ENSEMBLES EXCEPTIONNELS.

Par

ARNE BEURLING.

à UPSAL.

D'après un théorème fondamental que l'on doit à M. LEBESGUE, la primitive d'une fonction sommable $f(x)$ possède presque partout une dérivée unique et finie. Par *l'ensemble exceptionnel* E_f de f nous entendrons l'ensemble où la dérivée symétrique

$$\lim_{h=0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(x)\,dx$$

n'existe pas finie. Sa mesure linéaire $m E_f$ est donc nulle, et ceci est la seule propriété connue relative à la métrique de cet ensemble.

Dans le présent mémoire nous allons étudier un cas particulier de la question suivante: caractériser la métrique de l'ensemble exceptionnel E_f si $f(x)$ est soumis à une certaine condition qui implique la sommabilité, par exemple si une intégrale de la forme

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|^p\,dx, \qquad p \geq 1,$$

s'annule d'un certain ordre pour $h \to 0$.

Nous allons traiter ce problème à l'aide de séries de Fourier. Considérons une fonction sommable $f(\theta)$ de période 2π et sa série de Fourier

$$f(\theta) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \tag{1}$$

Pour étudier f sur un ensemble E de mesure nulle, nous allons procéder comme suit. Supposons qu'on puisse trouver une fonction additive et non négative d'ensembles μ, s'annulant hors de E et prenant sur cet ensemble la valeur 1, telle que, en posant

$$\left.\begin{matrix} h_n \\ k_n \end{matrix}\right\} = \int_0^{2\pi} \left\{\begin{matrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{matrix}\right\} d\mu(\theta), \tag{2}$$

la série

$$\sum_1^\infty (|a_n h_n| + |b_n k_n|) \tag{3}$$

converge. On aura alors formellement

$$\int_E f(\theta)\, d\mu(\theta) = \frac{1}{2} a_0 h_0 + \sum_1^\infty (a_n h_n + b_n k_n). \tag{4}$$

La série du second membre étant absolument convergente, cela indique qu'il sera possible d'attribuer à f une valeur finie et déterminée en tout point de E, sauf au plus sur un ensemble e négligeable pour l'intégrale, c'est-à-dire pour lequel $\mu(e)$ s'annule. La convergence de la série (3) exprime d'autre part une propriété métrique de E, car plus cet ensemble est »mince», plus concentrée est la masse qu'il porte et plus grandes sont les constantes $|h_n|$ et $|k_n|$.

§ 1.

Nous dirons qu'une fonction $f(\theta)$ à carré sommable et de période 2π appartient à la classe (S) si

$$S(f) \equiv \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{|f(\theta+t) - f(\theta-t)|^2}{t^2}\, d\theta\, dt < \infty. \tag{5}$$

A l'aide de la formule de Parseval on obtient pour $S(f)$ cette expression:

$$S(f) = \sum_1^\infty n(|a_n|^2 + |b_n|^2). \tag{6}$$

Nous poserons de même, si f et g sont deux fonctions de (S),

$$(7) \qquad S(f,g) \equiv \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} \frac{(f(\theta+t)-f(\theta-t))}{t}\,\frac{(g(\theta+t)-g(\theta-t))}{t}\,d\theta\,dt,$$

d'où

$$(8) \qquad S(f,g) = \sum_1^\infty n(a_n c_n + b_n d_n),$$

c_n et d_n étant les constantes de Fourier de g. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on aura

$$(9) \qquad S^2(f,g) \leq S(f)\,S(g).$$

La quantité $S(f)$ ainsi définie admet diverses interprétations importantes. En posant

$$(10) \qquad f(r,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

on obtient pour $r < 1$ une fonction harmonique, réelle ou complexe, dont l'intégrale de Dirichlet

$$(11) \qquad D(f) \equiv \frac{1}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2<1}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)dx\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial f}{\partial r}\right|^2 r\,d\theta\,dr$$

est égale à $S(f)$. Inversement, si $f(r,\theta)$ est une fonction harmonique dans le cercle unité pour laquelle $D(f)$ est fini, sa fonction limite pour $r = 1$ appartient à (S) et $S(f) = D(f)$. Si en particulier $f(r,\theta) = f(z)$ est une fonction analytique de la variable complexe $z = re^{i\theta}$, $D(f)$ et par suite aussi $S(f)$, représente l'aire, multipliée par le facteur $2/\pi$, de la surface de Riemann en laquelle $f(z)$ transforme le cercle unité.

Considérons aussi le cas où $f(r,\theta) = u(r,\theta)$ est le potentiel dû à une distribution μ de la masse 1 sur $|z| = 1$,

$$(12) \qquad u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} \log\frac{1}{|re^{i\theta} - e^{i\varphi}|}\,d\mu(\varphi).$$

On aura pour $r < 1$, avec les notations (2),

$$(13) \qquad u(r,\theta) = \sum_{1}^{\infty} \frac{r^n}{n}(h_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta).$$

En supposant finie la borne supérieure V_μ de u

$$(14) \qquad S(u) = \lim_{r=1-0} \sum_{1}^{\infty} \frac{r^n}{n}(h_n^2 + k_n^2) = \lim_{r=1-0} \int_0^{2\pi} u(r,\theta)\, d\mu(\theta) \leq V_\mu,$$

et l'on reconnaît aisément que $S(u)$ représente la valeur double de l'énergie potentielle de la masse par rapport à la force attirante $1/r$. Les intégrations terme à terme que nous avons faites sont évidemment légitimes, les séries étant uniformément convergentes.

Rappelons-nous maintenant les notions suivantes concernant la capacité logarithmique d'un ensemble. Soit E un ensemble ouvert ou fermé sur le cercle $|z| = 1$, et soit μ une distribution de la masse 1 sur E, c'est-à-dire une fonction additive et non négative d'ensembles mesurables, s'annulant hors de E et prenant sur cet ensemble la valeur 1. Soit ensuite V_μ la borne supérieure de u et $V(E)$ la borne inférieure de V_μ quand μ varie. D'après la définition de M. de la Vallée Poussin[1], la capacité logarithmique, $C(E)$ de E est

$$C(E) = e^{-V(E)}.$$

Une extension de cette définition aux ensembles quelconques conduit, comme l'a montré M. Frostman[2], à ce que $C(E)$ devient égal à la borne supérieure de la capacité d'un ensemble fermé contenu dans E. Or, quand il s'agit de démontrer qu'un ensemble est »petit», il vaut mieux employer une mesure ayant la nature d'une mesure extérieure. C'est pourquoi nous considérons dans la suite la capacité *extérieure*, $\bar{C}(E)$, définie ainsi:

$$\bar{C}(E) = \operatorname*{Borne\ inf}_{O \supset E} C(O)$$

O étant un ensemble ouvert contenant E.

---

[1] *Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet, Annales de l'Inst. H. Poincaré,* t. 2 (1932), p. 226 où la définition est donnée pour la capacité newtonienne.

[2] *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles, Thèse, Lund* (1935).

§ 2.

Après ces préliminaires, démontrons le théorème suivant:

Théorème I. *Pour une fonction de la classe* (S), *l'ensemble exceptionnel* E_f *coïncide avec l'ensemble où la série de Fourier diverge, et celui-ci, considéré sur le cercle* $|z| = 1$, *est de capacité extérieure nulle.*

Supposons pour simplifier que $a_0 = 1$, et posons

$$s_n(\theta) = \sum_1^n u_n(\theta), \qquad u_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta.$$

D'après un théorème dû à M. Fejér[1], la méthode de sommation de Poisson-Abel est complètement effective pour une série de Fourier de la classe (S) en ce sens qu'il existe une suite de nombres $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots \to 1$, telle qu'on ait uniformément

$$\lim_{n=\infty} |s_n(\theta) - f(r_n, \theta)| = 0.$$

La série de Fourier de $f(\theta)$ converge donc en tout point où $f(r, \theta)$ possède une limite radiale finie. En notant que

$$\frac{1}{2h} \int_{\theta-h}^{\theta+h} f(\theta)\, d\theta = \sum_1^\infty u_n(\theta) \frac{\sin nh}{nh} \tag{15}$$

on vérifie aisément que cette expression pour $h \to 0$ tend vers la limite $\Sigma u_n(\theta)$ si cette série et $\Sigma n |u_n(\theta)|^2$ convergent, et inversement, que l'existence de la limite de (15) entraîne la convergence de la série. La dernière proposition résulte d'ailleurs du théorème classique de Fatou[2] combiné avec le théorème cité de M. Fejér. Nous n'insisterons plus sur la démonstration de ces propriétés en principe bien connues.

Tout revient donc à démontrer que $f(r, \theta)$ converge vers une limite finie sauf au plus sur un ensemble dont la capacité extérieure est nulle. Dans l'étude de la limite radiale nous allons nous servir d'une méthode nouvelle. Nous considérons la variation totale, soit $F(r, \theta)$, de $f(r, \theta)$ sur le segment $(0, r)$ du rayon vecteur θ,

$$F(r, \theta) = \int_0^r \left| \frac{\partial}{\partial r} f(r, \theta) \right| dr.$$

---

[1] *Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze, Berichte d. Bayer. Akad.* 3., (1910).

[2] *Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta math.* t. 30, (1906).

La limite de $f(r,\theta)$ existe manifestement en tout point où $F(\theta)=\lim\limits_{r=1-0} F(r,\theta)$ est fini. La fonction $F(\theta)$, appelée dans la suite la *majorante forte* de $f(\theta)$, possède cette propriété remarquable, qui va jouer, d'ailleurs, le rôle essentiel dans la démonstration du Théorème I:

Lemme I. *Si $f(\theta)$ appartient à la classe (S), $F(\theta)$ le fait aussi et*

$$S(F) < S(f). \tag{16}$$

Démontrons d'abord que $F(r,\theta)$ est une fonction sousharmonique. Si u et v sont deux fonctions harmoniques, $+\sqrt{u^2+v^2}$ est sousharmonique, d'où résulte que le module d'une fonction harmonique, réelle ou complexe, est sousharmonique. La fonction

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(r\alpha,\theta)=\varphi_\alpha(r,\theta) \qquad (0<\alpha\leq 1)$$

est harmonique dans le cercle unité pour les valeurs indiquées du paramètre α; $|\varphi_\alpha|$ est par suite sousharmonique d'où l'on tire que l'intégrale

$$F(r,\theta)=\int\limits_0^r\left|\frac{\partial}{\partial r} f(r,\theta)\right|dr=\int\limits_0^1|\varphi_\alpha(r,\theta)|\,d\alpha$$

l'est aussi. Remarquons que la dérivée F'_r est continue, tandis que F'_θ peut avoir des sauts sur les rayons vecteurs le long desquels $|f'_r|$ s'annule.

Démontrons maintenant l'inégalité

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)^2 d\theta \leq r^2\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 d\theta \tag{17}$$

et supposons, pour un moment, que $F(r,\theta)$ admette des dérivées continues jusqu'au second ordre pour $0<r<1$. On obtient alors par intégrations partielles

$$\int\limits_0^{2\pi}\left\{r^2\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2-\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)^2\right\}d\theta=2\int\limits_0^r\int\limits_0^{2\pi} r^2\frac{\partial F}{\partial r}\Delta F\,d\theta\,dr \tag{18}$$

où Δ désigne la laplacienne. Puisque $F(r,\theta)$ est sousharmonique et $F'_r\geq 0$, on a $F'_r\Delta F\geq 0$, d'où l'inégalité proposée dans l'hypothèse faite. Si $F(r,\theta)$ n'admet pas de dérivées secondes la formule (18) n'est plus valable, mais l'inégalité (17) subsiste, car on peut toujours trouver une suite de fonctions sousharmoniques F_n satisfaisant d'une part aux conditions précédentes, et telles qu'on ait d'autre part

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} \left\{ r^2 \left(\frac{\partial F_n}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial F_n}{\partial \theta}\right)^2 \right\} d\theta = \int_0^{2\pi} \left\{ r^2 \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 \right\} d\theta.$$

La fonction $F'_r = |f'_r|$ est par hypothèse à carré sommable sur le cercle unité. On en conclut, par une application évidente de l'inégalité de Schwarz, que $F(\theta)$ est à carré sommable, et de plus, puisque $F(r, \theta)$ tend en croissant vers $F(\theta)$, que les constantes de Fourier de $F(r, \theta)$ convergent vers celles de $F(\theta)$ quand $r \to 1$. Posons

$$(19) \qquad F(r, \theta) \sim \frac{1}{2} \alpha_0(r) + \sum_1^\infty (\alpha_n(r) \cos n\theta + \beta_n(r) \sin n\theta),$$

$$(20) \qquad F^*(r, \theta) = \frac{1}{2} \alpha_0(1) + \sum_1^\infty r^n (\alpha_n(1) \cos n\theta + \beta_n(1) \sin n\theta),$$

$F^*(r, \theta)$ est donc la fonction harmonique pour $r < 1$ qui se réduit à $F(\theta)$ sur la frontière $r = 1$. On est maintenant conduit à l'inégalité fondamentale (16) d'une manière très simple en considérant l'intégrale de Dirichlet pour les trois fonctions $f(r, \theta)$, $F(r, \theta)$ et $F^*(r, \theta)$. D'après (11) et (17)

$$(21) \qquad D(F) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 \right\} r\, d\theta\, dr \leq \frac{2}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 r\, d\theta\, dr,$$

$$(22) \qquad D(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\{ \left|\frac{\partial f}{\partial r}\right|^2 + \frac{1}{r^2} \left|\frac{\partial f}{\partial \theta}\right|^2 \right\} r\, d\theta\, dr = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial f}{\partial r}\right|^2 r\, d\theta\, dr.$$

Donc $D(F) \leq D(f)$. Nous aurons de plus, d'une part, en vertu du principe de Riemann-Dirichlet, $D(F^*) < D(F)$, $F(r, \theta)$ n'étant pas harmonique, et d'autre part, d'après la définition de la quantité S, $D(F^*) = S(F^*) = S(F)$ et $D(f) = S(f)$, d'où en somme

$$S(F) = S(F^*) = D(F^*) < D(F) \leq D(f) = S(f).$$

La démonstration précédente est peut-être un peu hardie. C'est de la rigueur de l'application du principe de Riemann-Dirichlet que l'on pourrait douter; la démonstration classique exige en effet que F^* possède une dérivée normale bornée. Or, on peut se dispenser de toute hypothèse sur cette fonction en procédant comme suit. Les séries de Fourier de F'_r et F'_θ s'obtiennent en dérivant (19) terme à terme, et l'on aura, en appliquant la formule de Parseval à (21),

$$D(F) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \alpha'^2_0(r) r + \sum_1^\infty \left(r \alpha'^2_n(r) + n^2 \frac{\alpha_n^2(r)}{r} + r \beta'^2_n(r) + n^2 \frac{\beta_n^2(r)}{r} \right) \right\} dr.$$

Puisque $F(r, \theta) = O(r)$, les constantes de Fourier $\alpha_n(r), \beta_n(r)$ s'annulent pour $r = 0$, et l'on aura par un calcul élémentaire

$$\int_0^1 \left(r \alpha'^2_n(r) + n^2 \frac{\alpha_n^2(r)}{r} \right) dr = n \alpha_n^2(1) + \int_0^1 r^{n+1} \left(\frac{d}{dr} \frac{\alpha_n(r)}{r^n} \right)^2 dr \geq n \alpha_n^2(1).$$

Cette inégalité appliquée à $\alpha_n(r)$, $\beta_n(r)$ pour $n = 1, 2, \ldots$, nous donnera

$$D(F) \geq \frac{1}{2} \int_0^1 \alpha'^2_0(r) r \, dr + \sum_1^\infty n (\alpha_n^2(1) + \beta_n^2(1)),$$

où l'intégrale est positive car $\alpha_0(r)$ est $= 0$ pour $r = 0$, et > 0 pour $r > 0$. Donc $D(F) > D(F^*)$.

Lemme II. *Soit $f(\theta)$ une fonction réelle appartenant à la classe (S) et normée par les conditions $S(f) = 1$, $a_0 = 0$. Si $f(\theta) \geq \varrho$, $\psi > 0$ sur un ensemble ouvert E (considéré sur $|z| = 1$), alors la capacité de E satisfait à l'inégalité*

$$C(E) \leq e^{-\varrho^2}. \tag{23}$$

Si l'ensemble E est quelconque et f est semicontinu inférieurement

$$\bar{C}(E) \leq e^{-\varrho^2}. \tag{23'}$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les arcs disjoints de l'ensemble ouvert E, et soit μ une répartition de la masse 1 sur cet ensemble, telle que la borne supérieure V_μ de son potentiel u soit finie. Nous aurons donc, d'une part d'après (9) et (14)

$$S^2(f, u) \leq S(f) S(u) \leq V_\mu, \tag{24}$$

et, d'autre part, en employant les notations déjà introduites,

$$S(f, u) = \lim_{r=1-0} \sum_{1}^{\infty} r^n (a_n h_n + b_n k_n) = \lim_{r=1-0} \int_{0}^{2\pi} f(r, \theta)\, d\mu(\theta).$$

Partageons cette intégrale en une somme: $I_1(r) + I_2(r) + \cdots$, $I_n(r)$ étant l'intégrale étendue à l'arc α_n. D'après une propriété élémentaire de l'intégrale de Poisson, $f(r, \theta)$ surpasse uniformément toute valeur $< \varrho$ sur tout arc fermé β_n contenu dans α_n, quand r tend vers 1. La limite inférieure de $I_n(r)$ devient par suite au moins égale à $\varrho\, \mu(\beta_n)$, donc au moins égale à $\varrho\, \mu(\alpha_n)$, car les extrémités de α_n ne portent aucune masse. Donc

$$S(f, u) \geq \Sigma \liminf_{r=1-0} I_n(r) \geq \varrho\, \Sigma\, \mu(\alpha_n) = \varrho,$$

d'où en vertu de (24),

$$V_\mu \geq \varrho^2, \tag{25}$$

et d'où résulte (23) en vertu de la définition de $C(E)$.

On ramène à la démonstration précédente le cas où E est un ensemble quelconque et f semicontinu inférieurement, en considérant l'ensemble E_ε, toujours ouvert et contenant E, où $f(\theta) > \varrho - \varepsilon$, et en faisant ensuite $\varepsilon \to 0$[1].

Retournons maintenant à la démonstration du Théorème I. D'après sa définition, la majorante forte $F(\theta)$ de $f(\theta)$ est semicontinue inférieurement, et appartient à la classe (S) en vertu du Lemme I. Les points où la série de Fourier de $f(\theta)$ diverge, sont, d'après ce qui précède, contenus dans l'ensemble où $F(\theta) > \varrho$. La capacité de cet ensemble tend, comme nous venons de voir, très rapidement vers zéro quand ϱ croît, et le théorème est donc établi.

Remarque. La méthode employée s'applique de même aux classes de fonctions beaucoup plus vastes que (S). Signalons le résultat suivant, moins précis bien que plus général que le Théorème I:[2]

Soit $0 < \alpha \leq 1$, et $f(r, \theta)$ une fonction harmonique telle que la série

$$\sum_{1}^{\infty} n^{\alpha - \varepsilon} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

---

[1] Dans ma thèse: *Études sur un problème de majoration*, Upsal (1933), j'ai établi une inégalité analogue à (23) pour la mesure linéaire, en me servant de la majorante forte $F(r, \theta)$. Faisons remarquer que (23) et (23') ne peuvent pas être améliorés, et que la dernière de ces inégalités subsiste pour un ensemble quelconque dans l'hypothèse plus large que $\limsup_{r=1-0} f(r, \theta) \geq \varrho$ sur E.

[2] La démonstration va paraître dans *Arkiv för Matematik*, ...

converge pour tout $\varepsilon > 0$. *Dans cette condition* $f(r, \theta)$ *possède une limite radiale finie sauf au plus sur un ensemble dont la dimension capacitaire*[1] *est* $\leq 1 - \alpha$.

§ 3.

Grâce aux interprétations de $S(f)$, les résultats précédents admettent diverses applications intéressantes à la théorie des fonctions. Le Lemme II se montre ainsi très utile pour certaines questions concernant la transformation conforme. Considérons par exemple le problème suivant. Soit D un domaine simplement connexe contenant l'origine $w = 0$ et couvrant une aire égale à π. Supposons qu'un segment l de la ligne $\Re(w) = \varrho$ fasse partie de la frontière de D, et désignons par ω la mesure harmonique en $w = 0$ du segment l par rapport au domaine considéré. Déterminer dans ces conditions la valeur maximum de ω.

Le Lemme II donne immédiatement la solution. En effet, soit $w = \varphi(z)$, $(\varphi(0) = 0)$, une fonction qui applique conformément le cercle $|z| < 1$ sur D, et soit α l'arc de la circonférence qui tombe sur l. L'aire de D étant π, il s'ensuit que $S(u) = 1$, u étant la partie réelle de φ, et l'on aura d'après (23),

$$C(\alpha) \leq e^{-\varrho^2}.$$

Or, la capacité d'un arc de rayon 1 et d'ouverture α est $\sin \alpha/4$, d'où

$$\omega = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \arcsin C(\alpha) \leq \frac{2}{\pi} \arcsin e^{-\varrho^2}, \tag{26}$$

et cette inégalité résout le problème, car l'égalité a lieu pour un domaine particulier.[2] Remarquons à cette occasion que (26) conduit immédiatement à l'inégalité

$$\log M(r) > c \cdot r^{\frac{n}{2}} \qquad (r > r_0,\ c > 0),$$

pour le module maximum $M(r)$ d'une fonction entière possédant n valeurs asymptotiques distinctes et finies.

Passons à une appliquation du Théorème I. Considérons une fonction $f(z)$ holomorphe pour $|z| < 1$ et possédant au moins presque partout une limite radiale finie ou infinie,

$$f(\theta) = \lim_{r=1-0} f(re^{i\theta}). \tag{27}$$

---

[1] *Cf.* POLYA et SZEGÖ, *Über den transfiniten Durchmesser, Journ. de Crelle* t. 165 (1931) p. 43, et FROSTMAN *l. c.*, p. 90.

[2] *Cf. l. c.* l'exemple donné à la page 39.

La fonction limite $f(\theta)$ est encore assez mal connue; elle soulève des problèmes très intéressants, en premier lieu celui-ci: étant donnée une classe de fonctions holomorphes dans le cercle unité, caractériser soit l'ensemble E où $f(\theta)$ n'existe pas, soit l'ensemble E_w où $f(\theta) = w$, $(f \not\equiv w)$.

Pour la classe des fonctions bornées on a les théorèmes suivants: $mE = 0$, $mE_w = 0$, dus respectivement à FATOU[1] et aux MM. F. et M. RIESZ[2], et étendus par M. R. NEVANLINNA[3] aux fonctions méromorphes à caractéristique bornée. Nous verrons maintenant que les ensembles E et E_w sont extrêmement petits pour une fonction univalente ou multivalente dans le cercle unité. En effet, $\bar{C}(E) = 0$ et $\bar{C}(E_w) = 0$. Cela résulte du théorème suivant et de sa démonstration.

Théorème II. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité transformant celui-ci en une surface de Riemann dont l'aire sphérique*

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2}\,dx\,dy$$

est finie. Dans cette condition la limite radiale $f(\theta)$ existe sauf au plus sur un ensemble E dont la capacité extérieure est nulle.

Pour abréger, nous dirons que $f(z)$ appartient à la classe (s). Nous désignerons par S_f la surface de Riemann, étalée sur le plan $w = u + iv$, en laquelle $f(z)$ transforme $|z| < 1$, et par s_f sa projection stéréographique sur la sphère de Riemann reposant sur l'origine $w = 0$. Soit de plus $n(w, f)$ le nombre des zéros de $f(z) - w$ pour $|z| < 1$, et

$$\bar{n}(w, f) = \limsup_{s=0} \frac{s(w)}{s},$$

où $s(w)$ désigne l'aire de la portion de s_f qui se trouve au-dessous de la calotte sphérique de l'aire s ayant comme centre le point image de w. L'aire totale de s_f étant finie, il s'ensuit d'après un théorème de M. LEBESGUE, que $\bar{n}(w, f)$ est presque partout fini. Si $\bar{n}(w, f) < \infty$, w sera appelé *valeur ordinaire* de f; observons qu'on a partout $n(w, f) \leq \bar{n}(w, f)$, et presque partout $n(w, f) = \bar{n}(w, f)$.

Ceci posé, prenons deux valeurs ordinaires quelconques a et b, et posons

$$\frac{f(z) - a}{f(z) - b} \cdot \frac{B(z)}{A(z)} = \varphi(z)$$

---

[1] Cf. l. c.

[2] *Über die Randwerte analytischer Funktionen. C. R. du 4ème Congr. scand. Stockholm,* (1916).

[3] *Über eine Klasse von meromorphen Funktionen. Math. Ann.* 92, (1924).

où

$$A(z) = \prod_1^{n(a,f)} \frac{z - z_\nu(a)}{1 - z\bar{z}_\nu(a)}, \qquad B(z) = \prod_1^{n(b,f)} \frac{z - z_\nu(b)}{1 - z\bar{z}_\nu(b)},$$

$z_\nu(w)$ étant les zéros de $f(z) - w$. La fonction $\varphi(z)$ ainsi obtenue appartient à la classe (s), elle est $\neq 0$ et ∞ pour $|z| < 1$, et possède ces deux valeurs comme valeurs ordinaires, d'où l'on conclut que

$$\iint\limits_{u^2 + v^2 < r^2} n(w, \varphi)\, du\, dv < \text{const. } r^2, \qquad 0 < r < \infty. \tag{28}$$

Considérons maintenant une branche quelconque mais fixée de $\log \varphi(z)$, et déterminons une valeur ordinaire c de cette fonction telle que $\log \varphi(z) - c \neq 0$ pour $|z| < 1$. Ceci est toujours possible, car dans l'hypothèse contraire $\log \varphi(z)$ prendrait presque toute valeur et $\varphi(z)$ prendrait alors presque toute valeur une infinité de fois, ce qui est impossible pour une fonction de la classe (s). Posons enfin

$$\psi(z) = \sqrt[3]{\log \varphi(z) - c} = \sum_0^\infty a_n z^n.$$

Cette fonction est holomorphe dans le cercle unité et appartient à la classe (S). En effet, l'aire de son domaine riemannien a pour expression

$$\frac{1}{9} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(w, \varphi)}{|w|^2 |\log w - c|^{4/3}}\, du\, dv = \pi \sum_1^\infty n\, |a_n|^2,$$

et cette intégrale converge en vertu de (28) et du choix de c. En notant que

$$\frac{f - a}{f - b} = \frac{A}{B} e^{c + \psi^3},$$

on voit que l'ensemble E où $f(\theta)$ n'existe pas, coïncide avec l'ensemble où $\psi(z)$ n'admet pas une limite radiale finie ou infinie, donc $\bar{C}(E) = 0$. La somme $E_a + E_b$ est visiblement égale à l'ensemble où $\psi(z)$ possède la limite radiale infinie, donc $\bar{C}(E_a) = \bar{C}(E_b) = 0$, propriété valable, d'après ce qui précède, pour toute valeur ordinaire. La démonstration précédente, un peu primitive, ne permet pas la conclusion $\bar{C}(E_w) = 0$, si $f(z) - w$ possède une infinité de zéros. Or, pour une fonction multivalente ($n(w, f)$ borné) toute valeur est ordinaire, et nos propositions sont donc établies.

Faisons enfin une remarque sur le problème général concernant les ensembles E_w. Considérons la classe des fonctions holomorphes pour $|z| < 1$ et y satisfaisant à une condition de Lipschitz

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq A\,|z_1 - z_2|^{\delta}$$

d'ordre $\delta > 0$. Soit $f(z)$ une fonction de cette classe. L'ensemble E_0 où $f(\theta) = 0$ est alors fermé, et son complémentaire donc formé par une suite d'arcs ouverts $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, dont la longueur totale est 2π, à moins que f ne soit identiquement nulle. Démontrons maintenant cette proposition: *si la série*

$$\Sigma\, \alpha_n \log \alpha_n \tag{29}$$

diverge, f s'annule identiquement.

Le démonstration est triviale. En désignant par $d(z)$ la distance du point z à l'ensemble E_0 on aura $|f(z)| \leq A\,d(z)^{\delta}$, d'où

$$\limsup_{r=1-0} \int_0^{2\pi} \log |f(r\,e^{i\theta})|\, d\theta \leq 2\pi \log A + 2\pi\delta\, \Sigma\, \alpha_n \log \frac{\alpha_n}{2e}\cdot$$

D'après le principe de la majorante harmonique, cette limite égale à $-\infty$, entraîne $f(z) \equiv 0$, d'où la proposition énoncée.

On reconnaît aisément que la série (29) converge si E_0 est un ensemble parfait formé par la méthode de Cantor, tandis que, si E_0 est l'ensemble dénombrable

$$e^{\frac{i}{\log n}}, \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

elle diverge. *Donc, un ensemble E_w n'est pas en général caractérisé par ses propriétés purement métriques.* C'est là une circonstance qui fait voir la difficulté du problème.