# ZUR THEORIE DER KUBISCHEN IRRATIONALITÄTEN.

Von

TRYGVE NAGELL

in Oslo.

## Einleitung.

**1.** Während diejenigen Resultate über quadratische Zahlkörper, die nicht in der allgemeinen Körpertheorie beliebigen Grades enthalten sind, eine sehr umfassende, abgeschlossene Theorie bilden, sind unsere Kenntnisse über die spezielle Arithmetik der kubischen Körper noch unvollständig und zufällig. Dies liegt natürlich daran, dass wir die Natur der kubischen Irrationalzahlen sehr ungenügend kennen. Wir wissen noch zu wenig über das Verhalten der Teilnenner in der regulären Kettenbruchentwicklung einer reellen kubischen oder höheren Irrationalität und über die damit in nächster Zusammenhang stehende Frage nach der Genauigkeit, mit welcher man eine reelle algebraische Zahl durch rationale Zahlen annähern kann. Der wichtigste Beitrag zu dieser Frage verdankt man bekanntlich Axel Thue und C. Siegel[1]; für den speziellen Fall einer kubischen Irrationalität $\xi$ gilt der folgende Satz:

Die Ungleichung

$$\left|\xi - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{|y|^{\mu}} \tag{1}$$

hat nur endlich viele Lösungen in ganzen (rationalen) Zahlen $x$ und $y$, wenn $\mu > \frac{5}{2}$ ist.

Andererseits hat diese Ungleichung bekanntlich unendlich viele Lösungen, wenn $\mu = 2$ ist[2], und es entsteht so die Aufgabe den kleinsten Wert $\nu$ zu be-

[1] Siehe z. B. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. III, S. 37 (Leipzig 1927).

[2] Siehe Minkowski **1**, S. 3. (Das Literaturverzeichnis befindet sich am Ende der Abhandlung.)

5—29764. *Acta mathematica.* 55. Imprimé le 17 décembre 1929.

stimmen, so dass die Ungleichung für alle $\mu > \nu$ nur endlich viele Lösungen hat; diese Frage harrt noch ihrer Beantwortung.

Die kubischen Zahlkörper haben sehr verschiedene Eigenschaften, je nachdem die Körperdiskriminante $D$ positiv oder negativ ist. Ist $D > 0$, so sind alle drei konjugierten Körper reel; wenn $D < 0$ ist, sind zwei von den konjugierten Körpern imaginär-konjugiert, und der dritte ist reel. Man kann sich deshalb auf reelle Körper beschränken. Dass unendlich viele kubische Zahlkörper existieren, sowohl mit positiver wie mit negativer Diskriminante, kann man auf die folgende Weise zeigen: Es sei $p$ eine beliebige Primzahl von der Form $6m - 1$. Dann hat die Kongruenz

$$4q^3 \equiv 27 \pmod{p}$$

immer eine Wurzel modulo $p$. Wir können offenbar $q$ so wählen, dass $4q^3 - 27$ nicht durch $p^2$ teilbar wird. Wir wählen ferner $q$ positiv und $> 2$. Dann erzeugt die Wurzel $\theta$ der Gleichung

$$\theta^3 - q\theta - 1 = 0$$

einen kubischen Zahlkörper mit positiver Diskriminante $d$. Denn es ist $D(\theta) = 4q^3 - 27 = dk^2$, mit $k \geqq 1$. Folglich ist $d$ durch $p$ teilbar. Es seien nun gegeben die kubischen Zahlkörper $K_1, K_2, \ldots, K_n$ mit den positiven Körperdiskriminanten $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Wählen wir die Primzahl $p$ so, dass sie in keiner der Diskriminanten $d_i$ aufgeht, so ist offenbar der durch $\theta$ erzeugte Körper von den sämtlichen Körpern $K_i$ verschieden. Durch Wiederholung dieses Prozesses kann man offenbar beliebig viele neue Körper mit positiver Diskriminante konstruieren. Um dasselbe für Körper mit negativer Diskriminante zu beweisen, hat man nur $q$ negativ zu nehmen.

Die kubischen Körper mit negativer Diskriminante müssen als die einfachsten angesehen werden. Dies kommt schon in der Tatsache zum Vorschein, dass es in diesem Falle eine einzige Fundamentaleinheit gibt, während die anderen Körper zwei Fundamentaleinheiten besitzen. In vielen Fragen wissen wir besser Bescheid über die Körper mit negativer Diskriminante.

Ein kubischer Körper hat keinen anderen Unterkörper als den rationalen Körper.

*Ein kubischer Körper ist dann und nur dann Galoisch, wenn die Diskriminante eine Quadratzahl ist.* Denn sind $\theta$, $\theta'$ und $\theta''$ die Wurzeln der irreduziblen Gleichung

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0, \qquad (a,\ b \text{ und } c \text{ rational})$$

die den Körper bestimmt, so bestehen die Relationen

$$2\theta' = a - \theta + \frac{\sqrt{D(\theta)}}{3\theta^2 - 2a\theta + b},$$

$$2\theta'' = a - \theta - \frac{\sqrt{D(\theta)}}{3\theta^2 - 2a\theta + b}.$$

Da der Körper keine quadratische Irrationalität enthält, so muss die Diskriminante $D(\theta)$ eine Quadratzahl sein.

Ein reiner kubischer Körper ist ein durch die Kubikwurzel einer rationalen Zahl erzeugter Körper. *Ein Körper ist rein kubisch dann und nur dann, wenn die Diskriminante* $= -3A^2$ *ist.* Denn es sei $\theta$ die erzeugende Zahl, $\theta^3 - a\theta^2 + b\theta - c = 0$ und $\varrho^2 + \varrho + 1 = 0$. Wir setzen

$$v = \theta + \varrho\theta' + \varrho^2\theta'',$$
$$w = \theta + \varrho^2\theta' + \varrho\theta''.$$

Dann wird

$$v^3 = a^3 - \frac{9}{2}ab + \frac{27}{2}c + \frac{3}{2}\sqrt{-3D(\theta)},$$

$$w^3 = a^3 - \frac{9}{2}ab + \frac{27}{2}c - \frac{3}{2}\sqrt{-3D(\theta)}.$$

Ist hier $D(\theta) = -3C^2$, so folgt, dass $v^3$ und $w^3$ rational sind, und ferner, dass

$$3\theta = a + v + w = a + \sqrt[3]{r} + \sqrt[3]{s},$$

wo $r$ und $s$ rational sind. Ist umgekehrt $\theta^3 = r$, so ist $D(\theta) = -27r^2 = -3(3r)^2$, und die entsprechende Körperdiskriminante ist folglich auch von der Form $-3A^2$.

Man beweist ohne Mühe: Die durch $\sqrt[3]{r}$ und $\sqrt[3]{s}$ erzeugten reinen kubischen Körper sind dann und nur dann identisch, wenn entweder $\sqrt[3]{rs}$ oder $\sqrt[3]{\frac{r}{s}}$ rational ist. Es gibt folglich unendlich viele reine kubische Körper.

Die Literatur über kubische Irrationalzahlen ist nicht reich.[1] Minkowski und Sommer haben Darstellungen über kubische Körper gegeben; die Resultate

[1] Siehe Literaturverzeichnis am Ende der Abhandlung.

sind aber alle in der allgemeinen Körpertheorie enthalten. Dasselbe gilt auch in der Hauptsache einer Arbeit von Dedekind über reine kubische Körper. Über binäre kubische Formen liegen wichtige Untersuchungen vor von Arndt und von Berwick und Mathews; sie bestimmen u. a. alle Formenklassen mit gegebener Diskriminante. Dazu kommen einige in den letzten 10 Jahren erschienene Arbeiten von Delaunay und mir über Darstellung von ganzen Zahlen durch binäre kubische Formen. Über die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeiten gebe ich in dem ersten Kapitel einen kurzen Bericht ohne Beweise. Die folgenden Kapitel enthalten viele Anwendungen dieser Resultate. In dem zweiten Kapitel entwickele ich die Elemente einer Theorie der kubischen Ringe. In den zwei letzten Kapiteln beweise ich einige neue Sätze über kubische Einheiten und über kubische Zahlen mit gegebener Diskriminante.

In der Folge bedeutet kubische Zahl eine algebraische Zahl dritten Grades. Die zu einer kubischen Zahl $\alpha$ konjugierten Zahlen werden wie üblich mit $\alpha'$ und $\alpha''$ bezeichnet. Die Norm von $\alpha$ ist $N(\alpha) = \alpha\alpha'\alpha''$. $D(\alpha)$ bedeutet die Diskriminante von $\alpha$. Lateinische Buchstaben bedeuten, wenn nichts anderes gesagt ist, ganze rationale Zahlen.

## § 1. Über binäre kubische Formen.

**2.** *Formen mit gegebener Diskriminante.* — Wir bezeichnen durch $(a, b, c, d)$ die binäre kubische Form

$$F(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \tag{1}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a, b, c, d$. Nur irreduzible Formen kommen hier in Betracht. Es seien $\eta$, $\eta'$ und $\eta''$ die Wurzeln der Gleichung $ax^3 - bx^2 + cx - d = 0$; dann ist die Diskriminante der Form gleich

$$\left.\begin{aligned} D(F) = a^4(\eta-\eta')^2(\eta-\eta'')^2(\eta'-\eta'')^2 = \\ b^2c^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4db^3 - 27a^2d^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Führt man auf $F(x, y)$ die ganzzahlige Substitution $x = eu + fv$, $y = gu + hv$ aus, so erhält man die neue Form in $u$ und $v$

$$G(u, v) = a_1u^3 + b_1u^2v + c_1uv^2 + d_1v^3$$

mit $a_1 = F(e, g)$ und $d_1 = F(f, h)$. Die Wurzeln $\eta_1, \eta_1', \eta_1''$ der Gleichung $a_1 x^3 - b_1 x^2 + c_1 x - d_1 = 0$ sind mit den Zahlen $\eta, \eta', \eta''$ durch die Gleichung

$$\eta_1 = \frac{f + h\eta}{e + g\eta}$$

verbunden. Die Diskriminante der neuen Form ist, wie man leicht berechnet, gegeben durch

$$D(G) = (eh - fg)^6 \,.\, D(F).$$

Die Formen $F$ und $G$ heissen äquivalent, in Zeichen $F \sim G$, wenn die Determinante $eh - fg = \pm 1$ ist. Die Gesamtheit aller äquivalenten Formen bildet eine Klasse. Äquivalente Formen haben also dieselbe Diskriminante. Zwei Formen mit derselben Diskriminante brauchen aber nicht äquivalent zu sein, wie wir später aus einem numerischen Beispiel lernen werden. Es gilt aber der folgende fundamentale Satz von Hermite[1] über binäre Formen beliebigen Grades:

**Satz I.** *Es gibt nur endlich viele Formenklassen mit gegebener Diskriminante.*

Arndt[2] hat eine praktische Methode angegeben um die sämtlichen kubischen Formenklassen mit gegebener positiver Diskriminante zu bestimmen. Seine Methode beruht darauf, dass die entsprechende Hessesche Form eine definite quadratische Form ist, und, dass der dadurch gegebenen quadratischen Formenklasse im allgemeinen nur eine und höchstens drei kubische Formenklassen entsprechen. Die Formenklassen mit den kleinsten Diskriminanten sind gegeben durch $(1, -1, -2, 1)$ mit $D = 49$, und $(1, 0, -3, 1)$ mit $D = 81$.

Berwick und Mathews[3] haben dieselbe Aufgabe für kubische Formen mit negativer Diskriminante gelöst; indem $\alpha$ die reelle Wurzel von $F(x, 1) = 0$ ist, schreiben sie die Form

$$F(x, y) = (x - \alpha y) \,.\, \Phi(x, y)$$

und reduzieren die definite quadratische Form $\Phi$ mit irrationalen Koeffizienten. Die sämtlichen Formenklassen mit $|D| < 75$ sind gegeben durch $(1, 0, -1, 1)$ mit $D = -23$, $(1, 0, 1, 1)$ mit $D = -31$, $(1, -1, 1, 1)$ mit $D = -44$ und $(1, 0, 2, 1)$ mit $D = -59$.

Aus diesen Untersuchungen folgt als Nebenresultat:

---

[1] Hermite **1**.

[2] Arndt **1**, **2**, **3**, **4**.

[3] Mathews **1**, **2**.

**Satz II.** *In jeder Formenklasse mit gegebener (positiver oder negativer) Diskriminante D gibt es eine Form* $(a, b, c, d)$ *mit*

$$|a| < \sqrt[4]{\frac{16}{27}|D|}, \tag{4}$$

*und mit ähnlichen Ungleichungen für die übrigen Koeffizienten.*

Es ergibt sich ferner die folgende Abschätzung:

**Satz III.** *Die Anzahl der Formenklassen mit der Diskriminante D ist kleiner als* $10|D|$.

Das Problem zu entscheiden, ob zwei vorgelegte Formen äquivalent sind oder nicht, läuft offenbar auf die Aufgabe hinaus zu bestimmen, ob zwischen den entsprechenden Wurzeln eine Gleichung von der Form (3), mit $eh - fg = \pm 1$, besteht. Als Beispiel nehmen wir die Formen $(1, 1, 5, 1)$ und $(1, 2, 1, 4)$; sie haben dieselbe Diskriminante $D = -416$, sind aber trotzdem nicht äquivalent. Denn es sei $\alpha$ die reelle Wurzel der Gleichung $\alpha^3 - \alpha^2 + 5\alpha - 1 = 0$ und $\beta$ die reelle Wurzel der Gleichung $\beta^3 - 2\beta^2 + \beta - 4 = 0$. Dann berechnet man leicht, dass $\beta = \frac{2-2\alpha}{1+\alpha}$ ist. Wäre $(1, 1, 5, 1) \sim (1, 2, 1, 4)$, so müsste $\beta = \frac{f+h\alpha}{e+g\alpha}$ mit ganzen Koeffizienten $e, f, g, h$ und $eh - fg = \pm 1$. Dies ist aber hier nicht der Fall. Hier liegen die Wurzeln $\alpha$ und $\beta$ in demselben Körper; dies braucht aber nicht der Fall zu sein.

Die Aufgabe zu entscheiden, ob zwei vorgelegte kubische Zahlen demselben Körper gehören, führt offenbar darauf hinaus zu untersuchen, ob eine gewisse Gleichung sechsten Grades rationale Wurzeln hat.

**3.** *Darstellung von ganzen Zahlen durch binäre kubische Formen.* — Aus dem Resultat von Thue in der Einleitung über Approximation von kubischen Irrationalitäten folgt sofort der Satz:

**Satz IV.** *Die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch eine binäre kubische Form ist endlich.*

Die Thuesche Methode gibt aber im allgemeinen kein Mittel um die eventuellen Darstellungen wirklich zu bestimmen; sie gibt auch keine Abschätzung über die Anzahl der Darstellungen.

Nur in dem Falle einer negativen Diskriminante ist es gelungen dieses Resultat zu präcisieren und eine sehr genaue Abschätzung der Anzahl der Darstellungen zu geben. Einer Bemerkung von Lagrange[1] zufolge genügt es die Darstellungen der Zahl 1 zu betrachten. Nach den Untersuchungen von Delaunay und mir gilt dann der folgende Satz[2]:

**Satz V.** *Die Anzahl der Darstellungen der Zahl* 1 *durch eine irreduzible binäre kubische Form mit negativer Diskriminante ist höchstens gleich* 3, *von den folgenden drei Fällen abgesehen:* 1) *Die Form* $(1, 0, 1, 1)$ *und die damit äquivalenten Formen gestatten genau* 4 *Darstellungen der Zahl* 1; *z. B. hat die Gleichung* $(1, 0, 1, 1) = 1$ *genau die Lösungen* $x=0, y=1$; $x=1, y=0$; $x=1, y=-1$; $x=-2, y=3$. 2) *Die Form* $(1, -1, 1, 1)$ *und die damit äquivalenten Formen gestatten genau* 4 *Darstellungen der Zahl* 1; *z. B. hat die Gleichung* $(1, -1, 1, 1) = 1$ *genau die Lösungen* $x=0, y=1$; $x=1, y=0$; $x=-1, y=2$; $x=56, y=-103$. 3) *Die Form* $(1, 0, -1, 1)$ *und die damit äquivalenten Formen gestatten genau* 5 *Darstellungen der Zahl* 1; *z. B. hat die Gleichung* $(1, 0, -1, 1) = 1$ *die Lösungen* $x=0, y=1$; $x=1, y=0$; $x=1, y=1$; $x=-1, y=1$; $x=4, y=-3$.

*Gibt es* 3 *Darstellungen, so ist die Form äquivalent einer Form* $(1, p, q, 1)$. *Es gibt unendlich viele Formenklassen mit* 3 *Darstellungen.*

(Äquivalente Formen stellen natürlich genau dieselben Zahlen dar; und die Anzahl der Darstellungen ist genau dieselbe.) Auch hier fehlt aber eine allgemeine Methode um die Darstellungen wirklich zu bestimmen. Wir haben auch kein allgemeines Mittel um zu entscheiden, ob eine gegebene Formenklasse die Zahl 1 darstellen kann oder nicht. Für einige speziellere Formen ist es uns aber gelungen das Problem vollständig zu lösen.[3] Die betreffenden Resultate können so zusammengefasst werden:

**Satz VI.** *Die unbestimmte Gleichung*

$$Ax^3 + By^3 = C, \tag{1}$$

*wo* $C = 1$ *oder* $C = 3$ *ist, und wo* $A$ *und* $B$ *ganze Zahlen sind,* $A > B \geqq 1$, *so dass* $AB$ *zu* $C$ *teilerfremd ist und keinen kubischen Faktor* $> 1$ *hat, besitzt höchstens eine Lösung in nicht verschwindenden ganzen Zahlen* $x$ *und* $y$, *abgesehen von dem Falle* $A = 2, B = 1, C = 3$, *wo genau zwei Lösungen existieren, nämlich* $x = y = 1$ *und* $x = 4, y = -5$.

---

[1] Lagrange **1**.
[2] Delaunay **3**, **5** und Nagell **5**, **6**, **7**.
[3] Delaunay **1**, **2**, **4**, **9** und Nagell **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, **7**.

*Unter allen Gleichungen, die demselben Körper gehören*[1], *gibt es höchstens eine, die in nicht verschwindenden ganzen Zahlen lösbar ist, abgesehen von den folgenden zwei Ausnahmen: Im Körper* $K(\sqrt[3]{2})$ *gibt es genau drei lösbare Gleichungen, nämlich*

$$2x^3 + y^3 = 1, \quad 2x^3 + y^3 = 3, \quad 4x^3 + y^3 = 3.$$

*Zum Körper* $K(\sqrt[3]{20})$ *gehören genau zwei lösbare Gleichungen, nämlich*

$$20x^3 + y^3 = 1 \text{ und } 5x^3 + 2y^3 = 3.$$

*Wenn* $x = x_1, y = y_1$ *eine Lösung der Gleichung*

$$Ax^3 + y^3 = 1 \tag{2}$$

*ist, dann ist die Zahl* $x_1\sqrt[3]{A} + y_1$ *die Fundamentaleinheit des Ringes* $R(\sqrt[3]{A})$ *im kubischen Körper* $K(\sqrt[3]{A})$. *Die Gleichung* (2) *wird auf diese Weise vollständig gelöst; und die vollständige Lösung der allgemeinen Gleichung* (1) *kann auf die Lösung einer endlichen Anzahl von Gleichungen der Form* (2) *zurückgeführt werden.*

Aus der Ungleichung (4) in der vorigen Nummer folgt sofort:

**Satz VII.** *Es sei m die kleinste positive ganze Zahl, die durch eine binäre kubische Form mit der Diskriminante D dargestellt werden kann. Dann ist*

$$m < \sqrt[4]{\frac{16}{27}|D|}.$$

Wir besitzen aber noch kein Mittel um die Zahl $m$ für eine willkürlich gegebene Formenklasse zu bestimmen. Diese Frage wäre offenbar gelöst, wenn man ein Kriterium für die Darstellbarkeit der Zahl 1 durch eine beliebige Formenklasse hätte. Umgekehrt würde eine allgemeine Methode um die Zahl $m$ zu bestimmen ein solches Kriterium liefern.

---

[1] Wir sagen, dass die Gleichung (1) dem kubischen Körper $K\left(\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\right)$ gehört.

## § 2. Über kubische Ringe.

**4.** *Allgemeines.* — Ein Integritätsbereich oder Ring ist ein Zahlengebiet, in dem die Operationen der Addition, Subtraktion und Multiplikation unbegrenzt ausführbar sind. Ein Ring von algebraischen Zahlen ist vom $n$-ten Grade, wenn darin Zahlen $n$-ten Grades vorkommen, aber keine Zahlen höheren Grades. Wir betrachten hier nur kubische Ringe von ganzen Zahlen.

Jeder kubische Ring enthält unendlich viele ganze rationale Zahlen. Denn gehört die Zahl $\alpha$ dem Ring, so gehört auch ihre Norm $N(\alpha)$ dem Ringe, wegen $\alpha^3 - p\alpha^2 + q\alpha = N(\alpha)$. Es sei $a$ die kleinste positive ganze rationale Zahl des Ringes; dann sind die sämtlichen ganzen rationalen Zahlen des Ringes gegeben durch $0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a$, usw.[1] Der Beweis dafür, dass jeder Körper eine Basis besitzt, lässt sich ohne weiteres auf Ringe übertragen. Jeder kubische Ring besitzt eine Basis $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, derart dass die sämtlichen Zahlen des Ringes in der Form $u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + u_3\omega_3$ enthalten sind mit beliebigen ganzzahligen $u_1, u_2, u_3$. Wenn $\xi$ eine beliebige kubische Zahl des Ringes ist, gibt es eine Basis von der Form[2]:

$$\omega_1 = a, \quad \omega_2 = \frac{b + b_1\xi}{D(\xi)}, \quad \omega_3 = \frac{c + c_1\xi + c_2\xi^2}{D(\xi)}, \tag{1}$$

wo $a, b, b_1, c, c_1$ und $c_2$ ganze rationale Zahlen sind, $a$ mit der früheren Bedeutung, $|b|$ und $|c| < a|D(\xi)|$, und $|b_1|, |c_1|, |c_2| \leq |D(\xi)|$.

Ein Ring mit den Basiszahlen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ wird mit $R(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ bezeichnet. Die Diskriminante des Ringes ist definiert durch

$$D(R) = D(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1' & \omega_2' & \omega_3' \\ \omega_1'' & \omega_2'' & \omega_3'' \end{vmatrix}^2 .$$

Wird hier das System (1) eingesetzt, so folgt, dass $D(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ durch $a^2$ teilbar ist. Die Diskriminante ist eine Konstante des Ringes, unabhängig von der Wahl der Basis. Dagegen brauchen Ringe mit derselben Diskriminante nicht identisch zu sein. Es seien $\alpha_1, \alpha_2$ und $\alpha_3$ drei beliebige Zahlen des Ringes:

$$\alpha_i = a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + a_{i3}\omega_3 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

---

[1] Wir beschränken uns hier nicht wie üblich auf den Fall $a = 1$.

[2] Siehe etwa SOMMER **1**, S. 251—254.

Dann ist die Diskriminante von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gleich

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = |a_{ij}|^2 . D(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \tag{2}$$

wo $|a_{ij}|$ die Determinante von den Koeffizienten bedeutet. Dann und nur dann ist $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eine Basis, wenn $|a_{ij}| = \pm 1$ ist: Wenn ein Ring in einem anderen Ring enthalten ist, und wenn zugleich die Diskriminanten gleich sind, dann sind die Ringe identisch. Enthält der Ring $R$ alle Zahlen des Ringes $R_1$ und noch weitere Zahlen, so wird $R$ einen Oberring von $R_1$ genannt, und $R_1$ einen Unterring von $R$. Hat $R$ die Diskriminante $D$ und $R_1$ die Diskriminante $D_1$, so ist $D_1 = Dk^2$, wo $k$ eine ganze rationale Zahl $> 1$ ist.

Es sei gegeben der Ring $R(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$; der Einfachheit halber nehmen wir an, dass er reel ist. Wendet man nun den Minkowskischen Satz über lineäre Formen auf die Form $u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + u_3\omega_3$ an, so ergibt sich[1]:

**Satz VIII.** *In jedem reellen kubischen Ring mit der Diskriminante $D$ gibt es eine Zahl dritten Grades $\xi$, die mit ihren Konjugierten $\xi'$ und $\xi''$ den Ungleichungen*

$$|\xi| < 1, \quad |\xi'| < |\sqrt[4]{D}|, \quad |\xi''| < |\sqrt[4]{D}| \tag{3}$$

*genügen.*

Hieraus folgt sofort der Satz von Minkowski[1]: *Es gibt nur endlich viele kubische Körper mit gegebener Diskriminante.* Denn es gibt nur endlich viele ganze kubische Zahlen $\xi$, die den Ungleichungen (3) genügen, wenn $D$ gegeben ist. Man kann auf diese Weise alle kubischen Körper mit gegebener $D$ bestimmen. Die Anzahl dieser Körper wird, wie man leicht berechnet, kleiner als $192|D\sqrt[4]{D}|$. Der kubische Körper mit der kleinsten positiven Diskriminante ist definiert durch $\xi^3+\xi^2-2\xi-1=0$ und hat $D=49$; dieser Körper ist Galoisch, so dass die drei durch diese Gleichung definierten Körper zusammenfallen. Es gibt nur vier reelle kubische Körper mit negativer Diskriminante $D$ und $|D|<75$, nämlich die durch die folgenden Zahlen $\xi$ definierten Körper: 1) $\xi^3+\xi^2-1=0$ mit $D=-23$; 2) $\xi^3+\xi-1=0$ mit $D=-31$; 3) $\xi^3+\xi^2+\xi-1=0$ mit $D=-44$; 4) $\xi^3+2\xi-1=0$ mit $D=-59$. Wir kennen noch kein Beispiel dafür, dass zwei nicht-konjugierte kubische Körper dieselbe Diskriminante haben.

Aus Satz VIII folgt aber das allgemeinere Resultat:

---

[1] MINKOWSKI **1**, S. 130—132. Die hier gegebene Abschätzung ist schärfer als die von MINKOWSKI.

**Satz IX.** *Es gibt nur endlich viele kubische Ringe mit gegebener Diskriminante D.*

Denn es gibt in einem solchen Ring eine Zahl $\xi$, die den Ungleichungen (3) genügt. Mittels dieser Zahl bilden wir eine Basis von der Form (1). Dann gibt es nur eine endliche Anzahl von Möglichkeiten für die Basiszahlen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Diese Zahlen und ihre Konjugierten werden nämlich, absolut genommen, kleiner als

$$a + |\xi^{(i)}| + |\xi^{(i)}|^2 < |\sqrt{D}| + |\sqrt[4]{D}| + |\sqrt{D}|.$$

Der Beweis gibt zugleich ein Mittel um die sämtlichen kubischen Ringe mit der Diskriminante $D$ zu bestimmen. Für die Anzahl dieser Ringe findet man durch eine rohe Abschätzung die obere Grenze $3|12D|^7$.

Ein gegebener Ring hat nach diesem Satze nur endlich viele Oberringe, die natürlich alle in demselben Körper liegen. Der grösste Ring eines gegebenen Körpers ist der aus allen ganzen Zahlen des Körpers gebildete Ring, der sogenannte *Fundamentalring.* Es gilt der Satz:

**Satz X.** *Eine ganze kubische Zahl kommt nur in endlich vielen kubischen Ringen vor.*

Kommt nämlich die Zahl $\alpha$ in $R(a, \omega_1, \omega_2)$ vor, so kommt sie auch in $R(1, \omega_1, \omega_2)$ vor. Nun ist $D(a, \omega_1, \omega_2) = a^2 D(1, \omega_1, \omega_2)$; es ist weiter $D(\alpha)$ ein Multiplum von $D(1, \omega_1, \omega_2)$. Da endlich $a$ ein Teiler von $N(\alpha)$ ist, folgt

$$|D(a, \omega_1, \omega_2)| \leqq N^2(\alpha) \,.\, |D(\alpha)|.$$

Die Diskriminante ist also durch $\alpha$ beschränkt und folglich auch die Anzahl der Ringe. Eine Zahl, die in unendlich vielen kubischen Ringen vorkommt, ist also notwendig rational.

Damit die Zahlen $u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + u_3\omega_3$ einen kubischen Ring bilden, wenn $u_1$, $u_2$ und $u_3$ alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen, ist notwendig und hinreichend, dass die Zahlen $\omega_1\omega_2, \omega_1\omega_3, \omega_2\omega_3, \omega_1^2, \omega_2^2$ und $\omega_3^2$ alle von der Form $v_1\omega_1 + v_2\omega_2 + v_3\omega_3$ sind, mit ganzzahligen Koeffizienten $v_1, v_2, v_3$. Es sei z. B. $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \sqrt[3]{10}$, $\omega_3 = \frac{1}{3}(2 - \sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{100})$. Dann folgt aus $\omega_2\omega_3 = \omega_2 + \omega_3 - 4$, $\omega_2^2 = 2 - \omega_2 - 3\omega_3$ und $\omega_3^2 = \omega_2 + \omega_3 + 2$, dass die Gesamtheit der Zahlen $u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + u_3\omega_3$ wirklich einen Ring bildet.

Die bisherigen Resultate gelten, mit den notwendigen Modifikationen, für alle Ringe von ganzen algebraischen Zahlen beliebigen Grades.

**5.** *Die kubischen Ringe* $R(1, \alpha, \beta)$ *und ihr Zusammenhang mit den binären kubischen Formen.* — Die wichtigsten Ringe sind diejenigen, die alle ganzen rationalen Zahlen enthalten; sie sind also von der Form $R(1, \alpha, \beta)$. In einem solchen Ring können wir immer annehmen, dass $\alpha\beta$ rational ist. Denn ist $\alpha\beta = a\alpha + b\beta + c$ und setzen wir $\alpha_1 = \alpha - b$ und $\beta_1 = \beta - a$, so ist $1, \alpha_1, \beta_1$ eine neue Basis und $\alpha_1\beta_1 = ab + c =$ rationale Zahl.

Es sei nun gegeben der Ring $R(1, \alpha, \beta)$ mit $\alpha\beta = s =$ ganze rationale Zahl, und es sei $\alpha^3 - p\alpha^2 + q\alpha - r = 0$. Dann wird

$$\beta^3 - \frac{qs}{r}\beta^2 + \frac{ps^2}{r}\beta - \frac{s^3}{r} = 0,$$

und

$$\alpha^2 = p\alpha - q + \frac{r}{s}\beta,$$

$$\beta^2 = \frac{qs}{r}\beta - \frac{ps^2}{r} + \frac{s^2}{r}\alpha.$$

Hieraus folgt, dass $\frac{r}{s}$ und $\frac{s^2}{r}$ ganze Zahlen sind. Wir setzen $\frac{r}{s} = a$ und $\frac{s^2}{r} = d$. Die Zahl $c = \frac{qs}{r}$ ist auch ganz; es sei ferner $p = b$. Dann bekommen wir $s = ad$, $r = a^2 d$ und $q = ac$, folglich

$$\left.\begin{aligned} \alpha^3 - b\alpha^2 + ac\alpha - a^2 d &= 0, \\ \beta^3 - c\beta^2 + bd\beta - ad^2 &= 0, \\ \alpha\beta &= ad. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Es gilt folglich der

**Satz XI.** *In jedem Ring* $R(1, \alpha, \beta)$ *kann die Basis so gewählt werden, dass Gleichungen von der Form* (1) *bestehen. Wenn* $\alpha$ *und* $\beta$ *den Gleichungen* (1) *genügen, ist* $R(1, \alpha, \beta)$ *immer ein Ring.*

Die Richtigkeit der letzten Bemerkung folgt aus den Gleichungen $\alpha\beta = ad$, $\alpha^2 = b\alpha + a\beta - ac$ und $\beta^2 = c\beta + d\alpha - bd$. Die Zahlen $a, b, c, d$ sind hier ganz rational vorausgesetzt, wie auch im folgenden.

Zwischen den Ringen $R(1, \alpha, \beta)$ und den binären kubischen (irreduziblen)

Formen besteht ein bemerkenswerter Zusammenhang. Levi[1] und Delaunay[2] haben nämlich den folgenden wichtigen Satz bewiesen:

**Satz XII.** *Es seien $\alpha$, $\beta$, $\alpha_1$ und $\beta_1$ ganze kubische Zahlen in demselben Körper,*

$$\alpha^3 - b\alpha^2 + ac\alpha - a^2 d = 0, \quad \alpha\beta = ad \quad \textit{und}$$

$$\alpha_1^3 - b_1\alpha_1^2 + a_1c_1\alpha_1 - a_1^2 d_1 = 0, \quad \alpha_1\beta_1 = a_1 d_1.$$

*Sind dann die Ringe $R(1, \alpha, \beta)$ und $R(1, \alpha_1, \beta_1)$ identisch, so sind die kubischen Formen $(a, b, c, d)$ und $(a_1, b_1, c_1, d_1)$ äquivalent; und umgekehrt folgt aus der Äquivalenz der Formen, dass die Ringe identisch sind. Die Formen und die Ringe haben dieselbe Diskriminante.*

*Beweis:* Wir setzen $\alpha = a\eta$ und $\alpha_1 = a_1\eta_1$; dann ist

$$a\eta^3 - b\eta^2 + c\eta - d = 0 \quad \text{und} \quad a_1\eta_1^3 - b_1\eta_1^2 + c_1\eta_1 - d_1 = 0.$$

Es sei nun $(a, b, c, d) \sim (a_1, b_1, c_1, d_1)$. Nach 2 folgt dann

$$\eta_1 = \frac{f + h\eta}{e + g\eta},$$

mit $eh - fg = \pm 1$. Es ist ferner offenbar $a_1 = aN(e + g\eta)$ und weiter

$$\alpha_1 = a_1\eta_1 = a_1 \cdot \frac{f + h\eta}{e + g\eta} = a(f + h\eta)(e + \eta' g)(e + \eta'' g)$$

oder

$$\alpha_1 = \pm e\alpha \mp g\beta + afe^2 + bgef + cgeh + dhg^2.$$

$\alpha_1$ gehört daher dem Ringe $R(1, \alpha, \beta)$. Aus Symmetriegründen folgt dasselbe für $\beta_1$. Auf dieselbe Weise folgt, dass $\alpha$ und $\beta$ dem Ringe $R(1, \alpha_1, \beta_1)$ gehören. Die Ringe sind folglich identisch.

Es seien umgekehrt die Ringe identisch; dann bestehen die Gleichungen

$$\alpha_1 = e\alpha - g\beta + k,$$
$$\beta_1 = -f\alpha + h\beta + l,$$

mit $eh - fg = \pm 1$; und folglich wird

$$\alpha_1\beta_1 = -ef\alpha^2 + (fg + eh)\alpha\beta - gh\beta^2 + (el - fk)\alpha + (hk - gl)\beta + kl.$$

---

[1] LEVI 1. [2] DELAUNAY 7. Den obenstehenden Beweis hatte ich schon, bevor mir die Levischen und Delaunayschen Beweise bekannt waren.

Multipliziert man diese Gleichung mit $\alpha$ und bedenkt man, dass

$$\alpha_1\beta_1 = a_1 d_1,\quad \alpha\beta = ad \quad\text{und}\quad \alpha\beta^2 = d\alpha^2 - bd\alpha + acd,$$

so ergibt sich die Gleichung

$$ef\alpha^3 + (dgh + fk - el)\alpha^2 + (a_1 d_1 - kl - adfg - adeh - bdgh)\alpha + (acdgh + adge - adhk) = 0.$$

Hieraus folgt wegen $\alpha^3 - b\alpha^2 + ac\alpha - a^2 d = 0$,

$$dgh + fk - el + bef = 0$$

und

$$cgh + gl - hk + aef = 0,$$

woraus wegen $eh - fg = \pm 1$,

$$k(eh - fg) = \pm k = ae^2 f + befg + cegh + dg^2 h.$$

Es ist folglich

$$\begin{aligned} \pm \alpha_1 &= \pm e\alpha \mp g\beta \pm k = \\ &= e(eh - fg)\alpha - g(eh - fg)\beta + ae^2 f + befg + cegh + dg^2 h \\ &= a(f + h\eta)(e + g\eta')(e + g\eta'') = a \cdot \frac{f + h\eta}{e + g\eta} \cdot N(e + g\eta). \end{aligned}$$

Nun ist

$$D(1, \alpha, \beta) = \frac{1}{a^2} D(1, \alpha, \alpha^2) = \frac{1}{a^2} D(\alpha)$$

und

$$\begin{aligned} D(1, \alpha_1, \beta_1) = \frac{1}{a_1^2} D(1, \alpha_1, \alpha_1^2) &= \frac{1}{a_1^2} \cdot D\left(e\alpha - g\,\frac{\alpha^2 - b\alpha + ac}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a_1^2} D(\alpha) \,.\, N^2\left(e + g\,\frac{\alpha}{a}\right). \end{aligned}$$

Da die Ringe dieselbe Diskriminante haben, muss

$$N(e + g\eta) = \pm \frac{a_1}{a},$$

und es wird folglich

$$\pm\, \eta_1 = \frac{f + h\eta}{e + g\eta}$$

mit $eh - fg = \pm 1$. Die Formen sind daher äquivalent.

Dieser Satz etabliert also eine eineindeutige Zuordnung von binären kubischen Formenklassen und den drei konjugierten Ringen $R(1, \alpha, \beta)$. Wird die Theorie dieser Formen als bekannt vorausgesetzt, so hat man hier ein neues und auch bequemeres Mittel um die Ringe $R(1, \alpha, \beta)$ mit gegebener Diskriminante zu bestimmen.

Aus dem Satze III in 2 folgt z. B.:

**Satz XIII.** *Die Anzahl der Ringe $R(1, \alpha, \beta)$ mit der Diskriminante $D$ ist kleiner als* $30|D|$.

Speziell ergibt sich, dass die Anzahl der kubischen Körper mit der Diskriminante $D$ kleiner als $30|D|$ ist, eine viel bessere obere Grenze als in der vorigen Nummer. Die den Fundamentalringen entsprechenden Formenklassen werden *Fundamentalformenklassen* genannt.

Es gibt nur vier reelle kubische Ringe mit negativer $D$ und $|D| < 75$, nämlich die folgenden: 1) $R(1, \xi, \xi^2)$ mit $\xi^3 + \xi^2 - 1 = 0$ und $D = -23$; 2) $R(1, \xi, \xi^2)$ mit $\xi^3 + \xi - 1 = 0$ und $D = -31$; 3) $R(1, \xi, \xi^2)$ mit $\xi^3 + \xi^2 + \xi - 1 = 0$ und $D = -44$; 4) $R(1, \xi, \xi^2)$ mit $\xi^3 + 2\xi - 1 = 0$ und $D = -59$.

Der kubische Ring mit der kleinsten positiven $D$ ist gegeben durch $R(1, \xi, \xi^2)$ mit $\xi^3 + \xi^2 - 2\xi - 1 = 0$ und $D = 49$.

Diese Ringe sind alle Fundamentalringe.

**6.** *Über die kubischen Ringe $R(\theta)$.* — Der Ring $R(1, \theta, \theta^2)$ wird kurz $R(\theta)$ bezeichnet. Ist $\theta^3 - p\theta^2 + q\theta - r = 0$, so entspricht diesem Ring die Form $(1, p, q, r)$. Es sei gegeben der Ring $R(1, \alpha, \beta)$ mit

$$\alpha^3 - b\alpha^2 + ac\alpha - a^2 d = 0 \text{ und } \alpha\beta = ad,$$

und es sei $\theta = x\alpha + y\beta + z$ eine Zahl in diesem Ring; dann ist $\theta^2 = x_1\alpha + y_1\beta + z_1$ mit $x_1 = bx^2 + dy^2 + 2xz$ und $y_1 = ax^2 + cy^2 + 2yz$. Es ist ferner

$$D(\theta) = D(1, \alpha, \beta) \cdot (xy_1 - x_1 y)^2 = D(1, \alpha, \beta) \cdot (ax^3 - bx^2 y + cxy^2 - dy^3)^2. \qquad (2)$$

Hieraus folgt sofort: Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $R(1, \alpha, \beta)$ mit $R(\theta)$ identisch ist, ist, dass die Zahl 1 durch die Form $(a, b, c, d)$ darstellbar ist. Ob die Form diese Eigenschaft besitzt, können wir aber, wie wir in **3** sahen, im allgemeinen nicht entscheiden. Der einzige allgemeinere Fall, in dem wir entscheiden können, ob ein Ring sich auf einen Ring $R(\theta)$ reduzieren lässt, ist für die Ringe in reinen kubischen Zahlkörpern,

$$R(1, \sqrt[3]{A^2 B}, \sqrt[3]{A B^2}). \tag{3}$$

Dies folgt sofort aus Satz VI in **3**; es folgt sogar:

**Satz XIV.** *Es seien $A$ und $B$ kubenfreie, ganze positive Zahlen, $A > B > 1$. Dann gibt es in dem Körper $K\left(\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\right)$ höchstens einen von den Ringen (3), der sich auf $R(\theta)$ reduzieren lässt. Gibt es im Körper eine Einheit von der Form $x + y\sqrt[3]{N}$ oder von der Form $\frac{1}{3}(x + y\sqrt[3]{N})^3$, so lässt sich keiner von den Ringen (3) auf diese Weise reduzieren.*

In dem Körper $K(\sqrt[3]{150})$ können z. B. die Zahlen $A$ und $B$ die folgenden Werte haben (wir können uns offenbar auf teilerfremde $A$ und $B$ beschränken): $A = 45, B = 2$; $A = 20, B = 3$; $A = 75, B = 4$; $A = 6, B = 5$; $A = 50, B = 9$; $A = 36, B = 25$. Nur in dem Falle $A = 6, B = 5$ ist der entsprechende Ring reduzierbar.

Aus der Gleichung (2)' folgt, wenn $m$ die kleinste positive Zahl bezeichnet, die durch die Form $(a, b, c, d)$ darstellbar ist, dass es eine Zahl $\theta$ gibt derart, dass

$$D(\theta) = m^2 . D(1, \alpha, \beta).$$

In Verbindung mit Satz VII ergibt sich also: In jedem Ring $R(1, \alpha, \beta)$ mit der Diskriminante $D$ gibt es eine Zahl $\theta$ mit einer Diskriminante, die absolut genommen kleiner als $\left| D \sqrt{\frac{16}{27} D} \right|$ ist.

Wenn $\alpha$ eine ganze kubische Zahl ist, lässt sich jede Zahl $\beta$ des Körpers $K(\alpha)$ in der Form

$$\beta = \frac{a + b\alpha}{c + d\alpha} \tag{4}$$

darstellen, mit ganzzahligen Koeffizienten $a, b, c, d$. Dann gilt der Satz:

**Satz XV.** *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\beta$ dem Ringe $R(\alpha)$ gehört, ist, dass $\beta$ in der Form (4) dargestellt werden kann so, dass*

$$N(c + d\alpha) = \pm (ad - bc),$$

*und so, dass der grösste gemeinsame Teiler von $c$ und $d$ in $a$ und $b$ aufgeht. Dann ist, wenn $\alpha^3 - p\alpha^2 + q\alpha - r = 0$ ist,*

$$\beta = \pm d\alpha^2 \mp (c + pd)\alpha + \frac{a \mp rd^2}{c}$$

*und*

$$D(\beta) = (ad - bc)^2 D(\alpha).$$

Es sei nämlich $\beta$ eine Zahl in $R(\alpha)$ und

$$\beta = A\alpha^2 + B\alpha + C.$$

Dann folgt leicht wegen $\alpha^3 = p\alpha^2 - q\alpha + r$,

$$\beta = \frac{-A^2r + BC + ACp + (A^2q + B^2 + ABp - AC)\alpha}{B + Ap - A\alpha}.$$

Setzen wir nun $A = \pm d$, $B + Ap = \mp c$, $A^2r - BC - ACp = \pm a$ und $A^2q + B^2 + ABp - AC = \mp b$, so folgt

$$\begin{aligned} ad - bc &= -B^3 - 2pB^2A - (q + p^2)A^2B + (r - pq)A^3 \\ &= -N(B + Ap - A\alpha) = \pm N(c + d\alpha). \end{aligned}$$

Es wird ferner $B = \mp (c + pd)$ und $C = \frac{1}{c}(a \mp rd^2)$. Jeder gemeinsame Teiler von $c$ und $d$ geht in $A$ und $B$ auf und folglich auch in $a$ und $b$ auf.

Besteht umgekehrt die Gleichung (4) mit $N(c + d\alpha) = \pm (ad - bc)$, und setzen wir $\beta = A\alpha^2 + B\alpha + C$, so bekommen wir durch Multiplikation mit $c + d\alpha$ die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} Ac + Adp + Bd &= 0, \\ Bc - Adq + Cd &= b, \\ Cc + Adr \phantom{+ Cd} &= a. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$A = \pm d, \quad B = \mp (c + pd) \text{ und } C = \frac{1}{c}(a \mp rd^2).$$

Dass hier auch $C$ eine ganze Zahl ist, folgt leicht aus der Gleichung

$$c(c^2 + pcd + qd^2 \pm b) = \pm d(a \mp rd^2).$$

Es sei nämlich $\delta$ der grösste gemeinsame Teiler von $c$ und $d$. Nach der Voraussetzung teilt $\delta$ $a$ und $b$. Aus der Gleichung folgt dann, dass die Zahl $\frac{a}{\delta} \mp \frac{rd^2}{\delta}$ durch $\frac{c}{\delta}$ teilbar ist, und folglich ist $\frac{1}{c}(a \mp rd^2)$ ganz. Unser Satz ist folglich bewiesen.

Man hat oft zu entscheiden, ob zwei vorgelegte kubische Zahlen $\alpha$ und $\beta$ denselben Ring erzeugen. Notwendig dafür ist, dass $D(\alpha) = D(\beta)$. Gehört ausserdem $\beta$ dem Ringe $R(\alpha)$, so ist offenbar $R(\beta) = R(\alpha)$.

Aus dem Satze XV folgt sofort:

**Satz XVI.** *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Ringe $R(\alpha)$ und $R(\beta)$ identisch sind, ist, dass*

$$\beta = \frac{a + b\alpha}{c + d\alpha}$$

*ist, mit ganzzahligen Koeffizienten $a, b, c, d$ und mit $ad - bc = \pm 1$, und, dass $c + d\alpha$ eine Einheit ist.*

Diese Untersuchungen über kubische Ringe werde ich in einer folgenden Arbeit fortsetzen.

## § 3. Über die kubischen Einheiten.

**7.** *Allgemeines über die Verteilung der Einheiten.* — Die kubischen Einheiten sind die Wurzeln der irreduziblen Gleichungen

$$x^3 - px^2 + qx \mp 1 = 0,$$

mit ganzzahligen $p$ und $q$. Wir wollen uns hier mit dem Problem beschäftigen, wie die reellen kubischen Einheiten sich auf der reellen Achse verteilen. Die Resultate sind sehr verschieden, je nachdem die Diskriminante positiv oder negativ ist. In dem ersteren Fall gilt

**Satz XVII.** *In jedem Intervall der reellen Achse gibt es unendlich viele kubische Einheiten mit positiver Diskriminante.*

Um dies zu beweisen genügt es offenbar zu zeigen, dass in jedem Teilintervall des Intervalles $0 - 1$ wenigstens eine Einheit vorhanden ist. Es seien $p$ und $q$ ganze positive Zahlen, $p > q$. Dann hat die Gleichung $x^3 = -px^2 + qx + 1$ die positive Diskriminante

$$p^2q^2 + 4p^3 + 4q^3 + 18pq - 27$$

und folglich drei reelle Wurzeln. Das Produkt der Wurzeln ist positiv, folglich ist entweder eine oder alle drei Wurzeln positiv; da aber ihre Summe negativ ist, so ist eine Wurzel positiv und die zwei anderen negativ. Es sei $\eta$ die positive Wurzel. Dann ist $\eta < 1$; denn aus $\eta > 1$ würde folgen

$$1 < \eta^3 = -p\eta^2 + q\eta + 1$$

oder

$$q > p\eta > p,$$

was gegen die Voraussetzung ist. Es ist folglich $\eta < 1$ und

$$1 > -p\eta^2 + q\eta + 1$$

oder

$$\eta > \frac{q}{p}.$$

Weiter folgt

$$0 < -p\eta^2 + q\eta + 1$$

oder

$$\eta < \frac{q}{2p} + \sqrt{\frac{q^2}{4p^2} + \frac{1}{p}} < \frac{q}{p} + \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Die Einheit $\eta$ genügt folglich den Ungleichungen

$$\frac{q}{p} < \eta < \frac{q}{p} + \frac{1}{\sqrt{p}}. \tag{1}$$

Es sei nun gegeben das Intervall $\alpha - \beta$, mit $0 < \alpha < \beta < 1$. Es sei ferner $p$ eine beliebige ganze positive Zahl. Bezeichnet nun $q$ die grösste ganze Zahl $\leqq p\alpha + 1$, so ist

$$0 < \frac{q}{p} - \alpha \leqq \frac{1}{p}.$$

Wählen wir $p$ so gross, dass die folgende Ungleichung besteht

$$\beta - \alpha > \frac{1}{p} + \frac{1}{\sqrt{p}},$$

so ergibt sich für die positive Wurzel $\eta$ der Gleichung $\eta^3 + p\eta^2 - q\eta - 1 = 0$,

$$\alpha < \frac{q}{p} < \eta < \frac{q}{p} + \frac{1}{\sqrt{p}} < \beta.$$

Unser Satz ist folglich bewiesen.

Für kubische Einheiten mit negativer Diskriminante gilt dagegen:

**Satz XVIII.** *In jedem Intervall der reellen Achse, das den Nullpunkt nicht enthält, gibt es nur endlich viele kubische Einheiten mit negativer Diskriminante.*

Wir können sogar das folgende schärfere Resultat beweisen:

**Satz XIX.** *Es sei $x$ eine beliebige Zahl $> 1$, und es sei $A(x)$ die Anzahl der kubischen Einheiten mit negativer Diskriminante, die $< 1$ und $> \frac{1}{x}$ sind. Dann ist*

$$A(x) = \frac{8}{3} x\sqrt{x} + O(x). \tag{2}$$

Es genügt offenbar den letzteren Satz zu beweisen. Ist $\eta$ eine positive kubische Einheit $< 1$ mit negativer Diskriminante, so ist entweder

$$\eta^3 = p\eta^2 - q\eta + 1, \text{ mit } p \text{ und } q \geqq 1, \ p \neq q,$$

oder

$$\eta^3 = -p\eta^2 - q\eta + 1, \text{ mit } p \geqq 0 \text{ und } q \geqq 1$$

oder endlich

$$\eta^3 = -\eta^2 + 1.$$

Wir betrachten zuerst den Fall

$$\eta^3 = p\eta^2 - q\eta + 1, \tag{3}$$

mit $0 < \eta < 1$, und $p$ und $q$ positive ganze Zahlen. Die quadratische Form in $x$ und $y$

$$(x + y\eta')(x + y\eta'') = x^2 + xy(p - \eta) + \frac{1}{\eta} y^2$$
$$= \left(x + \frac{p-\eta}{2} y\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\eta^2 - \frac{1}{2}p\eta + q - \frac{1}{4}p^2\right) y^2$$

ist definit; und folglich muss die Ungleichung bestehen

$$q > \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p\eta - \frac{3}{4}\eta^2 > \frac{1}{4}p^2 - \frac{3}{4}. \tag{4}$$

Hieraus ergibt sich ferner $q > p - 1$ und folglich, da $q$ von $p$ verschieden ist, $q \geqq p + 1$.

Dieselbe Betrachtung über die Form

$$\left(x+\frac{y}{\eta'}\right)\left(x+\frac{y}{\eta''}\right)$$

führt auf die Ungleichung

$$p > \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}q\frac{1}{\eta} - \frac{3}{4}\frac{1}{\eta^2}.$$

Sie lässt sich so schreiben

$$\left(\frac{1}{\eta}-\frac{q}{3}\right)^2 > \frac{4}{9}(q^2-3p).$$

Wegen (4) kann $q^2-3p$ niemals negativ sein. Folglich wird entweder

$$\frac{1}{\eta} > \frac{q}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{q^2-3p} > \frac{q}{3} + \frac{2}{3}q\left(1-\frac{3p}{q^2}\right) = q - \frac{2p}{q}, \tag{5}$$

oder

$$\frac{q}{3} > \frac{1}{\eta} + \frac{2}{3}\sqrt{q^2-3p} > \frac{1}{\eta} + \frac{2}{3}q\left(1-\frac{3p}{q^2}\right).$$

Diese letzte Ungleichung kann aber, wie eine leichte Rechnung zeigt, wegen (4) nicht bestehen. Aus der Ungleichung (5) folgt

$$\frac{1}{\eta} > q - 2.$$

Wenn $\frac{1}{\eta} < x$, so ist folglich

$$q < x + 2$$

und wegen (4)

$$p < \sqrt{4q+3}.$$

Die Anzahl dieser Einheiten $\eta$, die $> \frac{1}{x}$ sind, ist daher kleiner als

$$\sum_{q=2}^{q<x+2} \sqrt{4q+3} = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + O(x). \tag{6}$$

(Die Summation über $q$ wird bis zu der grössten ganzen Zahl $< x + 2$ erstreckt.)

Die Diskriminante $D$ der Gleichung $x^3 = px^2 - qx + 1$, mit $p$ und $q \geqq 1$, ist immer negativ, wenn

$$q > \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p. \tag{7}$$

Dies ist evident, wenn $q \geqq \frac{1}{3}p^2$; denn es ist

$$D = \frac{4}{27}(p^2 - 3q)^3 - \frac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27)^2.$$

Es sei darauf $p^2 > 3q$, aber $q > \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p$. Dann ist

$$D = -q^2(4q - p^2) - 27 - 4p\left(p^2 - \frac{9}{2}q\right)$$

oder

$$D < -2q^2p - 27 + 6pq < 0.$$

Wenn die Ungleichung (7) besteht, ist also die Diskriminante negativ. Die Gleichung $x^3 = px^2 - qx + 1$ hat dann eine reelle und positive Wurzel $\eta$. Wie früher folgt dann die Ungleichung

$$p > \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}q\frac{1}{\eta} - \frac{3}{4}\frac{1}{\eta^2}.$$

Hieraus schliesst man, dass $\eta < 1$ ist. Denn aus $\eta > 1$ würde folgen

$$p > \frac{1}{4}q^2 - \frac{3}{4},$$

was gleichzeitig mit (7) nur für $q = 2, p = 1$ bestehen kann.

Nun ist, wegen $0 < \eta < 1 \leqq p$,

$$\frac{1}{\eta} = q - \eta(p - \eta) < q.$$

Folglich gibt es zu jedem Zahlenpaar $p$ und $q$, wenn $3 \leqq q < x$ und $1 \leqq p \leqq E(\sqrt{4q+1}) - 1$, eine Einheit $\eta > \frac{1}{x}$ mit negativer Diskriminante. Die Anzahl dieser Einheiten ist folglich grösser als

$$\sum_{q=3}^{q<x} (E(\sqrt{4q+1})-1) = \frac{4}{3} x\sqrt{x} + O(x).$$

($E(y)$ bedeutet die grösste ganze Zahl $\leqq y$.) Verbindet man dies mit dem in (6) erhaltenen Resultat, so ergibt sich für die genaue Anzahl der Wert

$$\frac{4}{3} x\sqrt{x} + O(x).$$

Genau dasselbe Resultat erhält man, wenn man die Einheiten betrachtet, die Wurzeln einer Gleichung

$$\eta^3 = -p\eta^2 - q\eta + 1, \quad (p \geqq 0,\ q \geqq 1)$$

sind. Es sei die Diskriminante negativ; dann ist $0 < \eta < 1$; und wie bisher folgt

$$q > \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p\eta - \frac{3}{4}\eta^2 > \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p - \frac{3}{4}.$$

Nun ist

$$0 < \eta^3 + p\eta^2 = 1 - q\eta$$

oder

$$\eta < \frac{1}{q}.$$

Ist $\eta > \frac{1}{x}$, so muss folglich $q < x$ sein. Die Anzahl der Einheiten $\eta > \frac{1}{x}$ ist daher kleiner als

$$\sum_{q=1}^{q<x} (2\sqrt{q+1}+1) = \frac{4}{3} x\sqrt{x} + O(x).$$

Andererseits hat die Gleichung $x^3 = -px^2 - qx + 1$, mit $p \geqq 0$ und $q \geqq 1$, eine negative Diskriminante $D$, wenn nur

$$q \geqq \frac{1}{4}p^2$$

ist; denn es ist

$$D = q^2(p^2 - 4q) + 4p\left(p^2 - \frac{9}{2}q\right) - 27 < 0.$$

Die Gleichung $x^3 = -px^2 - qx + 1$ hat dann eine reelle und positive Wurzel $\eta$. Es ist weiter $\eta < 1$, und ferner

$$\frac{1}{\eta} = \eta^2 + p\eta + q < 1 + p + q.$$

Folglich gibt es zu jedem ganzzahligen Zahlenpaar $p$ und $q$, wenn $1 \leqq q < x - 2\sqrt{x} - 1$ und $0 \leqq p \leqq 2\sqrt{q}$, eine solche Einheit $\eta > \frac{1}{x}$ mit negativer Diskriminante. Die Anzahl dieser Einheiten ist daher grösser als

$$\sum_{q=1}^{q<x-2\sqrt{x}-1} E(2\sqrt{q}) = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + O(x).$$

Fassen wir die bisherigen Resultate zusammen, so erhalten wir die Formel (2).

Man sieht auch, wie man mittels unserer Methode alle Einheiten im Intervall $1 - \frac{1}{x}$ berechnen kann. Es sei z. B. $x = 2$. Wir betrachten zuerst die Gleichung $\eta^3 = p\eta^2 - q\eta + 1$ mit $p$ und $q \geqq 1$. Dann muss $2 > \frac{1}{\eta} > q - 2$, also $q = 1, 2$ oder $3$. Ferner folgt $q > \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}p - \frac{3}{4}$ oder $q > p - 1$; da $p = q$ unmöglich ist, muss $q \geqq p + 1$. Es bestehen aber die folgenden Möglichkeiten: $q = 2$, $p = 1$; $q = 3$, $p = 2$; $q = 3$, $p = 1$. Die zwei letzten Fälle geben aber eine Zahl $\eta < \frac{1}{2}$. Es sei darauf die Gleichung $\eta^3 = -p\eta^2 - q\eta + 1$ mit $q \geqq 1$ und $p \geqq 0$. Dann folgt

$$1 = \eta^3 + p\eta^2 + q\eta > \frac{1}{8} + \frac{1}{4}p + \frac{1}{2}q,$$

was nur für $p = 0, q = 1$ und $p = q = 1$ möglich ist. Die entsprechenden Werte von $\eta$ sind auch $> \frac{1}{2}$. Endlich gibt die Gleichung $\eta^3 = 1 - \eta^2$ eine Zahl $\eta > \frac{1}{2}$. Die sämtlichen Einheiten (mit negativer Diskriminante) $> \frac{1}{2}$ und $< 1$ sind folglich gegeben durch die vier Gleichungen:

$$\eta^3 = 1 - \eta^2,\ \eta^3 = 1 - \eta,\ \eta^3 = -\eta^2 - \eta + 1 \text{ und } \eta^3 = \eta^2 - 2\eta + 1.$$

Die vier Zahlen $\eta$ sind nach abnehmender Grösse geordnet.

8. *Einheiten in einem gegebenen Zahlkörper.* — Aus der allgemeinen Körpertheorie folgt: In einem kubischen Zahlkörper mit negativer Diskriminante gibt es eine Fundamentaleinheit $\xi$ derart, dass jede Einheit des Körpers sich in der Form

$$\pm \xi^n$$

darstellen lässt, wo $n$ irgend einen ganzen rationalen Exponenten bedeutet. Man kann hier (wenn der Körper reel ist) $\xi$ positiv und $< 1$ wählen; in der Folge werden Fundamentaleinheiten immer so gewählt.

In einem kubischen Körper mit positiver Diskriminante gibt es zwei Fundamentaleinheiten $\xi$ und $\zeta$ derart, dass jede Einheit des Körpers sich in der Form

$$\pm \xi^n \zeta^m$$

darstellen lässt, mit ganzzahligen Exponenten $n$ und $m$. Es gibt offenbar unendlich viele solche Paare von Einheiten $\xi$ und $\zeta$.

Diese Resultate lassen sich sofort auf die Ringe $R(1, \alpha, \beta)$ übertragen. Die Aufgabe die Einheiten des Ringes $R(1, \alpha, \beta)$ zu bestimmen ist offenbar mit der anderen Aufgabe identisch, die Lösungen der unbestimmten Gleichung

$$N(x + y\alpha + z\beta) = \pm 1 \tag{1}$$

in ganzen (rationalen) Zahlen $x$, $y$ und $z$ zu bestimmen. Wie verteilen sich nun die Einheiten in dem Raum $(x, y, z)$? Über dieses wichtige Problem weiss man aber noch fast gar nichts. Man könnte z. B. die folgende spezielle Frage stellen: Gibt es unendlich viele oder nur endlich viele Einheiten in der Ebene

$$ax + by + cz = d,$$

wo $a$, $b$, $c$ und $d$ rational sind? Nur in dem Falle $d = 0$ wissen wir hier Bescheid. Ist nämlich $a$ von Null verschieden, so wird $x = -\frac{1}{a}(by + cz)$. Wird dieser Wert von $x$ in die Gleichung (1) eingesetzt, so bekommt man eine Gleichung

$$F(y, z) = \pm C,$$

wo $F$ eine irreduzible, binäre kubische Form mit ganzzahligen Koeffizienten ist, und $C$ eine ganze Zahl. Dem Satze IV zufolge hat diese Gleichung nur endlich viele ganzzahlige Lösungen $y$ und $z$. Ist $a = 0$, so ist entweder $b$ oder $c$ von Null verschieden, und der Beweis verläuft ganz analog.

**Satz XX.** *In einer Ebene durch Origo gibt es nur endlich viele Einheiten eines gegebenen kubischen Körpers.*

Dieser Satz lässt sich mittels der anderen Resultate in der Nummer **3** bedeutend präcisieren, wenn die Diskriminante negativ ist. Aus dem Satze V folgt:

**Satz XXI.** *Es sei $\alpha$ eine reelle ganze kubische Zahl mit negativer Diskriminante. Dann gibt es höchstens zwei positive (irrationale) Einheiten von der Form $x + y\alpha$, mit ganzen rationalen $x$ und $y$, abgesehen von den Fällen $D(\alpha) = -44$ und $= -31$, wo es drei solche Einheiten gibt, und von dem Falle $D(\alpha) = -23$ mit vier solchen Einheiten. Gibt es mehr als eine (positive, irrationale) Einheit $x + y\alpha$, so ist $R(\alpha) = R(\varepsilon)$, wo $\varepsilon$ die Fundamentaleinheit im Ringe $R(\alpha)$ ist.*

*Es sei $\eta^3 = -\eta^2 - \eta + 1$ mit $D(\eta) = -44$. Dann sind die Einheiten von der Form $x + y\eta$ gegeben durch*

$$\eta,\ \eta^4 = 2\eta - 1 \ \textit{und}\ \eta^{17} = 56 - 103\eta.$$

*Es sei $\eta^3 = 1 - \eta$ mit $D(\eta) = -31$. Dann sind die folgenden Einheiten von der Form $x + y\eta$*

$$\eta,\ \eta^3 = 1 - \eta \ \textit{und}\ \eta^8 = 3\eta - 2.$$

*Es sei $\eta^3 = 1 - \eta^2$ mit $D(\eta) = -23$. Die folgenden Einheiten haben dann die Gestalt $x + y\eta$*

$$\eta,\ \eta^{-2} = 1 + \eta,\ \eta^5 = 1 - \eta \ \textit{und}\ \eta^{14} = 4\eta - 2.$$

Die reelle Wurzel $\eta$ der Gleichung $\eta^3 = -\eta^2 - \eta + 1$ mit der Diskriminante $-44$ ist die Fundamentaleinheit des reellen kubischen Körpers mit der Diskriminante $-44$. Die reelle Wurzel $\eta$ der Gleichung $\eta^3 = 1 - \eta$ mit der Diskriminante $-31$ ist die Fundamentaleinheit des reellen kubischen Körpers mit derselben Diskriminante. Die reelle Wurzel $\eta$ der Gleichung $\eta^3 = 1 - \eta^2$ mit der Diskriminante $-23$ ist die Fundamentaleinheit des reellen kubischen Körpers mit derselben Diskriminante. Diese drei Zahlen $\eta$ sind alle positiv und $< 1$.

Wenn $\eta$ eine Einheit mit negativer Diskriminante ist, und $0 < \eta < 1$, und wenn $\eta^n = x + y\eta$ ist, so muss $n \geqq 0$ sein, abgesehen von dem Falle $\eta^3 = 1 - \eta^2$, wo $\eta^{-2} = 1 + \eta$.[1]

Wir wollen darauf den folgenden Satz beweisen:

---

[1] Siehe NAGELL **5**, Hilfssatz III.

**Satz XXII.** *Es sei $\eta$ die reelle Wurzel der irreduziblen Gleichung*

$$\eta^3 = p\eta^2 - q\eta + 1 \qquad (2)$$

*mit negativer Diskriminante und ganzzahligen $p$ und $q$. Es sei ferner $0 < \eta < 1$. Dann ist $\eta$ die Fundamentaleinheit im Ringe $R(\eta)$ des kubischen Körpers $K(\eta)$, wenn von den folgenden Fällen abgesehen wird:*

1) *Wenn $r > 1$ ist, und*

$$\eta^3 = -2r\eta^2 - r^2\eta + 1,$$

*dann ist $\eta = \xi^2$ und $\xi^3 = 1 - r\xi$, wo $\xi$ die Fundamentaleinheit des Ringes $R(\eta)$ ist. Es ist $R(\eta) = R(\xi)$.*

2) *In dem Falle*

$$\eta^3 = 5\eta^2 - 7\eta + 1,$$

*mit $D = -44$, ist $\eta = \xi^3$ und $\xi^3 = -\xi^2 - \xi + 1$. Es ist ferner $R(\eta) = R(\xi)$, und $\xi$ ist die Fundamentaleinheit des Ringes.*

3) *In den Fällen mit $D = -31$*

$$\eta_1^3 = -2\eta_1^2 - \eta_1 + 1,$$
$$\eta_2^3 = 3\eta_2^2 - 4\eta_2 + 1$$

*und*

$$\eta_3^3 = -5\eta_3^2 - 6\eta_3 + 1,$$

*ist $\eta_1 = \xi^2$, $\eta_2 = \xi^3$, $\eta_3 = \xi^5$ und $\xi^3 = 1 - \xi$. Es ist ferner $R(\eta_i) = R(\xi)$, und $\xi$ ist die Fundamentaleinheit des Ringes.*

4) *In den Fällen mit $D = -23$*

$$\eta_1^3 = \eta_1^2 - 2\eta_1 + 1,$$
$$\eta_2^3 = 2\eta_2^2 - 3\eta_2 + 1,$$
$$\eta_3^3 = -3\eta_3^2 - 2\eta_3 + 1,$$
$$\eta_4^3 = 4\eta_4^2 - 5\eta_4 + 1$$

*und*

$$\eta_5^3 = -7\eta_5^2 - 12\eta_5 + 1,$$

*ist $\eta_1 = \xi^2$, $\eta_2 = \xi^3$, $\eta_3 = \xi^4$, $\eta_4 = \xi^5$, $\eta_5 = \xi^9$ und $\xi^3 = 1 - \xi^2$. Es ist ferner $R(\eta_i) = R(\xi)$, und $\xi$ ist die Fundamentaleinheit des Ringes.*

*Beweis:* Es sei $\xi$ die Fundamentaleinheit im Ringe $R(\eta)$, $0 < \xi < 1$, und

$$\xi^3 = P\xi^2 - Q\xi + 1,$$

mit ganzzahligen $P$ und $Q$. Dann ist $D(\xi)=D(\eta)$ und, wenn $\eta \neq \xi$ ist, $\eta = \xi^n$ mit ganzzahligem $n>1$. Es ist folglich $R(\xi)=R(\eta)$, und dem Satze XVI zufolge muss

$$\eta = \frac{a\xi+b}{c\xi+d},$$

mit $ad-bc=\pm 1$, und $c\xi+d$ muss eine Einheit sein. Dann ist auch $a\xi+b$ eine Einheit. Wir können beide Einheiten positiv annehmen. Von den drei letzten Ausnahmefällen in unserem Satz wollen wir vorläufig absehen. Dann ist $a\xi+b=\xi^m$ und $c\xi+d=\xi^s$ mit $m>s\geqq 0$. Dem Satze XXI zufolge bestehen nur zwei Möglichkeiten, es ist entweder $s=0$ oder $s=1$. In dem ersteren Falle wird

$$\eta = \frac{a\xi+b}{1}, \text{ mit } ad=\pm 1.$$

Aus $\eta=\pm\xi+b$ folgt aber, wegen $0<\eta<1$ und $0<\xi<1$, $b=1$ und $\xi=1-\eta$. Die Zahl $1-\eta$ ist aber keine Einheit, wenn die Diskriminante von $\eta$ von den Zahlen $-23$ und $-31$ verschieden ist. Denn aus $N(1-\eta)=1$ folgt $-p+q=1$ oder

$$D(\eta)=p^4-6p^3+7p^2+6p-31.$$

Diese Zahl ist aber positiv für alle $p\geqq 5$ und für alle $p\leqq -2$. Die übrigen sechs Werte geben nur $D=-23$ oder $=-31$.

Es sei darauf

$$\eta = \frac{a\xi+b}{\xi}, \text{ mit } bc=\mp 1.$$

Ist $b=-1$, $\eta\xi=a\xi-1$ und $N(a\xi-1)=1$, so folgt

$$a^3-Qa^2+Pa=2.$$

Hieraus folgt offenbar $a=2$ und $P=2Q-3$, und

$$D(\eta)=-4Q^3+Q^2(2Q-3)^2-4(2Q-3)^3+18Q(2Q-3)-27.$$

Diese Zahl ist positiv für alle $Q\leqq 0$ und für alle $Q\geqq 6$. $Q=1$ gibt $\xi^3=-\xi^2-\xi+1$ und $\eta=\xi^3$; $Q=2$ gibt $\xi^3=\xi^2-2\xi+1$ und $\eta^2=\xi^5$; $Q=3$ gibt eine reduzible Gleichung; $Q=4$ und $Q=5$ führen auf Zahlen $\eta>1$.

Es muss folglich $b=+1$ sein, und $\eta\xi=a\xi+1=1-|a|\xi$. (Wegen $\eta\xi<1$ muss ja $a$ negativ sein.) Dann ist

$$N(1-|a|\xi)=1=1-|a|P+|a|^2Q-|a|^3,$$

oder

$$|a|^2-Q|a|+P=0.$$

Die Zahl $R=\sqrt{Q^2-4P}$ muss ganz-rational sein, und es ist

$$|a|=\frac{1}{2}(Q\pm R).$$

Es ist ferner

$$\xi^3=\frac{1}{4}(Q^2-R^2)\xi^2-Q\xi+1=\left(1-\frac{Q+R}{2}\xi\right)\left(1-\frac{Q-R}{2}\xi\right),$$

wo die Faktoren rechts Einheiten sein müssen. Ausser $1-|a|\xi$ gibt es aber keine Einheit $A+B\xi$ mit $AB\neq 0$. Sind die beiden Faktoren gleich $1-|a|\xi$, so wird

$$\xi^3=(1-|a|\xi)^2$$

oder

$$(\eta\xi)^2=\xi^{2(n+1)}=(1-|a|\xi)^2=\xi^3,$$

was unmöglich ist. Ist der eine Faktor gleich $1$, also $Q=\pm R$ und $P=0$, so wird

$$\xi^3=1-Q\xi.$$

Es ist folglich $\eta=\xi^2$, und diese Zahl ist Wurzel der Gleichung

$$\eta^3=-2Q\eta^2-Q^2\eta+1.$$

Es bleibt nur übrig den Satz für die drei letzten Ausnahmefälle zu beweisen.

Der Fall mit $D=-44$. In dem reellen Ringe mit dieser Diskriminante ist die Fundamentaleinheit gegeben durch die Gleichung $\xi^3=-\xi^2-\xi+1$. Dem Satze XXI zufolge sind die positiven Einheiten von der Form $x+y\xi$ gegeben durch

$$1,\ \xi,\ \xi^4=2\xi-1 \text{ und } \xi^{17}=56-103\xi.$$

Durch Kombinieren von diesen Einheiten ergibt sich die einzige Möglichkeit für $\eta$

$$\eta=\xi^3=\frac{2\xi-1}{\xi}.$$

Diese Zahl ist Wurzel der Gleichung $\eta^3=5\eta^2-7\eta+1$.

Der Fall mit $D = -31$. In dem reellen Ringe mit dieser Diskriminante ist die Fundamentaleinheit gegeben durch die Gleichung $\xi^3 = 1 - \xi$. Dem Satze XXI zufolge sind die positiven Einheiten von der Form $x + y\xi$ gegeben durch

$$1, \ \xi, \ \xi^3 = 1 - \xi \ \text{und} \ \xi^8 = 3\xi - 2.$$

Hieraus findet man für $\eta$ die folgenden drei Möglichkeiten

$$\xi^2 = \frac{1-\xi}{\xi}, \quad \xi^3 = \frac{1-\xi}{1}, \quad \xi^5 = \frac{3\xi - 2}{1 - \xi}.$$

Diese Zahlen sind eben die im dritten Ausnahmefall angegebenen Ausnahmewerte für $\eta$.

Der Fall mit $D = -23$. In dem reellen Ringe mit dieser Diskriminante ist die Fundamentaleinheit gegeben durch die Gleichung $\xi^3 = 1 - \xi^2$. Die positiven Einheiten von der Form $x + y\xi$ sind gegeben durch

$$1, \ \xi + 1 = \xi^{-2}, \ \xi, \ \xi^5 = 1 - \xi \ \text{und} \ \xi^{14} = 4\xi - 3.$$

Man findet für $\eta$ die folgenden fünf Möglichkeiten

$$\xi^2 = \frac{1}{\xi + 1}, \quad \xi^3 = \frac{\xi}{\xi + 1}, \quad \xi^4 = \frac{1 - \xi}{\xi}, \quad \xi^5 = \frac{1 - \xi}{1}, \quad \xi^9 = \frac{4\xi - 3}{1 - \xi}.$$

Diese Zahlen sind offenbar die im vierten Ausnahmefall angegebenen Ausnahmewerte für $\eta$. Der Satz ist damit vollständig bewiesen.

## § 4. Über kubische Zahlen mit gegebener Diskriminante.

**9.** Es gibt offenbar unendlich viele ganze Zahlen in einem kubischen Körper mit derselben Diskriminante; denn es ist $D(\alpha) = D(\alpha + m)$, wenn $m$ eine beliebige ganze rationale Zahl ist.

Als eine einfache Folgerung aus dem Thueschen Satze (Satz IV) beweist man:

**Satz XXIII.** *Es sei $\alpha$ eine ganze kubische Zahl mit gegebener Diskriminante $D$, und es sei*

$$\alpha^3 = p\alpha^2 - q\alpha + r.$$

*Wenn dann eine der Zahlen $p$, $q$, $r$ gegeben ist, so bestehen nur endlich viele Möglichkeiten für die zwei übrigen. Speziell gibt es also nur endlich viele ganze kubische Zahlen mit gegebener Diskriminante und gegebener Norm.*

Es sei nämlich $1, \omega_1, \omega_2$ eine Körperbasis in $K(\alpha)$ und $\Delta$ die Körperdiskriminante. Ferner sei $\alpha = u + v\omega_1 + w\omega_2$. Die Diskriminante von $\alpha$ ist offenbar von $u$ unabhängig. Es ist

$$D(\alpha) = D(v\omega_1 + w\omega_2) = \Delta \cdot [f(v, w)]^2,$$

wo $f(v, w)$ eine ganzzahlige irreduzible kubische Form ist. $\Delta$ ist durch $D(\alpha)$ beschränkt. Dem Satze IV zufolge hat aber die Gleichung

$$f(v, w) = \pm \sqrt{\frac{D}{\Delta}}$$

nur endlich viele Lösungen in ganzen (rationalen) Zahlen $v$ und $w$. Wenn $D$ gegeben ist, so sind also schon die Koeffizienten $v$ und $w$ beschränkt. Ist nun $p$ gegeben, so folgt aus

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = p$$

eine Gleichung ersten Grades zur Bestimmung von $u$. Ist $q$ gegeben, so folgt aus

$$\alpha\alpha' + \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha'' = q$$

eine Gleichung zweiten Grades in $u$. Ist endlich $r$ gegeben, so gibt

$$N(u + v\omega_1 + w\omega_2) = r$$

eine Gleichung dritten Grades in $u$. Unser Satz ist folglich bewiesen.

Als Nebenresultat ergibt sich: *Die Anzahl der kubischen Einheiten mit gegebener Diskriminante ist endlich.*

Wenn die Diskriminante negativ ist, kann man diese Resultate bedeutend verschärfen.

Der Satz XXII gibt uns ein Mittel um die sämtlichen Einheiten mit gegebener negativer Diskriminante zu bestimmen. Wir beschränken uns auf positive Einheiten, die $< 1$ sind. (Hat die Einheit $\xi$ die Diskriminante $D$, so haben natürlich auch die Einheiten $-\xi$ und $\pm \frac{1}{\xi}$ dieselbe Diskriminante.) Es sei nun gegeben die negative Diskriminante $D$, verschieden von $-23$, $-31$ und $-44$.

Dann bestimmen wir die sämtlichen Ringe mit dieser Diskriminante. In diesen Ringen bestimmen wir die Fundamentaleinheiten $\xi$ $(0<\xi<1)$. Die gesuchten Einheiten sind dann, dem Satze XXII zufolge, diejenigen unter den $\xi$, die die Diskriminante $D$ haben. Nur in dem Falle $\xi^3=1-q\xi$ $(q>1)$ gibt es noch eine Einheit, nämlich $\xi^2$, mit der Diskriminante $D$.

Aus dem Satze XXII folgt sofort: Es gibt genau zwei Einheiten mit der Diskriminante $-44$, nämlich:

$$\xi \text{ und } \xi^3, \text{ wenn } \xi^3=-\xi^2-\xi+1.$$

Es gibt genau vier Einheiten mit der Diskriminante $-31$, nämlich:

$$\xi,\ \xi^2,\ \xi^3 \text{ und } \xi^5, \text{ wenn } \xi^3=1-\xi.$$

Es gibt genau sechs Einheiten mit der Diskriminante $-23$, nämlich:

$$\xi,\ \xi^2,\ \xi^3,\ \xi^4,\ \xi^5 \text{ und } \xi^9, \text{ wenn } \xi^3=1-\xi^2.$$

---

## Literaturverzeichnis.

A. Arndt: **1.** Versuch einer Theorie der homogenen Funktionen des dritten Grades mit zwei Variabeln, Archiv d. Math. u. Phys. 17 (1851), S. 1—53.

——: **2.** Untersuchungen über die Anzahl der kubischen Klassen, welche zu einer determinirenden quadratischen Klasse gehören, Archiv d. Math. u. Phys. 19 (1852), S. 408—418.

——: **3.** Tabellarische Berechnung der reducirten binären kubischen Formen und Klassification derselben usf., Archiv d. Math. u. Phys. 31 (1858), S. 335—448.

——: **4.** Zur Theorie der binären kubischen Formen, Journ. f. Math. 53 (1857), S. 309—321.

R. Dedekind: **1.** Über die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Körpern, Journ. f. Math. 121 (1900), S. 40.

B. Delaunay: **1.** Vollständige Lösung der Gleichung $X^3\varrho+Y^3=1$ (russisch), Publ. Math. Ges. zu Kharkow 1916.

——: **2.** La solution générale de l'équation $x^3\varrho+y^3=1$, C. R. Acad. Sc. Paris, 162 (1916), S. 150.

——: **3.** Représentation d'un nombre entier par une forme cubique à discriminant négatif, C. R. Acad. Sc., Paris, 171 (1920), S. 336 und 172 (1921), S. 434.

——: **4.** Vollständige Lösung der unbestimmten Gleichung $x^3\varrho+y^3=1$ (russisch), Bull. Acad. Sc., St. Petersburg 1922.

B. DELAUNAY: **5.** Darstellung von Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativer Diskriminante (russisch), ibid.

——: **6.** Sur l'algorithme de rehaussement, C. R. Acad. Sc., Paris 178 (1924).

——: **7.** Lösung des Äquivalenzproblems und Tabularisierung der binären kubischen Formen mit negativer Diskriminante (russisch), Journ. Math. Ges. zu Leningrad 1926.

——: **8.** Über den Algorithmus der Erhöhung, ibid. 1927.

——: **9.** Vollständige Lösung der Gleichung $X^3q + Y^3 = 1$ in ganzen Zahlen, Math. Zeitschrift, Bd. 28, Berlin 1928.

CH. HERMITE: **1.** Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres, Journ. f. Math. 41 (1851), S. 191—216.

J. L. LAGRANGE: **1.** Œuvres, t. II, S. 265.

F. LEVI: **1.** Kubische Zahlkörper und binäre kubische Formenklassen, Ber. d. Sächsischen Ges. d. Wiss., Math.-Phys. Klasse, Bd. 66, Leipzig 1914.

G. B. MATHEWS: **1.** (zusammen mit W. E. H. BERWICK) On the reduction of arithmetical binary cubics which have a negative determinant, Proc. London Math. Soc., 10 (1912), S. 48—53.

——: **2.** On the reduction and classification of binary cubics which have a negative determinant, ibid. S. 128—138.

H. MINKOWSKI: **1.** Diophantische Approximationen, Leipzig 1907.

T. NAGELL: **1.** Vollständige Lösung einiger unbestimmten Gleichungen dritten Grades, Videnskapsselskapets Skrifter, Kristiania 1922.

——: **2.** Über die Einheiten in reinen kubischen Zahlkörpern, ibid. 1923.

——: **3.** Solution complète de quelques équations cubiques à deux indéterminées, Journ. de Math., 9e série, t. 4 (1925), S. 209—270.

——: **4.** Über einige kubische Gleichungen mit zwei Unbestimmten, Math. Zeitschr. 24 (1925).

——: **5.** Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativer Diskriminante, Math. Zeitschr. 28 (1928).

——: **6.** Zahlentheoretische Notizen VII—IX, Norsk Mat. For. Skrifter, Nr. 17 (1927, Oslo).

——: **7.** L'Analyse Indéterminée de degré supérieur, Mémorial des Sciences Mathématiques, N° XXXIX (Paris 1929).

W. L. REID: **1.** Tafel der Klassenanzahlen für kubische Zahlkörper, Dissertation, Göttingen 1899.

J. SOMMER: **1.** Vorlesungen über Zahlentheorie, Leipzig 1907.

H. WEBER: **1.** Über Abelsche Zahlkörper dritten und vierten Grades, Sitzungsber. d. Ges. d. Naturwiss. zu Marburg 1892.