \tag{57}$$

avec

$$\lambda_n s_n^* \equiv \lim_{m_q \to \infty} \lambda_n s_{m_q} \qquad (\mathrm{mod.}\ j).$$

§ 4. Les fonctions presque-périodiques J absolues.

1. Définition et premières propriétés.

Une fonction $f(r)$ définie et continue dans $[-\infty; +\infty]$ sera dite presque-périodique J absolue lorsqu'elle est à la fois presque-périodique J de première et de seconde classe. De telles fonctions existent; par exemple les polynomes de Bessel.

Une telle fonction possède deux images presque-périodiques de Bohr, l'une impaire $a(r)$, l'autre paire $a^*(r)$, et l'on a

$$a(r) = A_r[f(\varrho)]; \qquad f(r) = B_r[a^*(\varrho)]. \tag{58}$$

La relation (14_1) entre les opérateurs de Poisson et de Sonine donne alors

$$a^*(r) = a'(r) \tag{59}$$

ce qui prouve que l'image presque-périodique $a(r)$ doit posséder une dérivée presque-périodique qui n'est autre que $a^*(r)$; on peut donc écrire

$$a(r) \sim \sum_n a_n \frac{\sin \lambda_n r}{\lambda_n}; \qquad a^*(r) \sim \sum_n a_n \cos \lambda_n r; \tag{60}$$

les exposants de Fourier sont tous positifs et les deux séries

$$\sum_n a_n \bar{a}_n; \qquad \sum_n \frac{a_n \bar{a}_n}{\lambda_n^2}$$

sont toutes deux convergentes. Il est important de noter, pour la suite, que la convergence de la série

$$\sum_n \frac{a_n \bar{a}_n}{\lambda_n^{2p+1}}$$

en résulte; c'est ce qu'on constate aisément en tenant compte de

$$0 < 2p + 1 < 2$$

et en partageant les indices n en deux catégories n' et n'' pour lesquelles

$$\lambda_{n'} \leq 1; \qquad \lambda_{n''} > 1.$$

De la même façon, si $f(r)$ et $g(r)$ sont deux fonctions presque-périodiques J absolues, possédant les mêmes exposants de Fourier, et ayant pour développements formels

$$f(r) \sim \sum_n a_n j(\lambda_n r); \qquad g(r) \sim \sum_n b_n j(\lambda_n r);$$

on constatera, par application de la formule de Lagrange, que la série

$$\sum_n \frac{a_n b_n}{\lambda_n^{2p+1}}$$

est absolument convergente.

Désignons comme plus haut par $\Phi(r, t)$ et $\Psi(r, t)$ les intégrales généralisées de l'équation (18_1) satisfaisant respectivement aux conditions initiales

$$\Phi(r, 0) = 0; \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{t=0} = f(r); \qquad \Psi(r, 0) = f(r); \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_{t=0} = 0;$$

où $f(r)$ est toujours supposée presque-périodique J absolue; on a, comme on sait d'après (7) et (37)

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta\, a(t + r\sin\theta)\, d\theta;$$

$$\Psi(r, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta\, a^*(t + r\sin\theta)\, d\theta;$$

ce qui combiné avec (59) donne

$$\Psi(r, t) = \Phi'_t(r, t). \tag{61}$$

$\Phi(r, t)$ est donc une fonction presque-périodique de Bohr par rapport à t, ayant une dérivée $\Phi'_t(r, t)$, également presque-périodique de Bohr par rapport à t, et qui n'est autre que $\Psi(r, t)$. Autrement dit encore, et c'est là une autre définition de $f(r)$, presque-périodique J absolue, la solution généralisée de l'équation (18_1), satisfaisant aux conditions initiales

$$\Phi(r, 0) = 0; \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{t=0} = f(r)$$

est presque-périodique de Bohr par rapport au temps t, et cela, quant aux déplacements et quant aux vitesses.

Remarquons encore que, pour tout s positif ou nul, la moyenne circulaire

$$f_1(r) = M_r^s[f(\varrho)]$$

d'une fonction $f(r)$ presque-périodique J absolue, est aussi presque-périodique J absolue; cela résulte immédiatement des théorèmes analogues pour les fonctions de première et de seconde classe. Le développement formel de cette moyenne-circulaire est

$$f_1(r) \sim \sum_n a_n\, j(\lambda_n s)\, j(\lambda_n r). \tag{62}$$

2. Propriétés asymptotiques.

Les fonctions de première et de seconde classe possèdent certaines propriétés asymptotiques que nous avons omis d'indiquer dans les pages qui précèdent, car elles ne nous sont pas directement utiles; c'est ainsi qu'on peut montrer qu'une fonction de seconde classe tend vers zéro quand la variable grandit indéfiniment. On peut préciser la manière dont la fonction tend vers zéro lorsqu'on la suppose presque-périodique J absolue. On a le théorème suivant.

Théorème. Soit $f(r)$ une fonction presque-périodique J absolue; il existe une constante positive finie H telle que l'on ait pour toute valeur de r

$$|f(r)| < \frac{H}{r^{2p+1}}. \tag{63}$$

Reprenons en effet les deux images presque-périodiques de la fonction $f(r)$: soient $a(r)$ et $a'(r)$, la seconde étant la dérivée de la première. On a

$$f(r) = B_r[a'(\varrho)]$$

ce qui s'écrit encore

$$f(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \frac{1}{r^{2p}} \int_0^r \frac{a'(\varrho)}{[r^2-\varrho^2]^{\frac{1}{2}-p}} d\varrho,$$

ou, en intégrant par parties

$$f(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \left[\frac{a(r)}{r} + \frac{2p-1}{r^{2p}} \int_0^r \varrho \frac{a(\varrho)-a(r)}{[r^2-\varrho^2]^{\frac{3}{2}-p}} d\varrho\right]$$

car $a(r)$ a une dérivée bornée, et $|a(\varrho)-a(r)| < B|r-\varrho|$. Posons maintenant $r' = kr$, avec

$$k = 1 - \frac{1}{r^q};$$

q étant un exposant positif.

1°) Etudions d'abord l'intégrale

$$I_1 = \int_0^{r'} \varrho \frac{a(\varrho)-a(r)}{[r^2-\varrho^2]^{\frac{3}{2}-p}} d\varrho;$$

désignons par A la borne supérieure du module de $a(r)$; il vient successivement

$$|I_1| < 2A \int_0^{r'} \frac{\varrho\, d\varrho}{[r^2-\varrho^2]^{\frac{3}{2}-p}} = \frac{2A}{r^{1-2p}} \int_0^k \frac{u\, du}{[1-u^2]^{\frac{3}{2}-p}} = \frac{2A}{(1-2p)\, r^{1-2p}} \left[\frac{1}{[1-k^2]^{\frac{1}{2}-p}} - 1\right]$$

$$|I_1| < \frac{2A}{(1-2p)\, r^{1-2p}} \left[\frac{r^{(1-2p)q}}{[2r^q - 1]^{\frac{1}{2}-p}} - 1 \right].$$

2°) Passons maintenant à l'étude de l'intégrale restante

$$I_2 = \int_{r'}^{r} \varrho \frac{a(\varrho) - a(r)}{[r^2 - \varrho^2]^{\frac{3}{2}-p}} d\varrho;$$

$a(r)$ possède une dérivée presque-périodique; nous désignerons par B la borne supérieure du module de cette dérivée; le théorème de la moyenne donne alors

$$|a(\varrho) - a(r)| < B|r - \varrho|$$

puis successivement

$$|I_2| < B \int_{r'}^{r} \frac{\varrho\, d\varrho}{(r+\varrho)[r^2 - \varrho^2]^{\frac{1}{2}-p}} < \frac{B}{r+r'} \int_{r'}^{r} \frac{\varrho\, d\varrho}{[r^2 - \varrho^2]^{\frac{1}{2}-p}} = \frac{B r^{2p}(1-k^2)^{\frac{1}{2}+p}}{(1+2p)(1+k)}$$

$$|I_2| < \frac{B r^{2p(1-q)}}{1+2p} \frac{1}{[2r^q - 1]^{\frac{1}{2}-p}}.$$

3°) Remplaçons dans l'expression de $f(r)$, l'intégrale

$$I = I_1 + I_2$$

par sa borne supérieure; on trouve ainsi

$$|f(r)| < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \left[\frac{|a(r)|}{r} + 2A \frac{r^{q-1-2pq}}{[2r^q - 1]^{\frac{1}{2}-p}} - \frac{2A}{r} + \frac{1-2p}{1+2p} \frac{B r^{-2pq}}{[2r^q - 1]^{\frac{1}{2}-p}} \right]$$

$$< \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \left[2^{\frac{1}{2}+p} A r^{\frac{q}{2}(1-2p)-1} \left(1 - \frac{1}{2r^q}\right)^{p-\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + 2^{p-\frac{1}{2}} \frac{1-2p}{1+2p} B r^{-q\left(p+\frac{1}{2}\right)} \left(1 - \frac{1}{2r^q}\right)^{p-\frac{1}{2}} \right].$$

D'autre part, q étant positif, on peut prendre r assez grand pour que

$$\left(1 - \frac{1}{2r^q}\right)^{p-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - p\right)\frac{1}{r^q} + \cdots < 2$$

ce qui donne finalement

$$|f(r)| < \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} \left[2^{\frac{1}{2}+p} A\, r^{\frac{q}{2}(1-2p)-1} + 2^{p-\frac{1}{2}} \frac{1-2p}{1+2p} B\, r^{-q\left(p+\frac{1}{2}\right)}\right].$$

Si on prend

$$0 < q < \frac{2}{1-2p}$$

tous les exposants de r au second membre sont négatifs; quand q varie de 0 à $2/(1-2p)$, l'exposant

$$\frac{q}{2}(1-2p)-1$$

varie de -1 à 0, et l'exposant

$$-q\left(p+\frac{1}{2}\right)$$

varie de 0 à $-(1+2p)/(1-2p)$; on obtient le cas le plus favorable en prenant q de façon que ces deux exposants soient égaux, ce qui se produit pour $q=1$, leur valeur commune étant alors

$$-\left(p+\frac{1}{2}\right).$$

On voit donc bien qu'il existe une constante H, telle que, pour r assez grand en valeur absolue, on ait

$$|f(r)| < \frac{H}{r^{p+\frac{1}{2}}}. \tag{64}$$

Comme d'ailleurs $f(r)$ est bornée, cette constante H peut être choisie de façon que cette inégalité ait lieu quel que soit r. C'est la propriété que que nous avions en vue.

3. Le produit scalaire.

Soient $f(r)$ et $g(r)$ deux fonctions presque-périodiques J absolues, ayant les mêmes exposants de Fourier; soient

$$f(r) \sim \sum_n a_n j(\lambda_n r); \qquad g(r) = \sum_n b_n j(\lambda_n r)$$

leurs développements formels; nous avons indiqué plus haut que les séries

$$\sum_n \frac{a_n \bar{a}_n}{\lambda_n^{2p+1}}; \qquad \sum_n \frac{b_n \bar{b}_n}{\lambda_n^{2p+1}}; \qquad \sum_n \frac{a_n b_n}{\lambda_n^{2p+1}}$$

étaient convergentes, la troisième l'étant absolument. Par ailleurs, on a formellement, d'après les formules (29) et (30),

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_0^R r^{2p+1} f(r)\, g(r)\, dr = \frac{2^{2p}}{\pi} \Gamma^2(p+1) \sum_n \frac{a_n b_n}{\lambda_n^{2p+1}}; \tag{65}$$

le second membre ayant cette fois un sens, la question se pose de la légitimation de cette relation. Nous l'établirons en nous appuyant sur la propriété asymptotique qui fait l'objet du théorème précédent.

Soient $b(r)$ et $b'(r)$ les deux images presque-périodiques de Bohr de la fonction g:

$$b(r) = A_r[g(\varrho)]; \qquad g(r) = B_r[b'(\varrho)]; \qquad b(r) \sim \sum_n b_n \frac{\sin \lambda_n r}{\lambda_n}.$$

D'après le procédé d'approximation de Bôchner, on peut trouver une suite de polynomes trigonométriques impairs, d'exposant λ_n, convergeant uniformément dans $[-\infty; +\infty]$ vers $b(r)$, les dérivées de ces polynomes convergeant uniformément dans le même intervalle vers la dérivée $b'(r)$; cela tient à ce que, dans la méthode de Bochner, l'algorithme de formation des approximations successives ne dépend que des exposants de Fourier, et non des coefficients eux-mêmes. Soient donc $P_n(r)$ la suite de polynomes trigonométriques impairs convergeant vers $b(r)$; à tout ε positif arbitrairement petit correspond un entier N tel que

$$n > N$$

entraîne

$$|b(r) - P_n(r)| < \varepsilon; \qquad |b'(r) - P'_n(r)| < \varepsilon$$

pour tout r appartenant à $[-\infty; +\infty]$. Nous poserons

$$P'_n(r) = \sum_{q=1}^{N_n} B_q^n \cos \lambda_n r;$$

et nous écrirons

$$B_q^n = 0 \quad \text{pour} \quad q > N_n.$$

Enfin S désignera la somme de la série $\sum_n \frac{a_n b_n}{\lambda_n^{2p+1}}$.

Donnons-nous ε, fixons n comme étant le plus petit des indices satisfaisant simultanément aux trois inégalités

$$|b(r) - P_n(r)| < \varepsilon; \qquad |b'(r) - P'_n(r)| < \varepsilon, \text{ pour tout } r; \tag{66}$$

$$\left| S - \sum_{q=1}^{N_n} \frac{a_q b_q}{\lambda_q^{2p+1}} \right| < \varepsilon. \tag{67}$$

Soit enfin

$$\mathfrak{P}_n(r) = B_r[P'_n(\varrho)].$$

On a évidemment

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R r^{2p+1} f(r)\, \mathfrak{P}_n(r)\, dr = \frac{2^{2p}}{\pi} \Gamma^2(p+1) \sum_{q=1}^{N_n} a_q \frac{B_q^n}{\lambda_q^{2p+1}};$$

n étant choisi, on peut prendre R assez grand pour que

$$\left| \frac{1}{R} \int_0^R r^{2p+1} f(r)\, \mathfrak{P}_n(r)\, dr - \frac{2^{2p}}{\pi} \Gamma^2(p+1) \sum_{q=1}^{N_n} a_q \frac{B_q^n}{\lambda_q^{2p+1}} \right| < \varepsilon. \tag{68}$$

Utilisons maintenant la propriété asymptotique des fonctions absolues; tout d'abord il existe une constante positive H telle que

$$|f(r)| < \frac{H}{r^{p+\frac{1}{2}}}$$

quel que soit r; en second lieu, les différences

$$b(r) - P_n(r); \qquad b'(r) - P'_n(r)$$

sont les deux images presque-périodiques de Bohr de la fonction

$$g(r) - \mathfrak{P}_n(r)$$

et elles ont toutes deux pour borne ε; si on observe, d'après la démonstration de la propriété asymptotique, que la constante H peut se mettre en tous cas sous la forme d'une combinaison linéaire et homogène des bornes des deux images presque-périodiques de la fonction qu'on majore, on verra qu'il existe une constante positive h, indépendante de n, telle que l'on ait pour tour r:

$$|g(r) - \mathfrak{P}_n(r)| < \frac{h\varepsilon}{r^{p+\frac{1}{2}}}.$$

Les deux dernières inégalités donnent alors de façon immédiate la suivante

$$\left| \frac{1}{R} \int_0^R r^{2p+1} f(r) \left[g(r) - \mathfrak{P}_n(r) \right] dr \right| < H h \varepsilon. \tag{69}$$

Enfin, désignons par σ la somme de la série convergente

$$\sum_n \frac{a_n \bar{a}_n}{\lambda_n^{2p+1}}.$$

La formule de Lagrange donne

$$\left| \sum_{q=1}^{N_n} \frac{a_q \left[b_q - B_q^n \right]}{\lambda_q^{2p+1}} \right| < \sqrt{\sigma} \left[\sum_q \frac{1}{\lambda_q^{2p+1}} \left| b_q - B_q^n \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Partageons la suite d'indices 1; 2; . . .; q; . . . en deux catégories:

$$n'_1;\ n'_2;\ \ldots;\ n'_q;\ \ldots$$

pour lesquels $\lambda_{n'_q} > 1$, et

$$n''_1;\ n''_2;\ \ldots;\ n''_q;\ \ldots$$

pour lesquels $\lambda_{n''_q} \leq 1$, il vient alors, pour tout q,

$$\left| b_{n'_q} - B_{n'_q}^n \right|^2 > \frac{1}{\left(\lambda_{n'_q}\right)^{2p+1}} \left| b_{n'_q} - B_{n'_q}^n \right|^2 > \frac{1}{\left(\lambda_{n'_q}\right)^2} \left| b_{n'_q} - B_{n'_q} \right|^2; \tag{70}$$

$$\left| b_{n''_q} - B_{n''_q}^n \right|^2 \leq \frac{1}{\left(\lambda_{n''_q}\right)^{2p+1}} \left| b_{n'_q} - B_{n''_q}^n \right|^2 \leq \frac{1}{\left(\lambda_{n''_q}\right)^2} \left| b_{n''_q} - B_{n''_q}^n \right|^2. \tag{71}$$

Or les séries

$$\sum_q \left| b_q - B_q^n \right|^2; \qquad \sum_q \frac{1}{(\lambda_q)^2} \left| b_q - B_q^n \right|^2$$

sont toutes deux convergentes et elles ont respectivement pour sommes

$$\lim_{R \to \infty} \frac{2}{R} \int_0^R \left| b'(r) - P'_n(r) \right|^2 dr; \qquad \lim_{R \to \infty} \frac{2}{R} \int_0^R \left| b(r) - P_n(r) \right|^2 dr;$$

ces limites étant l'une et l'autre inférieures à $2\varepsilon^2$; posons

$$\sigma_1 = \sum_q \left| b_{n'_q} - B^n_{n'_q} \right|^2; \qquad \sigma_2 = \sum_q \left| b_{n''_q} - B^n_{n''_q} \right|^2;$$

$$\sigma_3 = \sum_q \frac{1}{\left(\lambda_{n'_q}\right)^2} \left| b_{n'_q} - B^n_{n'_q} \right|^2; \qquad \sigma_4 = \sum_q \frac{1}{\left(\lambda_{n''_q}\right)^2} \left| b_{n''_q} - B^n_{n''_q} \right|^2;$$

ces quatre séries sont convergentes et ont des sommes inférieures à $2\varepsilon^2$; les inégalités (70) et (71) montrent que les séries

$$\sum_q \frac{1}{\left(\lambda_{n'_q}\right)^{2p+1}} \left| b_{n'_q} - B^n_{n'_q} \right|^2; \qquad \sum_q \frac{1}{\left(\lambda_{n''_q}\right)^{2p+1}} \left| b_{n''_q} - B^n_{n''_q} \right|^2$$

ont des sommes inférieures à $2\varepsilon^2$, et enfin que la série

$$\sum_q \frac{1}{(\lambda_q)^{2p+1}} \left| b_q - B^n_q \right|^2$$

a une somme inférieure à $4\varepsilon^2$, par suite

$$\left| \sum_{q=1}^{N_n} \frac{a_q \left[b_q - B^n_q \right]}{\lambda_q^{2p+1}} \right| < 2\sqrt{\sigma}\,\varepsilon. \tag{72}$$

La conjonction des inégalités (67), (68), (69) et (72) donne en définitive

$$\left| \frac{1}{R} \int_0^R r^{2p+1} f(r)\, g(r)\, dr - \frac{2^{2p}}{\pi} \Gamma^2 (p+1)\, S \right| < \left[Hh + 2 + 2\sqrt{\sigma} \right] \varepsilon; \tag{73}$$

ce qui prouve que

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_0^R r^{2p+1} f(r)\, g(r)\, dr = \frac{2^{2p}}{\pi} \Gamma^2 (p+1)\, S. \tag{74}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. Si $f(r)$ et $g(r)$ sont deux fonctions presque-périodiques J absolues, la limite

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_0^R r^{2p+1} f(r)\, g(r)\, dr$$

existe et est finie; elle est nulle si les deux fonctions n'ont aucun exposant de

Fourier commun; dans le cas contraire elle est égale à la somme de la série convergente

$$\sum_n \frac{a_n b_n}{\lambda_n^{2p+1}};$$

dans laquelle les λ_n sont les exposants de Fourier communs aux deux fonctions et où les a_n et les b_n sont les coefficients de Fourier correspondants.

Il est à peine besoin de faire remarquer que ce théorème comprend comme cas particulier celui qui donne les coefficients du développement formel d'une fonction presque-périodique J absolue.

On tire de là les conclusions habituelles: Les fonctions presque-périodiques J absolues forment une variété linéaire dans une espace de Hilbert non-dénombrable; la norme dans cette variété est définie par

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\int_0^R r^{2p+1} f(r)\bar{f}(r)\,dr;$$

et le produit scalaire a pour expression

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\int_0^R r^{2p+1} f(r)\bar{g}(r)\,dr.$$

Si l'on pose

$$f_n(r) = \sum_{q=1}^{n} a_n j(\lambda_n r)$$

la suite des fonctions $f_n(r)$ converge vers $f(r)$ au sens de la norme ainsi définie.

4. Examen des deux cas limites: $p = -1/2$; $p = +1/2$.

Il suffit de se reporter à ce qui a été dit à ce sujet pour les fonctions de première et de seconde classe; les conclusions sont les suivantes:

1°) $p = -1/2$; $f(r)$ est une fonction paire presque-périodique de Bohr admettant une primitive presque-périodique.

2°) $p = +1/2$; $f(r)$ est le quotient par r d'une fonction impaire presque-périodique de Bohr admettant une dérivée presque-périodique.