LIESCHE GRUPPEN UND AFFIN ZUSAMMENHÄNGENDE MANNIGFALTIGKEITEN

VON

W. GRAEUB

Zürich

In den meisten Darstellungen der Theorie der Lieschen Gruppen, z. B. Pontrjagin [5], Chap. VI und IX, oder Chevalley [2], stehen die topologischen und algebraischen Gesichtspunkte im Vordergrund, während die Zusammenhänge mit der Differentialgeometrie nur am Rande zur Geltung kommen. In der vorliegenden Untersuchung soll nun gezeigt werden, dass sich die Liesche Theorie in geometrisch übersichtlicher Form entwickeln lässt, wenn man konsequent von den beiden durch die Gruppenoperation induzierten Parallelverschiebungsoperatoren Gebrauch macht. Da diese ihrer Definition nach vom Wege unabhängig sind, verschwinden die zugehörigen Krümmungstensoren identisch. Hingegen sind die Torsionstensoren, die bis aufs Vorzeichen übereinstimmen, im allgemeinen von Null verschieden und hängen eng mit der algebraischen Struktur der Gruppe zusammen. Es zeigt sich, dass die „Hauptsätze" der Lieschen Theorie bestimmte Eigenschaften dieser Torsionstensoren ausdrücken. Im Anschluss hieran wird gezeigt, dass sich umgekehrt eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit gegebenem Fernparallelismus, dessen Torsion diese Eigenschaften besitzt, zu einer Lieschen Gruppe machen lässt. Dabei wird die Gruppenoperation nicht wie z. B. in [3] nur in einer Umgebung eines Punktes sondern auf der ganzen Mannigfaltigkeit konstruiert. Der Beweis des dabei verwendeten Existenzsatzes über die Lösung einer Abbildungsdifferentialgleichung wird in § 3 nachgetragen.

§ 1. Vorbereitende Betrachtungen

1. *Differenzierbare Mannigfaltigkeiten.* Es sei M ein Hausdorffscher Raum, der sich mit einem System (U_α) von „Parameterumgebungen" überdecken lässt.

Dabei versteht man unter einer Parameterumgebung ein System $(U_\alpha, \varphi_\alpha, G_\alpha)$,

5 – 61173055 106. *Acta mathematica.* Imprimé le 27 septembre 1961.

wobei U_α eine offene Menge auf M, G_α ein Teilgebiet eines n-dimensionalen linearen Raumes X_α und φ_α eine topologische Abbildung von U_α auf G_α ist. G_α heisst das *Parametergebiet* und X_α der *Parameterraum*. Jedem Punkte $x \in U_\alpha$ entspricht im Parametergebiete G_α der lokale Parameter

$$x_\alpha = \varphi_\alpha(x).$$

Nun seien U_α und U_β zwei Parameterumgebungen auf M mit einem nichtleeren Durchschnitt $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta}$. Jedem Punkte x dieses Durchschnittes entspricht dann in G_α bzw. G_β je ein lokaler Parameter x_α bzw. x_β. Das Produkt

$$\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}$$

ist dann eine topologische Abbildung von $\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$ auf $\varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$, die zu U_α und U_β gehörige *Nachbarrelation*. Diese drückt die lokalen Parameter x_α und x_β eines Punktes x von $U_{\alpha\beta}$ durcheinander aus,

$$x_\beta = \varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha).$$

Offenbar besteht die Beziehung

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta\alpha}^{-1}. \tag{1.1}$$

Sind alle Nachbarrelationen der Überdeckung U_α r-mal stetig differenzierbar, so heisst der Raum M eine *r-mal differenzierbare Mannigfaltigkeit*. Bildet man in (1.1) den Ableitungsoperator (1) so erhält man die Beziehung

$$\varphi'_{\alpha\beta} = (\varphi'_{\beta\alpha})^{-1},$$

welche zeigt, dass die Ableitungsoperatoren der Nachbarrelationen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit reguläre lineare Abbildungen sind. Die im folgenden betrachteten Mannigfaltigkeiten sind dreimal differenzierbar vorausgesetzt, ohne dass dies jedes Mal eigens gesagt wird.

2. *Kontravariante Vektoren.* Es sei x ein fester Punkt von M und $(U_\alpha)_x$ das System der Parameterumgebungen, welche x enthalten. Dann kann man unter den Vektoren der zugehörigen Parameterräume eine Äquivalenzrelation einführen, indem man zwei Vektoren $\xi_\alpha \in X_\alpha$ und $\xi_\beta \in X_\beta$ als äquivalent erklärt, falls das Transformationsgesetz

$$\xi_\beta = \varphi'_{\beta\alpha}(x_\alpha)\,\xi_\alpha \tag{1.2}$$

(1) Für den Begriff des Ableitungsoperators vgl. Nevanlinna [4], Kap. II.

besteht. Eine so erhaltene Klasse heisst ein *kontravarianter Vektor im Punkte* x. Jedem Vektor ξ entspricht nach Wahl einer festen Parameterumgebung U_α sein Repräsentant ξ_α im Parameterraume X_α. Aus der Linearität des Transformationsgesetzes (1.2) folgt, dass die Gesamtheit aller Vektoren im Punkte x einen n-dimensionalen linearen Raum bilden. Dieser heisst der *Tangentialraum* von M im Punkte x und soll mit $T_x(M)$ oder einfach mit T_x bezeichnet werden.

Es seien M und N zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten und φ sei eine Abbildung von M in N. Diese Abbildung heisst differenzierbar, wenn für je zwei Parameterumgebungen U_α und V_i auf M bzw. N die entsprechenden lokalen Parameter differenzierbar zusammenhängen,

$$y_i = \varphi(x_\alpha). \tag{1.3}$$

Der Abteilungsoperator der Abbildung (1.3) definiert dann eine lineare Abbildung des Tangentialraumes $T_x(M)$ in den Tangentialraum $T_{\varphi(x)}(N)$, die wir mit $\varphi'(x)$ bezeichnen. Ist ξ ein Vektor von $T_x(M)$, so ist der Bildvektor η durch die Gleichung

$$\eta = \varphi'(x)\,\xi$$

gegeben.

3. *Vektorfelder.* Ist jedem Punkt $x \in M$ ein Vektor $\xi(x)$ des Tangentialraumes $T_x(M)$ zugeordnet, so spricht man von einem Vektorfeld auf M. Ein solches Feld bestimmt eine Abbildung ξ_α des Parametergebietes in den Parameterraum X_α gemäss

$$\xi_\alpha(x_\alpha) = \xi(x)_\alpha.$$

Dabei besteht im Durchschnitt $U_{\alpha\beta}$ der Zusammenhang

$$\xi_\beta(x_\beta) = \varphi'_{\beta\alpha}(x_\alpha)\,\xi_\alpha(x_\alpha), \qquad x_\beta = \varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha), \tag{1.4}$$

aus dem ersichtlich ist, dass auf einer r-mal differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Begriff eines $(r-1)$-mal differenzierbaren Vektorfeldes von der Wahl des lokalen Parameters unabhängig ist.

Es seien jetzt ξ und η zwei differenzierbare Vektorfelder auf M. Setzt man dann in einer Parameterumgebung U_α

$$Y_\alpha(x_\alpha) = \xi'_\alpha(x_\alpha)\,\eta_\alpha(x_\alpha) - \eta'_\alpha(x_\alpha)\,\xi_\alpha(x_\alpha) \tag{1.5}$$

so genügen die Vektoren Y_α dem Transformationsgesetz (1.4) und somit ist durch die Gleichung (1.5) wieder ein Vektorfeld auf M definiert. Dieses heisst das *Liesche Produkt* der Felder ξ und η und soll mit $L(\xi, \eta)$ bezeichnet werden. Die Definitionsgleichung lautet somit

$$L(\xi, \eta)_\alpha(x_\alpha) = \xi'_\alpha(x_\alpha)\,\eta_\alpha(x_\alpha) - \eta'_\alpha(x_\alpha)\,\xi_\alpha(x_\alpha).$$

Das Liesche Produkt ist schiefsymmetrisch

$$L(\xi, \eta) + L(\eta, \xi) = 0$$

und genügt der Jacobischen Identität

$$L(L(\xi, \eta), \zeta) + L(L(\eta, \zeta), \xi) + L(L(\zeta, \xi), \eta) = 0.$$

4. *Kovariante Tensoren auf* M. Wir betrachten neben der Mannigfaltigkeit M jetzt einen linearen Raum E. Unter einem *kovarianten Tensor p-ter Stufe* auf M mit Werten in E versteht man eine p-fach lineare Abbildung $\Phi(x)$ des Raumes $T_x(M)$ in den Raum E. Ist jedem Punkte x ein solcher Tensor zugeordnet, so spricht man von einem *Tensorfeld p-ter Stufe* auf M mit Werten in E. In einer Parameterumgebung bestimmt ein solches Tensorfeld zu jedem Punkte $x_\alpha \in G_\alpha$ eine p-fach lineare Abbilding $\Phi_\alpha(x_\alpha)$ des Parameterraumes X_α in E gemäss

$$\Phi_\alpha(x_\alpha; \xi_\alpha^1 \dots \xi_\alpha^p) = \Phi(x; \xi^1 \dots \xi^p).$$ [1]

Dabei besteht im Durschnitt $U_{\alpha\beta}$ das Transformationsgesetz

$$\Phi_\alpha(x_\alpha; \xi_\alpha^1 \dots \xi_\alpha^p) = \Phi_\beta(x_\beta; \varphi'_{\beta\alpha}(x_\alpha)\, \xi_\alpha^1 \dots \varphi'_{\beta\alpha}(x_\alpha)\, \xi_\alpha^p). \tag{1.6}$$

Aus diesem ersieht man, dass es auf einer r-mal differenzierbaren Mannigfaltigkeit einen Sinn hat, von $(r-1)$-mal differenzierbaren Tensorfeldern zu sprechen.

Sind alle Abbildungen $\Phi(x)$ total schiefsymmetrisch, so heisst Φ ein total schiefsymmetrisches Feld auf M. Aus jedem differenzierbaren, total schiefsymmetrischen Tensorfeld p-ter Stufe Φ auf M kann man ein total schiefsymmetrisches Feld $(p+1)$-ter Stufe $\delta\Phi$ erhalten, indem man

$$\delta\Phi(x; \xi^1 \dots \xi^{p+1}) = \sum_{\nu=1}^{p+1} (-1)^{\nu+1} \Phi'_\alpha(x_\alpha; \xi_\alpha^1 \dots \hat{\xi}_\alpha^\nu \dots \xi_\alpha^{p+1}, \xi_\alpha^\nu) \tag{1.7}$$

setzt, wobei x_α ein beliebiger lokaler Parameter ist. Dieses heisst die *schiefsymmetrische Ableitung* des Feldes Φ. Für ein zweimal stetig differenzierbares Feld gilt die Beziehung

$$\delta\delta\Phi = 0. \tag{1.8}$$

Ist φ eine differenzierbare Abbildung einer Mannigfaltigkeit M in eine Mannig-

---

[1] Dabei bezeichnet der obere Index die Nummer des Vektors.

faltigkeit N, so kann man jedes Tensorfeld Ψ auf N dual nach M übertragen und erhält dort ein Tensorfeld $\Phi = \varphi^* \Psi$, das durch die Gleichung

$$\Phi(x; \xi^1 \dots \xi^p) = \Psi(\varphi(x); \varphi'(x)\, \xi^1 \dots \varphi'(x)\, \xi^p)$$

definiert ist. Ist die Abbildung φ zweimal stetig differenzierbar, so gilt die Vertauschbarkeitsrelation

$$\delta(\varphi^* \Psi) = \varphi^* (\delta \Psi). \tag{1.9}$$

5. *Das schiefsymmetrische Produkt.* Im Raume E sei jetzt eine bilineare Abbildung f von E in sich definiert. Dann kann man je zwei Tensorfeldern auf M der Stufen p and q ein ebensolches Feld $(\Phi, \Psi)_f$ der Stufe $p+q$ zuordnen, indem man

$$(\Phi, \Psi)_f (x; \xi^1 \cdots \xi^{p+q}) = f(\Phi(x; \xi^1 \dots \xi^p),\ \Psi(x; \xi^{p+1} \dots \xi^{p+q})) \tag{1.10}$$

setzt. Entsprechend erhält man aus je zwei total schiefsymmetrischen Feldern wieder ein solches Feld, das mit $(\Phi \wedge \Psi)_f$ bezeichnet werden soll und durch die Gleichung

$$(\Phi \wedge \Psi)_f (x; \xi^1 \dots \xi^{p+q}) = \frac{1}{p!\, q!} \sum_\sigma \varepsilon_\sigma (\Phi, \Psi)_f (x; \xi^{\sigma(1)} \dots \xi^{\sigma(p+q)}) \tag{1.11}$$

definiert ist. Dabei durchläuft σ alle Permutationen der Zahlen $(1 \dots p+q)$ und ε_σ bezeichnet das zugehörige Vorzeichen. Für die schiefsymmetrische Ableitung des Produktes (1.11) gilt die Formel

$$\delta(\Phi \wedge \Psi)_f = (\delta \Phi \wedge \Psi)_f + (-1)^p (\Phi \wedge \delta \Psi)_f. \tag{1.12}$$

Von besonderer Bedeutung ist der Fall, dass die bilineare Abbildung f ein Liesches Produkt ist. Wir schreiben in diesem Falle $[u, v]$ anstatt $f(u, v)$. Ein solches Produkt genügt den Bedingungen

$$\underset{\text{(schiefe Symmetrie)}}{[u, v] + [v, u] = 0} \qquad \underset{\text{(Jacobische Identität)}}{[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0} \qquad (u, v, w \in E)$$

Das Tensorfeld, das man aus zwei total schiefsymmetrischen Feldern Φ und Ψ mit Werten in E mittels des Lieschen Produktes erhält, soll mit $[\Phi \wedge \Psi]$ bezeichnet werden. Es ist durch die Gleichung

$$[\Phi \wedge \Psi](x; \xi^1 \dots \xi^{p+q}) = \frac{1}{p!\, q!} \sum_\sigma \varepsilon_\sigma [\Phi(x; \xi^{\sigma(1)} \dots \xi^{\sigma(p)}),\ \Psi(x; \xi^{\sigma(p+1)} \dots \xi^{\sigma(p+q)})] \tag{1.13}$$

definiert. Aus der schiefen Symmetrie und der Jacobischen Identität erhält man die Beziehungen

$$[\Phi \wedge \Psi] = (-1)^{pq+1} [\Psi, \Phi] \tag{1.14}$$

und

$$(-1)^{pr} [[\Phi \wedge \Psi] \wedge X] + (-1)^{qp} [[\Psi \wedge X] \wedge \Phi] + (-1)^{rq} [[X \wedge \Phi] \wedge \Psi] = 0, \tag{1.15}$$

wobei p, q und r die Stufen der Felder Φ, Ψ und X bezeichnen.

6. *Der Krümmungsoperator.* Es seien M und N zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Jedem Punktepaar $x \in M$, $z \in N$ sei eine lineare Abbildung

$$F(x, z): T_x(M) \to T_z(N)$$

des Tangentialraumes $T_x(M)$ in den Tangentialraum $T_z(N)$ zugeordnet, die differenzierbar von x and z abhängt. Hält man z fest und variiert x, so kann man den Operator $F(x, z)$ als Tensorfeld erster Stufe auf M mit Werten in Raume $T_z(N)$ auffassen und somit die schiefsymmetrische Ableitung bezüglich x bilden. So erhält man eine schiefsymmetrische bilineare Abbildung des Raumes $T_x(M)$ in den Raum $T_z(N)$. Andererseits definiert der Operator $F(x, z)$ für jeden festen Punkt $x \in M$ und jeden festen Vektor $\xi \in T_x(M)$ ein Vektorfeld auf N, dass wir mit $F_{x,\xi}$ bezeichnen. Es ist durch die Gleichung

$$F_{x,\xi}(z) = F(x, z)\, \xi$$

bestimmt. Daher kann man für je zwei Vektoren ξ_1 und ξ_2 des Raumes $T_x(M)$ das Lie-Produkt

$$L(F_{x,\xi_1}, F_{x,\xi_2})$$

der entsprechenden Felder auf N bilden und erhält wieder ein Vektorfeld auf N. Dieses hängt offenbar bilinear und schiefsymmetrisch von ξ_1 und ξ_2 ab, sodass man insgesamt wieder eine schiefsymmetrische Abbildung des Raumes $T_x(M)$ in dem Raum $T_z(N)$ erhält. Die Summe

$$H(x, z; \xi_1, \xi_2) = -\delta F(x, z; \xi_1, \xi_2) + L(F_{x,\xi_1}, F_{x,\xi_2})(z) \tag{1.16}$$

ist daher wieder eine solche Abbildung. Sie heisst der *Krümmungsoperator* des Operators F. Führt man in der Umgebung der Punkte x und z lokale Parameter ein, die wir wieder mit x und z bezeichnen, so ist der Krümmungsoperator explizit durch die Formel

$$H(x, z; \xi_1, \xi_2) = \frac{dF}{dx}(x, z; \xi_2)\,\xi_1 - \frac{dF}{dx}(x, z; \xi_1)\,\xi_2$$
$$+ \frac{dF}{dz}(x, z; F(x, z)\,\xi_2)\,\xi_1 - \frac{dF}{dz}(x, z; F(x, z)\,\xi_1)\,\xi_2 \tag{1.17}$$

gegeben. (1)

7. *Mannigfaltigkeiten mit Fernparallelismus.* Man sagt, auf der Mannigfaltigkeit M sei ein *Fernparallelismus* definiert, wenn zu jedem Punktepaar x, z von M eine lineare Abbildung $F(x, z)$ des Raumes T_x in den Raum T_z gegeben ist, welche folgenden Eigenschaften hat:

(F_1): $P(x, z) = P(y, z)\,P(x, y) \quad (x, y, z \in M)$,

(F_2): $P(x, x) = I$ (Identität).

(F_3): Der Operator P ist zweimal stetig differenzierbar in x und z. Aus (F_1) und (F_2) ergibt sich die Beziehung

$$P(x, y)\,P(y, x) = I,$$

welche zeigt, dass die vom Operator P bestimmte lineare Abbildung regulär ist.

Wir wählen nun einen festen Punkt e von M als Bezugspunkt und setzen

$$P(e, x) = P(x).$$

Dann folgt aus (F_1)

$$P(y, z) = P(z)\,P(y)^{-1}. \tag{1.18}$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Fernparallelismus durch den Operator $P(x)$ eindeutig festgelegt ist. Setzt man in (1.18) speziell $z = e$, so folgt

$$P(y, e) = P(y)^{-1}. \tag{1.19}$$

Man kann den Operator $P^{-1}(x)$ als Tensor erster Stufe mit Werten im Raume $T_e(M)$ auffassen und somit die schiefsymmetrische Ableitung des Feldes P^{-1} bilden. Das Produkt

$$S(x) = -P(x)\,\delta P^{-1}(x) \tag{1.20}$$

ist dann eine bilineare schiefsymmetrische Abbildung des Raumes T_x in sich, also ein

---

(1) Dabei bezeichnet $\frac{dF}{dx}(x, z; \xi)$ den Ableitungsoperator von F bezüglich x, genommen für den Zuwachsvektor ξ und $\frac{dF}{dz}(x, z; \zeta)$ den Ableitungsoperator nach z, genommen für den Zuwachsvektor ζ.

zweifach kovarianter und einfach kontravarianter Tensor. Dieser heisst die *Torsion* des Parallelenoperators P.

Es seien jetzt ξ und η zwei feste Vektoren des Raumes T_e und

$$\xi(x) = P(x)\,\xi \quad \text{bzw.} \quad \eta(x) = P(x)\,\eta$$

die von ihnen erzeugten parallelen Vektorfelder. Wir zeigen, dass sich deren Liesches Produkt durch den Torsionstensor in der Form

$$L(\xi, \eta)(x) = -S(x; \xi(x), \eta(x)) \tag{1.21}$$

ausdrücken lässt. Zum Beweis wählen wir eine Parameterumgebung des Punktes x und bezeichnen den lokalen Parameter der Kürze halber wieder mit x. Ebenso schreiben wir wieder ξ und η anstatt ξ_α und η_α. Dann wird

$$L(\xi, \eta)(x) = \xi'(x)\,\eta(x) - \eta'(x)\,\xi(x) = P'(x; P(x)\eta)\,\xi - P'(x; P(x)\xi)\,\eta. \tag{1.22}$$

Weiter ergibt sich aus der Beziehung

$$P(x)\,P^{-1}(x) = I$$

durch Differenzieren

$$P'(x; h)\,P^{-1}(x) + P(x)\,(P^{-1})'(x; h) = 0$$

und hieraus folgt

$$P'(x; h) = -P(x)\,(P^{-1})'(x; h)\,P(x).$$

Setzt man dies in die Gleichung (1.32) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} L(\xi, \eta)(x) &= P(x)\,\{-(P^{-1})'(x; P(x)\eta)\,P(x)\,\xi + (P^{-1})'(x; P(x)\xi)\,P(x)\,\eta\} \\ &= P(x)\,\delta P^{-1}(x; P(x)\xi, P(x)\eta) = P(x)\,\delta P^{-1}(x; \xi(x), \eta(x)). \end{aligned}$$

Hier stehen auf beiden Seiten Ausdrücke, die im Tangentialraum $T_x(M)$ einen Sinn haben, sodass man jetzt wieder ξ und η als Tangentialvektoren auffassen kann. Setzt man nun noch für δP^{-1} nach (1.20) ein, so ergibt sich die behauptete Beziehung (1.21).

Für spätere Zwecke zeigen wir noch, dass sich der zum Operator F gehörige Krümmungsoperator durch den Torsionstensor S ausdrücken lässt. Der Krümmungsoperator H ist nach (1.16) durch die Gleichung

$$H(x, z; \xi_1, \xi_2) = -\delta P(x, z; \xi_1, \xi_2) + L(P_{x,\xi_1}, P_{x,\xi_2})(z) \quad (\xi_1, \xi_2 \in T_x)$$

definiert. Setzt man hier für $P(x, z)$ nach (1.18) ein, so erhält man für den ersten Summanden

$$\delta P(x, z; \xi_1, \xi_2) = P(z)\,\delta P^{-1}(x; \xi_1, \xi_2) = -P(z)\,P(x)^{-1}\,S(x; \xi_1, \xi_2) = -P(x, z)\,S(x; \xi_1, \xi_2).$$

Für den zweiten Summanden hat man bei festem x, ξ_1 und ξ_2 das Liesche Produkt der Vektorfelder

$$P_{x,\xi_1}(z) = P(x, z)\,\xi_1 \quad \text{und} \quad P_{x,\xi_2}(z) = P(x, z)\,\xi_2$$

zu bilden. Verwendet man die Formel (1.21), so wird dieses gleich

$$L(P_{x,\xi_1}, P_{x,\xi_2})(z) = -S(z; P(x, z)\,\xi_1,\ P(x, z)\,\xi_2).$$

Damit erhält man insgesamt

$$H(x, z; \xi_1, \xi_2) = P(x, z)\,S(x; \xi_1, \xi_2) - S(z; P(x, z)\,\xi_1,\ P(x, z)\,\xi_2). \tag{1.23}$$

Der Krümmungsoperator H verschwindet somit genau dann identisch, wenn die Beziehung

$$P(x, z)\,S(x; \xi_1, \xi_2) = S(z; P(x, z)\,\xi_1,\ P(x, z)\,\xi_2) \tag{1.24}$$

für alle Punktepaare x, z besteht. Setzt man hier speziell $x = e$, so lautet diese

$$P(z)\,S(e; \xi_1, \xi_2) = S(z; P(z)\,\xi_1,\ P(z)\,\xi_2). \tag{1.25}$$

Umgekehrt folgt aber auch (1.24) aus (1.25); aus (1.25) ergeben sich nämlich die Gleichungen

$$P(x, z)\ S(x; \xi_1, \xi_2) = P(z)\,S(e; P(x)^{-1}\,\xi_1, P(x)^{-1}\,\xi_2)$$

und

$$S(z; P(x, z)\,\xi_1, P(x, z)\,\xi_2) = P(z)\,S(e; P(x)^{-1}\,\xi_1, P(x)^{-1}\,\xi_2)$$

und aus diesen erhält man (1.24) durch Subtraktion. Der Krümmungsoperator verschwindet somit genau dann identisch, wenn der Torsionstensor der Vertauschbarkeitsbeziehung

$$S(x; P(x)\,\xi_1, P(x)\,\xi_2) = P(x)\,S(e; \xi_1, \xi_2) \tag{1.26}$$

genügt.

8. *Invariante Metrik.* Es sei M eine Mannigfaltigkeit mit Fernparallelismus. Ferner sei auf M eine Riemannsche Metrik gegeben. Den metrischen Fundamentaltensor bezeichnen wir mit g, sodass das Skalarprodukt zweier Vektoren ξ und η des Raumes T_x durch den Ausdruck $g(x; \xi, \eta)$ gegeben ist. Die Norm eines Vektors $\xi \in T_x$ ist durch die Gleichung

$$|\xi|^2 = g(x; \xi, \xi)$$

bestimmt.

Die Riemannsche Metrik heisst *invariant* in bezug auf den gegebenen Parallelismus, wenn die Beziehung

$$g(x;\ P(x)\,\xi,\ P(x)\,\eta) = g(e,\ \xi,\ \eta) \quad (\xi,\ \eta \in T_e) \tag{1.27}$$

besteht. Man kann bei gegebenem Parallelismus immer eine invariante Metrik einführen, indem man im Raume T_e ein beliebiges Skalarprodukt $(\xi,\ \eta)$ wählt und den metrischen Fundamentaltensor durch die Gleichung

$$g(x;\ \xi,\ \eta) = (P(x)^{-1}\,\xi,\ P(x)^{-1}\,\eta) \tag{1.28}$$

definiert.

§ 2. Liesche Gruppen

9. Unter einer *Lie-Gruppe* versteht man eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G, auf der eine dreimal stetig differenzierbare Abbildung

$$x,\ y \to x\,y$$

des Produktraumes $G \times G$ auf G definiert ist, welche den Gruppenaxiomen genügt. Im folgenden spielen die beiden Ableitungsoperatoren

$$A(x,\ y) = \frac{d}{d\,x}(x\,y) \quad \text{und} \quad B(x,\ y) = \frac{d}{d\,y}(x\,y) \tag{2.1}$$

eine wesentliche Rolle. Diese definieren je eine lineare Abbildung des Tangentialraumes T_x bzw. T_y in den Tangentialraum T_{xy},

$$A(x,\ y):\ T_x \to T_{xy} \qquad B(x,\ y):\ T_y \to T_{xy}.$$

Aus den Identitäten

$$x\,e = x \quad \text{und} \quad e\,y = y,$$

wobei e das Einselement bezeichnet, erhält man durch Differenzieren die Beziehungen

$$A(x,\ e) = I \tag{2,2}$$

und

$$B(e,\ y) = I. \tag{2.3}$$

Ferner erhält man aus dem assoziativen Gesetz

$$(x\,y)\,z = x\,(y\,z)$$

durch Differenzieren nach x

$$A(x\,y,\ z)\,A(x,\ y) = A(x,\ y\,z). \tag{2.4}$$

Setzt man hier speziell $z = y^{-1}$, so erhält man die Beziehung

$$A(xy,\, y^{-1})\, A(x,\, y) = I. \tag{2.5}$$

Aus dieser ersieht man, dass die vom Operator $A(x, y)$ definierte lineare Abbildung regulär ist. Setzt man in (2.4) $x = e$, so erhält man die Gleichung

$$A(y,\, z)\, A(e,\, y) = A(e,\, yz).$$

Diese lautet, wenn man zur Abkürzung

$$A(e,\, y) = A(y)$$

setzt,

$$A(y,\, z) = A(yz)\, A(y)^{-1}. \tag{2.6}$$

Somit lässt sich der Operator $A(y, z)$ durch die Operatoren $A(y)$ und $A(z)$ ausdrücken. Nun kann man die erste Gleichung (2.1) in der Form

$$\frac{d}{dx}(xy) = A(xy)\, A(x)^{-1} \tag{2.7}$$

schreiben.

Entsprechende Formeln gelten für den Operator B. Aus dem assoziativen Gesetz erhält man durch Differenzieren nach z

$$B(xy,\, z) = B(x,\, yz)\, B(y,\, z) \tag{2.8}$$

und hieraus speziell für $x = y^{-1}$

$$B(y^{-1},\, yz)\, B(y,\, z) = I. \tag{2.9}$$

Setzt man in (2.8) $z = e$ und erklärt den Operator $B(x)$ gemäss

$$B(x) = B(x,\, e),$$

so folgt

$$B(x,\, y) = B(xy)\, B(y)^{-1}. \tag{2.10}$$

Somit kann man die zweite Gleichung (2.1) auch in der Form

$$\frac{d}{dy}(xy) = B(xy)\, B(y)^{-1} \tag{2.11}$$

schreiben.

Aus der Differenzierbarkeit der Gruppenoperation und der Regularität des Operators B ergibt sich die Differenzierbarkeit der Abbildung $x \to x^{-1}$. Um den Ableitungsoperator dieser Abbildung durch die Operatoren A und B auszudrücken, differenzieren wir die Gleichung

$$x x^{-1} = e$$

nach x und erhalten

$$A(x, x^{-1}) + B(x, x^{-1})(x^{-1})' = 0. \tag{2.12}$$

Nun ist nach (2.6) und (2.10)

$$A(x, x^{-1}) = A(x)^{-1} \quad \text{bzw.} \quad B(x, x^{-1}) = B(x^{-1})^{-1}$$

und somit ergibt sich aus (2.12)

$$A(x)^{-1} + B(x^{-1})^{-1}(x^{-1})' = 0.$$

Hieraus erhält man

$$(x^{-1})' = -B(x^{-1})\, A(x)^{-1}. \tag{2.13}$$

10. *Die beiden Parallelismen.* Setzt man für je zwei Punkte x und y von G

$$P(x, y) = A(x, x^{-1} y),$$

so ist dadurch eine lineare Abbildung des Tangentialraumes T_x in den Tangentialraum T_y definiert. Aus den Beziehungen (2.4) und (2.2) folgen die Gesetze

$$\left.\begin{aligned} &P(x, z) = P(y, z)\, P(x, y) \\ \text{und} \qquad &P(x, x) = I \end{aligned}\right\} \quad (x, y, z \in G),$$

sodass der Operator P auf G einen Fernparallelismus festlegt. Speziell wird

$$P(e, y) = A(y).$$

Entsprechend erhält man aus dem Operator B einen Parallelenoperator Q, indem man

$$Q(x, y) = B(y x^{-1}, x)$$

setzt. Dabei ist insbesondere

$$Q(e, y) = B(y).$$

11. *Die zugehörigen Γ-Symbole.* Um die zu den beiden Parallelismen gehörigen Γ-Symbole zu erhalten, wählen wir im Raume T_e einen festen Vektor ξ und betrachten das von ihm erzeugte A-parallele Feld

$$\xi(x) = A(x)\, \xi \tag{2.14}$$

in einer Parameterumgebung U_α. Der Kürze halber bezeichnen wir den lokalen Parameter wieder mit x und den Repräsentanten des Vektors $\xi(x)$ im Parameterraum

X_α mit $\xi(x)$ anstatt mit $\xi(x)_\alpha$. Dementsprechend ist der Operator $A(x)$ als lineare Abbildung des Raumes T_e in den Parameterraum X_α aufzufassen. Bildet man nun in (2.14) den Ableitungsoperator, so folgt [1]

$$\xi'(x;\, h) = A'(x;\, h)\,\xi$$

und wenn man hier ξ nach (2.14) durch den Vektor $\xi(x)$ ausdrückt, folgt

$$\xi'(x;\, h) = A'(x;\, h)\, A(x)^{-1}\, \xi(x). \tag{2.15}$$

Nun definieren wir den Operator $\Gamma(x)$ gemäss

$$\Gamma(x;\, h) = -A'(x;\, h)\, A(x)^{-1} \quad (x \in G_\alpha,\ h \in X_\alpha). \tag{2.16}$$

Dieser ordnet dann jedem Vektor h des Parameterraumes X_α eine lineare Selbstabbildung dieses Raumes zu. Nun lautet die Differentialgleichung (2.15)

$$\xi'(x;\, h) = -\Gamma(x;\, h)\, \xi(x) \tag{2.17}$$

und zeigt somit, dass $\Gamma(x)$ der zum A-Parallelismus gehörige Γ-Operator ist. Entsprechend erhält man für den B-Parallelismus

$$\bar{\Gamma}(x;\, h) = -B'(x;\, h)\, B(x)^{-1}, \quad (x \in G_\alpha,\ h \in X_\alpha). \tag{2.18}$$

Um einen Zusammenhang zwischen den Operatoren Γ und $\bar{\Gamma}$ zu erhalten, gehen wir von den Beziehungen

$$A(x,\, y) = \frac{d}{dx}(xy) \quad \text{und} \quad B(x,\, y) = \frac{d}{dy}(xy)$$

aus. Dabei sei x ein fester Punkt der Parameterumgebung U_α. Der Punkt y liege so nahe an e, dass das Produkt xy noch in U_α enthalten ist. Aus den Gleichungen (2.1) erhält man, wenn man die Symmetrie der zweiten Ableitungen des Gruppenproduktes beachtet,

$$\frac{dA}{dy}(x,\, y;\, h)\, \xi = \frac{dB}{dx}(x,\, y;\, \xi)\, h. \tag{2.19}$$

Setzt man speziell $y = e$, so wird

$$\frac{dB}{dx}(x,\, e;\, \xi) = B'(x;\, \xi)$$

---

(1) Hier ist das Differentiationsargument mit in die Klammer geschrieben, um auf der rechten Seite Zweideutigkeiten zu vermeiden.

und die Gleichung (2.19) lautet

$$\frac{dA}{dy}(x,\ e;\ h)\,\xi = B'(x;\ \xi)\,h. \tag{2.20}$$

Anderseits erhält man aus der Beziehung

$$A(x,\ y)\,A(x) = A(xy)$$

durch Differenzieren nach y an der Stelle $y = e$

$$\frac{dA}{dy}(x,\ e;\ h)\,A(x) = A'(x;\ B(x)\,h). \tag{2.21}$$

Aus den Gleichungen (2.20) und (2.21) folgt

$$A'(x;\ B(x)\,h)\,A(x)^{-1}\,\xi = B'(x;\ \xi)\,h$$

und wenn man noch

$$B(x)\,h = \eta$$

setzt,

$$A'(x;\ \eta)\,A(x)^{-1}\,\xi = B'(x;\ \xi)\,B(x)^{-1}\,\eta. \tag{2.22}$$

Beachtet man nun noch die Definitionsgleichungen von Γ und $\overline{\Gamma}$, so kann man die Gleichung (2.22) in der Form

$$\Gamma(x;\ \xi)\,\eta = \overline{\Gamma}(x;\ \eta)\,\xi, \quad (\xi,\ \eta \in X_\alpha) \tag{2.23}$$

schreiben. Sie besagt, dass die Γ-Symbole der beiden Parallelismen zueinander transponiert sind.

12. *Der Torsionstensor.* Die zu den beiden Parallelenoperatoren A und B gehörigen Torsionstensoren sind nach (1.20) durch die Gleichungen

$$S(x) = -A(x)\,\delta A^{-1}(x) \tag{2.24}$$

und

$$\bar{S}(x) = -B(x)\,\delta B^{-1}(x) \tag{2.25}$$

definiert. Um diese durch die Γ-Symbole auszudrücken, betrachten wir wieder auf G zwei A-parallele Felder

$$\xi(x) = A(x)\,\xi \quad \text{und} \quad \eta(x) = A(x)\,\eta.$$

Für ihr Liesches Produkt gilt dann nach (1.21)

$$L(\xi,\ \eta)(x) = -S(x;\ \xi(x),\ \eta(x)). \tag{2.26}$$

Rechnet man anderseits das Liesche Produkt in einer Parameterumgebung nach (1.5) aus und unterdrückt wieder den Index α, so ergibt sich

$$L(\xi,\ \eta)(x) = \xi'(x)\,\eta(x) - \eta'(x)\,\xi(x) = A'(x;\ \eta(x))\,\xi - A'(x;\ \xi(x))\,\eta =$$
$$- \Gamma(x;\ \eta(x))\,A(x)\,\xi + \Gamma(x;\ \xi(x))\,A(x)\,\eta = -\Gamma(x;\ \eta(x))\,\xi(x) + \Gamma(x;\ \xi(x))\,\eta(x). \tag{2.27}$$

Aus (2.26) und (2.27) erhält man nun die Beziehung

$$S(x;\ \xi(x),\ \eta(x)) = \Gamma(x;\ \eta(x))\,\xi(x) - \Gamma(x;\ \xi(x))\,\eta(x).$$

Da die erzeugenden Vektoren ξ und η beliebig waren, folgt hieraus

$$S(x;\ h,\ k) = \Gamma(x;\ k)\,h - \Gamma(x;\ h)\,k \quad (h,\ k \in X_\alpha), \tag{2.28}$$

d. h. der Torsionstensor ist gleich dem schiefsymmetrischen Teil der Γ-symbole. Entsprechend erhält man für den Torsionstensor $\bar{S}$

$$\bar{S}(x;\ h,\ k) = \bar{\Gamma}(x;\ k,\ h) - \bar{\Gamma}(x;\ h,\ k) \tag{2.29}$$

und wenn man den Zusammenhang (2.23) berücksichtigt, folgt

$$\bar{S}(x) = -S(x). \tag{2.30}$$

13. *Charakterisierung abelscher Gruppen.* Dass der Torsionstensor eng mit der Struktur der Lieschen Gruppen zusammenhängt, zeigt bereits der folgende

SATZ 1. *Eine zusammenhängende Lie-Gruppe ist genau dann abelsch, wenn der Torsionstensor S identisch verschwindet.*

Beweis. Ist zunächst die Gruppe abelsch, so folgt

$$A(x,\ y) = B(y,\ x)$$

und insbesondere $A(x) = B(x)$. Somit fallen die beiden Parallelismen zusammen und es wird

$$\bar{\Gamma}(x) = \Gamma(x) \tag{2.31}$$

und somit

$$S(x;\ h,\ k) = \Gamma(x;\ k)\,h - \Gamma(x;\ h,\ k) = \Gamma(x;\ k)\,h - \bar{\Gamma}(x;\ k)\,h = 0.$$

Verschwindet umgekehrt der Torsionstensor, so folgt zunächst umgekehrt (2.31) und hieraus

$$A(x) = B(x), \tag{2.32}$$

da die Operatoren A und B eindeutig durch die Differentialgleichungen (2.16) bzw. (2.18) bestimmt sind. Aus (2.23) erhält man weiter auf Grund der Beziehungen (2.10) und (2.6)

$$B(x, y) = B(xy) B(y)^{-1} = A(xy) A(y)^{-1} = A(y, y^{-1} x y). \tag{2.33}$$

Nun sei a ein fester Punkt von G. Dann erklären wir die Selbstabbildung q von G gemäss

$$q(x) = x^{-1} a^{-1} x a,$$

was man auch in der Form

$$a x q(x) = x a$$

schreiben kann. Bildet man hier den Ableitungsoperator, so folgt

$$A(ax, q) B(a, x) + B(ax, q) q'(x) = A(x, a). \tag{2.34}$$

Wegen (2.33) kann man den ersten Summanden in der Form

$$A(ax, q) A(x, x^{-1} a x) = A(x, x^{-1} a x q) = A(x, a)$$

schreiben und somit folgt aus (2.34)

$$B(ax, q) q'(x) = 0$$

und damit wegen der Regularität des Operators B

$$q'(x) = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Abbildung q konstant ist, und da insbesondere $q(e) = e$ ist, wird $q(x) = e$ und somit

$$x a = a x.$$

Dies bedeutet aber, dass die Gruppe G abelsch ist.

14. *Parallelität der Torsion.* Es soll jetzt gezeigt werden, dass das Torsionsfeld S der Vertauschbarkeitsrelation

$$S(x; A(x)\xi, A(x)\eta) = A(x) S(e, \xi, \eta) \quad (\xi, \eta \in T_e) \tag{2.35}$$

genügt. Dazu fixieren wir den Punkt x und definieren die Abbildung φ gemäss

$$\varphi(z) = z x.$$

Für ihren Ableitungsoperator erhält man

$$\varphi'(z) = A(z, x)$$

und somit kann man die Beziehung

$$A(zx) = A(z, x)\, A(z)$$

in der Form
$$A(\varphi(z)) = \varphi'(z)\, A(z)$$

schreiben oder, nach $A^{-1}(z)$ aufgelöst,

$$A^{-1}(z) = A^{-1}(\varphi(z))\, \varphi'(z) = (\varphi^* A^{-1})(z).$$

Betrachtet man hier $A^{-1}(z)$ als Tensorfeld erster Stufe auf G mit Werten im Raume T_e und bildet die schiefsymmetrische Ableitung, so ergibt sich nach (1.9)

$$\delta A^{-1}(z) = \varphi^*(\delta A^{-1})(z).$$

Setzt man nun $z = e$ und beachtet, dass

$$\varphi(e) = x \quad \text{und} \quad \varphi'(e) = A(x),$$

so erhält man
$$\delta A^{-1}(e;\, \xi, \eta) = \delta A^{-1}(x;\, A(x)\,\xi,\, A(x)\,\eta). \tag{2.36}$$

Führt man hier den Torsionstensor nach den Gleichungen

$$\delta A^{-1}(x) = -A^{-1}(x)\, S(x) \quad \text{und} \quad \delta A^{-1}(e) = -S(e)$$

ein, so ergibt sich die Beziehung (2.35).

Aus der Beziehung (2.35) folgt, dass mit je zwei A-parallelen Feldern ξ und η auch deren Liesches Produkt A-parallel ist. Nach (1.21) ist nämlich

$$\zeta(x) = -S(x;\, \xi(x), \eta(x))$$

und somit folgt aus (2.35)

$$\zeta(x) = -A(x)\, S(e;\, \xi(e), \eta(e)) = A(x)\, \zeta(e).$$

15. *Die zugehörige Lie-Algebra.* Die Beziehung (2.35) zeigt, dass das Tensorfeld $S(x)$ durch den Tensor $S(e)$ und den Operator $A(x)$ eindeutig festgelegt ist. Der Tensor $S(e)$ definiert im Raume T_e ein schiefsymmetrisches Produkt, das man mit $[\xi, \eta]$ bezeichnet,

$$[\xi, \eta] = S(e, \xi, \eta).$$

Damit wird dieser Raum zu einer Algebra, der zur Gruppe G gehörigen *Lie-Algebra.* Ist das Produkt $[\xi, \eta]$ identisch Null, so heisst die Lie-Algebra *kommutativ.* Aus der Beziehung (2.35) folgt, dass das Torsionsfeld genau dann identisch verschwindet, wenn die Lie-Algebra kommutativ ist. Man kann daher jetzt den Satz I so formulieren:

6 – 61173055 106. *Acta mathematica.* Imprimé le 27 septembre 1961.

Eine zusammenhängende Lie-Gruppe ist genau dann abelsch, wenn ihre Lie-Algebra kommutativ ist.

Setzt man in der Gleichung (2.35) auf der rechten Seite das Lie-Produkt und auf der linken die Definitionsgleichung (2.24) der Torsion ein, so lautet sie

$$\delta A^{-1}(x; A(x)\xi, A(x)\eta) = -[\xi, \eta].$$

Setzt man hier noch

$$A(x)\xi = h \quad \text{und} \quad A(x)\eta = k$$

so erhält man die Gleichung

$$\delta A^{-1}(x; h, k) = -[A(x)^{-1}h, A(x)^{-1}k] \quad (h, k \in T_x)$$

und wenn man hier noch die in (1.13) eingeführte Bezeichnung verwendet,

$$\delta A^{-1} = -\tfrac{1}{2}[A^{-1} \wedge A^{-1}]. \tag{2.37}$$

Entsprechend gilt für den Operator B

$$\delta B^{-1} = \tfrac{1}{2}[B^{-1} \wedge B^{-1}]. \tag{2.38}$$

Die Gleichungen (2.37) und (2.38) stellen die *Maurer-Cartanschen Formeln* für eine Lie-Gruppe dar.

Bildet man in (2.37) die schiefsymmetrische Ableitung, so erhält man nach (1.12)

$$[\delta A^{-1} \wedge A^{-1}] - [A^{-1} \wedge \delta A^{-1}] = 0. \tag{2.39}$$

Nun ist nach (1.14)

$$[\delta A^{-1} \wedge A^{-1}] = -[A^{-1} \wedge \delta A^{-1}]$$

und somit folgt aus (2.39)

$$[\delta A^{-1} \wedge A^{-1}] = 0.$$

Setzt man hier für δA^{-1} wieder nach (2.37) ein, so erhält man die Beziehung

$$[[A^{-1} \wedge A^{-1}] \wedge A^{-1}] = 0. \tag{2.40}$$

Setzt man hier speziell $x = e$ und schreibt die Gleichung aus, so erhält man die *Jacobische Identität*

$$[[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta] = 0 \tag{2.41}$$

des Lieschen Produktes.

16. *Beziehung zur kovarianten Ableitung.* Führt man auf der Gruppe G die kovariante Ableitung in bezug auf den A-Parallelismus ein, so besagt die Beziehung (2.35), dass die kovariante Ableitung des Torsionsfeldes identisch verschwindet,

$$\nabla S(x) = 0.$$

Um dies zu zeigen, bemerken wir, dass die kovariante Ableitung eines zweifach kovarianten und einfach kontravarianten Tensorfeldes S auf einer Mannigfaltigkeit mit dem Parallelenoperator P durch die Gleichung

$$\nabla S(x;\, h,\, k) = \frac{d}{dx}\,(P(x,\, y)^{-1}\, S(x;\, P(x,\, y)\, h,\, P(x,\, y)\, k)_{y=x} \qquad (h,\, k \in T_x)$$

definiert ist. Das identische Verschwinden von ∇S ist somit mit der Beziehung

$$S(y;\, P(x,\, y)\, h,\, P(x,\, y)\, k) = P(x,\, y)\, S(x;\, h,\, k)$$

gleichbedeutend. Setzt man hier $x = e$ und

$$P(e,\, y) = A(y)$$

so lautet diese Beziehung

$$S(y;\, A(y)\, h,\, A(y)\, k) = A(y)\, S(e;\, h,\, k),$$

geht also in die Gleichung (2.35) über. Die Beziehung (2.35) besagt somit, dass das Torsionsfeld S parallel ist.

Diese Eigenschaft kann man übrigens auch rein differentialgeometrisch aus der Tatsache herleiten, dass man auf der Mannigfaltigkeit G zwei zueinander transponierte Fernparallelismen hat (d. h. zwei Fernparallelismen, deren Γ-Symbole zueinander transponiert sind). Allgemein besteht nämlich zwischen den Krümmungstensoren R und $\bar{R}$ zweier beliebiger zueinander transponierter Parallelverschiebungen die Beziehung

$$\bar{R}(x;\, h_1 h_2,\, h_3) + R(x;\, h_2,\, h_3,\, h_1) + R(x;\, h_3,\, h_1,\, h_2) = \nabla S(x;\, h_1,\, h_2,\, h_3) \tag{2.42}$$

wobei der Tensor S durch die Gleichung

$$S(x;\, h_1,\, h_2) = \Gamma(x;\, h_2)\, h_1 - \Gamma(x;\, h_1)\, h_2$$

definiert ist. Sind nun beide Parallelverschiebungen vom Wege unabhängig, so wird $R = 0$ und $\bar{R} = 0$ und aus (2.42) folgt

$$\nabla S(x) = 0.$$

Die Beziehung (2.42) zeigt, dass auch umgekehrt aus der Integrabilität der Parallelverschiebung und der Parallelität der Torsion die lokale Integrabilität der transponierten Parallelverschiebung folgt.

Auch die Jacobische Identität kann man auf ähnliche Art erhalten. Allgemein besteht nämlich zwischen Krümmung und Torsion eines beliebigen affinen Zusammenhanges die Beziehung

$$\sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma \{R(x;\, h_{\sigma(1)},\, h_{\sigma(2)},\, h_{\sigma(3)}) - S(x;\, h_{\sigma(1)},\, S(x;\, h_{\sigma(2)},\, h_{\sigma(3)}) - \nabla S(x;\, h_{\sigma(1)},\, h_{\sigma(2)},\, h_{\sigma(3)})\} = 0 \quad (2.43)$$

(vgl. Schouten [4] S. 88, Formel (138)). Ist nun $R=0$ und $\nabla S = 0$, so ergibt sich aus (2.43) die Beziehung

$$\sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma S(x;\, h_{\sigma(1)},\, S(x;\, h_{\sigma(2)},\, h_{\sigma(3)}) = 0,$$

die für $x=e$ in die Jacobische Identität übergeht.

17. *Invariante Metrik.* Wie bereits in No. 8 erwähnt, kann man auf der Lieschen Gruppe G ein bezüglich des A-Parallelismus invariantes Skalarprodukt einführen. Dazu wählen wir im Raume T_e ein positiv definites Skalarprodukt (ξ, η) und erklären den metrischen Fundamentaltensor $g(x)$ gemäss

$$g(x;\, h,\, k) = (A(x)^{-1} h,\, A(x)^{-1} k) \quad (h,\, k \in T_x). \quad (2.44)$$

Das Bogendifferential einer Kurve $x(t)$ ist dann durch die Gleichung

$$|\dot{x}|^2 = (A(x)^{-1} \dot{x},\, A(x)^{-1} \dot{x})$$

gegeben. Hieraus folgt, dass die Bogendifferentiale zweier Kurven

$$x(t) \quad \text{und} \quad y(t) = x(t)\, a$$

die durch Rechtstranslation mit einem Element a auseinander hervorgehen, übereinstimmen. Es ist nämlich

$$\dot{y} = A(x, a)\, \dot{x} = A(y)\, A(x)^{-1} \dot{x}$$

und hieraus folgt

$$|\dot{y}|^2 = (A(y)^{-1} \dot{y},\, A(y)^{-1} \dot{y}) = (A(x)^{-1} \dot{x},\, A(x)^{-1} \dot{x}) = |\dot{x}|^2.$$

Nun betrachten wir die durch den metrischen Fundamentaltensor (2.44) auf definierte Abstandsfunktion

$$\varrho(x_1,\, x_2) = \inf\, l_{c(x_1, x_2)}, \quad (2.45)$$

wobei $c(x_1, x_2)$ die Gesamtheit aller stückweise glatten Kurven von x_1 nach x_2 durchläuft. Aus der Rechtsinvarianz der Bogenlängen erhält man die Beziehung

$$\varrho(x_1, x_2) = \varrho(x_1 a, x_2 a). \tag{2.46}$$

Wir zeigen jetzt, dass die Mannigfaltigkeit G in bezug auf die Metrik (2.45) vollständig ist. Dazu sei x_n eine Cauchy-Folge in dieser Metrik. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index N, sodass

$$\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geqslant N \quad \text{und} \quad m \geqslant N. \tag{2.47}$$

Wegen (2.46) folgt hieraus

$$\varrho(e, x_n x_m^{-1}) < \varepsilon.$$

Nun sei U eine Parameterumgebung des Einselementes und V eine zweite Umgebung von e, deren abgeschlossene Hülle in U enthalten ist, $\overline{V} \subset U$. Dann wählen wir ε so klein, dass die ε-Kugel um e in V enthalten ist. Erklärt man dann die Folge y_n gemäss

$$y_n = x_n x_N^{-1},$$

so sind die Punkte y_n für $n \geqslant N$ in V enthalten. Ferner folgt aus (2.47)

$$\varrho(y_n, y_m) = \varrho(x_n, x_m)$$

und die Punkte y_n bilden somit wieder eine Cauchy-Folge. Somit muss diese Folge gegen einen Punkt von $\overline{V}$, also einen Punkt von U konvergieren. Daher muss auch die Folge

$$x_n = y_n x_N$$

konvergent sein und die Vollständigkeit des Raumes G ist bewiesen.

Zusammenfassend haben wir damit folgendes Ergebnis:

Satz II. *Auf einer Lieschen Gruppe wird durch die Ableitung der Gruppenoperation ein Fernparallelismus A (und entsprechend ein Fernparallelismus B) induziert, welcher folgende Eigenschaften hat:*

(P_1): *Das Torsionsfeld ist parallel, d. h. es genügt der Beziehung* (2.35).

(P_2): *Führt man eine invariante Metrik ein, so ist die Mannigfaltigkeit G vollständig.*

18. *Umkehrung.* Es soll jetzt umgekehrt gezeigt werden, dass man eine dreimal differenzierbare, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit M, auf der ein Fernparallelismus mit den Eigenschaften (P_1) und (P_2) gegeben ist, zu einer Lie-Gruppe

machen kann, sodass der gegebene Parallelismus mit dem von der Gruppenoperation induzierten A-Parallelismus übereinstimmt.

Den gegebenen Parallelenoperator bezeichnen wir mit $P(x, z)$ und setzen wieder

$$P(e, z) = P(z),$$

wobei e ein fester Bezugspunkt auf M ist. Es soll eine Selbstabbildung $z(x)$ von M konstruiert werden, welche der Differentialgleichung

$$z'(x) = P(x, z) \tag{2.48}$$

und der Anfangsbedingung
$$z(e) = y \tag{2.49}$$

genügt, wobei y ein beliebiger Punkt von M ist. Die Existenz der Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich aus § 3, Satz III, angewandt auf die Mannigfaltigkeiten M und $N = M$ und den Operator

$$F(x, z) = P(x, z) \quad (x, z \in M).$$

Dabei ist auf M eine bezüglich P invariante Riemannsche Metrik zugrunde gelegt. Dann ist M in bezug auf diese Metrik nach Voraussetzung (P_2) vollständig, also die erste Bedingung für § 3, Satz III erfüllt (§ 3, Satz I). Dass auch die zweite Bedingung erfüllt ist, ergibt sich daraus, dass die kovariante Ableitung des Operators $P(x, z)$ bezüglich z identisch verschwindet. Es bleibt also noch festzustellen, das der Krümmungsoperator identisch Null ist. Wie am Schlusse von No. 8 gezeigt, ist hierfür die Gleichung

$$S(x; P(x)\xi_1, P(x)\xi_2) = P(x)\, S(e; \xi_1, \xi_2) \quad (\xi_1, \xi_2 \in T_e)$$

notwendig und hinreichend. Dies ist aber genau die Voraussetzung (P_1).

19. Die Lösung $z(x, y)$ der Differentialgleichung (2.48) zur Anfangsbedingung (2.49) stellt eine Abbildung des Produktes $M \times M$ in die Mannigfaltigkeit M dar, das den Bedingungen

$$\frac{dz}{dx}(x, y) = P(x, z) \tag{2.50}$$

und
$$z(e, y) = y \tag{2.51}$$

genügt. Mun führen wir auf M eine Multiplikation ein, indem wir

$$xy = z(x, y) \tag{2.52}$$

setzen und zeigen, dass M hierdurch zu einer Lieschen Gruppe wird und dass der zugehörige A-Parallellelismus mit dem gegebenen übereinstimmt.

a) *Einselement.* Zunächst folgt aus der Anfangsbedingung (2.51) unmittelbar

$$e\,y = z\,(e,\ y) = y,$$

d. h. e ist linksseitiges Einselelement. Dass auch

$$x\,e = x$$

gilt, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz für die Differentialgleichung (2.48), da die identische Abbildung der Gleichung (2.48) und der Anfangsbedingung $z\,(e) = e$ genügt.

b) *Assoziativgesetz.* Um zu zeigen, dass für je drei Punkte von M die Beziehung

$$(x\,y)\,z = x\,(y\,z) \tag{2.53}$$

besteht, fixieren wir y und z und betrachten die beiden Abbildungen

$$\varphi\,(x) = (x\,y)\,z$$

und

$$\psi\,(x) = x\,(y\,z).$$

Für ihre Ableitungsoperatoren erhält man unter Verwendung von (2.50)

$$\varphi'\,(x) = P\,(x\,y,\ (x\,y)\,z)\,P\,(x,\ x\,y) = P\,((x\,y)\,z)\,P\,(x\,y)^{-1}\,P\,(x\,y)\,P\,(x)^{-1} = P\,(\varphi\,(x))\,P\,(x)^{-1}$$

und

$$\psi'\,(x) = P\,(x,\ x\,(y\,z)) = P\,(x\,(y\,z))\,P\,(x)^{-1} = P\,(\psi\,(x))\,P\,(x)^{-1}.$$

Die beiden Abbildungen φ und ψ genügen somit derselben Differentialgleichung. Ferner ist

$$\varphi\,(e) = \psi\,(e) = y\,z$$

und somit folgt nach dem Eindeutigkeitssatz

$$\varphi\,(x) = \psi\,(x)$$

und damit das assoziative Gesetz (2.53).

c) *Die Ableitungsoperatoren.* Für den Ableitungsoperator des Produktes (2.52) nach x, den wir wieder mit $A\,(x, y)$ bezeichnen, erhält man aus (2.50)

$$A\,(x, y) = P(x,\,x\,y) \tag{2.54}$$

und somit wird speziell

$$A\,(e, y) = P\,(e, y).$$

Wir setzen weiter
$$B(x,y) = \frac{d}{d\,y}(x\,y). \tag{2.55}$$

Dieser Ableitungsoperator existiert, denn da P nach Voraussetzung differenzierbar ist, gilt dasselbe von der Lösung der Differentialgleichung (2.48) in bezug auf y. Es soll gezeigt werden, dass der Operator $B(x, y)$ regulär ist. Auf Grund der Beziehung (2.10), die sich aus dem assoziativen Gesetz ergibt, darf man sich dabei auf den Operator
$$B(x) = B(x, e)$$
beschränken. Zunächst folgt aus der Existenz der gemischten Ableitung des Gruppenproduktes, dass der Operator $B(x,y)$ nach x differenzierbar ist. Wählt man zu den Punkten x und y je eine Parameterumgebung U_α bzw. U_β und bezeichnet die lokalen Parameter wieder mit x bzw. y, so besteht der Zusammenhang
$$\frac{d\,B}{d\,x}(x,y;\,h)\,k = \frac{d\,A}{d\,y}(x,y;\,k)\,h \quad (h \in X_\alpha,\ k \in X_\beta). \tag{2.56}$$

Nun ist nach (2.54)
$$A(x,y) = P(x, x\,y) = P(x,y)\,P(x)^{-1}$$
und hieraus erhält man durch Differenzieren nach y
$$\frac{d\,A}{d\,x}(x,y;\,k) = P'(x,y;\,B(x,y)\,k)\,P(x)^{-1}. \tag{2.57}$$

Aus den Gleichungen (2.56) und (2.57) folgt jetzt
$$\frac{d\,B}{d\,x}(x,y;\,h)\,k = P'(x\,y;\,B(x,y)\,k)\,P(x)^{-1}\,h$$
und wenn man hier $y = e$ setzt,
$$B'(x;h)\,k = P'(x;\,B(x)\,k)\,P(x)^{-1}\,h. \tag{2.58}$$

Nun führen wir den zum Operator $P(x)$ gehörigen Γ-Operator ein, der durch die Gleichung
$$P'(x;\,\xi) = -\Gamma(x;\,\xi)\,P(x)$$
definiert ist. Dann kann man (2.58) in der Form
$$B'(x;\,h)\,k = -\Gamma(x;\,B(x)\,k)\,h \tag{2.59}$$
schreiben. Bezeichnet $\overline{\Gamma}$ den zu Γ transponierten Operator, der durch die Gleichung

$$\overline{\Gamma}(x;\xi)\,\eta = \Gamma(x;\eta)\,\xi$$

definiert ist, so folgt aus (2.59) die Gleichung

$$B'(x;h)\,k = -\overline{\Gamma}(x;h)\,B(x)\,k,$$

die man als Operatorenbeziehung auch in der Form

$$B'(x;h) = -\overline{\Gamma}(x;h)\,B(x) \tag{2.60}$$

schreiben kann. Aus dieser homogenen Differentialgleichung ergibt sich, dass der Operator $B(x)$ regulär ist, sofern das für den Operator $B(e)$ gilt. Nun folgt aber aus der Identität $e\,y = y$ durch Differenzieren nach y

$$B(e) = I.$$

Damit ist die Regularität des Operators $B(x)$ bewiesen.

Dass auch die zweite und dritte Ableitung des durch (2.52) definierten Gruppenproduktes existieren, ergibt sich aus der Differentialgleichung (2.50) und der zweimaligen Differenzierbarkeit des Operators P.

d) *Inverses Element.* Es sei a ein beliebiger Punkt von M. Um zu zeigen, dass es ein rechtsinverses Element gibt, sei $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ eine differenzierbare Kurve, die von e nach a führt

$$x(0) = e, \quad x(1) = a.$$

Gesucht ist eine von e ausgehende Kurve $z(t)$, sodass

$$x(t)\,z(t) = e \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{2.61}$$

gilt. Differenziert man diese Gleichung nach t, so folgt

$$A(x,z)\,\dot{x} + B(x,z)\,\dot{z} = 0. \tag{2.62}$$

Nun ergibt sich aus dem Assoziativgesetz (2.53) durch Differenzieren nach y an der Stelle $y = e$

$$B(x,z)\,A(z) = A(x,z)\,B(x).$$

Setzt man dies in (2.62) ein und kürzt durch den regulären Operator $B(x,z)$ so ergibt sich die Differentialgleichung

$$\dot{z} = -A(z)\,B(x)^{-1}\,\dot{x}. \tag{2.63}$$

Umgekehrt folgt aus dieser und der Anfangsbedingung $z(0)=e$ die Gleichung (2.61), sodass man nur noch zu zeigen hat, dass die Gleichung (2.63) im ganzen Intervall $0 \leqslant t \leqslant 1$ eine Lösung besitzt. Dies ergibt sich aus § 3, Satz I, wenn man diesen auf den Operator

$$F(x, z) = -A(z) B(x)^{-1} \tag{2.64}$$

anwendet. Dabei wird auf M wieder eine bezüglich des Parallelismus P invariante Riemannsche Metrik zugrunde gelegt. Nach Voraussetzung (P_2) ist die Mannigfaltigkeit M in bezug auf diese Metrik vollständig. Ferner gilt für die kovariante Ableitung des Operators F

$$\nabla_z F(x, z) = 0$$

und somit sind die Voraussetzungen für § 3, Satz I erfüllt.

Nun sei $z(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ die Lösung der Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $z(0)=e$. Diese genügt dann, wie bereits erwähnt, auch der Gleichung (2.61). Setzt man hier speziell $t=1$ und $z(1)=b$, so folgt

$$a\,b = e.$$

Damit ist zum Punkte a ein rechtsinverses Element angegeben. Nun folgt auf rein algebraischem Wege, dass dieses durch a eindeutig bestimmt und auch linksinvers zu a ist. Damit haben wir folgendes Ergebnis:

Satz III. *Auf einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit sei ein Fernparallelismus mit den Eigenschaften* (P_1) *und* (P_2) *gegeben. Dann kann man diese zu einer Lie-Gruppe machen, so dass der von der Gruppenoperation induzierte A-Parallelismus mit dem gegebenen übereinstimmt. Der B-Parallelismus der Gruppe fällt mit dem zum gegebenen transponierten zusammen, woraus insbesondere folgt, dass auch dieser ein Fernparallelismus ist.*

20. Es soll jetzt weiter gezeigt werden, dass man auf den einfachen Zusammenhang der Mannigfaltigkeit M verzichten kann, wenn man die Voraussetzung (P_1) durch die Forderung ersetzt, dass der zum gegebenen Fernparallelismus transponierte Parallelismus ebenfalls ein Fernparallelismus ist.(1) Diese Formulierung hat gegenüber der von Satz III den Vorteil, dass die Existenz zweier zueinander transponierter Parallelismen (im Gegensatz zum einfachen Zusammenhang) auch notwendig dafür ist, dass man M zu einer Lie-Gruppe machen kann. Es seien also P und Q die beiden Parallel-

(1) Für eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist diese Voraussetzung gleichbedeutend mit (P_1).

verschiebungsoperatoren, gerechnet von einem festen Bezugspunkt e aus. Wir wählen auf M einen festen Punkt a und einen von e nach a führenden differenzierbaren Weg

$$a(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \quad a(0) = e, \; a(1) = a.$$

Die Differentialgleichung

$$\dot{u} = P(u)\, P(a(t))^{-1}\, \dot{a}(t) \tag{2.65}$$

hat dann zu jeder Anfangsbedingung

$$u(0) = y$$

nach § 3 Satz I im ganzen Intervall $0 \leqslant t \leqslant 1$ eine Lösung, die wir mit $u(t, y)$ bezeichnen. Die Konstruktion des Gruppenproduktes kommt darauf hinaus zu zeigen, dass der Punkt $u(1, y)$ bei festem y nur vom Punkte a und nicht von der Wahl des Weges $a(t)$ abhängt. Wir zeigen zunächst, dass der Ableitungsoperator der Lösung $u(t, y)$ bezüglich y durch die Formel

$$\frac{d\,u}{d\,y}(t, y) = Q(u(t, y))\, Q(y)^{-1} \tag{2.66}$$

gegeben ist. Dazu fixieren wir einen Punkt y von M und einen Vektor η des Tangentialraumes T_y und betrachten längs der Kurve $u(t, y)$ das Vektorfeld

$$\eta(t) = \frac{d\,u}{d\,y}(t, y)\,\eta.$$

Für seine Ableitung bezüglich t erhält man den Ausdruck

$$\dot{\eta}(t) = \frac{d^2 u}{d t\, d y}(t, y)\,\eta). \tag{2.67}$$

Andererseits ergibt sich aus der Differentialgleichung (2.65) durch Differenzieren nach y

$$\frac{d^2 u}{d t\, d y}(t, y)\,\eta = P'(u(t, y); \quad \eta(t))\, P(a(t))^{-1}\, \dot{a}(t)$$

und wenn man hier den Ableitungsoperator von P durch den entsprechenden Γ-Operator ausdrückt, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d t\, d y}(t, y)\,\eta &= -\Gamma(u(t, y);\, \eta(t))\, P(u(t, y))\, P(a(t)^{-1}\, \dot{a}(t) \\ &= -\Gamma(u(t, y);\, \eta(t))\, \dot{u}(t, y). \end{aligned} \tag{2.68}$$

Aus den Gleichungen (2.67) und (2.68) erhält man

$$\dot{\eta}(t) = -\Gamma(u(t,y);\quad \eta(t))\,\dot{u}(t,y)$$

und wenn man den zum transponierten Parallelismus Q gehörigen Γ-Operator $\overline{\Gamma}$ einführt,

$$\dot{\eta}(t) = -\overline{\Gamma}(u(t,y);\quad \dot{u}(t,y))\,\eta(t).$$

Diese Gleichung besagt, dass das Vektorfeld $\eta(t)$ längs der Kurve $u(t,y)$ Q-parallel ist,

$$\eta(t) = Q(u(t,y))\,Q(y)^{-1}\,\eta(0).$$

Beachtet man, dass $\eta(0) = \eta$ und setzt für $\eta(t)$ ein, so erhält man die Beziehung (2.66).

Nun sei b ein zweiter fester Punkt von M und

$$b(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

ein von e nach b führender Weg. Dann führen wir dieselbe Konstruktion mit dem Operator Q aus. Die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{v} = Q(v)\,Q(b(t)^{-1}\,\dot{b}(t)$$

zur Anfangsbedingung

$$v(0) = x$$

bezeichnen wir mit $v(t,x)$. Es soll nun gezeigt werden, dass zwischen den Lösungen u und v die Beziehung

$$u(t,b(t)) = v(t,a(t)) \tag{2.69}$$

besteht. Dazu betrachten wir auf M die beiden Kurven

$$U(t) = u(t,b(t)) \quad \text{und} \quad V(t) = v(t,a(t)).$$

Der Tangentialvektor von $U(t)$ ist durch den Ausdruck

$$\dot{U}(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,b(t)) + \frac{d\,u}{d\,y}(t,b(t))\,\dot{b}(t)$$

gegeben. Nun ist nach (2.65) und (2.66)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,b(t)) = P(U(t))\,P(a(t))^{-1}\,\dot{a}(t)$$

und

$$\frac{d\,u}{d\,y}(t,b(t)) = Q(u(t))\,Q(b(t))^{-1}$$

und somit folgt

$$\dot{U}(t) = P(U(t))\, P(a(t))^{-1}\, \dot{a}(t) + Q(U(t))\, Q(b(t))^{-1}\, \dot{b}(t). \tag{2.70}$$

Ganz entsprechend erhält man für den Tangentialvektor der Kurve $V(t)$

$$\dot{V}(t) = Q(V(t))\, Q(b(t))^{-1}\, \dot{b}(t) + P(V(t))\, P(a(t))^{-1}\, \dot{a}(t). \tag{2.71}$$

Die Gleichungen (2.70) und (2.71) zeigen, dass die Kurven $U(t)$ und $V(t)$ derselben Differentialgleichung genügen. Überdies ist

$$U(0) = V(0) = e$$

und somit folgt nach dem Eindeutigkeitssatz

$$U(t) = V(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

womit die Beziehung (2.69) bewiesen ist.

Setzt man in der Gleichung (2.69) speziell $t=1$, so folgt

$$u(1, b) = v(1, a). \tag{2.72}$$

Nun ersetzen wir $a(t)$ durch einen anderen von e nach a führenden Weg $\bar{a}(t)$, während der Weg $b(t)$ ungeändert bleiben soll. Bezeichnet dann $\bar{u}(t, y)$ die Lösung der zum Wege $\bar{a}(t)$ gehörigen Differentialgleichung (2.65) für den Anfangspunkt $\bar{u}(o, y) = y$, so gilt entsprechend (2.69) die Beziehung

$$\bar{u}(t, b(t)) = v(t, \bar{a}(t))$$

und speziell für $t=1$

$$\bar{u}(1, b) = v(1, a). \tag{2.73}$$

Aus den Gleichungen (2.72) und (2.73) folgt die Beziehung

$$u(1, b) = \bar{u}(1, b),$$

welche besagt, dass der Punkt $u(1, b)$ nicht von der Wahl des Weges $a(t)$ abhängt. Da b ein beliebiger Punkt war, gilt dies für jeden Anfangspunkt y. Die Lösung der Differentialgleichung (2.65) hängt daher nur vom Endpunkt a des Weges $a(t)$ ab und kann mit $u(a, y)$ bezeichnet werden. Die so erhaltene Abbildung

$$x, y \to u(x, y)$$

genügt den Differentialgleichungen

$$\frac{du}{dx} = P(u)\, P(x)^{-1} \quad \text{und} \quad \frac{du}{dy} = Q(u)\, Q(y)^{-1}$$

und man zeigt wie in Nr. 19, dass diese auf M ein Gruppenprodukt definiert. Damit haben wir folgendes Ergebnis:

SATZ IV. *Auf die Mannigfaltigkeit M seien zwei zueinander transponierte Fernparallelismen P und Q gegeben. Ferner sei M sowohl in bezug auf eine bezüglich P als auch auf eine bezüglich Q invariante Riemannsche Metrik vollständig. Dann kann man auf M eine differenzierbare Gruppenoperation einführen, so dass die beiden dadurch induzierten Parallelismen mit den gegebenen übereinstimmen.*

21. *Konstruktion eines Fernparallelismus mit paralleler Torsion.* Die Umkehrung des dritten Hauptsatzes der Lieschen Theorie besagt, dass es zu einer gegebenen Lie-Algebra immer eine lokale Gruppe gibt. Die Konstruktion dieser Gruppe wird übersichtlicher, wenn man sie in zwei Teile zerlegt:

1. Konstruktion eines Fernparallelismus mit parallelem Torsionsfeld, wobei der Torsionstensor in einem Punkte vorgegeben ist und der Jacobischen Identität genügt.

2. Konstruktion der Gruppenmultiplikation aus dem Fernparallelismus. Diese zweite Konstruktion ist nach Satz III immer möglich, sofern die Mannigfaltigkeit einfach zusammenhängend und in bezug auf eine invariante Metrik vollständig ist. Es soll jetzt noch ein Satz über Existenz eines Fernparallelismus mit parallelem Torsionsfeld bewiesen werden. Dieser hat lokalen Charakter.

SATZ V. *Es sei e ein Punkt einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M in dessen Tangentialraum ein Liesches Produkt definiert ist. Ferner sei eine Kurvenschar*

$$x = x(t, a) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \quad x(0, a) = e$$

gegeben, wobei a ein Einheitsvektor (1) *des Raumes T_e ist, sodass die Beziehungen*

$$x(\lambda t, a) = x(t, \lambda a) \tag{2.74}$$

und

$$\dot{x}(0, a) = a \tag{2.75}$$

bestehen. Dann kann man in einer Umgebung U von e einen Fernparallelismus P mit folgenden Eigenschaften einführen:

(P_1): *Das Torsionsfeld ist parallel, d. h. es gilt*

$$S(x; P(x)\xi, P(x)\eta) = P(x) S(e; \xi, \eta).$$

(P_2): *Im Punkte e gilt*

$$S(e; \xi, \eta) = [\xi, \eta].$$

(P_3): *Die Kurven $x(t, a)$ sind die geodätischen Linien durch den Punkt e.*

---

(1) Die Norm bezieht sich auf eine Euklidische Metrik in Raume T_e.

Beweis. Aus der Beziehung (2.66) folgt, wenn man den Ableitungsoperator bezüglich a an der Stelle $t=1$, $a=0$ bildet,

$$x'(1,0)\,\xi = \xi \quad (\xi \in T_e).$$

Somit ist die Abbildung

$$\varphi: a \to x(1,a) \quad (a \in T_e)$$

in einer hinreichend kleinen Kugel $|a| < \delta$ topologisch und samt ihrer Umkehrung differenzierbar ist. Das Bild dieser Kugel ist eine Umgebung U von e, in welcher der Parallelismus konstruiert werden soll. Der gesuchte Verschiebungsoperator sei $P(x)$ und $Q(x)$ der inverse Operator. Die Bedingungen (P_1) und (P_2) zusammen sind dann äquivalent mit der Gleichung

$$\delta Q(x; h, k) = -[Q(x)\,h, Q(x)\,k], \tag{2.76}$$

die man als Operatorenidentität auch in der Form

$$\delta Q = -\tfrac{1}{2}[Q \wedge Q]$$

schreiben kann. Die Bedingung (P_3) besagt, dass die Gleichung

$$Q(x(t,a))\,\dot{x}(t,a) = a \tag{2.77}$$

bestehen muss. Bildet man hier den Ableitungsoperator bezüglich a, so folgt

$$Q'(x(t,a); x'(t,a)\,\xi)\,\dot{x}(t,a) + Q(x(t,a))\,\frac{d\dot{x}}{da}(t,a)\,\xi = \xi. \tag{2.78}$$

Andererseits ergibt sich aus der Gleichung (2.67), wenn man sie auf die Vektoren

$$h = x'(t,a)\,\xi \quad \text{und} \quad k = \dot{x}(t,a)$$

anwendet,

$$Q'(x(t,a); x'(t,a)\,\xi)\,\dot{x}(t,a) - Q'(x(t,a); \dot{x}(t,a))\,x'(t,a)\,\xi$$
$$= [Q(x(t,a), \dot{x}(t,a), Q(x(t,a))\,x'(t,a)\,\xi]. \tag{2.79}$$

Aus (2.69) und (2.70) erhält man durch Subtraktion

$$Q(x(t,a); \frac{d\dot{x}}{da}(t,a))\,\xi + Q'(x(t,a); \dot{x}(t,a))\,x'(t,a)\xi$$
$$= \xi - [Q(x(t,a))\,\dot{x}(t,a), Q(x(t,a))\,x'(t,a)\,\xi]. \tag{2.80}$$

Erklärt man den Operator Ω_t gemäss

$$\Omega_t(a) = Q(x(t,a))\,x'(t,a)$$

und beachtet die Gleichung (2.68) so kann man die Beziehung (2.71) in der Form

$$\dot{\Omega}_t(a)\,\xi = \xi - [a, \Omega_t(a)\,\xi)] \tag{2.81}$$

schreiben. Sie stellt dann zu jedem festen a eine inhomogene lineare Differentialgleichung für den Operator $\Omega_t(a)$ dar. Als Anfangsbedingung hat man

$$\Omega_0(a) = x'(0, a) = 0. \tag{2.82}$$

Nun sei $\Omega_t(a)$ die Lösung der Differentialgleichung (2.72) zur Anfangsbedingung (2.73). Man kann den Operator Ω_t als ein (vom Parameter t abhängiges) Tensorfeld erster Stufe im Raume T_e mit Werten in diesem Raume auffassen. Nun zeigen wir, dass dieses der Gleichung

$$\delta\,\Omega_t = -\tfrac{1}{2}\,[\Omega_t \wedge \Omega_t] \tag{2.83}$$

genügt, wobei sich die schiefsymmetrische Ableitung auf die Veränderliche a bezieht. Zum Beweis der Gleichung (2.74) ist es zweckmässig, die Beziehung (2.72) als Operatorendifferentialgleichung zu schreiben. Bezeichnet I die identische Selbstabbildung des Raumes T_e, aufgefasst als Tensorfeld nullter Stufe mit Werten im Raume T_e, so ist die schiefsymmetrische Ableitung dieses Feldes durch die Gleichung

$$\delta\,I(a;\xi) = \xi \qquad (\xi \in T_e)$$

bestimmt und man kann daher die Differentialgleichung (2.72) als Operatorenidentität in der Form

$$\dot{\Omega}_t = \delta\,I - [I \wedge \Omega_t] \tag{2.84}$$

schreiben. Nun erklären wir den Operator H_t gemäss

$$H_t = \delta\,\Omega_t + \tfrac{1}{2}\,[\Omega_t \wedge \Omega_t].$$

Für seine Ableitung nach t erhält man

$$\dot{H}_t = \delta\,\dot{\Omega}_t + \tfrac{1}{2}\,[\dot{\Omega}_t \wedge \Omega_t] + \tfrac{1}{2}\,[\Omega_t \wedge \dot{\Omega}_t]$$

und wenn man die Formel (1.14) verwendet,

$$\dot{H}_t = \delta\,\dot{\Omega}_t + [\dot{\Omega}_t \wedge \Omega_t]. \tag{2.85}$$

Weiter erhält man aus (2.75) die Beziehungen

$$\delta\,\dot{\Omega} = -[\delta\,I \wedge \Omega_t] - [I \wedge \delta\,\Omega_t]$$

und
$$[\dot{\Omega}_t \wedge \Omega_t] = [\delta\,I \wedge \Omega_t] - [[I \wedge \Omega_t] \wedge \Omega_t]$$

und damit wird nach (2.76)

$$\dot{H}_t = -[I \wedge \delta\,\Omega_t] - [[I \wedge \Omega_t] \wedge \Omega_t]. \tag{2.86}$$

Nun folgt aus der Jacobischen Identität des Lieschen Produktes, angewendet auf die Felder $\Phi = I$, $\Psi = \Omega_t$ und $X = \Omega_t$ nach der Formel (1.15)

$$[[I \wedge \Omega_t] \wedge \Omega_t] + [[\Omega_t \wedge \Omega_t] \wedge I] - [[\Omega_t \wedge I] \wedge \Omega_t] = 0$$

und wenn man noch die Beziehung (1.14) verwendet,

$$[[I \wedge \Omega_t] \wedge \Omega_t] = -\tfrac{1}{2}[[\Omega_t \wedge \Omega_t] \wedge I] = \tfrac{1}{2}[I \wedge [\Omega_t \wedge \Omega_t]].$$

Setzt man dies in (2.77) ein, so erhält man für den Operator H_t die homogene Differentialgleichung

$$\dot{H}_t = -[I, \delta\,\Omega_t] - \tfrac{1}{2}[I \wedge [\Omega_t \wedge \Omega_t]] = -[I \wedge H_t].$$

Nun ist $\Omega_0 = 0$ und somit auch

$$H_0 = 0. \tag{2.87}$$

Aus (2.78) und (2.79) folgt

$$H_t = 0,$$

womit die Beziehung (2.74) bewiesen ist.

Setzt man in (2.74) $t = 1$ und schreibt Ω statt Ω_1, so erhält man

$$\delta\,\Omega = -\tfrac{1}{2}[\Omega \wedge \Omega]. \tag{2.89}$$

Dabei hängt der Operator Ω mit dem gesuchten Operator Q durch die Gleichung

$$\Omega(a) = Q(\varphi(a))\,\varphi'(a) \tag{2.90}$$

zusammen, die man auch in der Form

$$\Omega = \varphi^* Q \tag{2.91}$$

schreiben kann.

Es bleibt noch zu zeigen, dass der durch (2.82) definierte Operator Q den Bedingungen (2.67) und (2.68) genügt. Zunächst ergibt sich aus (2.81)

$$\delta\,\Omega + \tfrac{1}{2}[\Omega \wedge \Omega] = \delta(\varphi^* Q) + \tfrac{1}{2}[\varphi^* Q \wedge \varphi^* Q] = \varphi^*(\delta\,Q + \tfrac{1}{2}[Q \wedge Q])$$

und somit folgt aus (2.80)

$$\varphi^*(\delta\,Q + \tfrac{1}{2}[Q \wedge Q]) = 0$$

und hieraus, da der Ableitungsoperator von φ in der Kugel $|a| < \delta$ regulär ist, die Beziehung (2.67).

Zum Beweis von (2.68) gehen wir von der Beziehung

$$Q(x(1, a))\,x'(1, a) = \Omega(a)$$

aus, welche gleichbedeutend mit (2.81) ist. Ersetzt man hier a durch $t\,a$, so lautet diese

$$Q(x(1, t\,a))\,x'(1, t\,a) = \Omega(t\,a). \tag{2.92}$$

7 − 61173055 106. *Acta mathematica*. Imprimé le 27 septembre 1961.

Nun ist nach (2.65)
$$x(t, a) = x(1, ta) \tag{2.93}$$
und hieraus ergibt sich durch Differenzieren nach t
$$\dot{x}(t, a) = x'(1, ta)\, a. \tag{2.94}$$
Aus den Gleichungen (2.83), (2.84) und (2.85) folgt
$$Q(x(t, a))\, \dot{x}(t, a) = Q(x(1, ta))\, x'(1, ta)\, a = \Omega(ta)\, a. \tag{2.95}$$
Anderseits erhält man aus der Differentialgleichung (2.72) für $\xi = a$ die Lösung
$$\Omega_t(a)\, a = ta$$
und damit wird
$$\Omega(a)\, a = a.$$
Ersetzt man hier a durch ta und kürzt durch t, so ergibt sich
$$\Omega(ta)\, a = a. \tag{2.96}$$
Aus den Gleichungen (2.86) und (2.87) folgt nun die Beziehung (2.68). Damit ist Satz IV bewiesen.

§ 3. Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten

22. Im vorliegenden Paragraphen soll noch der Beweis des in No. 18 verwendeten Existenzsatzes für die Lösung einer Abbildungsdifferentialgleichung nachgetragen werden.

Es seien M und N zwei dreimal differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeiten, wobei die beiden metrischen Fundamentaltensoren als zweimal differenzierbar vorausgesetzt sind. Zu jedem Punktepaar $x \in M$, $z \in N$ sei eine lineare Abbildung $F(x, z)$ des Tangentialraumes $T_x(M)$ in den Tangentialraum $T_z(N)$ definiert, sodass der Operator $F(x, z)$ stetig differenzierbar in x und z ist.

Dann kann man zu jeder differenzierbaren Kurve
$$c\colon x = x(t) \quad (0 \leq t \leq 1)$$
auf M die Differentialgleichung
$$\dot{z} = F(x(t), z)\, \dot{x}(t) \tag{3.1}$$
für eine Kurve $z(t)$ auf N betrachten. Als Anfangsbedingung setzen wir
$$z(0) = a, \tag{3.2}$$
wobei a ein beliebiger Punkt auf N ist. Aus dem lokalen Existenzsatz ergibt sich zunächst, dass die Differentialgleichung (3.1) in einem hinreichend kleinen Intervall $0 \leq t \leq \delta$ eine Lösung besitzt. Wir werden zeigen, dass diese Lösung unter bestimmten Voraussetzungen im ganzen Intervall $0 \leq t \leq 1$ existiert.

SATZ I. *Es seien folgende Bedingungen erfüllt:*

I. *Die Mannigfaltigkeit N ist in bezug auf ihre Metrik vollständig.*

II. *Es gibt eine Zahl L, sodass für je zwei Punkte $x \in M$ und $z \in N$ die Ungleichung*

$$|\nabla_z F(x, z; k)\,\xi| \leqslant L\,|k|\,|\xi| \quad (\xi \in T_x(M), k \in T_z(N)) \tag{3.3}$$

besteht (1)

Dann hat die Differentialgleichung (3.1) *im ganzen Intervall* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *eine Lösung.*

Beweis. Es sei $z(t)$ die Lösung in einem hinreichend kleinen Intervall $0 \leqslant t \leqslant \delta$. Dann besteht die Beziehung

$$\dot z(t) = F(x(t), z(t))\,\dot x(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant \delta),$$

die man auch in der Form

$$\dot z(t) = (F(x(t), z(t))\,\dot x(t) - \Omega(t)\,F(x(t), z_0)\,\dot x(t)) + \Omega(t)\,F(x(t), z_0)\,\dot x(t)$$

schreiben kann, wobei $\Omega(t)$ den Parallelverschiebungsoperator auf der Mannigfaltigkeit N längst der Kurve $z(t)$ bezeichnet. Geht man hier zur Norm über, so folgt

$$|\dot z(t)| \leqslant |F(x(t), z(t))\,\dot x(t) - \Omega(t)\,F(x(t), z_0)\,\dot x(t)| + |F(x(t), z_0)\,\dot x(t)|. \tag{3.4}$$

Aus dieser Ungleichung kann man schliessen, dass es eine (von δ unabhängige) Schranke C gibt, sodass

$$|\dot z(t)| \leqslant C \quad (0 \leqslant t \leqslant \delta). \tag{3.5}$$

Dazu betrachten wir für jeden festen Wert t längs der Kurve $z(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t)$ das Vektorfeld

$$Y(\tau) = F(x(t), z(\tau))\,\dot x(t) - \Omega(\tau)\,F(x(t), z_0)\,\dot x(t) \quad (0 \leqslant \tau \leqslant t) \tag{3.6}$$

und setzen zur Abkürzung

$$|Y(\tau)| = \Phi(\tau).$$

Für die Ableitung dieser Funktion erhält man durch kovariantes Differenzieren

$$\Phi(\tau)\,\dot\Phi(\tau) = (Y(\tau), \nabla_\tau Y(\tau)).$$

Nun ist nach (3.6)

$$\nabla_\tau Y(\tau) = \nabla_z F(x(t), z(\tau); \dot z(\tau))\,\dot x(t)$$

und somit folgt

$$\Phi(\tau)\,\dot\Phi(\tau) = (Y(\tau), \nabla_z F(x(t), z(\tau); \dot z(\tau))\,\dot x(t)).$$

Geht man hier zur Norm über und wendet die Dreiecksungleichung und die Ungleichung (3.3) an, so folgt

(1) Dabei bezeichnet ∇_z die kovariante Ableitung des Operators F bezüglich z. Die Absolutstriche bezeichnen die Normen in den jeweiligen Tangentialräumen.

$$|\dot{\Phi}(\tau)| \leqslant |\nabla_z F(x(t), z(\tau); \dot{z}(\tau))\, \dot{x}(t)| \leqslant L\, |\dot{z}(\tau)|\, |\dot{x}(t)|$$

und hieraus durch Integration, wenn man noch beachtet, dass $\Phi(0) = 0$,

$$\Phi(t) \leqslant L\, |\dot{x}(t)| \int_0^t |\dot{z}(\tau)|\, d\tau \quad (0 \leqslant t \leqslant \delta).$$

Setzt man dies in die Ungleichung (3.4) ein, so erhält man

$$|\dot{z}(t)| \leqslant L\, |\dot{x}(t)| \int_0^t |\dot{z}(\tau)|\, d\tau + |F(x(t), z_0)\, \dot{x}(t)|. \tag{3.7}$$

Erklärt man nun die Zahlen A und B gemäss

$$A = L \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\dot{x}(t)| \quad \text{und} \quad B = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |F(x(t), z_0)\, \dot{x}(t)|,$$

so erhält man aus (3.7) die Integralungleichung

$$|\dot{z}(t)| \leqslant A \int_0^t |\dot{z}(\tau)|\, d\tau + B$$

und aus dieser ergibt sich

$$|\dot{z}(t)| \leqslant B\, e^{At} \leqslant B\, e^{A} \quad (0 \leqslant t \leqslant \delta).$$

Damit ist die Ungleichung (3.5) bewiesen, wobei

$$C = B\, e^{A}$$

zu setzen ist.

Aus der Ungleichung (3.5) folgt, dass für je zwei Parameterwerte t' und t'' des Intervalles $0 \leqslant t \leqslant \delta$ die Ungleichung

$$\varrho(z(t'), z(t'')) \leqslant \int_{t'}^{t''} |\dot{z}(t)|\, dt \leqslant C\, |t' - t''| \tag{3.8}$$

besteht. Nun sei δ^* die obere Grenze der δ-Werte, sodass die Lösung der Differentialgleichung (3.1) im Intervall $0 \leqslant t \leqslant \delta$ existiert. Ist dann t_n eine von links nach δ^* strebende Zahlenfolge, so gilt nach (3.8)

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \varrho(z(t_n), z(t_m)) = 0,$$

d. h. die Punkte $z(t_n)$ bilden auf N eine Cauchy-Folge. Wegen der Vollständigkeit der Mannigfaltigkeit N strebt diese Folge somit gegen einen Punkt z^* von N. Hieraus folgt zunächst, dass die Lösung der Gleichung (3.1) im ganzen Intervall $0 \leqslant t \leqslant \delta^*$ existiert. Wäre nun $\delta^* < 1$, so könnte man den lokalen Existenzsatz mit z^* als Anfangspunkt anwenden und die Lösung $z(t)$ ein Stück über den Wert δ^* hinaus fortsetzen, was der Definition von δ^* widerspricht. Es folgt somit $\delta^* = 1$, d. h. die Lösung existiert im ganzen Intervall $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

23. *Stetigkeit in bezug auf den Anfangspunkt.* Wie soeben gezeigt, gibt es zu jedem Punkte a von N eine Lösung

$$z = z(t, a) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

der Differentialgleichung (3.1) zur Anfangsbedingung $z(0) = a$.

Die Zuordnung

$$a \rightarrow z(1, a) \tag{3.9}$$

definiert daher eine Abbildung der Mannigfaltigkeit N in sich. Es soll jetzt gezeigt werden, dass diese Abbildung unter den Voraussetzungen des Satzes I stetig ist.

Zu jedem Punkt z von N gibt es eine positive Zahl ε_z, sodass man z mit jedem Punkte z_1 der ε_z-Kugel um z durch einen geodätischen Bogen γ der Länge $\varrho(z, z_1)$ verbinden kann. Wir zeigen zunächst, dass für jeden Punkt dieser Kugel die Ungleichung

$$|F(x, z_1)\xi - \Omega_\gamma F(x, z)\xi| \leqslant L|\xi|\varrho(z, z_1) \quad x \in M, \xi \in T_x(M) \tag{3.10}$$

besteht, wobei Ω_γ den zur Geodätischen γ gehörigen Verschiebungsoperator bezeichnet. Dazu sei

$$z = \varphi(\tau) \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1), \qquad \varphi(0) = z, \qquad \varphi(1) = z_1$$

eine Parameterdarstellung der Geodätischen γ und $\Omega(\tau)$ bezeichne den Verschiebungsoperator vom Werte $\tau = 0$ bis zum Werte τ. Dann betrachten wir die Funktion

$$\Phi(\tau) = |F(x, \varphi(\tau))\xi - \Omega(\tau)F(x, z)\xi| \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1). \tag{3.11}$$

Für ihre Ableitung nach τ erhält man durch kovariantes Differenzieren

$$\Phi(\tau)\dot{\Phi}(\tau) = (F(x, \varphi(\tau))\xi - \Omega(\tau)F(x, z)\xi, \nabla_z F(x, \varphi(\tau); \dot{\varphi}(\tau)\xi)).$$

Hieraus folgt nach der Schwarzschen Ungleichung

$$|\dot{\Phi}(\tau)| \leqslant |\nabla_z F(x, \varphi(\tau); \dot{\varphi}(\tau)\xi|$$

und wenn man noch die Ungleichung (3.3) verwendet,

$$|\dot{\Phi}(\tau)| \leqslant L|\dot{\varphi}(\tau)||\xi|.$$

Hieraus ergibt sich durch Integration, da $\Phi(0) = 0$,

$$\Phi(1) \leqslant L|\xi|\int_0^1 |\dot{\varphi}(\tau)|\,d\tau = L|\xi|\varrho(z, z_1). \tag{3.12}$$

Aus (3.11), wenn man dort $\tau = 1$ setzt, und (3.12) ergibt sich die Ungleichung (3.10).

Nun betrachten wir die Lösung $z=z(t,a)$ der Differentialgleichung (3.1) zum Anfangswert a. Wegen der Kompaktheit der Kurve $z(t,a)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ gibt es eine von t unabhängige positive Zahl ε, sodass man jeden Punkt $z(t,a)$ mit allen Punkten z_1 der ε-Kugel um ihn durch einen geodätischen Bogen der Länge $\varrho(z(t,a),z_1)$ verbinden kann. Wir zeigen, dass für jeden Punkt b der ε-Kugel um a die Ungleichung

$$\varrho(z(t,a),z(t,b))\leqslant\varrho(a,b)\,e^{t\cdot L\cdot l} \tag{3.13}$$

besteht, wobei l die Länge der Kurve $x(t), 0\leqslant t\leqslant 1$ bezeichnet.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\varrho(t)=\varrho(z(t,a),z(t,b)). \tag{3.14}$$

Dann ist
$$\varrho(0)=\varrho(a,b)<\varepsilon$$

und somit $\varrho(t)<\varepsilon$ für hinreichend kleine t. Es soll zunächst gezeigt werden, dass in jedem Intervall $0\leqslant t\leqslant t_0$, in dem die Ungleichung

$$\varrho(t)<\varepsilon \tag{3.15}$$

besteht, auch die Ungleichung

$$\varrho(t)\leqslant\varrho(a,b)\,e^{t\cdot l\cdot L} \tag{3.16}$$

gilt. Nach Wahl von ε kann man je zwei Punkte $z(t,a)$ und $z(t,b)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ durch einen geodätischen Bogen γ_t der Länge $\varrho(t)$ verbinden. Der Abstand $\varrho(t)$ ist dann das zu diesen beiden Punkten gehörige Extremalenintegral. Seine Ableitung nach t ist daher durch den Ausdruck

$$\dot\varrho(t)=-(p_a(t),\dot z(t,a))+(p_b(t),\dot z(t,b)) \tag{3.17}$$

gegeben, wobei $p_a(t)$ und $p_b(t)$ die beiden positiven Einheitstangentenvektoren an die Geodätische γ_t in den Punkten a und b bezeichnen (1) (vgl. Bolza [1], 37, Formel (18)).

Setzt man

$$h(t)=\dot z(t,b)-\Omega_{\gamma_t}\dot z(t,a), \tag{3.18}$$

so kann man die Gleichung (3.17) in der Form

$$\dot\varrho(t)=-(p_a(t),\dot z(t,a))+(p_b(t),\Omega_{\gamma_t}\dot z(t,a))+(p_b(t),h(t)) \tag{3.19}$$

schreiben. Da nun γ_t eine Geodätische ist, gilt

$$p_b(t)=\Omega_{\gamma_t}p_a(t) \tag{3.20}$$

und somit folgt

---

(1) Man beachte, dass diese beiden Einheitstangentenvektoren eindeutig definiert sind. Da wir nämlich $b\neq a$ annehmen können, gilt nach dem Eindeutigkeitssatz $z(t,a)\neq z(t,b)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ und die Geodätische γ_t ist nicht in einen Punkt ausgeartet.

$$(p_b(t), \Omega_{\gamma_t} \dot{z}(t,a)) = (\Omega_{\gamma_t} p_a(t), \Omega_{\gamma_t} \dot{z}(t,a)) = (p_a(t), \dot{z}(t,a)). \tag{3.21}$$

Aus den Gleichungen (3.19) und (3.21) ergibt sich nun

$$\dot{\varrho}(t) = (p_b(t), h(t))$$

und hieraus folgt nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\dot{\varrho}(t) \leqslant |h(t)|. \tag{3.22}$$

Für den Betrag des Vektors $h(t)$ erhält man aus (3.18) die Abschätzung

$$|h(t)| = |\dot{z}(t,b) - \Omega_{\gamma_t} \dot{z}(t,a)|$$

$$= F(x, z(t,b))\,\dot{x} - \Omega_{\gamma_t} F(x, z(t,a))\,\dot{x} \leqslant L\,|\dot{x}|\,\varrho(t)$$

und somit erhält man aus (3.22) die Differentialungleichung

$$|\dot{\varrho}| \leqslant L\,|\dot{x}|\,\varrho.$$

Aus dieser folgt durch Integration

$$\varrho(t) \leqslant \varrho(a,b)\,e^{t \cdot L \cdot l} \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0),$$

womit gezeigt ist, dass die Ungleichung (3.15) die Ungleichung (3.16) impliziert.

Nun setzen wir $$\varepsilon_0 = \varepsilon\, e^{-L \cdot l}$$

und betrachten die ε_0-Kugel um den Punkt a. Es soll gezeigt werden, dass für jeden Punkt b dieser Kugel die Ungleichung

$$\varrho(z(t,a), z(t,b)) \leqslant \varrho(a,b)\,e^{t \cdot L \cdot l} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

besteht. Dazu setzen wir wieder

$$\varrho(t) = \varrho(z(t,a), z(t,b))$$

und betrachten die Menge (δ) der Zahlen δ, sodass

$$\varrho(t) < \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 \leqslant t \leqslant \delta. \tag{3.23}$$

Diese ist offen und nicht leer, denn sie enthält die Zahl $\delta = 0$. Wir zeigen, dass sie auch abgeschlossen ist. Dazu sei δ^* ein Häufungspunkt der Menge (δ) und δ_n eine nach δ^* strebende Folge. Dann gilt

$$\varrho(t) < \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 \leqslant t \leqslant \delta_n$$

und hieraus folgt, wie oben gezeigt,

$$\varrho(t) \leqslant \varrho(a,b)\,e^{t \cdot L \cdot l} \quad \text{für} \quad 0 \leqslant t \leqslant \delta_n.$$

Speziell ist also $$\varrho(\delta_n) \leqslant \varrho(a, b)\, e^{\delta_n \cdot L \cdot l}$$

und hieraus folgt für $n \to \infty$

$$\varrho(\delta^*) \leqslant \varrho(a, b)\, e^{\delta^* \cdot L \cdot l} \leqslant \varrho(a, b)\, e^{L \cdot l} < \varepsilon_0\, e^{L \cdot l} = \varepsilon,$$

d. h. der Punkt δ^* gehört auch zur Menge (δ). Somit muss die Menge (δ) aus dem ganzen Einheitsintervall bestehen, d. h. die Ungleichung (3.23) gilt im ganzen Intervall $0 \leqslant t \leqslant 1$. Hieraus folgt aber, da die Beziehung (3.15) die Beziehung (3.16) impliziert, dass auch die Ungleichung

$$\varrho(z(t, a), z(t, b)) \leqslant \varrho(a, b)\, e^{t \cdot L \cdot l}$$

im ganzen Intervall $0 \leqslant t \leqslant 1$ gilt. Aus dieser ersieht man unmittelbar die Stetigkeit der Zuordnung

$$a \to z(t, a) \tag{3.24}$$

für jedes feste t.

Aus der Stetigkeit der Lösung in bezug auf den Anfangspunkt und der vorausgesetzten Differenzierbarkeit des Operators F ergibt sich nun auf übliche Art die Differenzierbarkeit der Lösung in bezug auf den Anfangspunkt. Die Zuordnung (3.24) definiert somit eine (von der Kurve $c: x = x(t)$ abhängige) differenzierbare Selbstabbildung der Mannigfaltigkeit N, die wir mit $T(c)$ bezeichnen,

$$T(c)\, a = z(1, a).$$

24. Als nächstes soll die Abhängigkeit des Operators $T(c)$ von der Kurve c untersucht werden.

Satz II. *Sind die Voraussetzungen von Satz I erfüllt und verschwindet der Krümmungsoperator von F identisch, so gilt für zwei homotope Kurven c_0 und c_1*

$$T(c_0) = T(c_1).$$

Dem Beweis schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz I. *Es seien*

$$c_0 : x = x_0(t) \quad \textit{und} \quad c_1 : x = x_1(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

zwei differenzierbare Kurven auf M, welche beide von x_0 nach x_1 führen. Weiter sei $x = x(t, \tau)$ eine differenzierbare Abbildung des Quadrates $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ in die Mannigfaltigkeit M mit folgenden Eigenschaften:

(D$_1$) $x(t, 0) = x_0(t), \quad x(t, 1) = x_1(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$

(D$_2$) $x_0(\tau) = x_0, \quad x(1, \tau) = x_1 \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1)$

(D$_3$) *die gemischte Ableitung $d^2 x / d t \, d \tau$ existiert und ist stetig.*

Dann gilt unter den Voraussetzungen von Satz II

$$T(c_0) = T(c_1).$$

Beweis. Wir fixieren einen Wert des Deformationsparameters τ und betrachten die Lösung $z = z(t, \tau)$ der zugehörigen Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dt} = F(x(t, \tau), z) \frac{dx}{dt}(t, \tau) \tag{3.25}$$

zur Anfangsbedingung

$$z(0, \tau) = a. \tag{3.26}$$

Dabei ist a ein fester Punkt von N. Bildet man in (3.25) die kovariante Ableitung bezüglich τ, so erhält man

$$\nabla_\tau \frac{dz}{dt} = F(x, z) \nabla_\tau \frac{dx}{dt} + \nabla_\tau F(x, z) \frac{dx}{d\tau}. \tag{3.27}$$

Nun gilt wegen der Symmetrie der Γ-Symbole der auf M und N definierten Parallelverschiebungen

$$\nabla_\tau \frac{dz}{dt} = \nabla_t \frac{dz}{d\tau} \quad \text{und} \quad \nabla_\tau \frac{dx}{dt} = \nabla_t \frac{dx}{d\tau},$$

sodass man die Gleichung (3.27) auch in der Form

$$\begin{aligned} \nabla_t \frac{dz}{d\tau} &= F(x, z) \nabla_t \frac{dx}{d\tau} + \nabla_\tau F(x, z) \frac{dx}{dt} \\ &= \nabla_t \left(F(x, z) \frac{dx}{d\tau} \right) - \nabla_t F(x, z) \frac{dx}{d\tau} + \nabla_\tau F(x, z) \frac{dx}{dt} \end{aligned} \tag{3.28}$$

schreiben kann. Weiter ist

$$\nabla_t F(x, z) = \nabla_x F\left(x, z; \frac{dx}{dt}\right) + \nabla_z F\left(x, z; \frac{dz}{dt}\right)$$

und

$$\nabla_\tau F(x, z) = \nabla_x F\left(x, z; \frac{dx}{d\tau}\right) + \nabla_z F\left(x, z; \frac{dz}{d\tau}\right).$$

Damit erhält man aus (3.28)

$$\nabla_t \frac{dz}{d\tau} = \nabla_t \left(F(x, z) \frac{dx}{d\tau}\right) - \nabla_x F\left(x, z; \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx}{d\tau} + \nabla_x F\left(x, z; \frac{dx}{d\tau}\right) \frac{dx}{dt}$$
$$- \nabla_z F\left(x, z; \frac{dz}{dt}\right) \frac{dx}{d\tau} + \nabla_z F\left(x, z; \frac{dz}{d\tau}\right) \frac{dx}{dt}$$

und wenn man für dz/dt wieder nach (3.25) einsetzt,

$$\nabla_t \left(\frac{dz}{d\tau} - F(x, z) \frac{dx}{d\tau}\right) = -\nabla_x F\left(x, z; \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx}{d\tau} + \nabla_x F\left(x, z; \frac{dx}{d\tau}\right) \frac{dx}{dt}$$
$$- \nabla_z F\left(x, z; F(x, z) \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx}{d\tau} + \nabla_z F\left(x, z; \frac{dz}{d\tau}\right) \frac{dx}{dt}. \tag{3.29}$$

Der zu F gehörige Krümmungsoperator ist durch die Gleichung (1.17) definiert. Hier darf man die gewöhnlichen Ableitungsoperatoren wegen der Symmetrie der Γ-Symbole wieder durch die kovarianten ersetzen und erhält die Darstellung

$$H(x, z; \xi_1 \xi_2) = \nabla_x F(x, z; \xi_2) \xi_1 - \nabla_x F(x, z; \xi_1) \xi_2 + \nabla_z F(x, z; F(x, z) \xi_2) \xi_1$$
$$- \nabla_z F(x, z; F(x, z) \xi_1) \xi_2.$$

Somit folgt aus (3.29), wenn man noch beachtet, dass der Krümmungsoperator identisch verschwindet.

$$\nabla_t \left(\frac{dz}{d\tau} - F(x, z) \frac{dx}{d\tau}\right) = \nabla_z F\left(x, z; \frac{dz}{d\tau} - F(x, z) \frac{dx}{d\tau}\right) \frac{dx}{dt}. \tag{3.30}$$

Definiert man das Vektorfeld $\eta(t, \tau)$ durch die Gleichung

$$\eta(t, \tau) = \frac{dz}{d\tau} - F(x, z) \frac{dx}{d\tau}, \tag{3.31}$$

so lautet die Beziehung (3.30)

$$\nabla_t \eta = \nabla_z F(x, z; \eta) \frac{dx}{dt} \tag{3.32}$$

und stellt somit eine homogene Differentialgleichung für das Feld η dar. Speziell ist für $t=0$

$$\frac{dz}{d\tau}(0, \tau) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dx}{d\tau}(0, \tau) = 0$$

und somit hat man als Anfangsbedingung

$$\eta(0, \tau) = 0. \tag{3.33}$$

Aus (3.32) und (3.33) folgt aber

$$\eta(t, \tau) = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant \tau \leqslant 1),$$

d. h. es gilt
$$\frac{dz}{d\tau} = F(x, t) \frac{dx}{d\tau}. \tag{3.34}$$

Setzt man hier $t = 1$ und beachtet, dass wegen (D_2)

$$\frac{dx}{d\tau}(1, \tau) = 0 \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1)$$

gilt, so folgt
$$\frac{dz}{d\tau}(1, \tau) = 0 \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1)$$

und hieraus
$$z(1, 0) = z(1, 1). \tag{3.35}$$

Nun ist aber
$$z(1, 0) = T(c_0)\, a \quad \text{und} \quad z(1, 1) = T(c_1)\, a$$

und daher erhält man aus (3.35) die Beziehung

$$T(c_0)\, a = T(c_1)\, a.$$

Da der Punkt a beliebig war, folgt hieraus

$$T(c_0) = T(c_1),$$

womit Hilfssatz I bewiesen ist.

25. Es sei jetzt $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ eine stetige (nicht notwendige differenzierbare) Kurve auf M. Wir sagen, eine stetige Kurve $y(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ liegt in der ε-Umgebung von $x(t)$, wenn die Ungleichung

$$\varrho(x(t), y(t)) < \varepsilon \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

besteht.

HILFSSATZ II. *Es sei*

$$c : x = x(t)$$

eine stetige Kurve mit dem Anfangspunkt x_0 *und dem Endpunkt* x_1. *Dann gibt es eine positive Zahl* ε, *sodass für je zwei stetig differenzierbare Kurven*

$$c_1 : x = x_1(t) \quad \textit{und} \quad c_2 : x = x_2(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

die von x_0 *nach* x_1 *führen und in der* ε*-Umgebung von* c *liegen*(1), *die Gleichung*

$$T(c_1) = T(c_2)$$

besteht.

(1) Das bedeutet, dass die Ungleichungen

$$|x_1(t) - x(t)| < \varepsilon \text{ und } |x_2(t) - x(t)| < \varepsilon \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

bestehen.

Beweis. Zu jedem Punkt x von M gibt es eine positive Zahl ε_x mit folgender Eigenschaft: Je zwei Punkte x_1 und x_2 der ε_x-Kugel um x lassen sich durch genau einen geodätischen Bogen der Länge $\varrho(x_1, x_2)$ verbinden. Wir stellen diesen Bogen in der Form

$$x = \varphi(\tau, x_1, x_2) \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1)$$

dar, wobei τ die reduzierte Bogenlänge bezeichnet. Aus der zweimal stetigen Differenzierbarkeit des metrischen Fundamentaltensors folgt, dass die gemischten Ableitungen $d^2\varphi/d\tau\, dx_1$ und $d^2\varphi/d\tau\, dx_2$ existieren und stetig sind. Wegen der Kompaktheit der Kurve $x(t)$ gibt es eine von t unabhängige positive Zahl ε, sodass je zwei Punkte x_1 und x_2, die in der ε-Umgebung eines Punktes $x(t)$ liegen, die obige Eigenschaft haben. Nun seien

$$c_1 : x = x_1(t) \quad \text{und} \quad c_2 : x = x_2(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

zwei differenzierbare Kurven in der ε-Umgebung von $x(t)$ welche beide von x_0 nach x_1 führen. Dann erfüllt die Abbildung

$$x(t, \tau) = \varphi(\tau, x_1(t), x_2(t)) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant \tau \leqslant 1)$$

die Voraussetzungen von Hilfssatz I und danach folgt

$$T(c_1) = T(c_2).$$

Damit ist Hilfssatz II bewiesen.

26. Auf Grund von Hilfssatz II kann man die Definition des Operators $T(c)$ auf beliebige stetige Kurven erweitern. Ist c eine solche Kurve, so betrachten wir eine differenzierbare Kurve c_1, welche denselben Anfangs- und Endpunkt hat wie c und in der ε-Umgebung von c verläuft. Dabei ist ε die nach Hilfssatz II existierende Zahl. Nun setzen wir

$$T(c) = T(c_1).$$

Aus Hilfssatz II folgt, dass diese Definition von der Wahl der Kurve c_1 unabhängig ist.

Aus der obigen Definition ergibt sich unmittelbar folgende Eigenschaft: Zu jeder stetigen Kurve c gibt es eine positive Zahl ε, sodass für jede stetige Kurve c', die denselben Anfangs- und Endpunkt hat wie c und in der ε-Umgebung von c verläuft, die Beziehung

$$T(c) = T(c')$$

besteht.

Beweis von Satz II. Es seien

$$c_0 : x = x_0(t) \quad \text{und} \quad c_1 : x = x_1(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

zwei stetige, von x_0 nach x_1 führende Kurven, welche zueinander homotop sind. Dann gibt es eine stetige Abbildung $x(t, \tau)$ des Deformationsquadrates $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ in die Mannigfaltigkeit M, sodass

$$x(t, 0) = x_0(t) \quad x(t, 1) = x_1(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

und

$$x(0, \tau) = x_0 \quad x(1, \tau) = x_1 .$$

Nun fixieren wir einen Wert τ_0 und betrachten die zugehörige Kurve

$$c_{\tau_0}: x = x(t, \tau_0) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Wie oben bemerkt, gibt es dann eine positive Zahl $\delta(\tau_0)$, sodass

$$T(c_\tau) = T(c_{\tau_0}) \quad \text{für} \quad |\tau - \tau_0| < \delta(\tau_0).$$

Nach dem Heine-Borelschen Satz kann man das Intervall $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ durch endlich viele dieser Umgebungen überdecken und daraus folgt

$$T(c_0) = T(c_1),$$

womit Satz II bewiesen ist.

27. Ist die Mannigfaltigkeit M insbesondere *einfach zusammenhängend*, so hängt der Operator $T(c)$ nach Satz II nur vom Anfangspunkt x_0 und vom Endpunkt x_1 der Kurve c ab und kann daher mit $T(x_0, x_1)$ bezeichnet werden. Für je drei Punkte x_0, x_1 und x_2 gilt dann die Beziehung

$$T(x_0, x_2) = T(x_1, x_2)\, T(x_0, x_1). \tag{3.36}$$

Zum Beweis sei $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2)$ eine stetig differenzierbare Kurve, sodass

$$x(0) = x_0 \quad x(1) = x_1 \quad x(2) = x_2 .$$

Wählt man dann auf N einen beliebigen Punkt z_0 und erklärt die Kurve $z(t)$ durch die Differentialgleichung

$$\dot{z} = F(x(t), z)\, \dot{x}(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2) \tag{3.37}$$

und die Anfangsbedingung

$$z(0) = z_0,$$

so wird

$$z(1) = T(x_0, x_1)\, z_0 \tag{3.38}$$

und

$$z(2) = T(x_0, x_2)\, z_0 . \tag{3.39}$$

Andererseits ist aber

$$z(2) = T(x_1, x_2)\, z(1), \tag{3.40}$$

wie man aus der Differentialgleichung (3.37) ersieht, wenn man diese im Intervall

$1 \leqslant t \leqslant 2$ zur Anfangsbedingung $z(1)$ betrachtet. Aus den Gleichungen (3.38), (3.39) und (3.40) folgt

$$T(x_0, x_2) z_0 = T(x_1, x_2) T(x_0, x_1) z_0$$

und da z_0 beliebig war, ist damit die Beziehung (3.36) bewiesen.

Satz III. *Der Operator F genüge den Voraussetzungen von Satz I und überdies verschwinde sein Krümmungsoperator identisch. Dann hat die Differentialgleichung*

$$z'(x) = F(x, z) \tag{3.41}$$

auf einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M zu jeder Anfangsbedingung

$$z(x_0) = z_0 \tag{3.42}$$

genau eine Lösung.

Beweis. Wir definieren die Abbildung $z(x)$ gemäss

$$z(x) = T(x_0, x) z_0. \tag{3.43}$$

Dann folgt unmittelbar aus der Definition des Operators $T(x_0, x)$ dass diese an der Stelle x_0 differenzierbar ist und dass der Ableitungsoperator durch die Gleichung

$$z'(x_0) = F(x_0, z_0) \tag{3.44}$$

gegeben ist. Um zu zeigen, dass die Abbildung (3.43) an jeder beliebigen Stelle x_1 der Differentialgleichung (3.41) genügt, gehen wir von der Beziehung

$$T(x_0, x) z_0 = T(x_1, x) T(x_0, x_1) z_0,$$

aus. Setzt man

$$z_1 = T(x_0, x_1) z_0, \tag{3.45}$$

so kann man diese in der Form

$$z(x) = T(x_1, x) z_1$$

schreiben. Bildet man nun die Ableitung an der Stelle x_1 und verwendet die Beziehung (3.44) (für den Punkt x_1 anstatt für x_0), so erhält man

$$z'(x_1) = F(x_1, z_1). \tag{3.46}$$

Nun ist nach (3.43) und (3.45)

$$z_1 = z(x_1)$$

und die Gleichung (3.46) zeigt somit, dass die Abbildung (3.43) der Differentialgleichung (3.41) genügt.

Dass die Lösung der Differentialgleichung (3.41) durch die Anfangsbedingung (3.42) eindeutig bestimmt, ist, ergibt sich daraus, dass zwei Lösungen längs jeder von x_0 ausgehenden Kurve und daher überhaupt übereinstimmen müssen. Damit ist Satz III bewiesen.

Literatur

[1]. Bolza, O., *Vorlesungen über Variationsrechnung.* Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1909.

[2]. Chevalley, C., *Theory of Lie Groups*, Princeton, 1946.

[3]. Eisenhart, L. P., *Continuous groups of transformations.* Princeton, Princeton University Press, 1933.

[4]. Nevanlinna, F. und R., *Absolute Analysis.* Grundlehren Math. Wiss., Band 102. Berlin, Springer, 1959.

[5]. Pontrjagin, L., *Topological Groups.* Princeton, 1946.

[6]. Schouten, I. A., *Der Riccikalkül.* Grundlehren Math. Wiss., Vol. X. Berlin, Springer, 1954.

Eingegangen am 19. November 1960 und am 18. Juli 1961