ÜBER DIE AUFLÖSUNG EINER SINGULÄREN INTEGRALGLEICHUNG.

Von

D. ENSKOG

in Gävle.

§ 1. Gibt es eine konstante Nullösung einer linearen Integralgleichung zweiter Art

$$(1) \qquad k(s)\varphi(s) - \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s),$$

wo alle Grössen reell sein sollen, so wird

$$(2) \qquad k(s) = \int_a^b K(s, t)\,dt,$$

und die Integralgleichung kann auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$(3) \qquad \int_a^b K(s, t)\,[\varphi(s) - \varphi(t)]\,dt = f(s).$$

Ist allgemeiner $\varkappa(s)$ eine Nullösung von (1), so kann man sie z. B. durch die Substitution

$$k^*(s) = \varkappa(s)\,k(s)$$

$$K^*(s, t) = K(s, t)\,\varkappa(t)$$

$$\varphi^*(s) = \frac{\varphi(s)}{\varkappa(s)}$$

in eine Gleichung der Gestalt (3) verwandeln.

Wird für $t = s$ $K(s, t)$ so stark singulär, dass die durch (2) definierte Funktion $k(s)$ unendlich wird, so verliert die linke Seite von (1) ihre Bedeutung. Die linke seite von (3) kann aber auch in solchen Fällen einen bestimmten Wert haben. Ist $\varphi(s)$ eine Funktion mit beschränkter Ableitung, so genügt es hierfür anzunehmen, dass das Integral

$$\int_a^b |K(s, t)(s-t)|\, dt$$

konvergiert.

Ein ähnlicher Fall kommt bei der gastheoretischen Integralgleichung vor. Die Funktionen $K(s, t)$ und $k(s)$ hängen hier von einem Parameter b_1, dem Wirkungsradius der Moleküle, ab. Diese Grösse ist gewissermassen unbestimmt, und es kann aus physikalischen Gründen nicht von Belang sein, wenn man sie unendlich gross annimmt. Dann wird aber $k(s) = \infty$, und die Gleichung kann nicht mehr in der Form (1) geschrieben werden.

§ 2. Wir wollen annehmen, dass $\varphi(s)$ beinahe überall eine Ableitung $\chi(s)$ besitzt, und dass man setzen kann

$$\varphi(s) = \int \chi(s)\, ds + c. \tag{4}$$

Statt (3) erhält man die Gleichung

$$\int_a^b K(s, t)\, dt \int_t^s \chi(r)\, dr = f(s). \tag{5}$$

Setzen wir die Vertauschbarkeit der Integrationsfolge voraus, so geht (5) in die Integralgleichung der ersten Art

$$\int_a^b H(s, t)\, \chi(t)\, dt = f(s) \tag{6}$$

mit

$$H(s,t) = \begin{cases} \int_a^t K(s,r)\,dr & \text{für } t < s, \\ -\int_t^b K(s,r)\,dr & \text{für } t > s \end{cases} \tag{7}$$

über. Ist $K(s,t)$ nur für $t=s$ unstetig, so erfüllt $H(s,t)$ die folgenden Bedingungen:

1) Es ist für $a < s < b$

$$H(s,a) = H(s,b) = 0. \tag{8}$$

2) $H(s,t)$ ist, abgesehen von der Stelle $t=s$, überall stetig; an der genannten Stelle macht sie einen Sprung

$$H(s, s+0) - H(s, s-0) = -\int_a^b K(s,t)\,dt = -k(s), \tag{9}$$

der eventuell unendlich gross sein kann.

3) $K(s,t)$ ist überall, abgesehen von der Stelle $t=s$, die partielle Ableitung von $H(s,t)$ in bezug auf t.

Der Kern $H(s,t)$ ist schwächer singulär als $K(s,t)$. Ist dieser in bezug auf t absolut integrierbar, so ist jener beschränkt. Wir machen im folgenden die Annahmen, dass die Integrale

$$\int_a^b [H(s,t)]^2\,ds, \qquad \int_a^b [H(s,t)]^2\,dt, \qquad \int_a^b\int_a^b [H(s,t)]^2\,ds\,dt$$

existieren, und dass die beiden ersten beschränkte Funktionen sind.[1]

§ 3. Es sei $h_1(s), h_2(s), h_3(s), \ldots$ ein vollständiges System linear unabhängiger stetiger Funktionen.[2] Wir bilden sukzessive daraus durch einen Or-

[1] Es soll möglich sein, $H(s,t)$ durch beschränkte und nur für $s=t$ unstetige Kerne $H_\delta(s,t)$ so zu approximieren, dass die Integrale $\int_a^b [H(s,t) - H_\delta(s,t)]^2\,ds$ und $\int_a^b [H(s,t) - H_\delta(s,t)]^2\,dt$ gleichmässig nach 0 streben.

[2] In den Entwicklungen dieses Paragraphen werden von den Eigenschaften des Kernes $H(s,t)$ nur die (fast ausnahmslose) Stetigkeit und die quadratische Integrierbarkeit vorausgesetzt.

thogonalisierungsprozess die linearen Kombinationen $u_i(s)$, $(i = 1, 2, \ldots)$, welche die folgenden Eigenschaften haben. Ist allgemein

$$(10) \qquad v_i(t) = \int_a^b u_i(s) H(s, t)\, ds, \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

so soll

$$(11) \qquad (v_i, v_k) \equiv \int_a^b v_i(t) v_k(t)\, dt = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{» } i \neq k \end{cases}$$

sein. Bei diesem Prozess kann der folgende Fall eintreffen. Nachdem man eine solche nicht normierte Kombination $u_\varkappa^*(s)$ bestimmt hat, dass das entsprechende $v_\varkappa^*(s)$ zu den schon erhaltenen $v_i(s)$ orthogonal ist, kann die Normierung jener Kombination gemäss (11) unmöglich werden, weil $(v_\varkappa^*, v_\varkappa^*) = 0$ ist. Die stetige Funktion $v_\varkappa^*(s)$ muss dann identisch verschwinden, und es ist $\psi(s) = u_\varkappa^*(s)$ eine Lösung der homogenen Gleichung

$$(12) \qquad \int_a^b \psi(s) H(s, t)\, ds = 0.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $h_i(s)$ kann diese Nullösung nicht identisch verschwinden. Streicht man das entsprechende $h_\varkappa(s)$ aus der gegebenen Funktionenfolge, so kann aber der Orthogonalisierungsprozess fortgesetzt werden.

Da jedes $h_i(s)$ als eine lineare Kombination endlich vieler der Funktionen $u_k(s)$ und $u_\varkappa^*(s)$ dargestellt werden kann, so müssen diese Funktionen zusammen ein vollständiges Funktionensystem bilden.

Ist $\chi(s)$ eine quadratisch integrierbare Lösung von (6), so erhalten wir leicht ihre Fourierkoeffizienten in bezug auf die $v_i(s)$. Aus (10) und (6) folgt

$$(13) \qquad a_i = \int_a^b v_i(t) \chi(t)\, dt = \int_a^b \int_a^b u_i(s) H(s, t) \chi(t)\, ds\, dt =$$

$$= \int_a^b u_i(s) f(s)\, ds, \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Wenn die unendliche Reihe $a_1^2+a_2^2+\cdots$ konvergiert, so wird nach dem Satze von Riesz-Fischer durch den Ansatz

$$\chi(s)=\sum_1^\infty a_i v_i(s) \tag{14}$$

eine nach Lebesgue quadratisch integrierbare Funktion $\chi(s)$ definiert, deren Fourierkoeffizienten (χ, v_i) gleich den a_i sind. Es gilt dann der folgende Satz:

Wenn die Reihe $a_1^2+a_2^2+\cdots$ konvergiert, und wenn $f(s)$ eine zu jeder der Funktionen $u_\varkappa^*(s)$ orthogonale stetige Funktion ist, so wird (6) durch die quadratisch integrierbare Funktion $\chi(s)$ (14) aufgelöst.

Die stetige Funktion

$$F(s)=\int_a^b H(s,t)\chi(t)\,dt-f(s)$$

ist nämlich nach der Voraussetzung und nach (12) zu den Funktionen $u_\varkappa^*(s)$ orthogonal. Es ist ferner

$$(F,u_k)=\int_a^b\int_a^b u_k(s)H(s,t)\chi(t)\,ds\,dt-(u_k,f)=(v_k,\chi)-a_k=0, \qquad (k=1,2,\ldots)$$

Da die Funktionen $u_\varkappa^*(s)$ und $u_k(s)$ zusammen ein vollständiges Funktionensystem bilden, muss $F(s)$ identisch verschwinden, womit das behauptete bewiesen ist.

Man sieht ohne weiteres die Richtigheit des folgenden Satzes ein:

Wenn (6) eine quadratisch iutegrierbare Lösung $\chi(s)$ besitzt, so ist $f(s)$ zu jeder normierten Lösung der homogenen Gleichung (12) orthogonal, und es konvergiert die Reihe $a_1^2+a_2^2+\cdots$

Aus diesen beiden Sätzen folgt dann:

Wenn $f(s)$ zu jeder der Funktionen $u_\varkappa^*(s)$ orthogonal ist, und wenn ausserdem (12) wenigstens eine zu $f(s)$ nicht orthogonale, normierte Lösung hat, so divergiert die Reihe $a_1^2+a_2^2+\cdots$

§ 4. Ist $K(s,t)$ absolut integrierbar, so ergibt sich für eine beliebige beschränkte und integrierbare Funktion $g(s)$ die folgende Identität:

$$(15)\qquad \int_a^b g(s)\,H(s,t)\,ds = -\int_a^t \left\{ k(t)\,g(t) - \int_a^b g(s)\,K(s,t)\,ds \right\} dt.$$

Dieselbe Gleichung ist noch gültig, wenn vorausgesetzt wird, dass $K(s, t)$ und $g(s)$ quadratisch integrierbar sind. Unsere Funktionen $u_\varkappa^*(s)$ sind folglich, ebenso wie jede stetige Lösung von (12), in jenem Falle auch Lösungen der homogenen Gleichung

$$(16)\qquad k(t)\,\psi(t) - \int_a^b \psi(s)\,K(s,t)\,ds = 0,$$

d. h. Nullösungen der zu (1) gehörigen transponierten Gleichung. Wenn umgekehrt $\psi(s)$ der Gleichung (16) genügt, so ist sie offenbar auch eine Lösung von (12). Setzt man voraus, dass $K(s, t)$ quadratisch integrierbar ist, so wird jede quadratisch integrierbare Funktion $\psi(s)$, die bis auf eine Nullmenge der Gleichung (16) genügt, auch eine Lösung von (12) und umgekehrt.

Nehmen wir an, dass $k(s)$ überall grösser als eine positive Zahl m ist, so gelten in diesem Falle die Fredholmschen Sätze für die Integralgleichung (1) der zweiten Art. Diese Sätze sind dann mit einer kleinen Modifikation auch für die Integralgleichung (6) der ersten Art gültig, wenn $K(s, t)$ und $f(s)$ so beschaffen sind dass jede Lösung von (1) beinahe überall eine Ableitung besitzt.

Es ist unter diesen Voraussetzungen (6) *dann und nur dann lösbar, wenn* $f(s)$ *zu jeder normierten Lösung von* (12) *orthogonal ist. Die Zahl der zu einander orthogonalen und normierten Lösungen dieser Gleichung ist endlich und um eins grösser als die Anzahl der nicht verschwindenden, linear unabhängigen Lösungen der zu* (6) *gehörigen homogenen Gleichung.*

Die Modifikation kommt daher, dass die triviale Nullösung 0 von (6) der Nullösung 1 von (3) entspricht.

§ 5. Wir kehren wieder zu dem singulären Fall zurück, nehmen aber an, dass $K(s, t)$ eine symmetrische Funktion von s und t ist, und dass für jede stetige oder stückweise stetige Funktion $\varphi(s)$

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t)\,\varphi(s)\,[\varphi(s) - \varphi(t)]\,ds\,dt \geqq 0$$

oder

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^b\int\limits_a^b K(s,t)\,[\varphi(s)-\varphi(t)]^2\,ds\,dt \geqq 0$$

ist. Es soll ferner möglich sein, $K(s, t)$ durch endliche symmetrische Funktionen $K_\delta(s, t)$ zu »approximieren«, die sich nur für $s-\delta<t<s+\delta$ von $K(s, t)$ unterscheiden, und für welche ebenfalls die Ungleichung

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b K_\delta(s,t)\,\varphi(s)\,[\varphi(s)-\varphi(t)]\,ds\,dt \geqq 0$$

gilt. Setzt man $\varphi(t)$ gleich 1 für $s_1-\varepsilon<t<s_1+\varepsilon$, — wo ε beliebig klein sein kann — und sonst gleich Null, so sieht man ein, dass

$$k_\delta(s_1)=\int\limits_a^b K_\delta(s_1,t)\,dt \geqq 0.$$

Setzen wir

$$K(s,t)=K_\delta(s,t)+\delta(s,t),$$

so soll dementsprechend die Funktion $\delta(s, t)$ in der nächsten Umgebung der Geraden $s=t$ überall positiv und nirgends negativ sein. Ist $\varphi(s)$ eine Lösung der homogenen Gleichung

$$\int\limits_a^b K(s,t)\,[\varphi(s)-\varphi(t)]\,dt=0, \tag{17}$$

so wird

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b K_\delta(s,t)\,[\varphi(s)-\varphi(t)]^2\,ds\,dt+ \\ +\int\limits_a^b\int\limits_a^b \delta(s,t)\,[\varphi(s)-\varphi(t)]^2\,ds\,dt=0.$$

Da keines dieser Glieder negativ sein kann, so muss insbesondere das zweite verschwinden. Es ist folglich $\varphi(s)$ konstant. Die homogene Gleichung (17) hat in diesem Falle keine von I linear unabhängige stetige Lösung, und es hat (6) keine nicht verschwindende stetige Nullösung.

§ 6. Die Frage, in welchem Umfang die Gültigkeit der Fredholmschen Sätze für den allgemeinen Fall bewiesen werden kann, hatte ich bisher nicht Gelegenheit genug zu untersuchen. Sucht man sie auf Grund der gewonnenen Resultate zu beantworten, so stösst man auf Schwierigkeiten. Vielleicht ist eine tiefere Analyse dieses Problems erforderlich.