ÜBER DIE TRANSFORMATION 110ten GRADES DER ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN.

Von

ROBERT FRICKE

in Braunschweig.

Die Transformation der elliptischen Funktionen hat nicht nur für sich selbst, sondern auch wegen ihrer Anwendungen auf die Theorie der algebraischen Gleichungen und auf die Theorie der ganzzahligen binären quadratischen Formen von jeher viel Interesse erregt und besitzt eine höchst ausgedehnte Literatur. Nach den ursprünglichen Arbeiten von Abel, Jacobi, Sohnke, Schläfli u. A. gelang es in der zweiten Hälfte der siebziger Jahre des vorigen Jahrhunderts Felix Klein, die Behandlung des Transformationsproblems der elliptischen Funktionen wesentlich zu fördern, indem er die gruppentheoretisch-geometrischen Grundsätze seiner Theorie der Modulfunktionen zur Grundlage seiner Entwicklungen machte. Einer der schönsten Erfolge war hierbei die Gewinnung der bekannten Resolvente elften Grades der Modulargleichung zwölften Grades, deren Existenz bereits Galois entdeckt hatte. Man darf als die wesentlichste Grundlage der Kleinschen Entwicklungen diejenige Untergruppe der Modulgruppe bezeichnen, in deren Substitutionen die zweiten Koeffizienten β der Kongruenz $\beta \equiv 0 \pmod{n}$ genügen. Diese Gruppe wird weiterhin die »Transformationsgruppe« des n^{ten} Grades genannt und durch $\mathfrak{G}^{(n)}$ bezeichnet.

Über diesen Standpunkt hinaus sind nun neuerdings wesentliche Fortschritte gelungen. Freilich musste man dabei das engere Gebiet der elliptischen Modulfunktionen verlassen und die allgemeinere von Klein und Poincaré geschaffene Theorie der eindeutigen automorphen Funktionen heranziehen. Man kennt die glänzenden Arbeiten Poincaré's über diese Funktionen, die besondere Zierden der ersten Bände der Acta mathematica sind; jedoch hatte Niemand gewagt, diese Theorie nun auch einmal zur Lösung sonstiger Probleme von Interesse wirklich zu verwerten. Indessen lag gerade in dieser Richtung der Keim des Fortschritts bei der Behandlung der Transformation n^{ten} Grades der elliptischen Funktionen und die Möglichkeit der Erkenntnis der wahren Einfachheit der beim n^{ten} Grade eintretenden algebraischen Beziehungen.

Die neue Grundlage für die Behandlung der Transformation n^{ten} Grades ist die weiterhin als »Hauptgruppe» des Grades n benannte und durch $\mathfrak{H}^{(n)}$ bezeichnete Gruppe. Ihre Erklärung beruht auf folgender Betrachtung: Es sei $n = t.s$ irgend eine Zerlegung der Gradzahl n in zwei *teilerfremde* Faktoren t und s. Man bilde dann alle Substitutionen der Gestalt:

$$(1) \qquad \omega' = \frac{\alpha t\omega + \beta n}{\gamma\omega + \delta t}, \qquad \alpha\delta t - \beta\gamma s = 1$$

mit ganzen, die zweite Gleichung (1) befriedigenden Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Da t und s teilerfremd sind, so giebt es für jede Zerlegung $n = t.s$ Substitutionen dieser Art. Die Substitutionen (1) mögen symbolisch durch V_t bezeichnet werden, ihre Gesamtheit durch S_t. *Hat man dann zwei Substitutionen V_t und $V'_{t'}$, die zu irgend zwei unserer Zerlegungen $n = t.s$ und $n = t'.s'$ gehören, so gilt für die aus V_t und $V'_{t'}$ zusammengesetzte Substitution die Regel:*

$$(2) \qquad V'_{t'} . V_t = V''_{t''}, \quad t''.\tau^2 = t'.t,$$

wo τ der grösste gemeinschaftliche Teiler von t' und t ist. Hebt man nämlich aus den vier Koeffizienten der zusammengesetzten Substitution $V'_{t'} . V_t$ den gemeinsamen Faktor τ fort, so folgt:

$$V'_{t'} . V_t = \begin{pmatrix} \alpha'\alpha t''\tau + \beta'\gamma\dfrac{n}{\tau}, & \left(\alpha'\beta\dfrac{t'}{\tau} + \beta'\delta\dfrac{t}{\tau}\right)n \\ \gamma'\alpha\dfrac{t}{\tau} + \delta'\gamma\dfrac{t'}{\tau}, & \gamma'\beta\dfrac{n}{\tau} + \delta'\delta t''\tau \end{pmatrix}.$$

Nun ist die ganze Zahl:

$$(3) \qquad \frac{n}{\tau} = \frac{t}{\tau}\cdot s = \frac{t'}{\tau}\cdot s'$$

durch jede der beiden teilerfremden Zahlen $\dfrac{t}{\tau}$ und $\dfrac{t'}{\tau}$, also durch ihr Produkt t'' teilbar; man kann also:

$$V'_{t'} \cdot V_t = \begin{pmatrix} \alpha'' t'', \beta'' n \\ \gamma'', \delta'' t'' \end{pmatrix}$$

mit ganzen Zahlen α'', β'', γ'', δ'' schreiben. Für die Determinante dieser Substitution gilt:

$$(4) \qquad \alpha'' \delta'' t''^2 - \beta'' \gamma'' n = t''.$$

Zufolge (3) ist die ganze Zahl s durch die gegen $\frac{t}{\tau}$ teilerfremde Zahl $\frac{t'}{\tau}$ teilbar, so dass man $s = \frac{t'}{\tau} \cdot s_0$ mit ganzer Zahl s_0 schreiben kann. Setzt man $s_0 \tau = s''$, so folgt $n = t'' \cdot s''$, und die Gleichung (4) ergiebt nach Division mit t'':

$$\alpha'' \delta'' t'' - \beta'' \gamma'' s'' = 1,$$

woraus zugleich hervorgeht, dass t'' und s'' wieder teilerfremd sind. Damit ist die Regel (2) bewiesen.

Ist λ die Anzahl verschiedener Primteiler von n, so hat man genau 2^λ verschiedene Zerlegungen $n = t \cdot s$ und damit 2^λ verschiedene Systeme S_t von Substitutionen V_t. Aus der Regel (2) geht dann unmittelbar folgender Satz hervor: *Die Substitutionen aller 2^λ Systeme S_t bilden eine Gruppe, die als »Hauptgruppe» $\mathfrak{H}^{(n)}$ des Grades n bezeichnet werden soll, und in der die aus dem System S_1 allein bestehende »Transformationsgruppe» des Grades n eine ausgezeichnete Untergruppe des Index 2^λ ist.*

Bildet man die zur Transformationsgruppe $\mathfrak{G}^{(n)}$ als einer ausgezeichneten Untergruppe der $\mathfrak{H}^{(n)}$ gehörende »Quotientengruppe» $\mathfrak{H}^{(n)}/\mathfrak{G}^{(n)}$, so hat man als Elemente derselben die 2^λ Systeme S_t zu benutzen, die sich wieder nach der Regel:

$$(5) \qquad S'_{t'} \cdot S_t = S''_{t''}, \quad t'' \cdot \tau^2 = t' \cdot t$$

zusammensetzen. Es folgt der Satz: *Die Quotientengruppe $\mathfrak{H}^{(n)}/\mathfrak{G}^{(n)}$ ist eine Abelsche Gruppe der Ordnung 2^λ, die ausser dem Einheitselement S_1 lauter Elemente der Periode 2 enthält.* Eine zugehörige Indexreihe ist λ-gliedrig und besteht aus lauter Indizes 2. Entsprechend besteht eine Kompositionsreihe aus lauter Gruppen, deren jede ausgezeichnet vom Index 2 in der voraufgehenden Gruppe enthalten ist.

Indem man alle möglichen Kompositionsreihen aufstellt und bei jeder Reihe von den einzelnen Gruppen zu den entsprechenden Untergruppen der Hauptgruppe übergeht, gelangt man zur Kenntnis aller Gruppen, die in $\mathfrak{H}^{(n)}$ enthalten sind und ihrerseits $\mathfrak{G}^{(n)}$ enthalten. Diese Gruppen sollen »Zwischengruppen» genannt werden. Um eine zweckmässige Bezeichnung dieser Gruppen einzuführen, verstehen wir auch unter $\mathfrak{G}_1^{(n)}$ die aus dem System S_1 allein bestehende Transformationsgruppe; sie entspricht dem Einheitselement der Abelschen Quotientengruppe. Hieran reihen sich die $(2^\lambda - 1)$ zyklischen Untergruppen der Ordnung 2 in der Quotientengruppe, deren einzelne neben S_1 *ein* Element S_t mit $t > 1$ enthält. Man gelangt zu $(2^\lambda - 1)$ Zwischengruppen, die durch $\mathfrak{G}_{1,t_1}^{(n)}, \mathfrak{G}_{1,t_2}^{(n)}, \ldots, \mathfrak{G}_{1,n}^{(n)}$ zu bezeichnen sind, und deren letzte die bekannte Klassengruppe ist. Es reihen sich weiter $\frac{1}{6}(2^\lambda - 1)(2^\lambda - 2)$ Zwischengruppen $\mathfrak{G}_{1,t_1,t_2,t_3}^{(n)}$ an, wo t_3 nach der Regel (5) aus den von einander verschiedenen Teilern t_1 und t_2 von n zu berechnen ist. Indem man entsprechend fortfährt, gelangt man nach λ Schritten zur Hauptgruppe $\mathfrak{H}^{(n)}$ selbst, die demnach auch durch $\mathfrak{G}_{1,t_2,t_3,\ldots,n}^{(n)}$ bezeichnet werden könnte. Ist übrigens nicht zweifelhaft, welcher Grad vorliegt, so mag auch der obere Index an der Gruppenbezeichnung fortbleiben.

Die Klassengruppe steht in einer bekannten wichtigen Beziehung zu den »Klassen» ganzzahliger binärer quadratischer Formen der Diskriminante $D = -4n$ bezw. im Falle $n \equiv 3 \pmod 4$ der beiden Diskriminanten $D = -4n$ und $D = -n$. Der Aufstieg zur Hauptgruppe $\mathfrak{H}^{(n)}$ entspricht der Zusammenfassung der Klassen in »Geschlechter», wobei die Hauptgruppe ihre Benennung erhalten hat, weil sie dem »Hauptgeschlechte» entspricht. Für $n \equiv 1 \pmod 4$ und $n \equiv 0 \pmod 8$ ist die Anzahl der Geschlechter bei $D = -4n$ genau gleich 2^λ. Ebenso ist für $n \equiv 3 \pmod 4$ die Summe der Geschlechteranzahlen bei $D = -n$ und $D = -4n$ gleich 2^λ. Indessen findet man für $n \equiv 2, 4$ und $6 \pmod 8$, dass die Anzahl der Geschlechter bei $D = -4n$ nur gleich $2^{\lambda-1}$ ist. Auf der anderen Seite hat sich gezeigt, dass man bei den Graden, die durch 4 oder durch 9 teilbar sind, auch die Hauptgruppe einer nochmaligen Erweiterung, sogar unter Umständen wiederholten Erweiterungen, unterziehen kann, ohne aus dem Bereiche »eigentlich diskontinuierlicher Gruppen»[1] hinauszutreten.

Für die Durchführung der algebraischen Theorie des einzelnen Transformationsgrades ist die zunächst zu lösende Aufgabe die Feststellung des »DB» für die durch die Spiegelung an der imaginären ω-Achse erweiterte Hauptgruppe, die in dieser erweiterten Gestalt auch durch $\mathfrak{H}^{(n)}$ bezeichnet sei. Dieser »DB»

[1] d. h. Gruppen mit endlichem »DB» (Diskontinuitätsbereich).

werde das »Hauptpolygon» des Grades n genannt und durch $\mathbf{H}_n$ bezeichnet; für die entsprechend erweiterte Klassengruppe und die Transformationsgruppe werden die »DB» als »Klassenpolygon» $\mathbf{K}_n$ und »Transformationspolygon» $\mathbf{T}_n$ bezeichnet. Ich besitze die fertigen Untersuchungen und Zeichnungen der Hauptpolygone aller Transformationsgrade von $n=2$ bis 46, eingeschlossen, und darüber hinaus für die Grade:

$$n=48, 49, \ldots, 60, 62, 63, \ldots, 66, 68, 70, 71, \ldots, 78, 84, 90, 91, 102, 105, 110, 130.$$

Von diesen 79 Hauptpolygonen haben die weitaus meisten, nämlich 66, im Riemannschen Sinne das Geschlecht $p=0$. Diese Fälle sind natürlich für die Durchführung der algebraischen Theorie besonders aussichtsreich. Es existiert dann immer eine einwertige der Hauptgruppe zugehörige automorphe Funktion, die »Hauptfunktion» des betreffenden Grades, nach deren Adjunktion zur Modulfunktion erster Stufe $j(\omega)$ die zugehörige Transformationsgleichung (Modulargleichung) durch eine Kette von λ Quadratwurzeln lösbar wird.

Bilden die Formklassen nur *ein* Geschlecht, wie bei primzahligen n, so ist mit der Klassengruppe bereits die Hauptgruppe erreicht. Auf diese Fälle bezogen sich meine früheren Untersuchungen. Neuerdings habe ich die Fälle $n=42$ (Acta mathem., Bd. 52, S. 257) sowie $n=70$ und 105 (Mathem. Annalen, Bd. 101, S. 316) behandelt. Der höchste Grad, bei dem bisher das Geschlecht $p=0$ des Hauptpolygons festgestellt werden konnte, ist $n=110$. Die hier zunächst vorliegenden Schwierigkeiten konnten überwunden werden; die folgenden Zeilen liefern die algebraische Theorie des Transformationsgrades 110.

§ 1. Hauptpolygon, Zwischengruppen und Formklassen beim Grade 110.

Das Hauptpolygon $\mathbf{H}_{110}$ ist in Fig. 1 dargestellt. Es ist ein Kreisbogenzwölfeck mit neun rechten Winkeln, zwei an den Ecken ε_4, ε_5 gelegenen nichtrechten Winkeln, die indessen in Summa zwei rechte Winkel geben, und dem Winkel 0 in der Spitze $\omega=i\infty$. Abgesehen von den beiden geraden Seiten, die natürlich Symmetrielinien der erweiterten Hauptgruppe sind, stellen auch die stark ausgezogenen, mit $s_1, s_2, \ldots, s_5$ bezeichneten Seiten Symmetriekreise der $\mathfrak{H}^{(110)}$ dar. Die Gleichungen dieser Kreise und die zugehörigen Spiegelungen sind gegeben durch:

$$(s_1),\qquad \xi^2+\eta^2+2.55\xi+27.110=0,\qquad \omega'=\frac{55\bar\omega+27.110}{-\bar\omega-55},$$

$$(s_2),\qquad 3(\xi^2+\eta^2)+2.55\xi+9.110=0,\qquad \omega'=\frac{55\bar\omega+9.110}{-3\bar\omega-55},$$

$$(s_3),\qquad \xi^2+\eta^2+2.15\xi+2.110=0,\qquad \omega'=\frac{3\cdot5\bar\omega+2.110}{-\bar\omega-3\cdot5},$$

$$(s_4),\qquad \xi^2+\eta^2+2.11\xi+110=0,\qquad \omega'=\frac{11\bar\omega+110}{-\bar\omega-11},$$

$$(s_5),\qquad \xi^2+\eta^2-110=0,\qquad \omega'=\frac{110}{\bar\omega}.$$

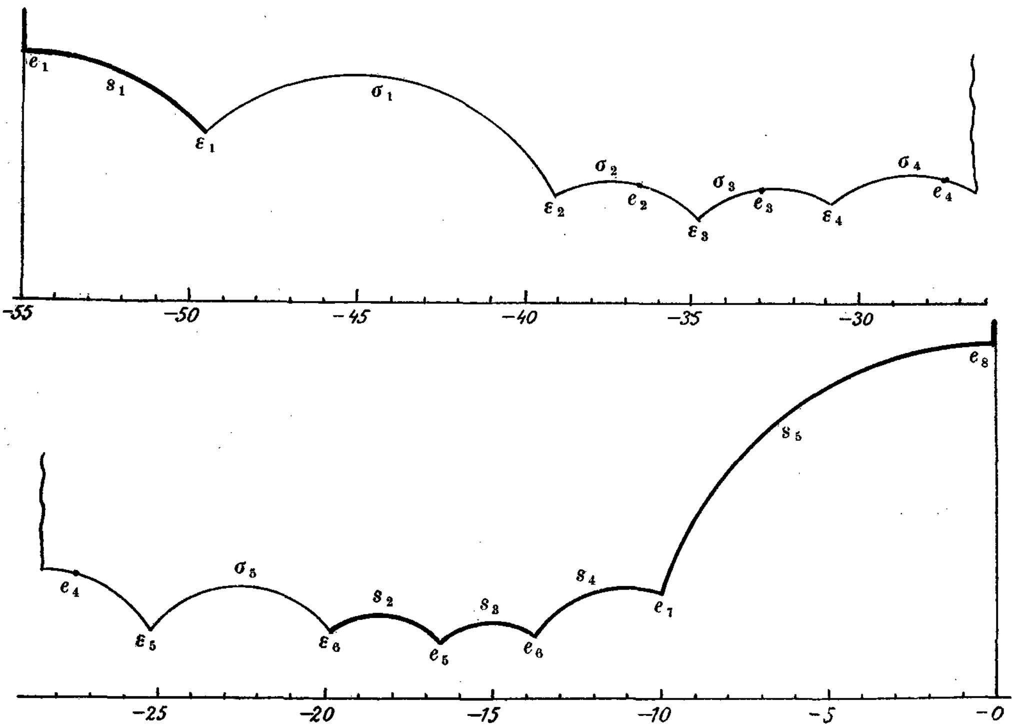

Fig. 1.

Hierbei ist $\omega=\xi+i\eta$ gesetzt und $\bar\omega$ ist der zu ω konjugiert komplexe Wert. Die noch übrigen fünf Polygonseiten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_5$ haben die Gleichungen:

$$(\sigma_1),\quad \xi^2+\eta^2+2.45\xi+18.110=0,\qquad (\sigma_2),\quad 5(\xi^2+\eta^2)+17.22\xi+63.110=0,$$

$$(\sigma_3),\quad \xi^2+\eta^2+65\xi+19.55=0,\qquad (\sigma_4),\quad 5(\xi^2+\eta^2)+2.142\xi+36.110=0,$$

$$(\sigma_5),\quad \xi^2+\eta^2+45\xi+9\cdot55=0.$$

Von diesen sind die erste und letzte auf einander bezogen; es geht nämlich σ_1 in σ_5 durch die folgende hyperbolische Substitution über:

$$\sigma_1 \to \sigma_5, \qquad \omega' = \frac{22\omega + 9 \cdot 110}{-\omega - 2 \cdot 22}.$$

Die drei anderen Seiten tragen die Fixpunkte e_2, e_3, e_4 elliptischer Substitutionen der Hauptgruppe, deren einzelne ihre Seite σ in sich selbst transformiert. Die Lagen dieser Punkte und die elliptischen Substitutionen sind:

$$(e_2), \qquad \omega = \frac{-110 + i\sqrt{110}}{3}, \qquad \omega' = \frac{110\omega + 37 \cdot 110}{-3\omega - 110},$$

$$(e_3), \qquad \omega = -33 + i\sqrt{11}, \qquad \omega' = \frac{3 \cdot 11\omega + 10 \cdot 110}{-\omega - 3 \cdot 11},$$

$$(e_4), \qquad \omega = \frac{-55 + i\sqrt{55}}{2}, \qquad \omega' = \frac{55\omega + 14 \cdot 110}{-2\omega - 55}.$$

Die Symmetriekreise s liefern die weiteren Ecken und elliptischen Substitutionen:

$$(e_1), \qquad \omega = -55 + i\sqrt{55}, \qquad \omega' = \frac{55\omega + 28 \cdot 110}{-\omega - 55},$$

$$(e_5), \qquad \omega = \frac{-33 + i\sqrt{11}}{2}, \qquad \omega' = \frac{3 \cdot 11\omega + 5 \cdot 110}{-2\omega - 3 \cdot 11},$$

$$(e_6), \qquad \omega = \frac{-55 + i\sqrt{55}}{4}, \qquad \omega' = \frac{55\omega + 7 \cdot 110}{-4\omega - 55},$$

$$(e_7), \qquad \omega = -10 + i\sqrt{10}, \qquad \omega' = \frac{10\omega + 110}{-\omega - 10},$$

$$(e_8), \qquad \omega = i\sqrt{110}, \qquad \omega' = \frac{110}{-\omega}.$$

Endlich sind die sechs Ecken $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_6$ des Polygons $\mathbf{H}_{110}$ gelegen bei:

$$(\varepsilon_1), \quad \omega = \frac{-9 \cdot 11 + 3i\sqrt{11}}{2}, \qquad (\varepsilon_2), \quad \omega = \frac{-27 \cdot 55 + 3i\sqrt{29 \cdot 55}}{38},$$

$$(\varepsilon_3), \quad \omega = \frac{-31 \cdot 55 + 3i\sqrt{29 \cdot 55}}{49}, \qquad (\varepsilon_4), \quad \omega = \frac{-23 \cdot 55 + 3i\sqrt{29 \cdot 55}}{41},$$

$$(\varepsilon_5), \quad \omega = \frac{-27 \cdot 55 + 3i\sqrt{29 \cdot 55}}{59}, \qquad (\varepsilon_6), \quad \omega = \frac{-9 \cdot 11 + 3i\sqrt{11}}{5}.$$

Hier tritt als akzessorische Irrationalität $\sqrt{29}$ auf.

51—29764. *Acta mathematica.* 55. Imprimé le 11 août 1930.

Aus dem beschriebenen Kreisbogenzwölfeck geht der »DB» der nicht erweiterten Hauptgruppe $\mathfrak{H}$ hervor, indem man dem Zwölfeck sein Spiegelbild an der imaginären ω-Achse anfügt. Dabei erscheint jeder (in der Fig. 1 stark ausgezogene) Symmetriekreis von $\mathbf{H}_{110}$ auf seinen bezüglich der imaginären Achse symmetrischen Kreis bezogen, und jede der Ecken e_1, e_5, e_6, e_7 gehört mit ihrer symmetrischen zu einem »Zyklus» zusammen. An neuen elliptischen Ecken treten die zu e_2, e_3, e_4 symmetrischen Ecken $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$ auf, so dass der »DB» der Gruppe $\mathfrak{H}$ im ganzen *elf* elliptische Ecken $e_1, e_2, \bar{e}_2, e_3, \bar{e}_3, e_4, \bar{e}_4, e_5, e_6, e_7, e_8$ hat.[1] Aus der Art der Seitenzuordnung geht unmittelbar hervor, dass der »DB» der Hauptgruppe $\mathfrak{H}^{(110)}$ das Geschlecht $p=0$ hat.

Entsprechend den acht Systemen $S_1, S_2, S_5, S_{10}, S_{11}, S_{22}, S_{55}, S_{110}$ ist die Transformationsgruppe $\mathfrak{G}_1$ eine ausgezeichnete Untergruppe des Index 8 in der Hauptgruppe $\mathfrak{H}$. Zwischen beiden Gruppen stehen zwei Systeme von je sieben Zwischengruppen, die sämtlich ausgezeichnete Untergruppen der Hauptgruppe sind. Man hat zunächst die sieben Zwischengruppen:

$$\mathfrak{G}_{1,2,5,10},\ \mathfrak{G}_{1,2,11,22},\ \mathfrak{G}_{1,2,55,110},\ \mathfrak{G}_{1,5,11,55},\ \mathfrak{G}_{1,5,22,110},\ \mathfrak{G}_{1,10,11,110},\ \mathfrak{G}_{1,10,22,55},$$

die sämtlich den Index 2 in der Hauptgruppe haben. Daran reihen sich mit dem Index 4 die sieben weiteren Zwischengruppen:

$$\mathfrak{G}_{1,2},\ \mathfrak{G}_{1,5},\ \mathfrak{G}_{1,10},\ \mathfrak{G}_{1,11},\ \mathfrak{G}_{1.22},\ \mathfrak{G}_{1,55},\ \mathfrak{G}_{1,110}.$$

Auf die vier Irrationalitäten $i\sqrt{110}$, $i\sqrt{55}$, $i\sqrt{11}$, $i\sqrt{10}$ verteilen sich die elf elliptischen Ecken so:

$i\sqrt{110}$,	$e_2, \bar{e}_2, e_8$,
$i\sqrt{55}$,	$e_1, e_4, \bar{e}_4, e_6$,
$i\sqrt{11}$,	$e_3, \bar{e}_3, e_5$,
$i\sqrt{10}$,	e_7.

Der »DB» einer Zwischengruppe ist in der einzelnen Ecke stets und nur dann verzweigt, wenn die zugehörige elliptische Substitution nicht in der Zwischengruppe enthalten ist; die Ecke heisse dann eine »Verzweigungsecke» der Zwischengruppe. Man stelle insbesondere für die ersten sieben Zwischengruppen die Ver-

[1] Jeder Eckenzyklus ist hierbei nur als eine Ecke gezählt.

zweigungsecken fest und bestimme daraus das Geschlecht des »DB» der Zwischengruppe. Ist dies gleich p, so müssen bekanntlich $(2p+2)$ Verzweigungsecken vorliegen. Die Geschlechtszahlen und Verzweigungsecken sind folgende:

$\mathfrak{G}_{1,2,5,10}$:	$p=4$,	$e_1, e_2, \bar{e}_2, e_3, \bar{e}_3, e_4, \bar{e}_4, e_5, e_6, e_8$,
$\mathfrak{G}_{1,2,11,22}$:	$p=3$,	$e_1, e_2, \bar{e}_2, e_4, \bar{e}_4, e_5, e_6, e_8$,
$\mathfrak{G}_{1,2,55,110}$:	$p=1$,	$e_3, \bar{e}_3, e_5, e_7$,
$\mathfrak{G}_{1,5,11,55}$:	$p=1$,	$e_2, \bar{e}_2, e_7, e_8$,
$\mathfrak{G}_{1,5,22,110}$:	$p=3$,	$e_1, e_3, \bar{e}_3, e_4, \bar{e}_4, e_5, e_6, e_7$,
$\mathfrak{G}_{1,10,11,110}$:	$p=1$,	$e_1, e_4, \bar{e}_4, e_6$,
$\mathfrak{G}_{1,10,22,55}$:	$p=2$,	$e_2, \bar{e}_2, e_3, \bar{e}_3, e_5, e_8$.

Die Erschwerung für die algebraische Theorie des Grades 110 bestand darin, dass keine dieser Zwischengruppen mehr das Geschlecht 0 besass.

Die Anzahl der Klassen ursprünglicher positiver quadratischer Formen:

$$(a, b, c) = ax^2 + bxy + cy^2$$

der Diskriminante $D = -440$ ist zwölf, wie man durch Aufstellung einer Liste der reduzierten Formen leicht feststellt. Man hat drei Charktere, geliefert durch die Legendreschen Zeichen:

$$\left(\frac{m}{5}\right), \quad \left(\frac{m}{11}\right), \quad \left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}},$$

unter m eine ungerade durch die Form (a, b, c) darstellbare Zahl verstanden. Demnach hat man vier Totalcharaktere der Formklassen, die durch:

$$\left[\left(\frac{m}{5}\right), \quad \left(\frac{m}{11}\right), \quad \left(\frac{2}{m}\right)\right]$$

bezeichnet seien. Hieraus folgt, dass es bei $D = -440$ vier Geschlechter zu je drei Formklassen giebt; alles Nähere entnehme man aus der Zusammenstellung der Totalcharaktere und der zugehörigen reduzierten Formen:

$[+1, +1, +1]$;	$(1, 0, 110)$,	$(9, 8, 14)$,	$(9, -8, 14)$,
$[+1, -1, -1]$;	$(10, 0, 11)$,	$(6, 4, 19)$,	$(6, -4, 19)$,
$[-1, +1, -1]$;	$(5, 0, 22)$,	$(3, 2, 37)$,	$(3, -2, 37)$,
$[-1, -1, +1]$;	$(2, 0, 55)$,	$(7, 6, 17)$,	$(7, -6, 17)$.

Jedes Geschlecht hat eine ambige Klasse und zwei einander entgegengesetzte.

Die zwölf Formklassen kann man natürlich auch aus den Ecken des Klassenpolygons $\mathbf{K}_{110}$ ableiten. Den Aufstieg von der Klassengruppe $\mathfrak{G}_{1,110}$ zur Hauptgruppe $\mathfrak{H}$ kann man durch Zusatz der beiden Substitutionen:

$$V(\omega)=\frac{22\omega+9.110}{-\omega-2.22}, \quad V'(\omega)=\frac{55\omega+28.110}{-\omega-55}$$

vollziehen:

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{G}_{1,110}+\mathfrak{G}_{1,110}.V+\mathfrak{G}_{1,110}.V'+\mathfrak{G}_{1,110}.V'V.$$

Umgekehrt werden beim Übergange von der Hauptgruppe zur Klassengruppe alle Ecken e, bei denen eine Irrationalität $i\sqrt{10}$, $i\sqrt{11}$, $i\sqrt{55}$ auftritt, Verzweigungsecken, die also für das Klassenpolygon $\mathbf{K}_{110}$ keine Ecken mehr liefern. Als elliptische Ecken von $\mathbf{K}_{110}$ verbleiben nur noch die vier aus e_8 hervorgehenden Punkte:

$$\omega=i\sqrt{110}, \quad V(i\sqrt{110}), \quad V'(i\sqrt{110}), \quad V'V(i\sqrt{110}),$$

die vier aus e_2 hervorgehenden:

$$\omega=\frac{-110+i\sqrt{110}}{3}, \; V\left(\frac{-110+i\sqrt{110}}{3}\right), \; V'\left(\frac{-110+i\sqrt{110}}{3}\right), \; V'V\left(\frac{-110+i\sqrt{110}}{3}\right)$$

und die zu den letzteren vier bezüglich der imaginären ω-Achse symmetrisch liegenden Punkte. Diese zwölf Ecken von $\mathbf{K}_{110}$ müssen die zwölf Formklassen der Diskriminante $D=-440$ liefern, wobei das erste Quadrupel die ambigen Klassen liefert.

Die Rechnung bestätigt dies leicht. Wir benutzen als erstes Eckentripel:

$$\Omega_1=i\sqrt{110},\; \Omega_2=V^{-1}\left(\frac{-110+i\sqrt{110}}{3}\right)=\frac{-12.110+i\sqrt{110}}{31},\; \bar{\Omega}_2=\frac{12.110+i\sqrt{110}}{31}.$$

Gebraucht man das Symbol $\sim$ als Zeichen der Äquivalenz bezüglich der Modulgruppe, so stellt man leicht fest:

$$\Omega_2=\frac{-1320+i\sqrt{110}}{31}\sim\frac{-4+i\sqrt{110}}{9}, \quad \bar{\Omega}_2\sim\frac{4+i\sqrt{110}}{9},$$

so dass wir zu den drei Formen des Hauptgeschlechtes gelangen. Die Ausübung der Substitution V auf Ω_1 und Ω_2 ergiebt:

$$V(\Omega_1) = \frac{-2090 + i\sqrt{110}}{93} \sim \frac{i\sqrt{110}}{5},$$

$$\dot{V}(\Omega_2) = \frac{-110 + i\sqrt{110}}{3} \sim \frac{1 + i\sqrt{110}}{3},$$

so dass sich die drei Formen des oben an dritter Stelle genannten Geschlechtes einfinden. Entsprechend erhält man bei Ausübung von V':

$$V'(\Omega_1) = \frac{-29 \,.\, 110 + i\sqrt{110}}{57} \sim \frac{i\sqrt{110}}{2},$$

$$V'(\Omega_2) = \frac{-47 \,.\, 110 + i\sqrt{110}}{87} \sim \frac{-3 + i\sqrt{110}}{7}$$

und damit das letzte Geschlecht. Endlich führt die Substitution $V' \,.\, V$ zu:

$$V' \,.\, V(\Omega_1) = \frac{-28 \,.\, 110 + i\sqrt{110}}{51} \sim \frac{i\sqrt{110}}{10},$$

$$V' \,.\, V(\Omega_2) = \frac{-10 \,.\, 110 + i\sqrt{110}}{19} \sim \frac{-2 + i\sqrt{110}}{6},$$

also zu dem noch fehlenden zweiten Geschlechte.

§ 2. Herstellung der Hauptfunktion des Grades 110.

Aus der Modulform erster Stufe $(-12)^{\text{ter}}$ Dimension $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ stellen wir, unter s eine positive ganze Zahl verstanden, die Form:

$$\Delta_s(\omega_1, \omega_2) = \Delta\left(\frac{\omega_1}{s}, \omega_2\right)$$

her, die gegenüber allen der Kongruenz $\beta \equiv 0 \pmod{s}$ genügenden Substitutionen der Modulgruppe invariant ist. Für die Gruppe $\mathfrak{G}_1^{(110)}$ haben wir demnach die acht Modulformen:

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_5, \Delta_{10}, \Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{55}, \Delta_{110}$$

zur Verfügung. Als invariant bei $\mathfrak{G}_t$ zeigt die einzelne dieser Formen gegenüber allen Substitutionen des einzelnen Systems S_t das gleiche Verhalten. Um dieses Verhalten festzustellen, schreiben wir die erzeugenden Substitutionen der Hauptgruppe $\mathfrak{H}$, die zu den Ecken e gehören, homogen, unimodular und von der Periode 2. Wir benutzen also z. B. für die Systeme S_{10}, S_{55}, S_{110} die drei Substitutionen:

$$
(1)\qquad \begin{cases} i\sqrt{10}\,\omega_1' = 10\omega_1 + 110\omega_2, & i\sqrt{10}\,\omega_2' = -\omega_1 - 10\omega_2, \\ i\sqrt{55}\,\omega_1' = 55\omega_1 + 28\,.\,110\omega_2, & i\sqrt{55}\,\omega_2' = -\omega_1 - 55\omega_2, \\ i\sqrt{110}\,\omega_1' = 110\omega_2, & i\sqrt{110}\,\omega_2' = -\omega_1. \end{cases}
$$

Hat man die Transformationsformeln der Δ_s bei diesen drei Substitutionen festgestellt, so erledigen sich die übrigen Systeme S einfach durch Kombination der erhaltenen Formeln. Die Ergebnisse der Rechnung stellen wir tabellarisch zusammen:

S_1	S_2	S_5	S_{10}	S_{11}	S_{22}	S_{55}	S_{110}
Δ_1	$2^{-6}\Delta_2$	$5^{-6}\Delta_5$	$10^{-6}\Delta_{10}$	$11^{-6}\Delta_{11}$	$22^{-6}\Delta_{22}$	$55^{-6}\Delta_{55}$	$110^{-6}\Delta_{110}$
Δ_2	$2^6\Delta_1$	$5^{-6}\Delta_{10}$	$2^6.5^{-6}\Delta_5$	$11^{-6}\Delta_{22}$	$2^6.11^{-6}\Delta_{11}$	$55^{-6}\Delta_{110}$	$2^6.55^{-6}\Delta_{55}$
Δ_5	$2^{-6}\Delta_{10}$	$5^6\Delta_1$	$5^6.2^{-6}\Delta_2$	$11^{-6}\Delta_{55}$	$22^{-6}\Delta_{110}$	$5^6.11^{-6}\Delta_{11}$	$5^6.22^{-6}\Delta_{22}$
Δ_{10}	$2^6\Delta_5$	$5^6\Delta_2$	$10^6\Delta_1$	$11^{-6}\Delta_{110}$	$2^6.11^{-6}\Delta_{55}$	$5^6.11^{-6}\Delta_{22}$	$10^6.11^{-6}\Delta_{11}$
Δ_{11}	$2^{-6}\Delta_{22}$	$5^{-6}\Delta_{55}$	$10^{-6}\Delta_{110}$	$11^6\Delta_1$	$11^6.2^{-6}\Delta_2$	$11^6.5^{-6}\Delta_5$	$11^6.10^{-6}\Delta_{10}$
Δ_{22}	$2^6\Delta_{11}$	$5^{-6}\Delta_{110}$	$2^6.5^{-6}\Delta_{55}$	$11^6\Delta_2$	$22^6\Delta_1$	$11^6.5^{-6}\Delta_{10}$	$22^6.5^{-6}\Delta_5$
Δ_{55}	$2^{-6}\Delta_{110}$	$5^6\Delta_{11}$	$5^6.2^{-6}\Delta_{22}$	$11^6\Delta_5$	$11^6.2^{-6}\Delta_{10}$	$55^6\Delta_1$	$55^6.2^{-6}\Delta_2$
Δ_{110}	$2^6\Delta_{55}$	$5^6\Delta_{22}$	$10^6\Delta_{11}$	$11^6\Delta_{10}$	$22^6\Delta_5$	$55^6\Delta_2$	$110^6\Delta_1$

Als Entwicklungsgrösse für Potenzreihen der Modulformen unserer Transformationsgruppe $\mathfrak{G}_1$ haben wir:

$$
x = q^{\frac{2}{110}} = e^{\frac{\pi i \omega}{55}}
$$

zu benutzen, die in der Spitze des Hauptpolygons $\mathbf{H}_{110}$ bei $\omega = i\infty$ einen einfachen Nullpunkt hat. Aus der bekannten Reihenentwicklung der 24sten Wurzel aus $\varDelta$ ergiebt sich dann die Potenzreihe:

$$(2) \qquad \sqrt[24]{\varDelta_s} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\, x^{\frac{t}{24}}(1 - x^t - x^{2t} + x^{5t} + x^{7t} - x^{12t} - x^{15t} + x^{22t} + \cdots), \quad s \,.\, t = 110,$$

wo sich t aus s durch die beigefügte Gleichung bestimmt.

Es soll nun zunächst die Zwischengruppe $\mathfrak{G}_{1,5,11,55}$ des Geschlechtes $p = 1$ mit den Verzweigungsecken e_2, $\bar{e}_2$, e_7, e_8 verwertet werden. Wir bilden die beiden eindeutigen Modulformen der Dimension -2:

$$\varphi_1(\omega_1, \omega_2) = \sqrt[24]{\varDelta_2\varDelta_{10}\varDelta_{22}\varDelta_{110}}, \qquad \varphi_2(\omega_1, \omega_2) = \sqrt[24]{\varDelta_1\varDelta_5\varDelta_{11}\varDelta_{55}},$$

deren Reihenentwicklungen die folgenden sind:

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi_1(\omega_1, \omega_2) = \left(\dfrac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 x^3(1 - x - x^2 + x^6 + 2x^7 - 2x^{10} + x^{13} + \cdots), \\[2ex] \varphi_2(\omega_1, \omega_2) = \left(\dfrac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 x^6(1 - x^2 - x^4 + x^{12} + 2x^{14} + \cdots). \end{cases}$$

Im Innern der ω-Halbebene verschwinden diese Formen nirgends. Nimmt man ω_2 auf der imaginären ω-Achse reell, so sind beide Formen daselbst reell und positiv.

Man weiss nun aus der algebraischen Theorie des elften Transformationsgrades, dass $\sqrt[12]{\varDelta_1\varDelta_{11}}$ eine eindeutige Modulform der zugehörigen Transformationsgruppe $\mathfrak{G}^{(11)}$ ist. Hieraus ist zu schliessen, dass die Quadrate von φ_1 und φ_2 eindeutige Formen der Gruppe $\mathfrak{G}^{(110)}$ sind. Man stelle fest, wie sich die Formen φ_1 und φ_2 selbst gegenüber der zweiten Substitution (1) verhalten, die zum Eckpunkt e_1 von $\mathbf{H}_{110}$ gehört. Aus der vorletzten Spalte obiger Tabelle folgt, dass φ_1^{24} und φ_2^{24} bei dieser Substitution invariant sind. Die Formen φ_1 und φ_2 werden sich demnach bis auf multiplikative 24ste Wurzeln der Einheit reproduzieren. Diese Wurzeln können aber nur gleich $+1$ oder -1 sein; denn die Substitution hat die Periode 2. Dabei ist -1 ausgeschlossen. Würde nämlich z. B. die Gleichung bestehen:

$$\varphi_1\left(\frac{55\,\omega_1 + 28 \,.\, 110\,\omega_2}{i\sqrt{55}}, \frac{-\omega_1 - 55\,\omega_2}{i\sqrt{55}}\right) = -\varphi_1(\omega_1, \omega_2),$$

so würde man nach Eintragung der dem Eckpunkte e_1 entsprechenden Werte $\omega = -55 + i\sqrt{55}$, $\omega_2 = 1$ mit Rücksicht auf die gerade Dimension der Form das Ergebnis finden:

$$\varphi_1(-55 + i\sqrt{55}, 1) = -\varphi_1(-55 + i\sqrt{55}, 1);$$

d. h. φ_1 hätte in der Ecke e_1 einen Nullpunkt, was jedoch nicht der Fall ist. Also sind φ_1 und φ_2 gegenüber der zweiten Substitution (1) invariant. Genau in derselben Weise stellt man fest, dass φ_1 und φ_2 auch bei den richtig geschriebenen, zu den Polygonecken e_3, e_4, e_5 und e_6 gehörenden Substitutionen unveränderlich sind.

Weiter ist das Verhalten unserer Formen bei Ausübung der dritten Substitution (1) zu erforschen. Man hat die letzte Spalte der Tabelle zu benutzen und findet zunächst:

$$\varphi_1\left(\frac{110\omega_2}{i\sqrt{110}}, \frac{-\omega_1}{i\sqrt{110}}\right) = 2 \,.\, \varepsilon\varphi_2(\omega_1, \omega_2), \quad \varphi_2\left(\frac{110\omega_2}{i\sqrt{110}}, \frac{-\omega_1}{i\sqrt{110}}\right) = 2^{-1} \,.\, \varepsilon'\varphi_1(\omega_1, \omega_2),$$

wo ε und ε' Einheitswurzeln 24^{sten} Grades sind. Für $\omega_1 = i\sqrt{110}$, $\omega_2 = 1$ folgt:

$$\varphi_1(i\sqrt{110}, 1) = 2\varepsilon\varphi_2(i\sqrt{110}, 1), \quad \varphi_2(i\sqrt{110}, 1) = 2^{-1}\varepsilon'\varphi_1(i\sqrt{110}, 1).$$

Da $\varphi_1(i\sqrt{110}, 1)$, $\varphi_2(i\sqrt{110}, 1)$ von 0 verschieden sind und reelle positive Werte haben, so gilt $\varepsilon = \varepsilon' = +1$, und wir finden:

$$(4) \quad \varphi_1\left(\frac{110\omega_2}{i\sqrt{110}}, \frac{-\omega_1}{i\sqrt{110}}\right) = 2\varphi_2(\omega_1, \omega_2), \quad \varphi_2\left(\frac{110\omega_2}{i\sqrt{110}}, \frac{-\omega_1}{i\sqrt{110}}\right) = 2^{-1}\varphi_1(\omega_1, \omega_2).$$

Nun sind φ_1^2, φ_2^2 eindeutige Formen der Gruppe $\mathfrak{G}_1$. Da sie gegenüber den zu e_1 und e_3 gehörenden Substitutionen (also Substitutionen der Systeme S_{55} und S_{11}) invariant sind, so sind sie sogar Formen der Zwischengruppe $\mathfrak{G}_{1,5,11,55}$. Zufolge (4) zeigen diese Formen gegenüber allen nicht in der Zwischengruppe enthaltenen Substitutionen der Hauptgruppe das Verhalten:

$$\varphi'^2_1 = 4\varphi_2^2, \quad \varphi'^2_2 = 4^{-1}\varphi_1^2.$$

Die Wirkung der richtig geschriebenen zu den Ecken e_2 und e_7 gehörenden homogenen Substitutionen sowie der zum Seitenpaar σ_1, σ_5 gehörenden hyperbolischen Erzeugenden ist hiernach:

(5) $$\varphi_1' = \pm 2\varphi_2, \quad \varphi_2' = \pm 2^{-1}\varphi_1.$$

Dabei gelten für die einzelne der beiden elliptischen Erzeugenden entweder nur die oberen oder nur die unteren Vorzeichen, da die Substitution von der Periode 2 ist. Dasselbe gilt dann aber auch von der homogen geschriebenen hyperbolischen Erzeugenden, da diese sich aus den drei zu e_2, e_3, e_4 gehörenden homogenen elliptischen Substitutionen herstellen lässt.

Gegenüber der parabolischen Erzeugenden $\omega_1' = \omega_1 + 111\,\omega_2$, $\omega_2' = \omega_2$ bleiben φ_1 und φ_2 zufolge (3) invariant. Ein »DB» für $\mathfrak{G}_{1,5,11,55}$ wird aus $\mathbf{H}_{110}$ durch Anlagerung des Spiegelbildes längs s_5 hergestellt, wobei eine zweite parabolische Spitze im Punkte $\omega = 0$ auftritt. Da sich φ_1, φ_2 gegenüber der dritten Substitution (1) bis auf die konstanten Faktoren 2 und 2^{-1} permutieren, so übertragen sich die letzten Betrachtungen auf die von den Seiten des angefügten Bereiches gelieferten Substitutionen. Auch die Übertragung auf die bezüglich der imaginären ω-Achse symmetrischen Polygonhälften macht keine Schwierigkeit, da bei der Spiegelung an der genannten Achse die Werte unserer Formen in die konjugiert komplexen Werte übergehen. Hiernach steht folgendes Ergebnis fest: Gegenüber den erzeugenden Substitutionen der Zwischengruppe $\mathfrak{G}_{1,5,11,55}$ sind die Formen $\varphi_1(\omega_1, \omega_2)$, $\varphi_2(\omega_1, \omega_2)$ entweder invariant, oder sie erfahren gleichzeitig Zeichenwechsel.

Man bilde nun den Quotienten der beiden Formen φ_1, φ_2:

$$\varphi(\omega) = \frac{\varphi_1(\omega_1, \omega_2)}{\varphi_2(\omega_1, \omega_2)} = \sqrt[24]{\frac{\Delta_2\Delta_{10}\Delta_{22}\Delta_{110}}{\Delta_1\Delta_5\Delta_{11}\Delta_{55}}},$$

für den man aus (2) die Reihenentwicklung gewinnt:

(6) $$\varphi(\omega) = x^{-3}(1 - x + 0 - x^3 + x^4 - 2x^5 + 2x^6 - x^7 + 3x^8 - 3x^9 + 3x^{10} - 4x^{11} + 5x^{12} - 5x^{13} + 6x^{14} - 8x^{15} + 10x^{16} - 10x^{17} + 10x^{18} - 13x^{19} + 16x^{20} + \cdots).$$ [1]

Aus dem eben gewonnenen Ergebnis folgt der Satz: *In $\varphi(\omega)$ hat man eine eindeutige automorphe Funktion der Zwischengruppe $\mathfrak{G}_{1,5,11,55}$ gewonnen; diese Funktion hat im* »DB» *der Zwischengruppe einen einzigen Pol und zwar von der dritten Ordnung in der Spitze bei $\omega = i\infty$ und entsprechend einen Nullpunkt derselben Ordnung in der zweiten Spitze bei $\omega = 0$. Gegenüber der Transformation des* »DB» *in sich zeigt $\varphi(\omega)$ das Verhalten:*

[1] Durch das Zeichen 0 wird hervorgehoben, dass das Glied mit x^2 ausfällt.

$$(7) \qquad \varphi\left(\frac{-110}{\omega}\right) = \frac{4}{\varphi(\omega)}.$$

Man hat also hier eine dreiwertige Funktion der Zwischengruppe gewonnen. Weiter aber folgt sofort: *Die Funktion:*

$$\Phi(\omega) = \varphi(\omega) + \frac{4}{\varphi(\omega)}$$

mit der Reihenentwicklung:

$$(8) \qquad \Phi(\omega) = x^{-3}(1-x+0-x^3+x^4-2x^5+6x^6+3x^7+7x^8+5x^9+11x^{10}+\cdots)$$

ist eine eindeutige dreiwertige automorphe Funktion der Hauptgruppe des Grades 110 *mit einem Pole dritter Ordnung in der Spitze bei* $\omega = i\infty$.

Man verwende zweitens die Zwischengruppe $\mathfrak{G}_{1,10,11,110}$ des Geschlechtes $p=1$ mit den Verzweigungsecken $e_1, e_4, \bar{e}_4, e_6$. Es sind die beiden Formen:

$$\psi_1(\omega_1, \omega_2) = \sqrt[24]{\Delta_2\Delta_5\Delta_{22}\Delta_{55}}, \quad \psi_2(\omega_1, \omega_2) = \sqrt[24]{\Delta_1\Delta_{10}\Delta_{11}\Delta_{110}}$$

mit den Reihenentwicklungen:

$$(9) \qquad \begin{cases} \psi_1(\omega_1, \omega_2) = \left(\dfrac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 x^{\frac{7}{2}}(1-x^2-x^4-x^5+x^7+x^9+x^{12}+\cdots), \\ \psi_2(\omega_1, \omega_2) = \left(\dfrac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 x^{\frac{11}{2}}(1-x-x^2+x^5+x^7-x^{10}+\cdots) \end{cases}$$

zu bilden. Man stellt für diese Formen das Verhalten fest:

$$(10) \qquad \begin{cases} \psi_1\left(\dfrac{55\omega_1+28.110\omega_2}{i\sqrt{55}}, \dfrac{-\omega_1-55\omega_2}{i\sqrt{55}}\right) = \psi_2(\omega_1, \omega_2), \\ \psi_2\left(\dfrac{55\omega_1+28.110\omega_2}{i\sqrt{55}}, \dfrac{-\omega_1-55\omega_2}{i\sqrt{55}}\right) = \psi_1(\omega_1, \omega_2). \end{cases}$$

Beim Beweise nehme man ω_2 auf der linken geraden Seite des Hauptpolygons reell an und beachte, dass dann ψ_1, ψ_2 daselbst übereinstimmend negativ imaginäre Werte annehmen. Aus der obigen Bemerkung über $\sqrt[12]{\Delta_1\Delta_{11}}$ folgt wieder, dass ψ_1^2, ψ_2^2 Formen der Gruppe $\mathfrak{G}^{(110)}$ sind. Durch entsprechende Betrachtungen wie oben, die hier nicht wieder ausführlich dargelegt werden sollen, findet man, dass die Formen ψ_1, ψ_2 gegenüber den Erzeugenden der $\mathfrak{G}_{1,10,11,110}$ entweder invariant sind oder gleichzeitig Zeichenwechsel erfahren. Letzteres ist z. B. bei der parabolischen Substitution $\omega_1' = \omega_1 + 110\omega_2$, $\omega_2' = \omega_2$ der Fall. Man gelangt zu dem Ergebnis: *Der Quotient:*

$$\psi(\omega) = \frac{\psi_1(\omega_1, \omega_2)}{\psi_2(\omega_1, \omega_2)} = \sqrt[24]{\frac{\Delta_2 \Delta_5 \Delta_{22} \Delta_{55}}{\Delta_1 \Delta_{10} \Delta_{11} \Delta_{110}}}$$

der beiden Formen ψ_1, ψ_2 mit der Reihenentwicklung:

$$(11) \qquad \psi(\omega) = x^{-2}(1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 4x^8 + 6x^9 + 7x^{10} + \cdots)$$

ist eine eindeutige automorphe Funktion der Zwischengruppe $\mathfrak{G}_{1,10,11,110}$. Sie ist im »DB» dieser Gruppe zweiwertig mit einem Pol zweiter Ordnung in der Spitze bei $\omega = i\infty$ und einem Nullpunkte derselben Ordnung in der zweiten, bei $\omega = -55$ gelegenen Spitze; gegenüber der Transformation des »DB» in sich zeigt $\psi(\omega)$ das Verhalten:

$$(12) \qquad \psi\left(\frac{55\omega + 28 \,.\, 110}{-\omega - 55}\right) = \frac{1}{\psi(\omega)}.$$

Hieran reiht sich sofort der weitere Satz: *Aus $\psi(\omega)$ stellt man in der Gestalt:*

$$\Psi(\omega) = \psi(\omega) + \frac{1}{\psi(\omega)}$$

eine zweite eindeutige automorphe Funktion der Hauptgruppe $\mathfrak{H}$ mit der Reihenentwicklung:

$$(13) \qquad \Psi(\omega) = x^{-2}(1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 5x^8 + 6x^9 + 7x^{10} + \cdots)$$

her, die im »DB» der Hauptgruppe zweiwertig ist und einen Pol zweiter Ordnung in der Spitze bei $\omega = i\infty$ hat.

Als Funktionen der Hauptgruppe sind $\Phi(\omega)$ und $\Psi(\omega)$ durch eine algebraische Relation verbunden, die (wegen der Wertigkeiten) in Ψ vom dritten und in Φ vom zweiten Grade ist. Da die beiderseitigen Pole zusammenfallen, also jede Funktion eine *ganze* algebraische Funktion der anderen ist, kommt nur ein Glied mit der höchsten Potenz Ψ^3 und nur eines mit der höchsten Potenz Φ^2 vor. Die Relation hat also die Gestalt:

$$\Psi^3 + (a\Phi + b)\Psi^2 + (c\Phi + d)\Psi + e\Phi^2 + f\Phi + g = 0,$$

wo $a, b, \ldots, g$ numerische Koeffizienten sind. Da diese Gleichung in ω identisch besteht, so muss die Eintragung der Reihen (8) und (13) für Φ und Ψ und die Anordnung nach ansteigenden Potenzen von x eine identisch verschwindende Potenzreihe liefern. Da elf Reihenglieder zur Verfügung stehen, so erhält man für die sieben zu berechnenden Koeffizienten $a, b, \ldots, g$ elf lineare Gleichungen, deren erste sieben zur Berechnung der $a, b, \ldots, g$ dienen, während man die letzten vier zur Kontrolle des Ergebnisses benutzen kann. Man findet und bestätigt (durch die Kontrollrechnungen) den Satz: *Zwischen den beiden automorphen Funktionen $\Phi(\omega)$ und $\Psi(\omega)$ der Hauptgruppe des Grades* 110 *besteht die algebraische Beziehung:*

$$\Psi^3 - 5\Psi^2 - (5\Phi + 13)\Psi - (\Phi^2 + 5\Phi + 7) = 0. \tag{14}$$

Deutet man Φ und Ψ als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene, so wird durch die Gleichung (14) eine Kurve dritten Grades dargestellt. Diese Kurve hat in Übereinstimmung mit dem »DB» der Hauptgruppe das Geschlecht $p = 0$ und besitzt demnach einen Doppelpunkt. Setzt man die Gleichung (14) in die Gestalt:

$$(\Psi + 1)^3 - 8(\Psi + 1)^2 - 5\Phi(\Psi + 1) - \Phi^2 = 0, \tag{15}$$

so erhält man $\Phi = 0$, $\Psi = -1$ als Koordinaten des Doppelpunktes. Nun schneidet bekanntlich das Geradenbüschel mit dem Doppelpunkt als Zentrum auf der Kurve dritten Grades eine einwertige Funktion aus. Wir gelangen zu dem grundlegenden Ergebnis: *Als »Hauptfunktion» des Transformationsgrades* 110 *kann man den Quotienten* $\dfrac{\Phi}{\Psi + 1}$ *oder, was noch etwas zweckmässiger ist:*

$$v(\omega) = \frac{\Phi}{\Psi + 1} + 2 \tag{16}$$

benutzen. Die Hauptfunktion besitzt zufolge (8) *und* (13) *die Potenzreihenentwicklung:*

$$v(\omega) = x^{-1}(1 + 0 + 0 + x^3 + x^4 + 0 + x^6 + 0 + 2x^8 + x^9 + 2x^{10} + \cdots); \tag{17}$$

ihr Pol erster Ordnung liegt in der Spitze des Hauptpolygons bei $\omega = i\infty$.

§ 3. Funktionssysteme der Zwischengruppen.

Die Bedeutung der Hauptfunktion $v(\omega)$ besteht wie bemerkt darin, dass nach ihrer Adjunktion zu $j(\omega)$ die Transformationsgleichung des Grades 110 algebraisch, nämlich durch Ausziehen von drei Quadratwurzeln lösbar wird. Diese Quadratwurzeln gewinnt man in einer ersten Gestalt dadurch, dass man die Funktionssysteme der Zwischengruppen herstellt. Hierbei erhält man zugleich die Kenntnis der numerischen Werte der Hauptfunktion $v(\omega)$ in den Ecken des Hauptpolygons.

Zunächst sind die Ausdrücke von Φ und Ψ als Funktionen dritten bezw. zweiten Grades von v festzustellen. Setzt man:

$$(1) \qquad \Phi = (v-2)(\Psi + 1)$$

in die Gleichung (15) § 2 ein, so folgt nach Fortheben des Faktors $(\Psi + 1)^2$:

$$(\Psi + 1) - 8 - 5(v-2) - (v-2)^2 = 0.$$

Hieraus folgt der Ausdruck für Ψ in v, durch dessen Eintragung in (1) auch der Ausdruck dritten Grades für Φ gewonnen wird:

$$(2) \qquad \Phi = v^3 - v^2 - 4, \quad \Psi = v^2 + v + 1.$$

Zur Gewinnung eines Funktionssystems der Zwischengruppe $\mathfrak{G}_{1,5,11,55}$ führen die Gleichungen:

$$\Phi = \varphi + \frac{4}{\varphi} = v^3 - v^2 - 4, \quad \varphi^2 - (v^3 - v^2 - 4)\varphi + 4 = 0.$$

Bei Auflösung nach φ stellt sich als Radikand zunächst ein Ausdruck sechsten Grades in v ein. Doch muss sich aus ihm das Quadrat eines Linearfaktors absondern lassen, da die Zwischengruppe nur die vier Verzweigungsecken $e_2, \bar{e}_2, e_7, e_8$ hat. Die Rechnung bestätigt dies; sie liefert:

$$(3) \qquad 2\varphi = v^3 - v^2 - 4 + v\sqrt{(v-1)(v^3 - v^2 - 8)},$$

wo die Quadratwurzel auf dem $\mathbf{H}_{110}$ angehörenden Teile der imaginären ω-Achse positiv zu nehmen ist. *Als Funktionssystem der Zwischengruppe hat man:*

$$(4) \qquad v, \quad \sqrt{(v-1)(v^3-v^2-8)},$$

womit die erste unter den drei Quadratwurzeln gewonnen ist.

Da die reelle Wurzel der kubischen Gleichung $v^3-v^2-8=0$ grösser als 1 ist, so gehört diese zur Ecke $\omega=i\sqrt{110}$, und wir finden für die Ecke e_7:

$$(5) \qquad v(-10+i\sqrt{10})=1.$$

Die anderen drei Eckenwerte von v, d. h. die Wurzeln der kubischen Gleichung $v^3-v^2-8=0$ wirklich zu berechnen, hat zunächst kein Interesse; doch sei angemerkt, dass die Quadratwurzel der Diskriminante dieser Gleichung gleich $4i\sqrt{110}$ ist.

Zur Behandlung der Zwischengruppe $\mathfrak{G}_{1,10,11,110}$ mit den Verzweigungsecken e_1, e_4, $\bar{e}_4$, e_6 haben wir entsprechend den Ansatz:

$$\Psi=\psi+\frac{1}{\psi}=v^2+v+1, \quad \psi^2-(v^2+v+1)\psi+1=0.$$

Die Auflösung nach ψ liefert:

$$(6) \qquad 2\psi=v^2+v+1+\sqrt{(v^2+v+3)(v^2+v-1)},$$

wo die Quadratwurzel auf der imaginären ω-Achse positiv zu nehmen ist. *Als Funktionssystem der Zwischengruppe $\mathfrak{G}_{1,10,11,110}$ ergiebt sich:*

$$(7) \qquad v, \quad \sqrt{(v^2+v+3)(v^2+v-1)},$$

womit die zweite Quadratwurzel festgestellt ist. Als neue Eckenwerte von v lernen wir kennen:

$$(8) \qquad \begin{cases} v(-55+i\sqrt{55})=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \\ v\left(\dfrac{-55+i\sqrt{55}}{4}\right)=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \\ v\left(\dfrac{\mp 55+i\sqrt{55}}{2}\right)=\dfrac{-1\pm i\sqrt{11}}{2}. \end{cases}$$

Zur Gewinnung der noch fehlenden dritten Quadratwurzel betrachten wir endlich auch noch die dritte Zwischengruppe des Geschlechtes $p=1$, nämlich

$\mathfrak{G}_{1,2,55,110}$; die Verzweigungsecken sind e_3, $\bar{e}_3$, e_5, e_7. Man bilde die beiden Formen:

$$(9)\quad \begin{cases} \chi_1(\omega_1, \omega_2) = \sqrt[24]{\Delta_5\Delta_{10}\Delta_{11}\Delta_{22}} = \left(\dfrac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 x^2(1-x^5-2x^{10}-\cdots), \\ \chi_2(\omega_1, \omega_2) = \sqrt[24]{\Delta_1\Delta_2\Delta_{55}\Delta_{110}} = \left(\dfrac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 x^7(1-x-2x^2+x^3+2x^5+x^6+\cdots), \end{cases}$$

deren 24^{ste} Potenzen nach obiger Tabelle gegenüber der Zwischengruppe $\mathfrak{G}_{1,2,55,110}$ invariant sind.

Das Verhalten der Formen χ_1, χ_2 gegenüber den Erzeugenden der Zwischengruppe ist besonders leicht festzustellen. Man weiss nämlich, dass $\sqrt[8]{\Delta_1\Delta_{55}}$ eine eindeutige Modulform der Transformationsgruppe $\mathfrak{G}^{(55)}$ ist.[1] Daraus folgt, dass die dritten Potenzen der Formen (9) eindeutige Formen unserer Transformationsgruppe $\mathfrak{G}^{(110)}$ sind. Die χ_1, χ_2 selbst ändern sich gegenüber den Erzeugenden der $\mathfrak{G}_{1,2,55,110}$ höchstens um multiplikative dritte Einheitswurzeln. Aber dabei können keine komplexe dritte Einheitswurzeln auftreten, da jedesmal das Quadrat einer hier auftretenden Einheitswurzel gleich 1 sein muss; dies folgt aus der Periode 2 der elliptischen Erzeugenden. Man setzt die Betrachtung leicht wie bei den beiden schon behandelten Zwischengruppen fort und gelangt zu dem Ergebnis: *Der Quotient der beiden Formen* (9):

$$(10)\quad \chi(\omega) = \sqrt[24]{\frac{\Delta_5\Delta_{10}\Delta_{11}\Delta_{22}}{\Delta_1\Delta_2\Delta_{55}\Delta_{110}}} = x^{-5}(1+x+3x^2+4x^3+9x^4+11x^5+22x^6+\cdots)$$

ist eine fünfwertige Funktion der Zwischengruppe $\mathfrak{G}_{1,2,55,110}$, *die gegenüber der zur Ecke* e_7 *gehörenden elliptischen Erzeugenden der Hauptgruppe das Verhalten zeigt:*

$$(11)\quad \chi\left(\frac{10\omega+110}{-\omega-10}\right) = \frac{1}{\chi(\omega)}.$$

Man findet nun sofort in:

$$(12)\quad X(\omega) = \chi(\omega) + \frac{1}{\chi(\omega)} = x^{-5}(1+x+3x^2+4x^3+9x^4+11x^5+22x^6+\cdots)$$

---

[1] Man vergl. z. B. R. Fricke »Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen« (Leipzig, 1916 ff.), Bd. II, S. 299. Dieses Werk wird weiterhin durch »E. F.« unter Angabe von Band- und Seitenzahl zitiert.

eine fünfwertige Funktion der Hauptgruppe, also (da der Pol fünfter Ordnung bei $\omega = i\infty$ liegt) eine ganze Funktion fünften Grades von v, für die die Potenzreihen die Darstellung liefern und bestätigen:

$$X = v^5 + v^4 + 3v^3 - v^2 - 2. \tag{13}$$

Zur Berechnung von χ aus v haben wir die quadratische Gleichung:

$$\chi^2 - (v^5 + v^4 + 3v^3 - v^2 - 2)\chi + 1 = 0$$

zu lösen, deren Diskriminante eine ganze Funktion zehnten Grades von v ist. Diese Funktion muss, da wir wieder nur vier Verzweigungsecken haben, die Abspaltung des Quadrates einer ganzen Funktion dritten Grades gestatten. In der Tat findet man den folgenden Ausdruck von χ in v:

$$2\chi = v^5 + v^4 + 3v^3 - v^2 - 2 + v(v^2 + v + 2)\sqrt{(v-1)(v^3 + v^2 + 3v - 1)}. \tag{14}$$

Wir haben damit auch die dritte Quadratwurzel gewonnen und notieren den abschliessenden Satz: *Um ein Funktionssystem der Transformationsgruppe des Grades* 110 *zu erhalten, hat man zur Hauptfunktion v dieses Grades die drei Quadratwurzeln zu adjungieren:*

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{(v-1)(v^3 - v^2 - 8)}, \\ \sqrt{(v^2 + v + 3)(v^2 + v - 1)}, \\ \sqrt{(v-1)(v^3 + v^2 + 3v - 1)}. \end{array}\right. \tag{15}$$

Der schon unter (5) festgestellte Eckenwert $v = 1$ für den Punkt e_7 findet hier seine Bestätigung. Weiter aber lernen wir die Eckenwerte:

$$v\left(\frac{-33 + i\sqrt{11}}{2}\right), \quad v(\mp 33 + i\sqrt{11})$$

kennen. Der erste ist gleich der reellen, zwischen 0 und $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ gelegenen Wurzel der kubischen Gleichung:

$$v^3 + v^2 + 3v - 1 = 0;$$

die beiden anderen werden von den komplexen Wurzeln dieser Gleichung geliefert. Die Quadratwurzel der Diskriminante dieser kubischen Gleichung ist gleich $2i\sqrt{11}$.

§ 4. Hauptgruppe und Hauptfunktion des Transformationsgrades 55.

Um die gewonnenen Ergebnisse für die Transformation 110^{ten} Grades nutzbar zu machen, ist nun die Modulfunktion erster Stufe $j(\omega)$ als Funktion der Transformationsgruppe $\mathfrak{G}^{(110)}$ rational durch v und die drei Quadratwurzeln (15) § 3 darzustellen, wobei an Stelle der letzteren auch drei mit ihnen gleichwertige treten können. Man hat sich bei Lösung dieser Aufgabe der Vermittlung der Transformationsgrade 55 und 11 zu bedienen. Nun ist die algebraische Theorie des Grades 11 seit lange bekannt (vergl. »E. F.» II, 403 ff.); dagegen muss diese Theorie für den Grad 55 hier erst noch entwickelt werden.

Das Hauptpolygon $\mathbf{H}_{55}$ ist das in Fig. 2 dargestellte Kreisbogenneuneck mit einem Winkel 0 bei $\omega = i\infty$ und übrigens nur rechten Winkeln. Acht unter den Seiten sind Symmetriekreise von Spiegelungen, und zwar haben die sechs mit $s_1, s_2, \ldots, s_6$ bezeichneten Seiten folgende Gleichungen und Spiegelungen:

$$(s_1), \qquad 2(\xi^2+\eta^2)+2\cdot 55\xi+27\cdot 55=0, \qquad \omega' = \frac{55\bar{\omega}+27\cdot 55}{-2\bar{\omega}-55},$$

$$(s_2), \qquad 3(\xi^2+\eta^2)+2\cdot 55\xi+18\cdot 55=0, \qquad \omega' = \frac{55\bar{\omega}+18\cdot 55}{-3\bar{\omega}-55},$$

$$(s_3), \qquad \xi^2+\eta^2+30\xi+4\cdot 55=0, \qquad \omega' = \frac{15\bar{\omega}+4\cdot 55}{-\bar{\omega}-15},$$

$$(s_4), \qquad \xi^2+\eta^2+22\xi+2\cdot 55=0, \qquad \omega' = \frac{11\bar{\omega}+2\cdot 55}{-\bar{\omega}-11},$$

$$(s_5), \qquad \xi^2+\eta^2+15\xi+55=0, \qquad \omega' = \frac{15\bar{\omega}+2\cdot 55}{-2\bar{\omega}-15},$$

$$(s_6), \qquad \xi^2+\eta^2-55=0, \qquad \omega' = \frac{55}{\bar{\omega}}.$$

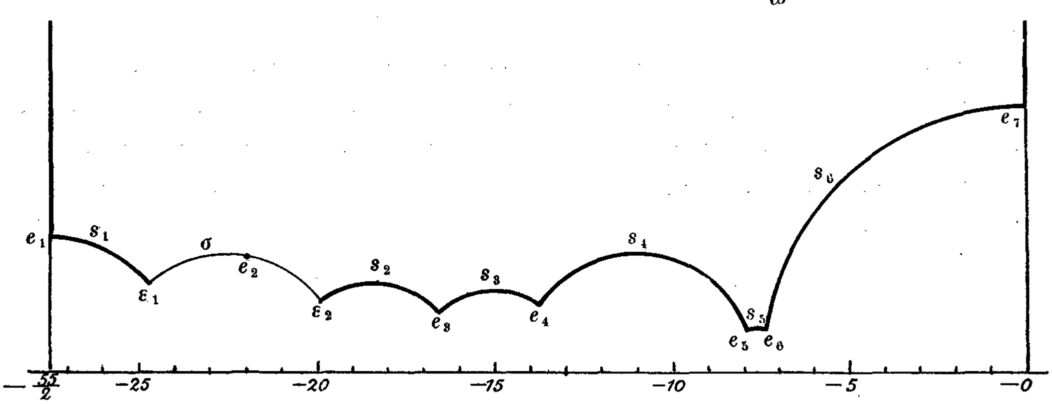

Fig. 2.

Die mit σ bezeichnete Seite hat die Gleichung:

$$(\sigma), \qquad \xi^2 + \eta^2 + 45\xi + 9 \cdot 55 = 0;$$

ihre Endpunkte ε_1, ε_2 liegen bei:

$$(\varepsilon_1), \quad \omega = \frac{-99 + 3i\sqrt{11}}{4}, \qquad (\varepsilon_2), \quad \omega = \frac{-99 + 3i\sqrt{11}}{5}.$$

Für die Ecken $e_1, e_2, \ldots, e_7$ und die zugehörigen elliptischen Substitutionen von der Periode 2 gelten die Angaben:

$$(e_1), \quad \omega = \frac{-55 + i\sqrt{55}}{2}, \qquad \omega' = \frac{55\omega + 28 \cdot 55}{-2\omega - 55},$$

$$(e_2), \quad \omega = -22 + i\sqrt{11}, \qquad \omega' = \frac{2 \cdot 11\omega + 9 \cdot 55}{-\omega - 2 \cdot 11},$$

$$(e_3), \quad \omega = \frac{-3 \cdot 11 + i\sqrt{11}}{2}, \qquad \omega' = \frac{3 \cdot 11\omega + 10 \cdot 55}{-2\omega - 3 \cdot 11},$$

$$(e_4), \quad \omega = \frac{-55 + i\sqrt{55}}{4}, \qquad \omega' = \frac{55\omega + 14 \cdot 55}{-4\omega - 55},$$

$$(e_5), \quad \omega = \frac{-55 + i\sqrt{55}}{7}, \qquad \omega' = \frac{55\omega + 8 \cdot 55}{-7\omega - 55},$$

$$(e_6), \quad \omega = \frac{-2 \cdot 11 + i\sqrt{11}}{3}, \qquad \omega' = \frac{2 \cdot 11\omega + 3 \cdot 55}{-3\omega - 2 \cdot 11},$$

$$(e_7), \quad \omega = i\sqrt{55}, \qquad \omega' = \frac{55}{-\omega}.$$

Entsprechend den vier Teilern von 55 setzt sich die Hauptgruppe aus den vier Substitutionssystemen S_1, S_5, S_{11}, S_{55} zusammen, von denen das erste die Transformationsgruppe liefert. Hieran reihen sich nur noch drei Zwischengruppen $\mathfrak{G}_{1,t}^{(55)}$, für die wir sogleich die Geschlechtszahlen p und die Verzweigungsecken tabellarisch zusammenstellen:

$\mathfrak{G}_{1,5}$,	$p = 3$,	$e_1, e_2, \bar{e}_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$,
$\mathfrak{G}_{1,11}$,	$p = 1$,	e_1, e_4, e_5, e_7,
$\mathfrak{G}_{1,55}$,	$p = 1$,	$e_2, \bar{e}_2, e_3, e_6$.

Da der Grad $55 \equiv 3 \pmod 4$ ist, so hat man hier die ursprünglichen positiven quadratischen Formen der beiden Diskriminanten $D = -220$ und $D = -55$ heranzuziehen. Man hat beide Male vier Formklassen mit den reduzierten Formen:

$$\begin{array}{llll} D = -220, & (1, 0, 55), & (5, 0, 11), & (7, \pm 2, 8), \\ D = -\ \ 55, & (1, 1, 14), & (4, 3, 4), & (2, \pm 1, 7). \end{array}$$

Bei beiden Diskriminanten liegen zwei Geschlechter vor, und es bilden immer die beiden ambigen Klassen das Hauptgeschlecht und die beiden entgegengesetzten Klassen das zweite Geschlecht.

Von der Klassengruppe $\mathfrak{G}_{1,55}$ werden diese acht Formklassen in folgender Art geliefert: Da die Spiegelung:

$$\overline{V}(\omega) = \frac{11\overline{\omega} + 2.55}{-\overline{\omega} - 11}$$

nicht zur $\mathfrak{G}_{1,55}$ gehört, so gewinnt man die zur Linken der imaginären ω-Achse gelegene Hälfte $\mathbf{K}_{55}$ des Klassenpolygons, falls man an das Hauptpolygon $\mathbf{H}_{55}$ sein Spiegelbild längs der Seite s_4 anfügt. Dabei bleiben e_4 und e_5 elliptische Ecken, denen noch (da sie nicht mehr auf Symmetriekreisen der $\mathfrak{G}_{1,55}$ gelegen sind) die symmetrischen Ecken $\bar{e}_4$, $\bar{e}_5$ hinzuzugesellen sind. Auf Symmetriekreisen der $\mathfrak{G}_{1,55}$ verbleiben e_1, e_7 und die aus ihnen durch $\overline{V}$ hervorgehenden Ecken. Demgegenüber sind e_2, $\bar{e}_2$, e_3, e_6 Verzweigungsecken der Klassengruppe, die also für $\mathbf{K}_{55}$ keine Ecken mehr liefern. Die vier ersten Ecken e_4, $\bar{e}_4$, e_5, $\bar{e}_5$ müssen die beiden Paare entgegengesetzter Klassen liefern, während die vier letzten Ecken die ambigen Klassen ergeben werden. Die Rechnung bestätigt dies; wir stellen die Ergebnisse sogleich tabellarisch zusammen:

$$\begin{array}{lll} (e_1), & \omega = \dfrac{-55 + i\sqrt{55}}{2} \sim \dfrac{-1 + i\sqrt{55}}{2}, & (1, 1, 14), \\ (e_7), & \omega = i\sqrt{55}, & (1, 0, 55), \\ \overline{V}(e_1), & \omega = \dfrac{-11 \cdot 55 + i\sqrt{55}}{52} \sim \dfrac{-3 + i\sqrt{55}}{8}, & (4, 3, 4), \\ \overline{V}(e_7), & \omega = \dfrac{-3 \cdot 55 + i\sqrt{55}}{16} \sim \dfrac{i\sqrt{55}}{5}, & (5, 0, 11), \end{array}$$

$$(e_4,\bar{e}_4),\qquad \omega=\frac{\mp 55+i\sqrt{55}}{4}\sim\frac{\pm 1+i\sqrt{55}}{4},\qquad (2,\mp 1,7),$$

$$(e_5,\bar{e}_5),\qquad \omega=\frac{\mp 55+i\sqrt{55}}{7}\sim\frac{\pm 1+i\sqrt{55}}{7},\qquad (7,\mp 2,8).$$

Zur Konstruktion der Hauptfunktion des Grades 55 gelangt man am kürzesten auf folgendem Wege: Die Zwischengruppe $\mathfrak{G}^{(110)}_{1,5,11,55}$ enthält lauter Substitutionen, die auch in der Hauptgruppe $\mathfrak{H}^{(55)}$ des Grades 55 enthalten sind, und ist demnach eine Untergruppe der $\mathfrak{H}^{(55)}$. Um den Index ν dieser Untergruppe zu bestimmen, beachte man, dass die $\mathfrak{G}^{(110)}_1$ eine Untergruppe des Index 4 in der $\mathfrak{G}^{(110)}_{1,5,11,55}$, also eine solche des Index 4ν in der $\mathfrak{H}^{(55)}$ ist. Diesen Index 4ν kann man auch so berechnen, dass man von der $\mathfrak{H}^{(55)}$ zunächst zur Untergruppe $\mathfrak{G}^{(55)}_1$ des Index 4 geht und dann beachtet, dass $\mathfrak{G}^{(110)}_1$ eine Untergruppe des Index 3 in der $\mathfrak{G}^{(55)}_1$ ist. Es ist demnach $4\nu=12$, also $\nu=3$. Die beiden Substitutionen:

$$V_1(\omega)=\omega+55,\qquad V_2(\omega)=\frac{-55}{\omega}$$

von $\mathfrak{H}^{(55)}$ sind nicht in der Untergruppe $\mathfrak{G}^{(110)}_{1,5,11,55}$ enthalten, und auch $V_1^{-1}.V_2$ gehört ihr nicht an. Wir gewinnen demnach für die Hauptgruppe des 55sten Grades die Darstellung:

$$\mathfrak{H}^{(55)}=\mathfrak{G}^{(110)}_{1,5,11,55}+\mathfrak{G}^{(110)}_{1,5,11,55}.V_1+\mathfrak{G}^{(110)}_{1,5,11,55}.V_2.$$

Man gehe nun auf die in (6) § 2 gegebene Funktion $\varphi(\omega)$ der Zwischengruppe $\mathfrak{G}^{(110)}_{1,5,11,55}$ zurück und stelle die drei Funktionen:

$$\varphi(\omega),\qquad \varphi(V_1(\omega))=\varphi(\omega+55),\qquad \varphi(V_2(\omega))=\varphi\left(\frac{-55}{\omega}\right)$$

neben einander, die man mittels der Substitutionen der $\mathfrak{H}^{(55)}$ aus $\varphi(\omega)$ herstellen kann. Jede symmetrische Verbindung dieser drei Funktionen ist eine Funktion der Hauptgruppe $\mathfrak{H}^{(55)}$. Man bilde insbesondere die mit $-\frac{1}{2}$ multiplizierte Summe, die mit $u(\omega)$ bezeichnet werden soll:

$$(1)\qquad u(\omega)=-\frac{1}{2}\left(\varphi(\omega)+\varphi(\omega+55)+\varphi\left(\frac{-55}{\omega}\right)\right).$$

Man zeigt dann leicht, *dass man in $u(\omega)$ bereits die Hauptfunktion des Grades 55 gewonnen hat.* Wir entnehmen nämlich zunächst aus (6) § 2 als Reihe für die beiden ersten Glieder in (1) rechts:

$$-\frac{1}{2}(\varphi(\omega)+\varphi(\omega+55))=$$
$$=x^{-2}(1+x^2+2x^4+x^6+3x^8+4x^{10}+5x^{12}+8x^{14}+10x^{16}+13x^{18}+\cdots).$$

Um die Reihe für das dritte Glied in (1) rechts zu erhalten, zerlege man φ wieder in den Quotienten der beiden Formen:

$$\varphi_1=\sqrt[24]{\Delta_2\Delta_{10}\Delta_{22}\Delta_{110}},\quad \varphi_2=\sqrt[24]{\Delta_1\Delta_5\Delta_{11}\Delta_{55}}$$

und stelle die Wirkung der Substitution:

$$i\sqrt{55}\,\omega_1'=55\cdot\omega_2,\quad i\sqrt{55}\,\omega_2'=-\omega_1$$

fest, wobei in Betracht zu ziehen ist, dass die Formen auf der imaginären ω-Achse reell und positiv sind.[1] Während φ_2 invariant ist, geht φ_1 über in:

$$\varphi_1'=4\sqrt[24]{\Delta(2\omega_1,\omega_2)\,\Delta\left(\frac{2\omega_1}{5},\omega_2\right)\Delta\left(\frac{2\omega_1}{11},\omega_2\right)\Delta\left(\frac{2\omega_1}{55},\omega_2\right)}.$$

Man gelangt zur Reihenentwicklung:

$$-\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{-55}{\omega}\right)=x^{-2}(-2x^8-2x^{10}-2x^{12}-4x^{14}-4x^{16}-8x^{18}-\cdots).$$

Für die in (1) erklärte Funktion $u(\omega)$ findet man die Potenzreihe:

(2) $$u(\omega)=x^{-2}(1+x^2+2x^4+x^6+x^8+2x^{10}+3x^{12}+4x^{14}+6x^{16}+5x^{18}+\cdots).$$

Nun hat x^2 in der Spitze $\omega=i\infty$ des Hauptpolygons $\mathbf{H}_{55}$ einen Nullpunkt erster Ordnung; mithin hat $u(\omega)$ daselbst einen Pol erster Ordnung. Da im Innern von $\mathbf{H}_{55}$ Pole nicht auftreten können, so haben wir in der Tat in $u(\omega)$ die fragliche Hauptfunktion.

Im »DB» der Zwischengruppe $\mathfrak{G}^{(110)}_{1,5,11,55}$ ist $u(\omega)$ dreiwertig mit einem Pole zweiter Ordnung bei $\omega=i\infty$ und einem solchen erster Ordnung in der anderen

[1] Man nehme ω_2 daselbst wieder reell an.

bei $\omega = 0$ gelegenen Spitze. Andrerseits ist in jenem »DB» die Hauptfunktion $v(\omega)$ des Grades 110 zweiwertig mit je einem Pole erster Ordnung in den beiden genannten Spitzen. Mithin besteht eine algebraische Relation zwischen u und v, die in u vom zweiten und in v vom dritten Grade ist. Diese Relation hat, da jede der beiden Grössen eine *ganze* algebraische Funktion der anderen ist, die Gestalt:

$$u^2 + (av^2 + bv + c)u + (dv^3 + ev^2 + fv + g) = 0.$$

Die sieben unbekannten Koeffizienten bestimmt man wieder mittels der Reihen. Da wir elf Reihenglieder zur Verfügung haben (vergl. (2) und die Gleichung (17) § 2), so kann man nach der Berechnung der $a, b, \ldots, g$ noch vier Proben auf die Richtigkeit des Ergebnisses anstellen. *Die zwischen den Hauptfunktionen v und u der Grade* 110 *und* 55 *bestehende algebraische Relation lautet:*

$$u^2 - (v^2 + v + 2)u + (v^3 + v^2 + 3v - 1) = 0. \tag{3}$$

Bei Auflösung dieser Gleichung nach u muss sich die für die Zwischengruppe $\mathfrak{G}^{(110)}_{1,5,11,55}$ charakteristische erste Quadratwurzel (15) § 3 wieder einstellen. In der Tat berechnet man sofort als *Darstellung der Hauptfunktion u des Grades* 55 *in derjenigen des Grades* 110:

$$2u = v^2 + v + 2 + \sqrt{(v-1)(v^3 - v^2 - 8)}, \tag{4}$$

wo die Quadratwurzel auf dem oberhalb des Punktes $\omega = i\sqrt{110}$ gelegenen Teile der imaginären ω-Achse positiv zu nehmen ist.

§ 5. Zwischengruppen $\mathfrak{G}^{(55)}_{1,t}$ und Eckenwerte der Hauptfunktion u.

Um die Eckenwerte von $u(\omega)$ zu bestimmen, muss man auf die beiden Zwischengruppen $\mathfrak{G}^{(55)}_{1,11}$ und $\mathfrak{G}^{(55)}_{1,55}$ eingehen, die beide $p = 1$ haben. Man wird dabei fortan besser mit der Entwicklungsgrösse:

$$x = e^{\frac{2\pi i \omega}{55}}$$

des Grades 55 arbeiten, hat also das bisherige x^2 jetzt durch x zu ersetzen. Die Potenzreihe der Hauptfunktion lautet demnach jetzt:

$$u(\omega) = x^{-1}(1 + x + 2x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 6x^8 + 5x^9 + \cdots). \tag{1}$$

Nun hat erstlich die Zwischengruppe $\mathfrak{G}_{1,11}$ die Verzweigungsecken e_1, e_4, e_5, e_7. Wir bilden für diese Gruppe wieder zwei Formen φ_1 und φ_2 durch die Ansätze:

$$\varphi_1 = \sqrt[24]{\varDelta_5 \varDelta_{55}} = \frac{2\pi}{\omega_2} x^{\frac{1}{2}} (1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \cdots),$$

$$\varphi_2 = \sqrt[24]{\varDelta_1 \varDelta_{11}} = \frac{2\pi}{\omega_2} x^{\frac{5}{2}} (1 - x^5 - x^{10} + \cdots),$$

deren Quadrate jedenfalls Formen der Transformationsgruppe $\mathfrak{G}_{\mathrm{I}}^{(55)}$ sind, da $\sqrt[12]{\varDelta_1 \varDelta_{11}}$ der Gruppe $\mathfrak{G}_{\mathrm{I}}^{(11)}$ angehört. Das Verhalten der φ_1, φ_2 gegenüber den erzeugenden Substitutionen der Hauptgruppe $\mathfrak{H}^{(55)}$ wird durch eine Überlegung festgestellt, die derjenigen bei den Formen φ_1, φ_2 des Grades 110 genau entspricht. Man findet, dass der Quotient der Formen φ_1, φ_2:

$$(2) \qquad \varphi = \sqrt[24]{\frac{\varDelta_5 \varDelta_{55}}{\varDelta_1 \varDelta_{11}}} = x^{-2} (1 - x - x^2 + 2x^5 - x^6 + 3x^{10} + \cdots)$$

eine im »DB« der $\mathfrak{G}_{1,11}$ zweiwertige Funktion ist, die gegenüber der Transformation dieses »DB« in sich das Verhalten zeigt:

$$(3) \qquad \varphi\left(\frac{-55}{\omega}\right) = \frac{5}{\varphi(\omega)}.$$

Wegen dieses Verhaltens ist:

$$\Phi(\omega) = \varphi(\omega) + \frac{5}{\varphi(\omega)}$$

eine Funktion der Hauptgruppe, für die man die Entwicklung findet:

$$(4) \quad \Phi = x^{-2} (1 - x - x^2 + 0 + 5x^4 + 7x^5 + 9x^6 + 15x^7 + 25x^8 + 30x^9 + 53x^{10} + \cdots).$$

Sie hat im »DB« der Hauptgruppe nur einen Pol, der in der Spitze bei $\omega = i\infty$ liegt und von der zweiten Ordnung ist. Danach ist Φ als ganze Funktion zweiten Grades der Hauptfunktion u darstellbar. Man gewinnt aus den Reihen und bestätigt durch zahlreiche Proben die folgende Darstellung von Φ in u:

$$(5) \qquad \Phi = u^2 - 3u - 3.$$

Für φ selbst gewinnt man damit die quadratische Gleichung:

$$\varphi^2 - (u^2 - 3u - 3)\varphi + 5 = 0.$$

Die Auflösung nach φ ergibt als Darstellung von φ durch die Hauptfunktion u:

$$(6) \qquad 2\varphi = u^2 - 3u - 3 + \sqrt{u^4 - 6u^3 + 3u^2 + 18u - 11},$$

wo die Quadratwurzel auf der imaginären ω-Achse oberhalb des Punktes $\omega = i\sqrt{55}$ positiv zu nehmen ist. Die Werte der Hauptfunktion u in den vier Verzweigungsecken der $\mathfrak{G}_{1,11}$ findet man durch Lösung der biquadratischen Gleichung:

$$u^4 - 6u^3 + 3u^2 + 18u - 11 = (u^2 + u - 1)(u^2 - 7u + 11) = 0.$$

Die Eckenwerte sind:

$$(7) \qquad \begin{cases} u(i\sqrt{55}) = \dfrac{7+\sqrt{5}}{2}, & u\left(\dfrac{-55+i\sqrt{55}}{7}\right) = \dfrac{7-\sqrt{5}}{2}, \\ u\left(\dfrac{-55+i\sqrt{55}}{4}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, & u\left(\dfrac{-55+i\sqrt{55}}{2}\right) = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Weiter hat die $\mathfrak{G}^{(55)}_{1,55}$ (Klassengruppe des Grades 55) die Verzweigungsecken e_2, $\bar{e}_2$, e_3, e_6. Man benutze hier den Umstand, dass $\sqrt[8]{\Delta_1 \Delta_{55}}$ eine Form der Transformationsgruppe $\mathfrak{G}^{(55)}_1$ ist (vergl. »E. F.« II, 299) und bilde zunächst die beiden Formen:

$$\psi_1 = \sqrt[8]{\Delta_5 \Delta_{11}} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 x^2 (1 - x^5 - x^{10} + \cdots)^3,$$

$$\psi_2 = \sqrt[8]{\Delta_1 \Delta_{55}} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 x^7 (1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - \cdots)^3.$$

Der Quotient dieser Formen:

$$(8) \qquad \psi = \sqrt[8]{\frac{\Delta_5 \Delta_{11}}{\Delta_1 \Delta_{55}}} = x^{-5}(1 + 3x + 9x^2 + 22x^3 + 51x^4 + 105x^5 + 212x^6 + 402x^7 + 744x^8 + 1326x^9 + \cdots)$$

ist eine im »DB« der $\mathfrak{G}_{1,55}$ fünfwertige Funktion, die gegenüber der Transformation dieses »DB« in sich das folgende Verhalten zeigt:

$$(9) \qquad \psi\left(\frac{2.11\omega+9.55}{-\omega-2.11}\right)=\frac{1}{\psi(\omega)}.$$

Hiernach hat man in:

$$\Psi(\omega)=\psi(\omega)+\frac{1}{\psi(\omega)}$$

eine fünfwertige Funktion der Hauptgruppe $\mathfrak{H}^{(55)}$ mit der Entwicklung:

$$(10) \qquad \Psi=x^{-5}(1+3x+9x^2+22x^3+51x^4+105x^5+212x^6+402x^7+744x^8+1326x^9+\cdots).$$

Die Darstellung von Ψ als ganze Funktion fünften Grades von u ist:

$$(11) \qquad \Psi=u^5-2u^4-3u^3+4u^2+4u-2.$$

Eine Prüfung der Rechnung kann man dadurch ausführen, dass die Lösung der quadratischen Gleichung für ψ:

$$\psi^2-(u^5-2u^4-3u^3+4u^2+4u-2)\psi+1=0$$

zunächst einen Ausdruck zehnten Grades unter dem Wurzelzeichen enthält, der die Abspaltung des Quadrates einer ganzen Funktion dritten Grades gestatten muss. In der Tat findet man:

$$(12) \qquad 2\psi=u^5-2u^4-3u^3+4u^2+4u-2+(u-1)(u^2-u-2)\sqrt{u(u^3-4u-4)},$$

wo die Quadratwurzel auf der imaginären ω-Achse wieder positiv zu nehmen ist.

Für die Ecke e_8 ergiebt sich:

$$(13) \qquad u\left(\frac{-33+i\sqrt{11}}{2}\right)=0,$$

während die drei letzten Eckenwerte:

$$u\left(\frac{-2.11+i\sqrt{11}}{3}\right), \quad u(\mp 22+i\sqrt{11})$$

von den Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$(14) \qquad u^3-4u-4=0$$

geliefert werden, für die sich als Quadratwurzel der Diskriminante $4i\sqrt{11}$ berechnet. Übrigens stellt man auch leicht den auf der Polygonseite s_4 eintretenden Wert:

$$u(-10+i\sqrt{10})=2 \tag{15}$$

fest, da zufolge (4) § 4 für $v=1$ der Wert $u=2$ eintritt.

Als Hauptsatz sei angemerkt: *Durch Adjunktion der beiden Quadratwurzeln:*

$$\sqrt{(u^2+u-1)(u^2-7u+11)}, \quad \sqrt{u(u^3-4u-4)} \tag{16}$$

zur Hauptfunktion u gewinnt man ein Funktionssystem für die Transformationsgruppe des Grades 55.

§ 6. Übergang zum 11^{ten} Transformationsgrade.

Um den Zusammenhang zwischen den Transformationsgraden 55 und 11 herzustellen, hat man denselben Gedankengang zu benutzen, der vom Grade 110 zu 55 führte. Alle Substitutionen der Zwischengruppe $\mathfrak{G}^{(55)}_{1,11}$ sind in der Hauptgruppe $\mathfrak{H}^{(11)}$ enthalten. Also ist die $\mathfrak{G}^{(55)}_{1,11}$ eine Untergruppe der $\mathfrak{H}^{(11)}$; und zwar handelt es sich um eine Untergruppe des Index 6, was man wie oben bei den Gruppen $\mathfrak{G}^{(110)}_{1,5,11,55}$ und $\mathfrak{H}^{(55)}$ feststellt. Versteht man unter V_1 und V_2 die Substitutionen:

$$V_1(\omega)=\omega+11, \quad V_2(\omega)=\frac{-11}{\omega},$$

so gilt für die Hauptgruppe $\mathfrak{H}^{(11)}$ die Darstellung:

$$\mathfrak{H}^{(11)}=\mathfrak{G}^{(55)}_{1,11}+\mathfrak{G}^{(55)}_{1,11}\cdot V_1+\mathfrak{G}^{(55)}_{1,11}\cdot V_1^2+\mathfrak{G}^{(55)}_{1,11}\cdot V_1^3+\mathfrak{G}^{(55)}_{1,11}\cdot V_1^4+\mathfrak{G}^{(55)}_{1,11}\cdot V_2.$$

Die Hauptfunktion des Grades 11 wurde in »E. F.« II, 403 mit τ bezeichnet; sie besitzt, übertragen auf die hier vorliegenden Voraussetzungen und Bezeichnungsweisen, in der Entwicklungsgrösse x des Grades 55 die Reihendarstellung:

$$\tau(\omega)=x^{-5}(1+6x^5+17x^{10}+46x^{15}+116x^{20}+252x^{25}+\cdots). \tag{1}$$

Im »DB» der Gruppe $\mathfrak{G}_{1,11}^{(55)}$ ist nun u eine zweiwertige und τ eine sechswertige Funktion, und zwar ist wieder jede der beiden Grössen eine *ganze* algebraische Funktion der anderen. Die zwischen u und τ bestehende algebraische Relation ist also vom sechsten Grade in u und vom zweiten in τ, und wieder kommt nur ein Glied mit u^6 und eines mit τ^2 vor. Die fragliche Relation muss also die Gestalt haben:

$$(2)\qquad u^6 + (a_0\tau + a_1)u^5 + (b_0\tau + b_1)u^4 + (c_0\tau + c_1)u^3 + (d_0\tau + d_1)u^2 \\ + (e_0\tau + e_1)u + f_0\tau^2 + f_1\tau + f_2 = 0.$$

Infolge der grossen Anzahl der unbekannten Koeffizienten ist deren Berechnung hier etwas umständlicher. Man ziehe zunächst den »DB» der $\mathfrak{G}_{1,11}^{(55)}$ heran und stelle die beiden Nullpunkte erster Ordnung von u in den Ecken:

$$\omega = \frac{-33 + i\sqrt{11}}{2}, \quad \omega = \frac{-33 + i\sqrt{11}}{11}$$

fest. Beide Stellen sind zugleich Nullpunkte erster Ordnung von τ. Weiter fällt in der Spitze $\omega = i\infty$ der Pol erster Ordnung von u mit einem solchen fünfter Ordnung von τ zusammen, und in der anderen Spitze bei $\omega = 0$ liegen übereinstimmend Pole erster Ordnung von u und τ. Also ist der Quotient:

$$w(\omega) = \frac{\tau(\omega)}{u(\omega)}$$

eine vierwertige Funktion der $\mathfrak{G}_{1,11}^{(55)}$ mit einem Pole vierter Ordnung in der Spitze bei $\omega = i\infty$. Hieraus ergiebt sich, dass sich nach Eintragung von $\tau = uw$ in (2) der Faktor u^2 aus allen Gliedern herausheben lassen muss, woraus wir $e_1 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ folgern.

Man bestimme demnächst die Koeffizienten von $u^5, \ldots, u^2$ im Ansatze (2) einzeln. Die Wurzeln der Gleichung sechsten Grades (2) für u sind:

$$(3)\qquad u(\omega),\ u(\omega + 11),\ u(\omega + 2.11),\ u(\omega + 3.11),\ u(\omega + 4.11),\ u\left(\frac{-11}{\omega}\right).$$

Während sich die Reihen der ersten fünf Grössen sofort aus (1) § 5 ergeben, macht allerdings die letzte Grösse (3) etwas mehr Mühe. Man hat sich zu erinnern, dass $u(\omega)$ der Quotient der Summe der drei Formen:

$$\sqrt[24]{\Delta_2 \Delta_{10} \Delta_{22} \Delta_{110}},$$

$$\sqrt[24]{\Delta\left(\frac{\omega_1+55\,\omega_2}{2}, \omega_2\right)\Delta\left(\frac{\omega_1+55\,\omega_2}{10}, \omega_2\right)\Delta\left(\frac{\omega_1+55\,\omega_2}{22}, \omega_2\right)\Delta\left(\frac{\omega_1+55\,\omega_2}{110}, \omega_2\right)},$$

$$\sqrt[24]{\Delta(2\,\omega_1, \omega_2)\Delta\left(\frac{2\,\omega_1}{5}, \omega_2\right)\Delta\left(\frac{2\,\omega_1}{11}, \omega_2\right)\Delta\left(\frac{2\,\omega_1}{55}, \omega_2\right)}$$

und der Form:

$$\sqrt[24]{\Delta_1 \Delta_5 \Delta_{11} \Delta_{55}}$$

ist. Man stelle also die Wirkung der Substitution:

$$i\sqrt{11}\,\omega_1' = 11\,\omega_2, \quad i\sqrt{11}\,\omega_2' = -\omega_1$$

fest und bilde für den transformierten Quotienten die Potenzreihe. Es ergiebt sich:

$$u\left(\frac{-11}{\omega}\right) = x^{-5}(1 + x^5 + 2x^{10} + x^{15} + x^{20} + 2x^{25} + \cdots).$$

Nun kann man durch ziemlich einfache Rechnungen die vier ersten Potenzsummen p_1, p_2, p_3, p_4 der sechs Grössen (3) als Funktionen der Grade $1, \ldots, 4$ von τ mittels der Reihen berechnen:

$$p_1 = \tau, \quad p_2 = \tau^2 - 10\tau + 20, \quad p_3 = \tau^3 - 15\tau^2 + 30\tau,$$
$$p_4 = \tau^4 - 20\tau^3 + 90\tau^2 - 140\tau + 100.$$

Zur Probe dient, dass sich die vier ersten symmetrischen Grundfunktionen s_1, s_2, s_3, s_4 nach bekannten Regeln der Algebra aus den Potenzsummen als *lineare* Funktionen von τ ergeben müssen:

$$s_1 = \tau, \quad s_2 = 5\tau - 10, \quad s_3 = 0, \quad s_4 = -15\tau + 25.$$

Die beiden letzten noch unbekannten Koeffizienten folgen jetzt sehr leicht mittels der Potenzreihen. Damit finden wir das grundlegende Ergebnis: *Die beiden Hauptfunktionen u und τ der Grade 55 und 11 hängen zusammen durch die algebraische Relation:*

$$u^6 - \tau u^5 + 5(\tau - 2)u^4 - 5(3\tau - 5)u^2 - \tau u + \tau^2 = 0. \tag{4}$$

Bei Auflösung dieser für τ quadratischen Gleichung nach τ muss sich natürlich die für die Zwischengruppe $\mathfrak{G}^{(55)}_{1,11}$ charakteristische erste Quadratwurzel (16) § 5 einstellen. In der Tat findet man als *Ausdruck der Hauptfunktion* $\tau(\omega)$ *des Grades* 11 *in derjenigen des Grades* 55:

$$2\tau = u(u^4 - 5u^3 + 15u + 1) + u(u^2 - 2u - 3)\sqrt{(u^2+u-1)(u^2-7u+11)}, \tag{5}$$

wobei die Quadratwurzel auf der imaginären ω-Achse positiv zu nehmen ist.

Der Fortgang zur Transformationsgruppe $\mathfrak{G}^{(11)}_1$ des elften Grades geschieht jetzt dadurch, dass man zur Hauptfunktion τ dieses Grades die Quadratwurzel:

$$\sigma = \sqrt{\tau(\tau^3 - 20\tau^2 + 56\tau - 44)} \tag{6}$$

adjungiert (vergl. »E. F.» II, 406 ff.). Es stellt sich dann die Funktion $j(\omega)$ in σ und τ so dar:

$$j(\omega) = \frac{4\tau(61\tau^2 - 2^4 . 23\tau + 2^5 . 11 - 2^4 . 3 . 5\sigma)^3}{(\tau(\tau^2 - 3 . 7\tau + 2^3 . 11) + \sigma(\tau - 11))^2}. \tag{7}$$

Durch die drei letzten Gleichungen und die Gleichung (4) § 4 ist $j(\omega)$ in der Hauptfunktion $v(\omega)$ des Grades 110 dargestellt. Zur transformierten Funktion $j\left(\frac{-110}{\omega}\right)$ gelangt man durch dieselbe Formelkette, wenn man nur in (4) § 4 vor der Quadratwurzel das negative Vorzeichen schreibt und alle übrigen Zeichenvorschriften unverändert lässt. Zur Berechnung von $j\left(\frac{-110}{\omega}\right)$ aus $j(\omega)$ sind, wie es sein muss, nach Adjunktion der Hauptfunktion $v(\omega)$ des Grades 110 zu $j(\omega)$ noch drei Quadratwurzeln auszuziehen.[1] Hiermit ist die algebraische Theorie des Transformationsgrades 110 zum Abschluss gebracht.

[1] Von den drei hier benutzten Quadratwurzeln ist nur die erste unmittelbar mit der ersten Wurzel (15) § 3 identisch. Jedoch sind σ und $\sqrt{(u^2+u-1)(u^2-7u+11)}$ als Funktionen der Transformationsgruppen $\mathfrak{G}^{(11)}_1$ und $\mathfrak{G}^{(55)}_1$ mithin auch der Gruppe $\mathfrak{G}^{(110)}_1$ durch die Hauptfunktion $v(\omega)$ des Grades 110 und die drei Wurzeln (15) § 3 rational darstellbar. In diesen rationalen Darstellungen stellen sich auch keine numerische Irrationalitäten ein; denn die Entwicklungskoeffizienten in den Potenzreihen aller hier in Betracht kommenden Quadratwurzeln sind ganzzahlig, und die Koeffizienten der gedachten rationalen Darstellungen sind daraufhin durch Lösung linearer Gleichungen mit rationalen Koeffizienten berechenbar.

§ 7. Klasseninvarianten und Klassenkörper der Diskriminanten —55, —220, —440.

Nach den Angaben von § 4 hat man für die vier Formklassen der Diskriminante $D = -55$ die Klasseninvarianten:

$$(1)\qquad j\left(\frac{-1+i\sqrt{55}}{2}\right),\quad j\left(\frac{-3+i\sqrt{55}}{8}\right),\quad j\left(\frac{\mp 1+i\sqrt{55}}{4}\right).$$

Die beiden ersten zu den ambigen Klassen gehörenden Invarianten sind reell und genügen den Ungleichungen:

$$j\left(\frac{-1+i\sqrt{55}}{2}\right) < 0 < j\left(\frac{-3+i\sqrt{55}}{8}\right) < 12^3;$$

die beiden letzten Invarianten (1), die den entgegengesetzten Klassen angehören, sind konjugiert komplex.

Die biquadratische Klassengleichung hat als Gleichung im rationalen Körper $\mathfrak{R}$ eine Galoissche Gruppe der Ordnung 8; als Gleichung im quadratischen Körper $(\mathfrak{R}, i\sqrt{55})$ hat sie eine Gruppe der Ordnung 4, die (da nicht alle Klassen ambig sind) zyklischen Typus hat. Nach den Weberschen Sätzen über die Zerlegung der Klassengleichung entsprechend den Geschlechtern ist die Klassengleichung nach Adjunktion von $\sqrt{5}$ zum rationalen Körper entsprechend den beiden Geschlechtern der vier Formklassen in zwei quadratische Gleichungen zerfällbar. Die zum Hauptgeschlechte gehörende quadratische Gleichung hat die reellen Invarianten (1) zu Wurzeln. Man gelangt zu einem reellen biquadratischen Körper, der neben $\sqrt{5}$ durch Adjunktion einer zweiten, noch festzustellenden reellen Quadratwurzel zu gewinnen ist. Aus diesem biquadratischen Körper entsteht der Klassenkörper achten Grades durch Adjunktion der Lösungen der zweiten Gleichung zweiten Grades, also der beiden letzten Invarianten (1).

Die nähere Untersuchung muss diese Angaben bestätigen und Aufschluss über die noch festzustellende Irrationalität geben. Die erste Klasseninvariante $j\left(\frac{-1+i\sqrt{55}}{2}\right)$ wird von der Ecke e_1 des Hauptpolygons $\mathbf{H}_{55}$ geliefert. Als zugehörigen Wert der Hauptfunktion hat man nach (7) § 5:

$$(2) \qquad u\left(\frac{-55+i\sqrt{55}}{2}\right) = -\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

womit sich bereits die zur Trennung der Geschlechter nötige Irrationalität $\sqrt{5}$ einfindet. Nun ist $j(\omega)$ allgemein eine rationale Funktion mit rationalen Zahlenkoeffizienten von u und den beiden Wurzeln (16) § 5. Für den Wert (2) von u verschwindet die erste Wurzel, während die zweite die noch gesuchte Irrationalität liefert:

$$(3) \qquad \sqrt{u(u^3-4u-4)} = \sqrt{\frac{-1+3\sqrt{5}}{2}}.$$

Hier steht unter der Quadratwurzel der eine der beiden Primfaktoren von -11 im reellen quadratischen Körper $(\Re, \sqrt{5})$. Wir gelangen zur Darstellung der vier Invarianten (1):

$$(4) \qquad \begin{cases} j\left(\frac{-1+i\sqrt{55}}{2}\right) = R\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{\frac{-1+3\sqrt{5}}{2}}\right), \\ j\left(\frac{-3+i\sqrt{55}}{8}\right) = R\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{\frac{-1+3\sqrt{5}}{2}}\right), \\ j\left(\frac{\mp 1+i\sqrt{55}}{4}\right) = R\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \pm i\sqrt{\frac{1+3\sqrt{5}}{2}}\right), \end{cases}$$

wo R in allen Fällen eine und dieselbe *rationale* Funktion mit rationalen Zahlenkoeffizienten ist und das Entsprechen der Doppelzeichen in der letzten Gleichung unentschieden bleibt.

Der Klassenkörper achten Grades der Diskriminante $D = -55$ ist hiernach:

$$(5) \qquad \mathfrak{K}_{55} = \left(\Re, \sqrt{5}, \sqrt{\frac{-1+3\sqrt{5}}{2}}, i\sqrt{\frac{1+3\sqrt{5}}{2}}\right).$$

Das Produkt der beiden letzten Irrationalitäten ist $i\sqrt{11}$, so dass die Quadratwurzel der Diskriminante $\sqrt{-55}$, wie es sein muss, sich als natürliche Irrationalität der Klassengleichung herausstellt.

Zur wirklichen Herstellung etwa der rechten Seite der ersten Gleichung (4) hat man aus (5) und (6) § 6 die beiden Werte:

$$(6)\qquad \begin{cases} \tau\left(\dfrac{-55+i\sqrt{55}}{2}\right) = -\dfrac{1+3\sqrt{5}}{2}, \\ \sigma\left(\dfrac{-55+i\sqrt{55}}{2}\right) = 11\,\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\dfrac{-1+3\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

zu berechnen. Bei dieser Rechnung ist zu beachten, dass $\sigma(\omega)$ im Punkte e_1 positiv sein muss. Natürlich musste sich neben $\sqrt{5}$ die Irrationalität (3) wieder einfinden. Man gewinnt die erste Gleichung (4), indem man in (7) § 6 für τ und σ die eben angegebenen Werte einträgt. Wie stets in ähnlichen Fällen ist die Ausrechnung des geordneten Ausdrucks:

$$j\left(\frac{-1+i\sqrt{55}}{2}\right) = a + b\sqrt{5} + (c+d\sqrt{5})\sqrt{\frac{-1+3\sqrt{5}}{2}}$$

nicht mehr grundsätzlich schwierig, aber umständlich.

Die Klasseninvarianten der Diskriminante $D = -220$ sind nach § 1:

$$(7)\qquad j(i\sqrt{55}),\quad j\left(\frac{i\sqrt{55}}{5}\right),\quad j\left(\frac{\mp 1+i\sqrt{55}}{7}\right),$$

von denen die beiden ersten, den ambigen Klassen entsprechend, reell sind und den Ungleichungen:

$$j(i\sqrt{55}) > j\left(\frac{i\sqrt{55}}{5}\right) > 12^3$$

genügen. Die zugehörige biquadratische Klassengleichung muss eine »Totalresolvente» der eben besprochenen Klassengleichung sein. Es ist also der Klassenkörper der Diskriminante -220 identisch mit dem eben bestimmten Klassenkörper für $D = -55$; und das Interesse, das hier noch vorliegt, besteht darin, diese Identität durch direkte Rechnung nachzuweisen. Nun ist aber nach (7) § 5:

$$(8)\qquad u(i\sqrt{55}) = \frac{7+\sqrt{5}}{2}.$$

Für diesen Wert u verschwindet die erste Quadratwurzel (16) § 5 wieder, während man für die zweite Quadratwurzel findet:

$$\sqrt{u(u^3-4u-4)} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 \sqrt{\frac{-1+3\sqrt{5}}{2}}.$$

Hiermit ist der fragliche Nachweis bereits erbracht. Den gleichen Beweis kann man natürlich mittels der Werte $\tau(i\sqrt{55})$ und $\sigma(i\sqrt{55})$ führen. Aus (5) und (6) § 6 ergeben sich mit etwas mehr Rechenaufwand die Werte:

$$(9)\qquad \begin{cases} \tau(i\sqrt{55}) = 11\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4, \\ \sigma(i\sqrt{55}) = 11\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8 \cdot \dfrac{9+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\dfrac{-1+3\sqrt{5}}{2}}. \end{cases}$$

Ihre Eintragung in (7) § 6 liefert die Klasseninvarianten (7) selbst.

Die Klassengleichung der Diskriminante $D = -440$ ist vom 12^{ten} Grade und muss nach den Weberschen Sätzen entsprechend den vier Geschlechtern nach Adjunktion von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ in vier im biquadratischen Körper $(\mathfrak{R}, \sqrt{2}, \sqrt{5})$ irreduzible kubische Gleichungen zerfällbar sein. Es hat dann z. B. die zum Hauptgeschlechte gehörende Teilgleichung die Wurzeln:

$$j(i\sqrt{110}),\quad j\left(\frac{\mp 4 + i\sqrt{110}}{9}\right),$$

von denen die erste reell und $> 12^3$ ist und zur Hauptklasse gehört.

Die Hauptfunktion $v(\omega)$ des Grades 110 liefert hier nun zunächst eine kubische »Partialresolvente» der Klassengleichung, der die drei zur Irrationalität $i\sqrt{110}$ gehörenden Eckenwerte:

$$v(i\sqrt{110}),\quad v\left(\frac{\mp 110 + i\sqrt{110}}{3}\right)$$

der Hauptfunktion genügen. Diese Resolvente gewinnt man durch Nullsetzen des kubischen Faktors unter der ersten Quadratwurzel (15) § 3. Die kubische Resolvente der Klassengleichung ist also:

$$(10)\qquad v^3 - v^2 - 8 = 0.$$

Diese Resolvente ist im rationalen Körper irreduzibel und hat eine Galoissche Gruppe der Ordnung 6. Ihre Diskriminante ist nämlich vom quadratischen Faktor 4 abgesehen gleich der vorliegenden Formendiskriminante -440, woraus zugleich hervorgeht, dass $\sqrt{-440}$ eine natürliche Irrationalität der Gleichung (10) ist. Ist $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, so entnehme man die Wurzeln von (10) nach der Kardanischen Formel aus:

$$\frac{4\sqrt{3}}{v} = \varepsilon^{\nu}\sqrt[3]{12\sqrt{3} + 2\sqrt{110}} + \varepsilon^{-\nu}\sqrt[3]{12\sqrt{3} - 2\sqrt{110}}, \quad \nu = 0, 1, 2. \tag{11}$$

Sind v und $\bar{v}$ die beiden komplexen Lösungen der Gleichung (10), so kann man den Galoisschen Körper sechsten Grades dieser Resolvente als Körper $(\mathfrak{R}, v, \bar{v})$ erklären.

Aus diesem Körper sechsten Grades muss nun der Klassenkörper $\mathfrak{K}_{440}$ der Diskriminante $D = -440$ durch Adjunktion der beiden reellen Quadratwurzeln $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ entstehen:

$$\mathfrak{K}_{440} = (\mathfrak{R}, v, \bar{v}, \sqrt{2}, \sqrt{5}). \tag{12}$$

Die Bestätigung dieser Angabe muss sich aus den Quadratwurzeln (15) § 3 ergeben. In $v(\omega)$ und diesen Wurzeln ist nämlich $j(\omega)$ rational mit rationalen Zahlenkoeffizienten darstellbar. Berechnen wir also die Invariante für eine der Klassen des Hauptgeschlechtes, so ist für v die reelle Lösung der Gleichung (10) einzutragen. Es verschwindet dann die erste unter den drei Wurzeln (15) § 3, während die beiden Wurzeln:

$$\sqrt{(v^2+v+3)(v^2+v-1)}, \quad \sqrt{(v-1)(v^3+v^2+3v-1)} \tag{13}$$

nach Adjunktion von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ in der gewählten Wurzel v von (10) rational darstellbar sein müssen.

Um dies zu bestätigen, bemerken wir, dass die beiden folgenden Gleichungen in v identisch bestehen:

$$(v^2+v+3)(v^2+v-1) = \frac{1}{5}(v^2+3v+7)^2 + \frac{4}{5}(v+2)(v^3-v^2-8),$$

$$(v-1)(v^3+v^2+3v-1) = \frac{1}{8}(v^2+3v+4)^2 + \frac{1}{8}(7v+1)(v^3-v^2-8).$$

Setzt man hier für v eine der Wurzeln der Gleichung (10) ein, so gilt:

$$\sqrt{(v^2+v+3)(v^2+v-1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(v^2+3v+7),$$

$$\sqrt{(v-1)(v^3+v^2+3v-1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(v^2+3v+4).$$

Die Adjunktion der Wurzeln (13) zum Körper sechsten Grades $(\mathfrak{R}, v, \bar{v})$ kommt also in der Tat auf die Adjunktion der beiden reellen Quadratwurzeln $\sqrt{5}$ und $\sqrt{2}$ hinaus. An die Stelle der beiden Wurzeln (13) kann man auch die beiden Grössen τ und σ treten lassen. Zunächst stelle man, wenn v eine Wurzel der Gleichung (10) ist, die beiden Gleichungen fest:

$$2u = v^2 + v + 2,$$

$$\sqrt{(u^2+u-1)(u^2-7u+11)} = \frac{1}{2}\sqrt{5}\,(v^2-v+2).$$

Zufolge (5) § 6 wird somit nach Adjunktion von $\sqrt{5}$ der zugehörige Wert τ in v rational darstellbar; man gewinnt den Ausdruck:

$$\tau = (17+7\sqrt{5})v^2 + (25+9\sqrt{5})v + (59+23\sqrt{5}).$$

Nach der weiteren Adjunktion von $\sqrt{2}$ muss auch σ rational in v darstellbar werden. Doch fangen hier die Rechnungen an, unbequem zu werden.

Bad Harzburg, den 17. Februar 1930.