DIOPHANTISCHE UNGLEICHUNGEN.

I. ZUR GLEICHVERTEILUNG MODULO EINS.

Von

J. G. van der CORPUT

in Groningen.

Herrn Professor Dr. Edmund Landau gewidmet.

Inhaltsverzeichnis.

Vorwort.

Wird eine Ungleichung oder ein System von Ungleichungen mit mehreren Unbekannten gegeben, dann ist es bis jetzt nur in sehr speziellen Fällen möglich zu entscheiden, ob diese Ungleichung, bezw. dieses System unendlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt oder nicht. In dieser Arbeit, die aus drei Teilen besteht, entwickle ich drei verschiedene Methoden, mittels deren man diese Frage in vielen Fällen beantworten kann. Der erste Teil mit dem Titel: »Zur Gleichverteilung modulo Eins» behandelt den von Herrn H. Weyl[1] eingeführten Begriff

[1] H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Annalen 77 (1916), S. 312—352.

der Gleichverteilung mod. 1. Im zweiten Teil, der den Titel »Rhythmische Systeme» trägt, entwickle ich eine neue Methode, und der Titel »Abschätzungen» des letzten Teils zeigt, dass in diesem Teil eine Abschätzungsmethode benutzt wird; man beachte, dass die im letzten Teil vorkommenden Abschätzungen nur Mittel, kein Zweck sind.

Welche von den drei Methoden den Vorzug verdient, hängt von den zu untersuchenden Ungleichungen ab. Die dritte Methode ist eine Verschärfung der ersten, und wo die erste anwendbar ist, ist die dritte es auch, aber die erste ist so viel einfacher, dass man sie, wenn sie anwendbar ist, stets der dritten Methode vorziehen wird. Die zweite Methode kann weder mit der ersten noch mit der dritten verglichen werden.

Verschiedene Resultate des letzten Teils sind schon von Herrn J. F. Koksma[1] in seiner Doktordissertation angewendet worden.

Wo ich einen Satz mittels zweier Methoden beweisen kann, gebe ich, um Raum zu sparen, nur einen Beweis.

Um diese Arbeit zu verstehen, braucht der Leser die Theorie der Diophantischen Ungleichungen nicht zu kennen.

§ 1. Einleitung zur ersten Methode.

Obgleich ich in diesem Teil die Theorie der Gleichverteilung mod. 1 für Funktionen beliebig vieler Veränderlichen entwickeln werde, will ich mich in dieser Einleitung beschränken auf Funktionen einer Variabeln. Ich betrachte eine Folge F von Intervallen $a \leqq x < b$, wo a und b ganz sind, und die Länge $b-a$ unbeschränkt wächst, wenn das Intervall die Folge F durchläuft. Jedem dieser Intervalle ordne ich n reelle Funktionen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ zu, die für jedes ganze im betrachteten Intervalle liegende x definiert sind; ich nehme an, dass die Anzahl n dieser Funktionen für alle Intervalle der Folge F denselben Wert hat. Ich betrachte nun das System

$$(1) \qquad 0 \leqq f_\nu(x) - y_\nu < \gamma_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ feste positive Zahlen < 1 sind, und wo $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ Unbekannte bezeichnen. Ich nenne eine ganze, im betrachteten Intervall $a \leqq x < b$

[1] Over stelsels Diophantische ongelijkheden, Doktordissertation Groningen 1930 (137 S.).

liegende Zahl x eine ganzzahlige Lösung, oder kurzweg eine Lösung von (1), wenn diese Zahl bei geeignet gewählten ganzzahligen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dem System (1) genügt. Statt (1) ziehe ich es vor, zu schreiben

$$0 \leqq f_\nu(x) < \gamma_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)^1, \tag{2}$$

und ich werde mit $A_2(a, b)$ die Anzahl der im Intervall $a \leqq x < b$ liegenden Lösungen von (2) bezeichnen.

Die apriorische Wahrscheinlichkeit, dass eine ganze Zahl x dieses System erfüllt, ist gleich $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n$.

Definition 1: *Besitzt die Anzahl $A_2(a, b)$ für jede Wahl der positiven Konstanten $\gamma_\nu < 1$ die Eigenschaft, dass das Verhältnis*

$$\frac{A_2(a, b)}{b - a}$$

nach der apriorischen Wahrscheinlichkeit $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n$ strebt, wenn das Intervall $a \leqq x < b$ die Folge F durchläuft, so nenne ich das System der Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ in den Intervallen $a \leqq x < b$ der Folge F gleichverteilt mod. 1.

In § 2 werde ich beweisen:

Satz 1: *Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ feste Zahlen mit*

$$\alpha_\nu \leqq \beta_\nu \leqq \alpha_\nu + 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

ist das System der Funktionen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ in den Intervallen $a \leqq x < b$ einer Folge F gleichverteilt mod. 1, dann besitzt die Anzahl $A_3(a, b)$ der im Intervall $a \leqq x < b$ liegenden ganzzahligen Lösungen des Systems

$$\alpha_\nu < \textit{oder} \leqq f_\nu(x) \leqq \textit{oder} < \beta_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

die Eigenschaft, dass das Verhältnis

$$\frac{A_3(a, b)}{b - a}$$

---

[1] $\alpha < f < \beta \pmod{1}$ soll heissen, dass bei geeignet gewähltem ganzzahligem y

$$\alpha < f - y < \beta$$

ist.

nach der apriorischen Wahrscheinlichkeit

$$(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)\cdots(\beta_n-\alpha_n)$$

strebt, wenn das Intervall $a \leqq x < b$ *die Folge* F *durchläuft.*

Wird überdies

$$\alpha_\nu < \beta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gewählt, so ist also wegen $b-a \to \infty$

$$A_3(a, b) \to \infty.$$

Der Begriff der Gleichverteilung mod 1 besitzt die folgenden drei einfachen Eigenschaften, die für die Theorie der Diophantischen Ungleichungen von wesentlicher Bedeutung sind, und von denen die erste und zweite schon von Herrn H. Weyl entdeckt worden sind:

Erste Haupteigenschaft: *Das System der Funktionen* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ *ist in den Intervallen* $a \leqq x < b$ *einer Folge* F *dann und nur dann gleichverteilt mod.* 1, *wenn jeder feste Gitterpunkt* $(h_1, h_2, \ldots, h_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ *die Eigenschaft*

$$\frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i(h_1 f_1(x)+\cdots+h_n f_n(x))} \to 0$$

besitzt; hierin durchläuft das Intervall $a \leqq x < b$ *natürlich die Folge* F.

Zweite Haupteigenschaft: *Das System der Funktionen* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ *ist in den Intervallen* $a \leqq x < b$ *einer Folge* F *dann und nur dann gleichverteilt mod.* 1, *wenn für jeden festen Gitterpunkt* $(h_1, h_2, \ldots, h_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ *die Funktion*

$$h_1 f_1(x) + h_2 f_2(x) + \cdots + h_n f_n(x)$$

in diesen Intervallen gleichverteilt mod. 1 *ist.*

Dritte Haupteigenschaft: *Ist für jedes feste positive ganze* h *die Funktion* $f(x+h)-f(x)$ *in den Intervallen* $a \leqq x < b-h$ *gleichverteilt mod.* 1, *so ist* $f(x)$ *in den Intervallen* $a \leqq x < b$ *gleichverteilt mod.* 1.

Anwendungen der Haupteigenschaften.

1. Anwendung: Sind θ_0 und θ_1 feste Zahlen und ist θ_0 irrational, so ist für jedes feste ganze $h \neq 0$

$$\frac{1}{b-a}\left|\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i h(\theta_0 x+\theta_1)}\right| \leqq \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{|\sin \pi h \theta_0|} \to 0,$$

sodass nach der 1. Haupteigenschaft die Funktion $\theta_0 x+\theta_1$ in den Intervallen $a \leqq x < b$ gleichverteilt mod. 1 ist.

2. Anwendung (Das Weylsche Theorem): Ist k eine feste natürliche Zahl, sind $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k$ fest, und ist θ_0 irrational, so ist das Polynom

$$f(x)=\sum_{\varkappa=0}^{k} \theta_{k-\varkappa} x^{\varkappa}$$

in den Intervallen $a \leqq x < b$ gleichverteilt mod. 1.

Denn diese Behauptung ist für den Spezialfall $k=1$ schon in der 1. Anwendung bewiesen. Ist $k \geqq 2$, und ist die Behauptung mit $k-1$ statt k bereits bewiesen, dann ist für jedes feste positive ganze h die Funktion

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{\varkappa=0}^{k-1} \theta'_{k-1-\varkappa} x^{\varkappa},$$

wo

$$\theta'_0 = hk\theta_0,$$

also irrational ist, in den Intervallen $a \leqq x < b-h$ gleichverteilt mod. 1, sodass nach der dritten Haupteigenschaft $f(x)$ in den Intervallen $a \leqq x < b$ gleichverteilt mod. 1 ist.

3. Anwendung: Sind die Voraussetzungen der vorigen Anwendung erfüllt, sind α und β Konstanten mit $\alpha < \beta$, dann besitzt die Ungleichung

$$(4) \qquad \alpha < \sum_{\varkappa=0}^{k} \theta_{k-\varkappa} x^{\varkappa} < \beta \qquad (\text{mod. } 1)$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungen x; bei geeignet gewähltem L enthält sogar jedes Intervall der Länge L wenigstens eine ganzzahlige Lösung x von (4).

Denn sonst wäre $\beta - \alpha \leqq 1$, und wäre es möglich eine Folge F von Intervallen $a \leqq x < b$ mit

$$A_4(a, b) = 0 \tag{5}$$

zu finden, wo a und b ganz sind, die Länge $b-a$ unbeschränkt wächst, wenn das Intervall die Folge F durchläuft, und wo $A_4(a, b)$ die Anzahl der im Intervall $a \leqq x < b$ liegenden ganzzahligen Lösungen x von (4) bezeichnet. Da nach der 2. Anwendung das Polynom $\theta_0 x^k + \cdots + \theta_k$ in den Intervallen $a \leqq x < b$ gleichverteilt mod. 1 ist, ist nach Satz 1

$$\frac{A_4(a, b)}{b-a} \to \beta - \alpha,$$

und das ist mit (5) in Widerspruch.

4. Anwendung: Ist c eine feste ganze Zahl, ist $f(x)$ für jedes feste ganze $x \geqq c$ definiert und reell, und strebt $\Delta f(x)$ bei unbeschränkt wachsendem x nach einem festen irrationalen Grenzwert θ, so ist $f(x)$ in den Intervallen $a \leqq x < b$, wo a stets $\geqq c$ vorausgesetzt wird, gleichverteilt mod. 1.[1]

Beweis: Für jedes reelle Zahlenpaar u und v ist

$$|e^{2\pi i u} - e^{2\pi i v}| = \left| 2\pi i \int_v^u e^{2\pi i w} dw \right| \leqq 2\pi \left| \int_v^u dw \right| = 2\pi |u-v|. \tag{6}$$

Ich wähle eine natürliche Zahl q, und eine ganze Zahl $g_0 \geqq c$, derart, dass für jedes ganze $\xi \geqq g_0$

$$|\Delta f(\xi) - \theta| < \frac{1}{q^2} \tag{7}$$

ist. Ist g eine ganze Zahl $\geqq g_0$, so ist für jedes ganze $x \geqq g$

$$|f(x) - f(g) - \theta(x-g)| = \left| \sum_{\xi=g}^{x-1} (\Delta f(\xi) - \theta) \right| \leqq \frac{x-g}{q^2}$$

wegen (7), sodass aus (6) folgt, wenn h eine feste ganze Zahl $\neq 0$ bezeichnet,

[1] $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

$$\left| e^{2\pi i h f(x)} - e^{2\pi i h (f(g) + \theta(x-g))} \right| \leqq \frac{2\pi |h| (x-g)}{q^2},$$

also

$$\left| \sum_{x=g}^{g+q-1} e^{2\pi i h f(x)} \right| \leqq \left| \sum_{x=g}^{g+q-1} e^{2\pi i h (f(g) + \theta(x-g))} \right| + \frac{2\pi |h|}{q^2} \sum_{x=g}^{g+q-1} (x-g) \leqq K,$$

wo ich

$$K = \frac{1}{|\sin \pi h \theta|} + 2\pi |h|$$

gesetzt habe. Hieraus folgt für jedes ganze positive H

$$\left| \sum_{x=g}^{g+Hq-1} e^{2\pi i h f(x)} \right| \leqq HK,$$

also für jedes ganze $b > g$

$$\left| \sum_{x=g}^{b-1} e^{2\pi i h f(x)} \right| \leqq \frac{b-g}{q} K + q.$$

Ist $a \geqq g_0$, so wähle ich $g = a$, und erhalte

$$\left| \frac{1}{b-a} \sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i h f(x)} \right| \leqq \frac{K}{q} + \frac{q}{b-a};$$

ist $a < g_0$, so wähle ich $g = g_0$, und erhalte

$$\left| \frac{1}{b-a} \sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i h f(x)} \right| < \frac{g_0 - a}{b-a} + \frac{K}{q} + \frac{q}{b-a}.$$

Wegen $b - a \to \infty$ ist also stets

$$\overline{\lim} \left| \frac{1}{b-a} \sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i h f(x)} \right| \leqq \frac{K}{q},$$

gültig für jede natürliche Zahl q. Folglich ist

$$\frac{1}{b-a} \sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i h f(x)} \to 0,$$

sodass nach der 1. Haupteigenschaft $f(x)$ in den Intervallen $a \leqq x < b$ gleichverteilt mod. 1 ist.

5. Anwendung (Verallgemeinerung des Weylschen Theorems): Sind k und c feste ganze Zahlen mit $k > 0$, ist $f(x)$ für jedes feste ganze $x \geqq c$ definiert und reell, und strebt $\Delta^k f(x)$ bei unbeschränkt wachsendem x nach einem festen irrationalen Grenzwert θ, so ist $f(x)$ in den Intervallen $a \leqq x < b$, wo a stets $\geqq c$ vorausgesetzt wird, gleichverteilt mod. 1.[1]

Denn diese Behauptung ist für den Spezialfall $k = 1$ schon in der vorigen Anwendung bewiesen. Ist $k \geqq 2$, so besitzt die Funktion

$$f_h(x) = f(x+h) - f(x) = \sum_{q=0}^{h-1} \Delta f(x+q)$$

für jedes feste positive ganze h die Eigenschaft, dass

$$\Delta^{k-1} f_h(x) = \sum_{q=0}^{h-1} \Delta^k f(x+q)$$

bei unbeschränkt wachsendem x dem festen irrationalen Grenzwert $h\theta$ zustrebt. Ist die zu beweisende Behauptung mit $k-1$ statt k bereits bewiesen, dann ist $f_h(x)$ in den Intervallen $a \leqq x < b - h$ gleichverteilt mod. 1, sodass nach der dritten Haupteigenschaft $f(x)$ in den Intervallen $a \leqq x < b$ gleichverteilt mod. 1 ist.

6. Anwendung: Sind die Voraussetzungen der vorigen Anwendung erfüllt, sind α und β Konstanten mit $\alpha \leqq \beta \leqq \alpha + 1$, dann besitzt die Anzahl $A_8(a, b)$ der im Intervall $a \leqq x < b$ liegenden ganzzahligen Lösungen der Ungleichung

$$\alpha < \text{ oder } \leqq f(x) \leqq \text{ oder } < \beta \qquad (\text{mod. } 1) \tag{8}$$

die Eigenschaft

$$\lim \frac{A_8(a, b)}{b-a} = \beta - \alpha,$$

wenn a stets $\geqq c$ ist, und die Länge $b-a$ des Intervalls unbeschränkt wächst. Bei geeignet gewähltem L enthält somit jedes Intervall $a \leqq x < a + L$, wo $a \geqq c$ ist, wenigstens eine ganzzahlige Lösung von (8).

---

[1] Ist $k \geqq 2$, so ist $\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x))$.

Diese Anwendung folgt unmittelbar aus Satz 1 und Anwendung 5.

Bis jetzt war nur bekannt: ist α fest, und strebt β nach α, so ist

$$\lim_{\beta\to\alpha}\overline{\lim_{b\to\infty}}\frac{A_8(c,b)}{b-c}=0.$$ [1]

7. Anwendung: Ist a eine feste ganze Zahl, ist $f(x)$ für jedes ganze $x\geqq a$ definiert und reell, ist $\varDelta f(x)$ für hinreichend grosses ganzes x monoton, und gilt

$$\lim_{x\to\infty}\varDelta f(x)=0,\qquad \lim_{x\to\infty}x\,|\varDelta f(x)|=\infty, \tag{9}$$

so ist $f(x)$ in den Intervallen $a\leqq x<b$, wo b unbeschränkt wächst, gleichverteilt mod. 1.

Beweis: Für jedes reelle Zahlenpaar u und v ist

$$\tag{10}\left\{\begin{aligned}\left|e^{2\pi iu}-e^{2\pi iv}-2\pi i(u-v)e^{2\pi iv}\right|&=\left|e^{2\pi i(u-v)}-1-2\pi i(u-v)\right|\\&=4\pi^2\left|\int_0^{u-v}(u-v-w)\,e^{2\pi iw}\,dw\right|\\&\leqq 4\pi^2\left|\int_0^{u-v}(u-v-w)\,dw\right|=2\pi^2(u-v)^2.\end{aligned}\right.$$

Ich wähle die ganze Zahl $g\geqq a$ so, dass $\varDelta f(x)$ für jedes ganze $x\geqq g$ monoton ist. Wegen (9) ist dann $\varDelta f(x)$ im Intervall $x\geqq g$ beständig positiv oder beständig negativ. Ist h eine feste ganze Zahl $h\neq 0$, so folgt aus (10) für jedes ganze $x\geqq g$

$$\left|\frac{e^{2\pi ihf(x+1)}}{\varDelta f(x)}-\frac{e^{2\pi ihf(x)}}{\varDelta f(x)}-2\pi ihe^{2\pi ihf(x)}\right|\leqq 2\pi^2h^2\,|\varDelta f(x)|,$$

also

$$\left|\frac{e^{2\pi ihf(x+1)}}{\varDelta f(x+1)}-\frac{e^{2\pi ihf(x)}}{\varDelta f(x)}-2\pi ihe^{2\pi ihf(x)}\right|\leqq\left|\frac{1}{\varDelta f(x)}-\frac{1}{\varDelta f(x+1)}\right|+2\pi^2h^2\,|\varDelta f(x)|.$$

[1] Th. Skolem, Einige Sätze über ganzzahlige Lösungen gewisser Gleichungen und Ungleichungen, Math. Annalen **95** (1925), p. 2—68.

Für jedes ganze $b > g$ ist somit wegen der Monotonie von $\Delta f(x)$

$$\left|\frac{2\pi i h}{b}\sum_{x=g}^{b-1} e^{2\pi i h f(x)}\right| \leqq \frac{1}{b}\left|\frac{e^{2\pi i h f(b)}}{\Delta f(b)} - \frac{e^{2\pi i h f(g)}}{\Delta f(g)}\right| + \frac{1}{b}\left|\frac{1}{\Delta f(g)} - \frac{1}{\Delta f(b)}\right|$$

$$+ \frac{2\pi^2 h^2}{b}\sum_{x=g}^{b-1} |\Delta f(x)|$$

$$\leqq \frac{2}{b|\Delta f(b)|} + \frac{2}{b|\Delta f(g)|} + \frac{2\pi^2 h^2}{b}\sum_{x=g}^{b-1} |\Delta f(x)| \to 0$$

wegen (9). Hieraus folgt

$$\frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i h f(x)} \to 0,$$

sodass nach der 1. Haupteigenschaft $f(x)$ in den Intervallen $a \leqq x < b$ gleichverteilt mod. 1 ist.

8. Anwendung: Sind a und k feste ganze Zahlen mit $k > 0$, ist $f(x)$ für jedes feste ganze $x \geqq a$ definiert und reell, ist $\Delta^k f(x)$ für hinreichend grosses ganzes x monoton, und gilt

$$(11) \qquad \lim_{x\to\infty} \Delta^k f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} x\,|\Delta^k f(x)| = \infty,$$

dann ist $f(x)$ in den Intervallen $a \leqq x < b$, wo die ganze Zahl b unbeschränkt wächst, gleichverteilt mod. 1.

Denn diese Behauptung ist für den Spezialfall $k = 1$ schon in der vorigen Anwendung bewiesen. Ist $k \geqq 2$, so besitzt die Funktion

$$f_h(x) = f(x+h) - f(x) = \sum_{q=0}^{h-1} \Delta f(x+q)$$

für jedes feste positive ganze h die Eigenschaft, dass

$$\Delta^{k-1} f_h(x) = \sum_{q=0}^{h-1} \Delta^k f(x+q)$$

bei hinreichend grossem ganzem x monoton ist, und wegen (11) den Beziehungen

$$\lim_{x \to \infty} \Delta^{k-1} f_h(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} x \,|\, \Delta^{k-1} f_h(x) \,| = \infty$$

genügt. Ist die zu beweisende Behauptung mit $k-1$ statt k bereits bewiesen, dann ist diese Funktion $f_h(x)$ in den Intervallen $a \leqq x < b - h$ gleichverteilt mod. 1, sodass nach der dritten Haupteigenschaft $f(x)$ in den Intervallen $a \leqq x < b$ gleichverteilt mod. 1 ist.

9. Anwendung: Sind die Voraussetzungen der vorigen Anwendung erfüllt, sind α und β Konstanten mit $\alpha \leqq \beta \leqq \alpha + 1$, dann besitzt die Anzahl $A_{12}(a, b)$ der im Intervall $a \leqq x < b$ liegenden ganzzahligen Lösungen x der Ungleichung

$$\alpha < \text{ oder } \leqq f(x) \leqq \text{ oder } < \beta \quad (\text{mod. } 1) \tag{12}$$

die Eigenschaft

$$\lim_{b \to \infty} \frac{A_{12}(a, b)}{b} = \beta - \alpha.$$

Diese Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 1 und Anwendung 8. Bis jetzt war nur bekannt: ist α fest, und strebt β nach α, so ist

$$\lim_{\beta \to \alpha} \overline{\lim_{b \to \infty}} \frac{A_{12}(a, b)}{b} = 0.$$ [1]

Numerische Beispiele.

Beispiel 1: Das System

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{2}\,x^7 - \frac{1}{3} - y < \varepsilon \\ 0 < \sqrt{3}\,x^7 + x^6 \sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{2} - z < \varepsilon \\ 0 < x^2 \log x \,.\, \log\log x + \pi x^2 - u < \varepsilon \end{cases}$$

besitzt für jedes positive ε unendlich viele ganzzahlige Lösungen x, y, z, u. Ist $\varepsilon \leqq 1$, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine natürliche Zahl x diesem System genügt, gleich ε^3.

---

[1] Vergl. die Fussnote auf S. 381.

Beweis: Nach Satz 1 genügt es zu zeigen, dass das System der drei Funktionen

$$\sqrt{2}\,x^7, \quad \sqrt{3}\,x^7 + x^6\sqrt{x}, \quad x^2 \log x \,.\, \log\log x + \pi x^2$$

in den Intervallen $2 \leqq x < b$, wo b unbeschränkt wächst, gleichverteilt mod. 1 ist. Aus der zweiten Haupteigenschaft folgt, dass ich dazu nur zu zeigen brauche, dass die Funktion

$$f(x) = h_1\sqrt{2}\,x^7 + h_2(\sqrt{3}\,x^7 + x^6\sqrt{x}) + h_3(x^2\log x \,.\, \log\log x + \pi x^2)$$

für jeden festen Gitterpunkt $(h_1, h_2, h_3) \neq (0, 0, 0)$ in diesen Intervallen gleichverteilt mod. 1 ist. Ich unterscheide nun zwei verschiedene Fälle:

1. Wenigstens eine der zwei Zahlen h_1 und h_2 sei $\neq 0$. Dann strebt $\Delta^7 f(x)$ bei unbeschränkt wachsendem x nach dem irrationalen Grenzwert

$$7!\,(h_1\sqrt{2} + h_2\sqrt{3}),$$

sodass $f(x)$ nach dem verallgemeinerten Weylschen Theorem (Anwendung 5) mit $k=7$ in den Intervallen $2 \leqq x < b$ gleichverteilt mod. 1 ist.

2. Es sei $h_1 = h_2 = 0$, also $h_3 \neq 0$. Dann ist

$$f(x) = h_3(x^2\log x \,.\, \log\log x + \pi x^2);$$

$\Delta^3 f(x)$ ist für hinreichend grosses ganzes x monoton, und man hat

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\,\Delta^3 f(x)}{\log\log x} = 2h_3,$$

sodass

$$\lim_{x\to\infty} \Delta^3 f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} x\,|\Delta^3 f(x)| = \infty$$

ist. Nach der 8. Anwendung, mit $k=3$, ist $f(x)$ in den Intervallen $2 \leqq x < b$ gleichverteilt mod. 1.

Beispiel 2: Die Ungleichung

$$(13) \qquad 2x^{20} + 7x^4y^2 < y^4 - y + 1 < 2x^{20} + x^{10}y - 2x^2y^2$$

besitzt unendlich viele positive ganzzahlige Lösungen x, y. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine natürliche Zahl x dieser Ungleichung genügt, ist gleich $\frac{1}{8}\sqrt{2}$, und es gibt eine natürliche Zahl L, derart, dass unter L konsekutiven natürlichen Zahlen wenigstens eine Lösung x von (13) vorkommt.

Beweis: Die Punkte (x, y) der durch (13) definierten Figur mit hinreichend grosser Abszisse x liegen auf einem geraden Segment

$$y_1(x) < y < y_2(x),$$

wo die Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$, wie man sich leicht überzeugt, die Eigenschaften

$$\lim_{x\to\infty} \{y_1(x) - \sqrt[4]{2}\, x^5\} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \{y_2(x) - \sqrt[4]{2}\, x^5\} = \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

besitzen.

Ist δ eine positive Zahl $< \frac{1}{16}\sqrt{2}$, so genügt also jeder Gitterpunkt (x, y) mit hinreichend grosser Abszisse x und mit

$$-\frac{1}{8}\sqrt{2} + \delta < \sqrt[4]{2}\, x^5 - y < -\delta$$

der Ungleichung (13), während jeder Gitterpunkt (x, y) mit hinreichend grosser Abszisse und mit Eigenschaft (13) der Ungleichung

$$-\frac{1}{8}\sqrt{2} - \delta < \sqrt[4]{2}\, x^5 - y < \delta$$

genügt. Sind a und b positiv ganz mit $a < b$, bezeichnet $A_{13}(a, b)$ die Anzahl der im Intervall $a \leqq x < b$ liegenden Lösungen von (13), $A_{14}(a, b)$ die Anzahl der in diesem Intervall liegenden Lösungen von

$$(14) \qquad -\frac{1}{8}\sqrt{2} + \delta < \sqrt[4]{2}\, x^5 < -\delta \qquad (\text{mod. } 1),$$

und schliesslich $A_{15}(a, b)$ die Anzahl der in diesem Intervall liegenden Lösungen von

$$(15) \qquad -\frac{1}{8}\sqrt{2} - \delta < \sqrt[4]{2}\, x^5 < \delta \qquad (\text{mod. } 1),$$

dann ist also bei geeignet gewähltem nur von δ abhängigem c

$$(16) \qquad A_{14}(a, b) - c < A_{13}(a, b) < A_{15}(a, b) + c.$$

Nach dem Weylschen Theorem (Anwendung 2) ist

$$\frac{A_{14}(a, b)}{b-a} \to \frac{1}{8}\sqrt{2} - 2\delta \quad \text{und} \quad \frac{A_{15}(a, b)}{b-a} \to \frac{1}{8}\sqrt{2} + 2\delta,$$

sodass aus (16) folgt

$$\frac{1}{8}\sqrt{2} - 2\delta \leqq \underline{\lim} \frac{A_{13}(a, b)}{b-a} \leqq \overline{\lim} \frac{A_{13}(a, b)}{b-a} \leqq \frac{1}{8}\sqrt{2} + 2\delta,$$

also

$$\lim \frac{A_{13}(a, b)}{b-a} = \frac{1}{8}\sqrt{2}.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Ersetze ich in diesem Beispiel x durch $\sqrt{x}$, so bekomme ich

Beispiel 3: Die Ungleichung

$$2x^{10} + 7x^2y^2 < y^4 - y + 1 < 2x^{10} + x^5y - 2xy^2 \tag{17}$$

besitzt unendlich viele positive ganzzahlige Lösungen x, y, und die Wahrscheinlichkeit, dass eine natürliche Zahl x dieser Ungleichung genügt, ist $\frac{1}{8}\sqrt{2}$.

Um das zu beweisen, brauche ich nur im Beweis des vorigen Beispiels x durch $\sqrt{x}$ zu ersetzen, $a=1$ zu setzen, und Anwendung 8 statt 2 zu benutzen.

In § 8 werde ich von Ungleichung (17) noch mehr beweisen, nämlich: ist F eine Folge von Intervallen $a \leqq x < b$, wo a und b natürliche Zahlen bezeichnen mit

$$\frac{b-a}{\sqrt{a}} \to \infty, \tag{18}$$

wenn das Intervall die Folge durchläuft, so genügt die Anzahl $A_{17}(a, b)$ der im Intervall $a \leqq x < b$ liegenden Lösungen x von (17) der Beziehung

$$\frac{A_{17}(a, b)}{b-a} \to \frac{1}{8}\sqrt{2}.$$

Hieraus folgt, dass eine positive absolute Konstante C existiert, derart, dass für jede natürliche Zahl a das Intervall

$$a \leqq x < a + C\sqrt{a}$$

wenigstens eine Lösung x von (17) enthält, da sonst eine Folge von Intervallen $a \leqq x < b$ mit (18) und $A_{17}(a, b) = 0$ existieren würde.

Übrigens lässt sich dieses Resultat noch erheblich verschärfen; denn, wie ich im dritten Teil beweisen werde, darf hier (18) durch die viel weniger fordernde Bedingung

$$\frac{b-a}{\sqrt[6]{a}} \to \infty$$

ersetzt werden. Folglich existiert eine positive absolute Konstante C, derart, dass für jede natürliche Zahl a das Intervall

$$a \leqq x < a + C\sqrt[4]{a}$$

wenigstens eine Lösung x von (17) enthält.

In § 6 betrachte ich Polynomsysteme und beweise ich u. a. die folgenden Sätze, wobei m, also beliebig viele Unbekannte $x_1, x_2, \ldots, x_m$ auftreten.

Satz 2: *Bezeichnen*

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

reelle Polynome, so hat das System

$$(19) \qquad -\varepsilon < f_\nu(x) < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

dann und nur dann für jedes feste positive ε unendlich viele ganzzahlige Lösungen $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, wenn ein Gitterpunkt $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ existiert mit folgender Eigenschaft: für jeden Gitterpunkt $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, für den das Polynom

$$h_1 f_1(x) + h_2 f_2(x) + \cdots + h_n f_n(x),$$

(d. k. G. a. B. g.)[1] *rationalzahlig ist, ist die Zahl*

$$h_1 f_1(\sigma) + h_2 f_2(\sigma) + \cdots + h_n f_n(\sigma)$$

ganz.

Diesen Satz kann man anders formulieren, wenn man die folgende Definition benutzt.

Definition 2: *Sind*

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

reelle Polynome, so betrachte ich die Menge R der Punkte $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ im n-dimensionalen Raum mit folgender Eigenschaft: für jeden Gitterpunkt $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, für den das Polynom

$$h_1 f_1(x) + h_2 f_2(x) + \cdots + h_n f_n(x)$$

[1] »d. k. G. a. B. g.« soll heissen »das konstante Glied ausser Betracht gelassen« oder »die konstanten Glieder ausser Betracht gelassen«.

(d. k. G. a. B. g.) rationalzahlig ist, ist

$$h_1 u_1 + h_2 u_2 + \cdots + h_n u_n = 0.$$

Es ist klar, dass R ein linearer Raum ist; ich nenne R den den Polynomen $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ zugeordneten Raum.

Aus Satz 2 folgt

Satz 3: *Bezeichnen*

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

reelle Polynome mit zugeordnetem Raum R, so hat das System (19) dann und nur dann für jedes positive ε unendlich viele ganzzahlige Lösungen $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, wenn ein Punkt $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ in R und ein Gitterpunkt $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ existieren mit

$$u_\nu \equiv f_\nu(\sigma) \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Bei linearen Polynomen kann Satz 2 noch anders formuliert werden, und zwar wie folgt.

Satz 4 *(Satz von Herrn G. Giraud[1]): Bezeichnen*

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

reelle lineare Polynome, so hat das System (19) dann und nur dann für jedes positive ε unendlich viele ganzzahlige Lösungen $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, wenn für jeden Gitterpunkt $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, für den das Polynom

$$h_1 f_1(x) + h_2 f_2(x) + \cdots + h_n f_n(x)$$

(d. k. G. a. B. g.) ganzzahlig ist, auch das konstante Glied dieses Polynoms gleich einer ganzen Zahl ist.

Dass dieser Satz bei nicht-linearen Polynomen nicht richtig zu sein braucht, geht aus dem einfachen Beispiel

$$m = n = 1, \qquad f_1(x) = \frac{1}{3} x_1^2 + \frac{1}{3}$$

[1] G. Giraud, Sur la résolution approchée en nombres entiers d'un système d'équations linéaires non homogènes, Comptes Rendus des séances de la Société Mathématique de France (1914), p. 29—32. Vergl. in denselben Comptes Rendus (S. 46—48) die Mitteilung des Herrn A. Châtelet, Sur une communication de M. Georges Giraud.

hervor; jedes ganze h mit der Eigenschaft, dass

$$hf_1(x) = h\left(\frac{1}{3}x_1^2 + \frac{1}{3}\right)$$

(d. k. G. a. B. g.) ganzzahlig ist, ist durch 3 teilbar, sodass dann auch das konstante Glied $\frac{1}{3}h$ dieses Polynoms gleich einer ganzen Zahl ist, aber die Ungleichung

$$-\frac{1}{3} < \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{1}{3} < \frac{1}{3} \pmod{1}$$

hat keine ganzzahlige Lösungen.

In § 6 untersuche ich nicht nur System (19), sondern auch

$$(20) \qquad \begin{cases} 0 < f_\lambda(x) < \varepsilon \pmod{1} & (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \\ -\varepsilon < f_\nu(x) < \varepsilon \pmod{1} & (\nu = l+1, l+2, \ldots, n) \end{cases}$$

wo $1 \leqq l \leqq n$ ist, und beweise ich

Satz 5: *Ist* $1 \leqq l \leqq n$, *und bezeichnen*

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

reelle Polynome mit zugeordnetem Raum R, *so besitzt* (20) *dann und nur dann für jedes positive* ε *unendlich viele ganzzahlige Lösungen* x, *wenn ein Punkt* $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *in* R *und ein Gitterpunkt* $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ *existieren mit*

$$u_\nu \equiv f_\nu(\sigma) \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

und wenn ausserdem für jeden Gitterpunkt $(k_1, k_2, \ldots, k_l) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ *mit Koordinaten* $k_\lambda \geqq 0$ *im Polynom*

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_l f_l(x)$$

wenigstens ein nicht-konstantes Glied mit irrationalem Koeffizienten vorkommt.

Bis jetzt habe ich in dieser Einleitung fast nur über Systeme der Gestalt

$$\alpha_\nu < f_\nu(x) - y_\nu < \beta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gesprochen, aber im letzten Paragraphen (§ 9) von Teil I behandle ich allgemeinere Systeme, die ich Normalsysteme nenne, und die die Gestalt

$$(21) \qquad \alpha_\lambda < \chi_\lambda(f_1(x) - y_1, \ldots, f_n(x) - y_n) < \beta_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

haben. Dass der Begriff der Gleichverteilung mod. 1 für Normalsysteme von Bedeutung ist, ergibt sich aus

Satz 6: *Ist das System der Funktionen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ gleichverteilt mod. 1, und sind die Funktionen $\chi_\lambda(v_1, \ldots, v_n)$ für jeden Punkt $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ definiert und stetig, so hat (21) dann und nur dann unendlich viele ganzzahlige Lösungen, wenn ein Punkt $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ mit*

$$\alpha_\lambda < \chi_\lambda(w_1, w_2, \ldots, w_n) < \beta_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

existiert. Existiert ein solcher Punkt, dann kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass ein x bei geeignet gewählten ganzen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ das System (21) erfüllt.

Die Untersuchung, ob die Methode der Gleichverteilung mod. 1 auf ein gegebenes System anwendbar ist, wird im allgemeinen in drei Schritten verlaufen.

Erster Schritt: Normalisierung des gegebenen Systems, d. h. man versucht das gegebene System zu einem oder zu mehreren Normalsystemen zurückzuführen. (Dazu dienen die Sätze 2 und 3 in § 9.)

Zweiter Schritt: Ist der erste Schritt gelungen, so untersucht man, ob das System der in den gefundenen Normalsystemen auftretenden Funktionen gleichverteilt mod. 1 ist oder nicht.

Dritter Schritt: Ist dieses System gleichverteilt mod. 1, so untersucht man, ob die gefundenen Normalsysteme der in Satz 6 genannten Bedingung genügen.

Ist das der Fall, dann ist die Methode der Gleichverteilung mod. 1 auf das gegebene System anwendbar.

Als Beispiel behandle ich in § 9 das System

$$(22) \qquad \begin{cases} 0 < \sqrt{3}\,x^6 - y < \varepsilon \\ 0 < x^5 \log^2 x - z < \varepsilon \\ 0 < \sqrt{z} - u < \varepsilon \\ 0 < \pi x + \sqrt{2}\,z + \sqrt{3}\,u - v < \varepsilon, \end{cases}$$

wo x, y, z, u, v ganzzahlige Unbekannte bezeichnen, und wo ε eine beliebige feste positive Zahl < 1 bezeichnet.

Erster Schritt: Normalisierung. Ich wähle eine positive Zahl $\delta < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $< \frac{1}{2}(1-\varepsilon)$, und ich beweise, dass bei geeignet gewähltem, nur von δ abhängigem c jede Lösung $x \geqq c$ von (22) auch eine Lösung vom Normalsystem

$$(23)\qquad \begin{cases} 0 < \sqrt{3}\,x^6 - y < \varepsilon \\ 0 < x^5 \log^2 x - z < \varepsilon \\ -\delta < x^{\frac{5}{2}} \log x - u < \varepsilon + \delta \\ 0 < -\sqrt{2}\,(x^5 \log^2 x - z) - \sqrt{3}\,(x^{\frac{5}{2}} \log x - u) + (f_1(x) - v) < \varepsilon \end{cases}$$

ist, wo ich

$$f_1(x) = \pi x + \sqrt{2}\,x^5 \log^2 x + \sqrt{3}\,x^{\frac{5}{2}} \log x$$

gesetzt habe, und ausserdem dass jede Lösung $x \geqq c$ des Normalsystems

$$(24)\qquad \begin{cases} 0 < \sqrt{3}\,x^6 - y < \varepsilon \\ 0 < x^5 \log^2 x - z < \varepsilon \\ \delta < x^{\frac{5}{2}} \log x - u < \varepsilon - \delta \\ 0 < -\sqrt{2}\,(x^5 \log^2 x - z) - \sqrt{3}\,(x^{\frac{5}{2}} \log x - u) + (f_1(x) - v) < \varepsilon \end{cases}$$

auch (22) erfüllt.

Zweiter Schritt. Die vier in den zwei Normalsystemen (23) und (24) auftretenden Funktionen

$$\sqrt{3}\,x^6, \quad x^5 \log^2 x, \quad x^{\frac{5}{2}} \log x, \quad f_1(x)$$

bilden ein System, das in den Intervallen $1 \leqq x < b$, wo die natürliche Zahl b unbeschränkt wächst, gleichverteilt mod. 1 ist.

Dritter Schritt. Die Normalsysteme (23) und (24) genügen der in Satz 6 genannten Bedingung; die Wahrscheinlichkeit, dass eine natürliche Zahl x (23) erfüllt, ist gleich $\varepsilon^3(\varepsilon + 2\delta)$, dass sie (24) erfüllt, ist gleich $\varepsilon^3(\varepsilon - 2\delta)$.

Jetzt wissen wir, dass die Methode der Gleichverteilung mod. 1 auf das gegebene System (22) anwendbar ist. Nach dem ersten und dritten Schritt ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine natürliche Zahl x das System (22) erfüllt, $\geqq \varepsilon^3(\varepsilon - 2\delta)$ und $\leqq \varepsilon^3(\varepsilon + 2\delta)$, also, da δ beliebig klein gewählt werden kann, gleich ε^4. Folglich besitzt (22) unendlich viele ganzzahlige Lösungen x, y, z, u, v.

§ 2. Die erste und zweite Haupteigenschaft.

In diesem Paragraphen ist F eine Folge von m-dimensionalen Quadern

$$Q \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

wo a_μ und b_μ ganz sind,

$$a_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

ist, und der Inhalt

$$A(Q) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_m - a_m)$$

von Q unbeschränkt wächst, wenn Q die Folge F durchläuft. Ausserdem werden jedem Quader Q von F n reelle Funktionen

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

zugeordnet, die in jedem Gitterpunkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ von Q definiert sind. Die Zahlen m und n werden dabei unabhängig von Q vorausgesetzt, d. h. m, und auch n hat für jeden Quader Q von F denselben Wert.

Ist j die Nummer eines Systems von Ungleichungen, so werde ich mit $A_j(Q)$ die Anzahl der in Q liegenden Lösungen dieses Systems bezeichnen, sodass z. B. $A_6(Q)$ die Anzahl der in Q liegenden ganzzahligen Lösungen x von (6) bezeichnet. Ich nenne das System der Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1, falls für jede Wahl der Konstanten γ_ν mit $0 < \gamma_\nu < 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ Beziehung (7) gilt, wenn Q die Folge F durchläuft.

Satz 1: *Ist das System der Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ in den Quadern Q gleichverteilt mod.* 1, *und bezeichnen α_ν, β_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ von Q unabhängige Zahlen mit*

$$\alpha_\nu \leqq \beta_\nu \leqq \alpha_\nu + 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

so besitzt die Anzahl $A_2(Q)$ der in Q liegenden Lösungen x des Systems

$$\alpha_\nu \leqq \textit{oder} < f_\nu(x) \leqq \textit{oder} < \beta_\nu \ (\mathrm{mod.}\ 1) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

die Eigenschaft

$$\frac{A_2(Q)}{A(Q)} \to (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2) \cdots (\beta_n - \alpha_n), \tag{3}$$

wenn Q die Folge F durchläuft, d. h. das Verhältnis

$$\frac{A_2(Q)}{A(Q)}$$

strebt nach der apriorischen Wahrscheinlichkeit, dass ein willkürlich gewählter Gitterpunkt x dem System (2) genügt.

Beweis: Ich unterscheide verschiedene Fälle.

1. Es werde das System

$$(4) \qquad 0 \leqq f_\nu(x) < \beta_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

betrachtet (wo $0 \leqq \beta_\nu \leqq 1$ ist). Dann ist zu beweisen

$$(5) \qquad \frac{A_4(Q)}{A(Q)} \to \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n.$$

Ich darf annehmen, dass alle Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ positiv sind, da sonst $A_4(Q) = 0$, also (5) evident ist. Ich führe eine positive Zahl $\delta < 1$ ein, und ich setze

$$\left.\begin{array}{ll} \gamma_\nu = \beta_\nu & \text{falls } \beta_\nu < 1 \\ \gamma_\nu = 1 - \delta & \text{falls } \beta_\nu = 1 \end{array}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

sodass γ_ν zwischen 0 und 1 liegt. Nach der Definition des Begriffes der Gleichverteilung mod. 1 gilt für das System

$$(6) \qquad 0 \leqq f_\nu(x) < \gamma_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Beziehung

$$(7) \qquad \frac{A_6(Q)}{A(Q)} \to \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n.$$

Eine Lösung von (4), die nicht (6) erfüllt, genügt auch nicht dem System

$$(8) \qquad 0 \leqq f_\nu(x) < 1 - \delta \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

sodass

$$(9) \qquad 0 \leqq A_4(Q) - A_6(Q) \leqq A(Q) - A_8(Q)$$

ist. Nach der Definition des Begriffes der Gleichverteilung mod. 1 ist

$$\frac{A_8(Q)}{A(Q)} \to (1-\delta)^n,$$

sodass aus (9) und (7) folgt

$$\underline{\lim} \frac{A_4(Q)}{A(Q)} \geqq \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n$$

und

$$\overline{\lim} \frac{A_4(Q)}{A(Q)} \leqq \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n + 1 - (1-\delta)^n.$$

Strebt δ nach Null, so strebt γ_ν nach β_ν, sodass (5) gilt.

2. Es werde das System

$$\alpha_\nu \leqq f_\nu(x) < \beta_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1; 2, \ldots, n) \tag{10}$$

betrachtet. Dann ist zu beweisen

$$\frac{A_{10}(Q)}{A(Q)} \to (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2) \cdots (\beta_n - \alpha_n). \tag{11}$$

Bezeichnet $r-1$ $(1 \leqq r \leqq n+1)$ die Anzahl der verschwindenden Zahlen im System $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, so darf ich $r \leqq n$ voraussetzen, da der Fall $r = n+1$ schon in 1. erledigt ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich $\alpha_1 \neq 0$ annehmen, da ich sonst nur die Ungleichungen (10) untereinander zu vertauschen brauche. Ausserdem darf ich annehmen, dass (11) mit $r+1$ statt r schon bewiesen ist.

Ich werde jetzt zwei Fälle unterscheiden, je nachdem zwischen α_1 und β_1 eine ganze Zahl liegt oder nicht.

2, 1. Es liege zwischen α_1 und β_1 keine ganze Zahl. Für die Systeme[1]

$$\begin{cases} \alpha_\nu \leqq f_\nu(x) < \beta_\nu & \pmod{1} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n) \\ 0 \leqq f_1(x) < \alpha_1 - [\alpha_1] & \pmod{1} \end{cases} \tag{12}$$

und

$$\begin{cases} \alpha_\nu \leqq f_\nu(x) < \beta_\nu & \pmod{1} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n) \\ 0 \leqq f_1(x) < \beta_1 - [\alpha_1] & \pmod{1} \end{cases} \tag{13}$$

[1] $[\alpha_1]$ bezeichnet die grösste ganze Zahl $\leqq \alpha_1$.

gilt dann

$$A_{10}(Q) = A_{13}(Q) - A_{12}(Q). \tag{14}$$

Hierin ist

$$0 \leqq \alpha_1 - [\alpha_1] < 1 \quad \text{und} \quad 0 \leqq \beta_1 - [\alpha_1] < 1,$$

sodass zwischen 0 und $\alpha_1 - [\alpha_1]$ keine ganze Zahl liegt, und auch nicht zwischen 0 und $\beta_1 - [\alpha_1]$. Nach der zu beweisenden Eigenschaft, mit $r+1$ statt r angewendet, ist

$$\frac{A_{12}(Q)}{A(Q)} \to (\alpha_1 - [\alpha_1]) \prod_{\nu=2}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu),$$

und

$$\frac{A_{13}(Q)}{A(Q)} \to (\beta_1 - [\alpha_1]) \prod_{\nu=2}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu),$$

sodass (11) aus (14) folgt.

2, 2. Es liege zwischen α_1 und β_1 eine ganze Zahl. Die Systeme

$$\begin{cases} \alpha_\nu \leqq f_\nu(x) < \beta_\nu & (\text{mod. } 1) \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n) \\ \beta_1 \leqq f_1(x) < \alpha_1 + 1 & (\text{mod. } 1) \end{cases} \tag{15}$$

und

$$\begin{cases} \alpha_\nu \leqq f_\nu(x) < \beta_\nu & (\text{mod. } 1) \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n) \\ 0 \leqq f_1(x) < 1 & (\text{mod. } 1) \end{cases} \tag{16}$$

besitzen die Eigenschaft

$$A_{10}(Q) = A_{16}(Q) - A_{15}(Q). \tag{17}$$

Zwischen β_1 und $\alpha_1 + 1$ liegt keine ganze Zahl, und auch nicht zwischen 0 und 1, sodass nach 2, 1

$$\frac{A_{15}(Q)}{A(Q)} \to (\alpha_1 + 1 - \beta_1) \prod_{\nu=2}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu) \tag{18}$$

und

$$\frac{A_{16}(Q)}{A(Q)} \to 1 \cdot \prod_{\nu=2}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu) \tag{19}$$

ist. Aus (17), (18) und (19) folgt (11).

3. Es werde jetzt System (2) betrachtet. Ich führe eine positive Zahl ε ein, mit der Eigenschaft, dass alle Zahlen $\beta_\nu - \alpha_\nu$ und $1-(\beta_\nu - \alpha_\nu)$, die nicht verschwinden, grösser als ε sind, und ich setze

$$\beta_\nu' = \beta_\nu + \varepsilon \quad \text{falls} \quad \beta_\nu - \alpha_\nu < 1, \tag{20}$$

$$\beta_\nu' = \beta_\nu \quad \text{falls} \quad \beta_\nu - \alpha_\nu = 1, \tag{21}$$

$$\alpha_\nu' = \alpha_\nu + \varepsilon \quad \text{falls} \quad \beta_\nu - \alpha_\nu > 0, \tag{22}$$

$$\alpha_\nu' = \alpha_\nu \quad \text{falls} \quad \beta_\nu - \alpha_\nu = 0. \tag{23}$$

Eine Lösung von (2) ist auch eine Lösung von

$$\alpha_\nu \leqq f_\nu(x) < \beta_\nu' \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n); \tag{24}$$

denn ist $\beta_\nu - \alpha_\nu < 1$, so gilt (20), also $\beta_\nu' > \beta_\nu$, und ist $\beta_\nu - \alpha_\nu = 1$, so gilt (21), also $\beta_\nu' = \alpha_\nu + 1$, sodass dann Ungleichung (24) jedenfalls erfüllt ist. Ich bekomme somit

$$A_2(Q) \leqq A_{24}(Q). \tag{25}$$

Eine Lösung von

$$\alpha_\nu' \leqq f_\nu(x) < \beta_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{26}$$

ist auch eine Lösung von (2); denn hat (26) eine Lösung, dann ist $\alpha_\nu' < \beta_\nu$, sodass (23) nicht erfüllt ist, somit (22) gilt, also $\alpha_\nu' > \alpha_\nu$ ist. Ich bekomme also auch noch

$$A_2(Q) \geqq A_{26}(Q). \tag{27}$$

Wegen

$$\alpha_\nu \leqq \beta_\nu' \leqq \alpha_\nu + 1 \quad \text{und} \quad \alpha_\nu' \leqq \beta_\nu \leqq \alpha_\nu' + 1$$

ist nach 2.

$$\frac{A_{24}(Q)}{A(Q)} \to \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu' - \alpha_\nu)$$

und

$$\frac{A_{26}(Q)}{A(Q)} \to \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu').$$

Strebt ε nach Null, so strebt α_ν' nach α_ν, und β_ν' nach β_ν, sodass (3) aus (25) und (27) folgt.

Satz 2: *Es sei das System der Funktionen*

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

in den Quadern Q der Folge F gleichverteilt mod. 1. *Es sei $\psi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ eine für jeden Punkt $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ definierte von Q unabhängige Funktion mit der Periode* 1, *d. h. aus*

$$v_\nu \equiv w_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

folge

$$\psi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \psi(w_1, w_2, \ldots, w_n).$$

Das eigentliche Riemannsche Integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \psi(v_1, v_2, \ldots, v_n)\, dv_1\, dv_2 \ldots dv_n = J \tag{28}$$

existiere. Dann ist

$$\frac{1}{A(Q)} \sum_{x \text{ in } Q} \psi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \to J, \tag{29}$$

wenn Q die Folge F durchläuft.

Vorbemerkung: Die Summe

$$\sum_{x \text{ in } Q}$$

wird erstreckt über alle in Q liegenden Gitterpunkte $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Man beachte, dass in Satz 2 der Begriff des Riemannschen Integrals nicht durch den Begriff des Lebesgueschen Integrals ersetzt werden darf. Um das zu zeigen, setze ich

$$\psi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 1$$

für jeden Punkt $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, dem ich einen Quader Q der Folge F, einen in diesem Quader liegenden Gitterpunkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ und einen Gitterpunkt $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ mit

$$f_\nu(x) - y_\nu = v_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

zuordnen kann; sonst setze ich

$$\psi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0.$$

Dann ist $\psi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ eine für jeden Punkt v definierte, von Q unabhängige Funktion mit der Periode 1; da $\psi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ fast überall verschwindet, existiert das Lebesguesche Integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \psi(v_1, v_2, \ldots, v_n)\, dv_1\, dv_2 \ldots dv_n$$

und hat den Wert 0, aber die linke Seite von (29) ist in diesem Falle

$$\frac{1}{A(Q)} \sum_{x \text{ in } Q} 1 = 1,$$

sodass (29) nicht gilt, wenn das Riemannsche Integral durch das Lebesguesche Integral ersetzt wird.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ reell voraussetzen, da ich sonst nur den Satz für den reellen und für den imaginären Teil von ψ zu beweisen brauche.

Es sei s eine beliebig gewählte natürliche Zahl, und es werde der n-dimensionale Kubus

$$0 \leqq v_\nu < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

in s^n gleiche Teilkuben

$$T_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s^n)$$

verteilt. Bezeichnet $A^{(\sigma)}(Q)$ die Anzahl der in Q liegenden Gitterpunkte x mit der Eigenschaft, dass der Punkt mit den n Koordinaten

$$f_\nu(x) - [f_\nu(x)] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

in T_σ liegt, dann ist nach Satz 1

$$(30) \qquad \frac{A^{(\sigma)}(Q)}{A(Q)} \to \frac{1}{s^n} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s^n),$$

wenn Q die Folge F durchläuft. Bezeichne ich mit Ψ_σ die obere, mit ψ_σ die untere Schranke von $\psi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ in T_σ, dann ist

$$\sum_{\sigma=1}^{s^n} \psi_\sigma \, . \, A^{(\sigma)}(Q) \leqq \sum_{x \text{ in } Q} \psi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \leqq \sum_{\sigma=1}^{s^n} \Psi_\sigma \, . \, A^{(\sigma)}(Q),$$

sodass aus (30) folgt

$$(31) \qquad \overline{\lim} \; \frac{1}{A(Q)} \sum_{x \text{ in } Q} \psi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \leqq \frac{1}{s^n} \sum_{\sigma=1}^{s^n} \Psi_\sigma$$

und

$$(32) \qquad \underline{\lim} \; \frac{1}{A(Q)} \sum_{x \text{ in } Q} \psi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \geqq \frac{1}{s^n} \sum_{\sigma=1}^{s^n} \psi_\sigma .$$

Wegen (28) hat man

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s^n} \sum_{\sigma=1}^{s^n} \Psi_\sigma = J$$

und

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s^n} \sum_{\sigma=1}^{s^n} \psi_\sigma = J,$$

sodass (29) aus (31) und (32) folgt.

Satz 3 *(Erste Haupteigenschaft): Das System der Funktionen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ ist in den Quadern Q der Folge F dann und nur dann gleichverteilt mod.* 1, *wenn für jeden von Q unabhängigen Gitterpunkt $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$*

$$(33) \qquad \frac{1}{A(Q)} \sum_{x \text{ in } Q} e^{2\pi i (h_1 f_1(x) + \cdots + h_n f_n(x))} \to 0$$

gilt; hierin durchläuft Q die Folge F.

Beweis: Ist das System der Funktionen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1, so kann ich den vorigen Satz mit

$$\psi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = e^{2\pi i(h_1 v_1 + h_2 v_2 + \cdots + h_n v_n)}$$

anwenden. Dann ist

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 e^{2\pi i(h_1 v_1 + \cdots + h_n v_n)}\, dv_1\, dv_2 \cdots dv_n = 0,$$

sodass (33) aus (29) folgt.

Ich nehme nun (33) für jeden von Q unabhängigen Gitterpunkt $h \neq (0, 0, \ldots, 0)$ an. Ich führe n feste positive Zahlen $\eta_\nu < 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ und eine feste positive Zahl

$$\delta < \frac{1 - \eta_\nu}{2} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ein; es sei $\psi_\nu(v)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ die Funktion mit Periode 1, die in den Punkten $0, \eta_\nu, \eta_\nu + \delta, 1 - \delta, 1$ die Werte $1, 1, 0, 0, 1$ besitzt und auf den vier Segmenten

$$0 \leqq v \leqq \eta_\nu, \quad \eta_\nu \leqq v \leqq \eta_\nu + \delta, \quad \eta_\nu + \delta \leqq v \leqq 1 - \delta, \quad 1 - \delta \leqq v \leqq 1$$

linear ist. Diese Funktion $\psi_\nu(v)$ kann in eine absolut konvergente Fouriersche Reihe

$$\psi_\nu(v) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} B_{h\nu}\, e^{2\pi i h v} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

entwickelt werden; denn durch partielle Integration erhält man für jedes ganze $h \neq 0$

$$\begin{aligned} B_{h\nu} &= \int_0^1 \psi_\nu(v) e^{-2h\pi i v}\, dv \\ &= -\int_0^1 \psi_\nu'(v) \frac{e^{-2h\pi i v}}{-2h\pi i}\, dv \\ &= \int_{\eta_\nu}^{\eta_\nu+\delta} \frac{1}{\delta} \cdot \frac{e^{-2h\pi i v}}{-2h\pi i}\, dv - \int_{1-\delta}^{1} \frac{1}{\delta} \cdot \frac{e^{-2h\pi i v}}{-2h\pi i}\, dv \end{aligned}$$

(da $\psi_\nu'(v) = 0$ oder $\pm \frac{1}{\delta}$ ist)

$$= \frac{1}{\delta} \cdot \frac{e^{-2h\pi i(\eta_\nu+\delta)} - e^{-2h\pi i\eta_\nu}}{(-2h\pi i)^2}$$

$$- \frac{1}{\delta} \cdot \frac{e^{-2h\pi i} - e^{-2h\pi i(1-\delta)}}{(-2h\pi i)^2},$$

also

$$|B_{h\nu}| \leqq \frac{1}{\delta} \cdot \frac{1+1+1+1}{4h^2\pi^2} = \frac{1}{h^2\pi^2\delta}.$$

Die Funktion

$$\psi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \psi_1(v_1)\,\psi_2(v_2) \cdots \psi_n(v_n)$$

besitzt somit die Eigenschaft

$$(34) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{A(Q)} \sum\limits_{x \text{ in } Q} \psi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = \\ B_{01}\,B_{02} \cdots B_{0n} + \sum\limits_{h \neq 0} B_h \cdot \dfrac{1}{A(Q)} \sum\limits_{x \text{ in } Q} e^{2\pi i(h_1 f_1(x) + \cdots + h_n f_n(x))}, \end{cases}$$

wo die Summe $\sum\limits_{h\neq 0}$ erstreckt wird über alle Gitterpunkte $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ $\neq (0, 0, \ldots, 0)$, und wo

$$B_h = B_{h_1, 1}\, B_{h_2, 2} \cdots B_{h_n, n}$$

ist. Jedes Glied der in (34) auftretenden Summe $\sum\limits_{h\neq 0}$ ist absolut höchstens gleich dem entsprechenden Gliede der von Q unabhängigen konvergenten Reihe

$$\sum_{h\neq 0} |B_h| = \sum_{\substack{h_1=-\infty \\ (h_1, \ldots, h_n) \neq (0, \ldots, 0)}}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=-\infty}^{\infty} |B_{h_1, 1}| \cdot |B_{h_2, 2}| \cdots |B_{h_n, n}|.$$

Nach der Voraussetzung strebt jedes Glied der in (34) vorkommenden Reihe $\sum\limits_{h\neq 0}$ nach Null, wenn Q die Folge F durchläuft. Folglich ist wegen der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{h\neq 0}$

$$(35) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{A(Q)} \sum\limits_{x \text{ in } Q} \psi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \to B_{01}\,B_{02} \cdots B_{0n} \\ \qquad\qquad = (\eta_1 + \delta)(\eta_2 + \delta) \cdots (\eta_n + \delta). \end{cases}$$

Für jeden Gitterpunkt x von Q ist

$$\psi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \geqq 0,$$

und für die Lösungen x des Systems

$$(36) \qquad 0 \leqq f_\nu(x) \leqq \eta_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist

$$\psi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = \prod_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(f_\nu(x) - y_\nu) = 1,$$

sodass die Anzahl $A_{36}(Q)$ der in Q liegenden Lösungen von (36) höchstens

$$\sum_{x \text{ in } Q} \psi(f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

ist. Wegen (35) ist dann

$$\overline{\lim} \frac{A_{36}(Q)}{A(Q)} \leqq (\eta_1 + \delta)(\eta_2 + \delta) \cdots (\eta_n + \delta),$$

somit

$$(37) \qquad \overline{\lim} \frac{A_{36}(Q)}{A(Q)} \leqq \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_n,$$

gültig für jedes System von Q unabhängiger, positiven Zahlen $\eta_\nu < 1$.

Bezeichnen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ beliebige von Q unabhängige Zahlen, so bleibt (33) gelten, wenn $f_\nu(x)$ durch $f_\nu(x) - \alpha_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ ersetzt wird. Hieraus folgt: bezeichnen α_ν und β_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ von Q unabhängige Zahlen mit

$$0 < \beta_\nu - \alpha_\nu < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

so kann ich das obige Resultat mit $f_\nu(x) - \alpha_\nu$ statt $f_\nu(x)$, und mit $\eta_\nu = \beta_\nu - \alpha_\nu$ anwenden. Ich finde auf diese Weise für das System

$$(38) \qquad \alpha_\nu \leqq f_\nu(x) \leqq \beta_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Beziehung

$$(39) \qquad \overline{\lim} \frac{A_{38}(Q)}{A(Q)} \leqq (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2) \cdots (\beta_n - \alpha_n).$$

Ich wähle nun n beliebige positive von Q unabhängige Zahlen $\gamma_\nu < 1$. Wählt man in (36) $\eta_\nu = \gamma_\nu$, so findet man für das System

$$0 \leqq f_\nu(x) < \gamma_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{40}$$

die Relation

$$A_{40}(Q) \leqq A_{36}(Q),$$

sodass aus (37) folgt

$$\overline{\lim} \frac{A_{40}(Q)}{A(Q)} \leqq \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n. \tag{41}$$

Ich betrachte nun die 2^n verschiedene Zahlensysteme

$$\omega_\sigma = (\alpha_{1\sigma}, \ldots, \alpha_{n\sigma}; \ \beta_{1\sigma}, \ldots, \beta_{n\sigma}) \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, 2^n),$$

mit

$$\alpha_{\nu\sigma} = 0, \ \beta_{\nu\sigma} = \gamma_\nu \quad \text{oder} \quad \alpha_{\nu\sigma} = \gamma_\nu, \ \beta_{\nu\sigma} = 1 \ (\nu = 1, 2, \ldots, n);$$

ich wähle dabei

$$\omega_1 = (0, \ldots, 0; \ \gamma_1, \ldots, \gamma_n). \tag{42}$$

Nach (39), mit $\alpha_\nu = \alpha_{\nu\sigma}$ und $\beta_\nu = \beta_{\nu\sigma}$ angewendet, besitzt die Anzahl $A_{43}^{(\sigma)}$ der in Q liegenden Lösungen des Systems

$$\alpha_{\nu\sigma} \leqq f_\nu(x) \leqq \beta_{\nu\sigma} \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{43}$$

die Eigenschaft

$$\overline{\lim} \frac{A_{43}^{(\sigma)}(Q)}{A(Q)} \leqq \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_{\nu\sigma} - \alpha_{\nu\sigma}) \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, 2^n). \tag{44}$$

Es ist

$$\sum_{\sigma=1}^{2^n} \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_{\nu\sigma} - \alpha_{\nu\sigma}) = 1, \tag{45}$$

sodass aus (42) folgt

(46)
$$\sum_{\sigma=2}^{2^n} \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_{\nu\sigma} - \alpha_{\nu\sigma}) = 1 - \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n.$$

Ausserdem ist

$$A_{40}(Q) + \sum_{\sigma=2}^{2^n} A_{43}^{(\sigma)}(Q) \geqq A(Q),$$

also

$$\frac{A_{40}(Q)}{A(Q)} \geqq 1 - \sum_{\sigma=2}^{2^n} \frac{A_{43}^{(\sigma)}(Q)}{A(Q)},$$

sodass aus (44) und (46) folgt

$$\underline{\lim}\, \frac{A_{40}(Q)}{A(Q)} \geqq 1 - \sum_{\sigma=2}^{2^n} \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_{\nu\sigma} - \alpha_{\nu\sigma}) = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n.$$

Hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf (41)

$$\frac{A_{40}(Q)}{A(Q)} \to \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n,$$

gültig für jedes System von positiven von Q unabhängigen Zahlen $\gamma_\nu < 1$. Folglich ist das System der Funktionen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1.

Satz 4 *(Zweite Haupteigenschaft): Eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit das System der Funktionen*

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

in den Quadern Q der Folge F gleichverteilt mod. 1 sei, ist dass für jeden festen Gitterpunkt $(h_1, h_2, \ldots, h_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ die Funktion $h_1 f_1(x) + \cdots + h_n f_n(x)$ in diesen Quadern gleichverteilt mod. 1 ist.

Beweis: Nach dem vorigen Satz ist das System der Funktionen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ in den Quadern Q dann und nur dann gleichverteilt mod. 1, wenn (33) gilt, und nach demselben Satz (angewendet mit $n = 1$) gilt (33) dann und nur dann, wenn die Funktion $h_1 f_1(x) + h_2 f_2(x) + \cdots + h_n f_n(x)$ in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1 ist.

§ 3. Zum Kronecker-Weylschen Satz.

Kronecker hat den folgenden berühmten Approximationssatz bewiesen:

Satz 1: *Sind*

$$l_\nu(x) = l_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

rational unabhängige Linearformen in $x_1, x_2, \ldots, x_m$, *d. h. enthält für jeden Gitterpunkt* $(h_1, h_2, \ldots, h_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ *die Linearform*

$$h_1 l_1(x) + h_2 l_2(x) + \cdots + h_n l_n(x)$$

wenigstens ein Glied mit irrationalem Koeffizienten, und bezeichnen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *beliebige reelle Zahlen, so hat das System*

$$-\varepsilon < l_\nu(x) - \alpha_\nu < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

für jedes positive ε *unendlich viele ganzzahlige Lösungen* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Ich werde den Kroneckerschen Satz in der folgenden von Herrn Weyl verschärften Form beweisen:

Satz 2: *Es seien*

$$l_\nu(x) = l_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

rational unabhängige Linearformen in $x_1, x_2, \ldots, x_m$, *und es bezeichne* F *eine Folge von* m*-dimensionalen Quadern*

$$Q \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

wo a_μ *und* b_μ *ganz sind, mit der Eigenschaft, dass jede Kante* $b_\mu - a_\mu$ *von* Q *unbeschränkt wächst, wenn* Q *die Folge* F *durchläuft.*

Dann ist das System der Linearformen $l_1(x), \ldots, l_n(x)$ *in den Quadern* Q *der Folge* F *gleichverteilt mod. 1.*

Beweis: 1. Es sei $n = 1$. Ist

$$l_1(x) = p_1 x_1 + \cdots + p_m x_m,$$

so ist wenigstens einer der Koeffizienten p_μ irrational, da $l_1(x)$ rational unabhängig ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich p_1 irrational voraussetzen, da ich sonst nur die Veränderlichen x untereinander zu vertauschen brauche. Für jedes ganze $h \neq 0$ ist dann

$$\left| \frac{1}{A(Q)} \sum_{x \text{ in } Q} e^{2\pi i h l_1(x)} \right| \leqq \frac{1}{b_1 - a_1} \left| \sum_{x_1 = a_1}^{b_1 - 1} e^{2\pi i h p_1 x_1} \right|$$

$$\leqq \frac{1}{b_1 - a_1} \cdot \frac{1}{|\sin \pi h p_1|} \to 0,$$

wegen $b_1 - a_1 \to \infty$. Nach der ersten Haupteigenschaft (Satz 3 des vorigen Paragraphen) mit $n = 1$, ist dann die Linearform $l_1(x)$ in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1.

2. Es sei $n \geqq 2$. Für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, \ldots, h_n) \neq (0, \ldots, 0)$ enthält die Linearform

$$h_1 l_1(x) + \cdots + h_n l_n(x)$$

wenigstens ein Glied mit irrationalem Koeffizienten, ist also nach dem Obigen in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1. Nach der zweiten Haupteigenschaft (Satz 4 des vorigen Paragraphen) ist dann auch das System der n Linearformen $l_1(x), l_2(x), \ldots, l_n(x)$ in diesen Quadern gleichverteilt mod. 1.

§ 4. Die fundamentale Ungleichung und die dritte Haupteigenschaft.

In diesem Paragraphen werde ich eine Ungleichung ableiten, die nicht nur für die erste, sondern auch für die dritte Methode von wesentlicher Bedeutung ist. Ich brauche zunächst die

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: *Sind die Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_s$ reell, so ist*

$$(t_1 + t_2 + \cdots + t_s)^2 \leqq s(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_s^2).$$

Denn es ist ausgeschlossen, dass die quadratische Gleichung

$$(x + t_1)^2 + (x + t_2)^2 + \cdots + (x + t_s)^2 = 0$$

zwei verschiedene reelle Wurzeln besitzt, sodass die Diskriminante dieser Gleichung

$$(t_1 + t_2 + \cdots + t_s)^2 - s(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_s^2) \leqq 0$$

ist.

Eine Verschärfung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist die

Fundamentale Ungleichung: *Es seien die konjugiert-komplexen Zahlen* $u(x)$ *und* $\bar{u}(x)$ *für jeden Gitterpunkt* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *im Quader*

$$Q \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

(a_μ und b_μ ganz) definiert, und es werde für $h = 0, 1, 2, \ldots, b_1 - a_1 - 1$

$$v_h = \sum_{x \text{ in } Q_h} u(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, \bar{u}(x_1 + h, x_2, \ldots, x_m)$$

gesetzt, wo Q_h *den Quader*

$$Q_h \ldots a_1 \leqq x_1 < b_1 - h, \quad a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \quad (\mu = 2, 3, \ldots, m)$$

bezeichnet.

Dann ist für jede natürliche Zahl $q \leqq b_1 - a_1$

$$q^2 \cdot \frac{b_1 - a_1}{b_1 - a_1 + q - 1} \cdot \frac{1}{A(Q)} \Big| \sum_{x \text{ in } Q} u(x) \Big|^2 \leqq q v_0 + 2\,\Re \sum_{h=1}^{q-1} (q - h)\, v_h,$$

wo $\Re w$ *den reellen Teil von* w *bezeichnet.*

Vorbemerkung: Wählt man $q = 1$, so verschwindet die Summe $\sum\limits_{h=1}^{q-1}$, sodass man dann die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\Big| \sum_{x \text{ in } Q} u(x) \Big|^2 \leqq A(Q) \,.\, \sum_{x \text{ in } Q} | u(x) |^2$$

zurückfindet. Wir werden jedoch sehen, dass es in vielen Fällen vorteilhaft ist q nicht klein, sondern im Gegenteil sehr gross zu wählen.

Beweis: Ich unterscheide zwei verschiedene Fälle:

1. Es sei $m = 1$. Ich setze

$$u(x) = 0$$

für jedes ganze $x \geqq b_1$, und auch für jedes ganze $x < a_1$. Dann enthält die Doppelsumme

$$\sum_{\sigma=a_1}^{b_1+q-2} \sum_{\mu=0}^{q-1} u(\sigma-\mu),$$

abgesehen von verschwindenden Gliedern, nur Glieder der Gestalt $u(x)$ mit $a_1 \leqq x < b_1$, und jedes dieser Glieder kommt genau q mal vor, sodass die betrachtete Doppelsumme den Wert

$$q \sum_{x=a_1}^{b_1-1} u(x)$$

besitzt. Folglich ist

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} q^2 \left| \sum_{x=a_1}^{b_1-1} u(x) \right|^2 &= \left| \sum_{\sigma=a_1}^{b_1+q-2} \sum_{\mu=0}^{q-1} u(\sigma-\mu) \right|^2 \\ &\leqq \left\{ \sum_{\sigma=a_1}^{b_1+q-2} \left| \sum_{\mu=0}^{q-1} u(\sigma-\mu) \right| \right\}^2. \end{aligned} \right.$$

Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, mit $s = b_1 - a_1 + q - 1$ angewendet, ist die letzte Seite von (1)

$$\leqq (b_1 - a_1 + q - 1) \sum_{\sigma=a_1}^{b_1+q-2} \left| \sum_{\mu=0}^{q-1} u(\sigma-\mu) \right|^2,$$

sodass man hat

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{b_1 - a_1 + q - 1} \left| \sum_{x=a_1}^{b_1-1} u(x) \right|^2 &\leqq \sum_{\sigma=a_1}^{b_1+q-2} \sum_{\mu=0}^{q-1} u(\sigma-\mu) \sum_{\nu=0}^{q-1} \bar{u}(\sigma-\nu) \\ &= \sum_{\sigma=a_1}^{b_1+q-2} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu=\nu}}^{q-1} + \sum_{\sigma=a_1}^{b_1+q-2} \sum_{\mu=0}^{q-1} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu<\mu}}^{q-1} + \sum_{\sigma=a_1}^{b_1+q-2} \sum_{\mu=0}^{q-1} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu>\mu}}^{q-1}. \end{aligned}$$

Da die letzten zwei Glieder konjugiert komplex sind, erhält man

$$(2) \qquad \frac{q^2}{b_1 - a_1 + q - 1} \cdot \left| \sum_{x=a_1}^{b_1-1} u(x) \right|^2 \leqq S' + 2\Re S,$$

wenn

$$S' = \sum_{\sigma=a_1}^{b_1+q-2} \sum_{\mu=0}^{q-1} u(\sigma-\mu)\, \bar{u}(\sigma-\mu)$$

und

$$S = \sum_{\sigma=a_1}^{b_1+q-2} \sum_{\mu=0}^{q-1} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu<\mu}}^{q-1} u(\sigma-\mu)\,\bar{u}(\sigma-\nu)$$

gesetzt wird.

Die Summe S' enthält, abgesehen von verschwindenden Gliedern, nur Glieder der Gestalt

$$u(x)\,\bar{u}(x) = |u(x)|^2 \quad \text{mit} \quad a_1 \leqq x < b_1,$$

und jedes dieser Glieder kommt in S' genau q mal vor, sodass nach der Definition von v_0

(3) $$S' = q\sum_{x=a_1}^{b_1-1} |u(x)|^2 = q v_0$$

ist.

Die Summe S enthält, abgesehen von verschwindenden Gliedern, nur Glieder der Gestalt $u(x)\,\bar{u}(x+h)$ mit

(4) $$a_1 \leqq x < b_1, \quad a_1 \leqq x + h < b_1, \qquad 1 \leqq h \leqq q - 1.$$

Die Zahl, die angibt wie oft dieses Glied in S vorkommt, ist gleich der Anzahl der Systeme σ, μ, ν mit

(5) $$a_1 \leqq \sigma < b_1 + q - 1, \qquad \nu < \mu$$

und

(6) $$0 \leqq \mu \leqq q-1, \quad 0 \leqq \nu \leqq q-1, \quad \sigma - \mu = x, \quad \sigma - \nu = x + h.$$

Gelten (4) und (6), so ist

$$\sigma = x + \mu \geqq a_1 + 0 = a_1,$$
$$\sigma = x + \mu < b_1 + q - 1,$$
$$\nu = \mu - h < \mu,$$

sodass dann auch (5) gilt. Folglich ist die Zahl, die angibt, wie oft das Glied $u(x)\,\bar{u}(x+h)$ mit (4) in S auftritt, gleich der Anzahl der Systeme σ, μ, ν mit (6). Die Lösungen von (6) sind

$$\nu \text{ beliebig} \geqq 0 \text{ und } < q - h; \quad \mu = \nu + h, \quad \sigma = x + h + \nu,$$

sodass die Anzahl der Systeme σ, μ, ν mit (6) gleich $q-h$ ist, also das Glied $u(x)\,\bar{u}(x+h)$ mit (4) genau $q-h$ mal in S vorkommt. Man hat also

$$S=\sum_{h=1}^{q-1}(q-h)\sum_{x=a_1}^{b_1-h-1}u(x)\,\bar{u}(x+h)=\sum_{h=1}^{q-1}(q-h)v_h \tag{7}$$

nach der Definition von v_h.

Aus (2), (3) und (7) folgt

$$\frac{q^2}{b_1-a_1+q-1}\left|\sum_{x=a_1}^{b_1-1}u(x)\right|^2 \leqq q v_0 + 2\Re\sum_{h=1}^{q-1}(q-h)\,v_h,$$

womit wegen

$$A(Q)=b_1-a_1$$

die fundamentale Ungleichung für den Spezialfall mit $m=1$ bewiesen ist.

2. Es sei $m \geqq 2$. Bezeichnet Q^* den $(m-1)$-dimensionalen Quader

$$Q^* \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu=2, 3, \ldots, m),$$

ist $x^*=(x_2, \ldots, x_m)$ ein Gitterpunkt im $(m-1)$-dimensionalen Raum, und ersetzt man bequemlichkeitshalber $u(x)=u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ durch $u(x_1, x^*)$, so erhält man

$$\left|\sum_{x \text{ in } Q}u(x)\right| = \left|\sum_{x^* \text{ in } Q^*}\sum_{x_1=a_1}^{b_1-1}u(x_1, x^*)\right|$$

$$\leqq \sum_{x^* \text{ in } Q^*}\left|\sum_{x_1=a_1}^{b_1-1}u(x_1, x^*)\right|,$$

sodass nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\left|\sum_{x \text{ in } Q}u(x)\right|^2 \leqq A(Q^*)\sum_{x^* \text{ in } Q^*}\left|\sum_{x_1=a_1}^{b_1-1}u(x_1, x^*)\right|^2 \tag{8}$$

ist.

Wendet man jetzt die fundamentale Ungleichung mit $m=1$ an, so bekommt man

$$\frac{q^2}{b_1 - a_1 + q - 1}\left|\sum_{x_1=a_1}^{b_1-1} u(x_1, x^*)\right|^2 \leqq$$

$$q\sum_{x_1=a_1}^{b_1-1}|u(x_1, x^*)|^2 + 2\Re\sum_{h=1}^{q-1}(q-h)\sum_{x_1=a_1}^{b_1-h-1} u(x_1, x^*)\,\bar{u}(x_1+h, x^*),$$

also

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{q^2}{b_1 - a_1 + q - 1}\sum_{x^* \text{ in } Q^*}\left|\sum_{x_1=a_1}^{b_1-1} u(x_1, x^*)\right|^2 \leqq \\ &q\sum_{x \text{ in } Q}|u(x)|^2 + 2\Re\sum_{h=1}^{q-1}(q-h)\sum_{x \text{ in } Q_h} u(x_1, x^*)\,\bar{u}(x_1+h, x^*) \\ &\qquad = qv_0 + 2\Re\sum_{h=1}^{q-1}(q-h)v_h \end{aligned}\right.$$

nach der Definition der Zahlen v_h.

Aus (8), (9) und

$$A(Q^*) = \frac{A(Q)}{b_1 - a_1}$$

folgt die fundamentale Ungleichung.

Fast die einzige Anwendung, die ich bei der ersten Methode von der fundamentalen Ungleichung brauche, ist die schon für den Spezialfall $m = 1$ in der Einleitung formulierte dritte Haupteigenschaft, die ich im folgenden Satz zusammenfasse:

Satz 1: *Es sei eine Folge F von m-dimensionalen Quadern*

$$Q \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

gegeben, wo a_μ und b_μ ganz sind,

$$a_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

ist, und $b_1 - a_1$ unbeschränkt wächst, falls Q die Folge F durchläuft, sodass, wenn h eine beliebige natürliche Zahl bezeichnet, für jeden Quader Q, mit Ausnahme höchstens endlich vieler,

$$b_1 - a_1 > h$$

ist, und die Funktion

$$f_h(x) = f(x_1 + h, x_2, \ldots, x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

in jedem Gitterpunkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *des Quaders*

$$Q_h \ldots a_1 \leqq x_1 < b_1 - h, \quad a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \quad (\mu = 2, 3, \ldots, m)$$

festgelegt ist.

Ist dann für jedes feste positive ganze h die Funktion $f_h(x)$ *in den Quadern* Q_h *gleichverteilt mod.* 1, *dann ist die Funktion* $f(x)$ *in den Quadern* Q *gleichverteilt mod.* 1.

Beweis: Da die Funktion $f_h(x)$ in den Quadern Q_h gleichverteilt mod. 1 ist, ist nach der ersten Haupteigenschaft (Satz 3 von § 2) für jedes feste ganze $l \neq 0$ und für jedes feste positive ganze h

$$\frac{1}{A(Q_h)} \sum_{x \text{ in } Q_h} e^{-2\pi i l f_h(x)} \rightarrow 0, \tag{10}$$

wenn Q die Folge F durchläuft. Wendet man die fundamentale Ungleichung mit

$$u(x) = e^{2\pi i l f(x)}$$

an, so ist

$$v_0 = \sum_{x \text{ in } Q} 1 = A(Q)$$

und für jedes feste positive ganze h

$$\frac{v_h}{A(Q_h)} = \frac{1}{A(Q_h)} \sum_{x \text{ in } Q_h} e^{-2\pi i l f_h(x)} \rightarrow 0$$

wegen (10); also a fortiori

$$\frac{v_h}{A(Q)} \rightarrow 0.$$

Wegen $b_1 - a_1 \rightarrow \infty$ strebt $\dfrac{b_1 - a_1}{b_1 - a_1 + q - 1}$ für jedes feste positive ganze q nach 1, sodass aus der fundamentalen Ungleichung folgt

$$\overline{\lim}\; q^2 \cdot 1 \cdot \left| \frac{1}{A(Q)} \sum_{x \text{ in } Q} u(x) \right|^2 \leqq q.$$

Diese Ungleichung gilt für jede feste natürliche Zahl q, sodass

$$\frac{1}{A(Q)} \sum_{x \text{ in } Q} e^{2\pi i l f(x)} = \frac{1}{A(Q)} \sum_{x \text{ in } Q} u(x) \to 0,$$

wenn Q die Folge F durchläuft, und zwar für jedes feste ganze $l \neq 0$. Nach der ersten Haupteigenschaft (Satz 3 in § 2) ist dann die Funktion $f(x)$ in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1.

§ 5. Zum Weylschen Theorem.

Satz 1: *Enthält das Polynom*

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

wenigstens ein nicht-konstantes Glied mit irrationalem Koeffizienten, und ist F eine Folge von m-dimensionalen Quadern

$$Q \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

wo a_μ und b_μ ganz sind, und jede Kante $b_\mu - a_\mu$ unbeschränkt wächst, wenn Q die Folge F durchläuft, dann ist das Polynom $f(x)$ in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1.

Beweis: Nach der Voraussetzung enthält das Polynom $f(x)$ wenigstens ein Glied

$$p \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}}{k_1! \, k_2! \ldots k_m!}$$

mit irrationalem Koeffizienten p, wobei nicht alle Exponenten k_μ verschwinden, mit der Eigenschaft, dass alle andern etwaigen durch $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$ teilbaren Glieder von $f(x)$ rationale Koeffizienten besitzen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich $k_1 \geqq 1$ voraussetzen, da ich sonst nur die Veränderlichen x_μ untereinander zu vertauschen brauche. Ich bezeichne die Summe $k_1 + k_2 + \cdots + k_m$ mit k, und ich unterscheide zwei verschiedene Fälle.

1. Es sei $k = 1$, also

$$k_1 = 1, \qquad k_2 = k_3 = \cdots = k_m = 0.$$

Dann kann $f(x)$ gebracht werden auf die Gestalt

$$(1) \qquad f(x) = px_1 + \varphi(x_2, \ldots, x_m) + \chi(x_1, \ldots, x_m),$$

wo das Polynom $\varphi(x_2, \ldots, x_m)$ nicht von x_1 abhängt, und die Koeffizienten des Polynoms $\chi(x_1, \ldots, x_m)$ rational sind.

1, 1. Es sei das Polynom $\chi(x_1, \ldots, x_m)$ unabhängig von x_1. Dann ist für jedes feste ganze $h \neq 0$

$$\frac{1}{A(Q)} \Big| \sum_{x \text{ in } Q} e^{2\pi i h f(x)} \Big| \leqq \frac{1}{b_1 - a_1} \Big| \sum_{x_1 = a_1}^{b_1 - 1} e^{2\pi i h p x_1} \Big|$$

$$\leqq \frac{1}{b_1 - a_1} \cdot \frac{1}{|\sin \pi h p|} \to 0,$$

da $b_1 - a_1$ unbeschränkt wächst, wenn Q die Folge F durchläuft. Nach der ersten Haupteigenschaft (Satz 3 in § 2) ist dann $f(x)$ in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1.

1, 2. Es sei $\chi(x_1, \ldots, x_m)$ abhängig von x_1. Da das Polynom χ rationalzahlig ist, gibt es eine natürliche Zahl s, derart dass aus

$$x_1 \equiv \sigma \qquad (\text{mod. } s)$$

folgt

$$(2) \qquad \chi(x_1, x_2, \ldots, x_m) \equiv \chi(\sigma, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\text{mod. } 1).$$

Bezeichnet γ eine feste positive Zahl < 1, ist $A_3(Q)$ die Anzahl der in Q liegenden Lösungen von

$$(3) \qquad 0 \leqq f(x) < \gamma \qquad (\text{mod. } 1),$$

und bezeichnet $A_4^{(\sigma)}(Q)$ die Anzahl der in Q liegenden Lösungen von

$$(4) \qquad \begin{cases} 0 \leqq f(x) < \gamma & (\text{mod. } 1) \\ x_1 \equiv \sigma & (\text{mod. } s), \end{cases}$$

so ist

$$(5) \qquad A_3(Q) = \sum_{\sigma=1}^{s} A_4^{(\sigma)}(Q).$$

Wird

$$x_1 = sx_1^* + \sigma$$

gesetzt, so ist (4) wegen (1) und (2) äquivalent mit

$$0 \leqq psx_1^* + \varphi(x_2, \ldots, x_m) + p\sigma + \chi(\sigma, x_2, \ldots, x_m) < \gamma \pmod{1},$$

wobei der Punkt $(x_1^*, x_2, \ldots, x_m)$ im Quader

$$Q^{(\sigma)} \ldots \left[\frac{a_1 - \sigma}{s}\right] \leqq x_1^* < \left[\frac{b_1 - \sigma - 1}{s}\right] + 1, \quad a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \quad (\mu = 2, 3, \ldots, m)$$

liegt. Nach 1, 1 mit ps statt p, mit $\varphi(x_2, \ldots, x_m) + p\sigma$ statt $\varphi(x_2, \ldots, x_m)$, mit $\chi(\sigma, x_2, \ldots, x_m)$ statt $\chi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, und mit den Quadern $Q^{(\sigma)}$ statt Q, ist das Polynom

$$psx_1^* + \varphi(x_2, \ldots, x_m) + p\sigma + \chi(\sigma, x_2, \ldots, x_m)$$

in den Quadern $Q^{(\sigma)}$ gleichverteilt mod. 1, sodass

$$\frac{A_4^{(\sigma)}(Q)}{A(Q^{(\sigma)})} \to \gamma \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s)$$

ist. Da $b_1 - a_1$ unbeschränkt wächst, ist

$$\frac{A(Q^{(\sigma)})}{A(Q)} \to \frac{1}{s},$$

also

$$\frac{A_4^{(\sigma)}(Q)}{A(Q)} \to \frac{\gamma}{s},$$

sodass aus (5) folgt

$$\frac{A_3(Q)}{A(Q)} \to \gamma,$$

gültig für jedes feste positive $\gamma < 1$. Nach der Definition der Gleichverteilung mod. 1 ist dann $f(x)$ in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1.

2. Es sei $k \geqq 2$, und es sei Satz 1 mit $k-1$ statt k schon bewiesen. Für jedes ganze $h \neq 0$ enthält das Polynom

$$f_h(x) = f(x_1 + h, x_2, \ldots, x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

wenigstens ein nicht-konstantes Glied mit irrationalem Koeffizienten. Nach dem zu beweisenden Satz, mit $k_1 - 1$ statt k_1, also mit $k - 1$ statt k angewendet, ist das Polynom $f_h(x)$ für jedes feste ganze $h \neq 0$ in den Quadern

$$Q_h \ldots a_1 \leqq x_1 < b_1 - h, \quad a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \quad (\mu = 2, 3, \ldots, m)$$

gleichverteilt mod. 1, sodass nach der dritten Haupteigenschaft $f(x)$ in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1 ist.

Hiermit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Satz 2 *(Das Weylsche Theorem): Besitzen die n Polynome*

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Eigenschaft, dass für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ *im Polynom*

$$h_1 f_1(x) + h_2 f_2(x) + \cdots + h_n f_n(x)$$

wenigstens ein nicht-konstantes Glied mit irrationalem Koeffizienten vorkommt, und ist F eine Folge von m-dimensionalen Quadern

$$Q \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

wo a_μ *und* b_μ *ganz sind, und jede Kante* $b_\mu - a_\mu$ *unbeschränkt wächst, wenn Q die Folge F durchläuft, dann ist das System der Polynome* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ *in den Quadern Q gleichverteilt mod.* 1.

Beweis: Nach Satz 1 ist das Polynom

$$h_1 f_1(x) + h_2 f_2(x) + \cdots + h_n f_n(x)$$

für jeden festen Gitterpunkt $(h_1, h_2, \ldots, h_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1. Aus der zweiten Haupteigenschaft folgt dann unmittelbar, dass das System der Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ in diesen Quadern Q gleichverteilt mod. 1 ist.

§ 6. Näherungsweise ganzzahlige Auflösung algebraischer Gleichungen.

In einer ausführlichen Arbeit hat Kronecker[1] mehrere Bedingungen verschiedener Gestalt abgeleitet, die notwendig und hinreichend sind, damit das System

---

[1] L. Kronecker, Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen, Monatsberichte der Kön. Preussischen Akad. der Wiss. zu Berlin (1884), S. 1179—1193; 1271—1299; Werke 3: 1, S. 47—109.

$$(1) \qquad -\varepsilon < \sum_{\tau=1}^{t} a_{\tau\nu} x_\tau + b_\nu < \varepsilon \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

mit reellen Koeffizienten $a_{\tau\nu}$ und b_ν für jedes positive ε unendlich viele ganzzahlige Lösungen $x_1, x_2, \ldots, x_t$ besitzt.

In diesem Paragraphen werde ich nicht das allgemeine System (1), sondern nur das speziellere

$$(2) \qquad -\varepsilon < \sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu\nu} x_\mu + b_\nu < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

mit reellen Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ und b_ν behandeln.

Einerseits spezialisiere ich also die Kroneckerschen Untersuchungen, aber andererseits werde ich sie verallgemeinern, da ich statt der linearen Polynome

$$\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu\nu} x_\mu + b_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

beliebige Polynome $f_\nu(x) = f_\nu(x_1, \ldots, x_m)$ in $x_1, \ldots, x_m$ mit reellen Koeffizienten behandeln will. Ich werde also das System

$$(3) \qquad -\varepsilon < f_\nu(x) < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

untersuchen, wo $f_\nu(x) = f_\nu(x_1, \ldots, x_m)$ ein beliebiges Polynom mit reellen Koeffizienten bezeichnet.

Ich nenne r Polynome $\varphi_\varrho(x) = \varphi_\varrho(x_1, \ldots, x_m)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$ rational unabhängig (d. k. G. a. B. g.)[1], wenn für jeden Gitterpunkt $(h_1, h_2, \ldots, h_r) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ das Polynom $h_1\varphi_1(x) + \cdots + h_r\varphi_r(x)$ wenigstens ein nicht-konstantes Glied mit irrationalem Koeffizienten enthält.

Ich setze als bekannt voraus

Hilfssatz 1: *Bezeichnet r die grösste Zahl mit der Eigenschaft, dass unter den Polynomen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ in $x_1, x_2, \ldots, x_m$ genau r Polynome vorkommen, die rational unabhängig sind (d. k. G. a. B. g.), so gibt es eine Determinante*

$$(4) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} = 1$$

[1] d. k. G. a. B. g. soll heissen: »das konstante Glied ausser Betracht gelassen» oder »die konstanten Glieder ausser Betracht gelassen».

mit ganzzahligen Elementen, derart dass, wenn

$$\varphi_\nu(x) = \sum_{\varrho=1}^{n} g_{\nu\varrho} f_\varrho(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

gesetzt wird, die Polynome $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ *rational unabhängig (d. k. G. a. B. g.) und die Polynome* $\varphi_{r+1}, \varphi_{r+2}, \ldots, \varphi_n$ *rationalzahlig (d. k. G. a. B. g.) sind.*

Hilfssatz 2: *Zu jedem System von reellen Polynomen* $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ *in* m *Veränderlichen* $x_1, \ldots, x_m$ *gibt es eine natürliche Zahl* s *mit folgender Eigenschaft: für jeden Gitterpunkt* $h = (h_1, \ldots, h_n)$, *für den das Polynom*

$$h_1 f_1(x) + \cdots + h_n f_n(x)$$

(d. k. G. a. B. g.) rationalzahlig ist, ist das Polynom

$$s(h_1 f_1(x) + \cdots + h_n f_n(x))$$

(d. k. G. a. B. g.) ganzzahlig.

Beweis: Diesen Hilfssatz, der übrigens unmittelbar aus allgemein bekannten Sätzen folgt, können wir folgendermassen mittels des vorangehenden Hilfssatzes beweisen.

Ich wende den vorigen Hilfssatz an, und ich wähle die natürliche Zahl s derart, dass die Polynome $s\varphi_{r+1}(x), s\varphi_{r+2}(x), \ldots, s\varphi_n(x)$, (d. k. G. a. B. g.) ganzzahlig sind; ist $r = n$, so wähle ich $s = 1$. Wegen (4) gibt es n ganze Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ mit

$$h_\nu = \sum_{\varrho=1}^{n} g_{\varrho\nu} \alpha_\varrho \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

sodass aus (5) folgt

$$\sum_{\varrho=1}^{n} \alpha_\varrho \varphi_\varrho(x) = \sum_{\varrho=1}^{n} \alpha_\varrho \sum_{\nu=1}^{n} g_{\varrho\nu} f_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu f_\nu(x). \tag{6}$$

Ist das letzte Polynom (d. k. G. a. B. g.) rationalzahlig, so ist, da $\varphi_{r+1}, \varphi_{r+2}, \ldots, \varphi_n$ (d. k. G. a. B. g.) auch rationalzahlig sind, das Polynom

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \alpha_\varrho \varphi_\varrho(x)$$

(d. k. G. a. B. g.) gleichfalls rationalzahlig. Die Polynome $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ sind jedoch rational unabhängig (d. k. G. a. B. g.), sodass dann $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$ ist, also aus (6) folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu f_\nu(x) = \sum_{\varrho=r+1}^{n} \alpha_\varrho \varphi_\varrho(x).$$

Das Polynom

$$s \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu f_\nu(x) = \sum_{\varrho=r+1}^{n} \alpha_\varrho \,.\, s\varphi_\varrho(x)$$

ist dann somit (d. k. G. a. B. g.) ganzzahlig.

Satz 1: *Ist $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ ein beliebiger Gitterpunkt, bezeichnen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ Polynome in $x_1, \ldots, x_m$ mit reellen Koeffizienten, und besitzt die natürliche Zahl s die in Hilfssatz 2 genannte Eigenschaft, so hat das Diophantische System*

$$(7) \qquad \begin{cases} -\varepsilon < f_\nu(x) < \varepsilon \pmod{1} & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ x_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s} & (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

dann und nur dann für jedes positive ε unendlich viele Lösungen, wenn für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, \ldots, h_n)$ mit der Eigenschaft, dass das Polynom $h_1 f_1(x) + h_2 f_2(x) + \cdots + h_n f_n(x)$ (d. k. G. a. B. g.) rationalzahlig ist, die Zahl $h_1 f_1(\sigma) + h_2 f_2(\sigma) + \cdots + h_n f_n(\sigma)$ ganz ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es eine nur von ε, s und den Polynomen $f_1, \ldots, f_n$ abhängige Länge L derart, dass jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L wenigstens eine Lösung x von (7) enthält.

Beweis: 1. Beweis, dass die genannte Bedingung notwendig ist. Jede Lösung von (7) genügt dem System

$$(8) \qquad \begin{cases} -\varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} |h_\nu| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu f_\nu(x) \leqq \varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} |h_\nu| \pmod{1} \\ x_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \end{cases}$$

Ist das Polynom $h_1 f_1(x) + \cdots + h_n f_n(x)$ (d. k. G. a. B. g.) rationalzahlig, so ist nach Hilfssatz 2 das Polynom $s(h_1 f_1(x) + \cdots + h_n f_n(x))$ (d. k. G. a. B. g.) ganzzahlig, sodass für jeden Gitterpunkt x mit

$$x_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu f_\nu(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu f_\nu(\sigma) \pmod{1}$$

ist. Aus (8) folgt somit

$$(9) \qquad -\varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} |h_\nu| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu f_\nu(\sigma) \leqq \varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} |h_\nu| \pmod{1}.$$

Hat also (7) für jedes positive ε eine Lösung, so gilt (9) für jedes positive ε, sodass $h_1 f_1(\sigma) + \cdots + h_n f_n(\sigma)$ dann ganzzahlig ist.

Hiermit habe ich gezeigt, dass die genannte Bedingung notwendig ist.

2. Beweis, dass die genannte Bedingung hinreichend ist.

Es werde nun vorausgesetzt, dass für jeden Gitterpunkt $(h_1, \ldots, h_n)$ mit der Eigenschaft, dass $h_1 f_1(x) + \cdots + h_n f_n(x)$ (d. k. G. a. B. g.) rationalzahlig ist, $h_1 f_1(\sigma) + \cdots + h_n f_n(\sigma)$ ganz ist. Wird Hilfssatz 1 angewendet, so erhält man, falls $r < n$ ist, $n - r$ Polynome $\varphi_{r+1}(x), \ldots, \varphi_n(x)$, die (d. k. G. a. B. g.) rationalzahlig sind, sodass dann $\varphi_{r+1}(\sigma), \ldots, \varphi_n(\sigma)$ ganze Zahlen bezeichnen, und für jeden Gitterpunkt x mit

$$(10) \qquad x_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

die Beziehungen

$$(11) \qquad \varphi_\varrho(x) \equiv \varphi_\varrho(\sigma) \equiv 0 \pmod{1} \qquad (\varrho = r+1, r+2, \ldots, n)$$

gelten.

Ist $r \geqq 1$, so sind die Polynome $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)$, also auch die Polynome

$$\varphi_\varrho(sy_1 + \sigma_1, sy_2 + \sigma_2, \ldots, sy_m + \sigma_m) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

rational unabhängig (d. k. G. a. B. g.). Nach dem Weylschen Theorem gibt es dann zu jedem positiven δ eine nur von δ, s und den Polynomen $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ abhängige Länge $\geqq 1$, die ich mit $\frac{L}{s}$ bezeichnen werde, derart, dass jeder den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante $\frac{L}{s}$ wenigstens eine Lösung y des Systems

$$-\delta < \varphi_\varrho(sy_1 + \sigma_1, sy_2 + \sigma_2, \ldots, sy_m + \sigma_m) < \delta \pmod{1} \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

enthält. Hiermit ist bewiesen, dass falls $r \geqq 1$ ist, jeder den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L wenigstens eine Lösung x des Diophantischen Systems

$$(12)\qquad \begin{cases} -\delta < \varphi_\varrho(x) < \delta \pmod{1} & (\varrho = 1, 2, \ldots, r) \\ x_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s} & (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

enthält.

Wird $L = s$ gesetzt, falls $r = 0$ ist, so folgt aus dem obigen, dass jeder den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L wenigstens eine Lösung x des Systems

$$(13)\qquad \begin{cases} -\delta < \varphi_\nu(x) < \delta \pmod{1} & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ x_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s} & (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

enthält. Denn ist $r = n$, so ist (13) äquivalent mit (12); ist $r = 0$, so ist (13) wegen (11) für jeden Gitterpunkt x mit (10) erfüllt, und jeder den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante $\geqq s$ enthält mindestens einen solchen Gitterpunkt; ist schliesslich $0 < r < n$, so folgt (13) aus (11) und (12).

Wegen (4) und (5) ist bei geeignet gewählten ganzzahligen $G_{\nu\varrho}$

$$(14)\qquad f_\nu(x) = \sum_{\varrho=1}^{n} G_{\nu\varrho}\, \varphi_\varrho(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Wählen wir die positive Zahl δ so klein, dass

$$\delta \sum_{\varrho=1}^{n} | G_{\nu\varrho} | \leqq \varepsilon \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, so folgt (7) aus (13), womit gezeigt ist, dass die genannte Bedingung auch hinreicht.

Satz 2: *Bezeichnen*

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

reelle Polynome, so hat das System

$$(15)\qquad -\varepsilon < f_\nu(x) < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

dann und nur dann für jedes positive ε *wenigstens eine ganzzahlige Lösung* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *wenn ein Gitterpunkt* $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ *existiert mit folgender Eigenschaft: für jeden Gitterpunkt* $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, *für den das Polynom*

$$h_1 f_1(x) + h_2 f_2(x) + \cdots + h_n f_n(x)$$

(d. k. G. a. B. g.) rationalzahlig ist, ist die Zahl

$$h_1 f_1(\sigma) + h_2 f_2(\sigma) + \cdots + h_n f_n(\sigma)$$

ganz.

Ist diese Bedingung erfüllt, so enthält bei geeignet gewähltem, nur von ε und von den Polynomen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ abhängigem L, jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L wenigstens eine ganzzahlige Lösung von (15).

Beweis: 1. Es gebe einen Gitterpunkt $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ mit folgender Eigenschaft: für jeden Gitterpunkt $(h_1, \ldots, h_n)$, für den das Polynom $h_1 f_1(x) + \cdots + h_n f_n(x)$ (d. k. G. a. B. g.) rationalzahlig ist, ist die Zahl $h_1 f_1(\sigma) + \cdots + h_n f_n(\sigma)$ ganz.

Wir wählen eine nur von den Polynomen $f_1, \ldots, f_n$ abhängige natürliche Zahl s mit der in Hilfssatz 2 erwähnten Eigenschaft. Nach dem vorangehenden Satz enthält bei geeignet gewählter, von ε und den Polynomen $f_1, \ldots, f_n$ abhängiger Länge L jeder den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L wenigstens einen Gitterpunkt, der (7), also auch das System (15) erfüllt.

2. Das System (15) habe für jedes positive ε wenigstens eine Lösung. Ich wähle wiederum eine nur von den Polynomen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ abhängige natürliche Zahl s mit der in Hilfssatz 2 erwähnten Eigenschaft. Bei geeignet gewähltem $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ enthält das System (7) dann für jedes positive ε wenigstens eine Lösung. Nach dem vorangehenden Satz ist dann für jeden Gitterpunkt $(h_1, \ldots, h_n)$ mit der Eigenschaft, dass das Polynom $h_1 f_1(x) + \cdots + h_n f_n(x)$ (d. k. G. a. B. g.) rationalzahlig ist, die Zahl $h_1 f_1(\sigma) + \cdots + h_n f_n(\sigma)$ ganz.

Hiermit ist unser Satz bewiesen.

Definition: *Es mögen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ Polynome in $x_1, \ldots, x_m$ bezeichnen. Der zu diesen Polynomen gehörige Raum sei die Menge R der Punkte $u = (u_1, \ldots, u_n)$ im n-dimensionalen Raume mit folgender Eigenschaft: für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, \ldots, h_n)$, für den $h_1 f_1(x) + \cdots + h_n f_n(x)$ (d. k. G. a. B. g.) rationalzahlig ist, ist*

$$h_1 u_1 + \cdots + h_n u_n = 0.$$

Gehören zwei verschiedene Punkte zu R, so enthält R, wie unmittelbar klar ist, auch die durch diese zwei Punkte gehende Gerade, sodass R ein linearer Raum ist. Die Bedeutung dieses Raumes für unsere Probleme ergibt sich aus

Satz 3: *Die in Satz* 1 *genannte notwendige und hinreichende Bedingung ist äquivalent mit der Bedingung, dass der den Polynomen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ zugeordnete Raum R wenigstens einen Punkt $u = (u_1, \ldots, u_n)$ mit*

$$u_\nu \equiv f_\nu(\sigma) \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

enthält.

Beweis: 1. Es gebe in R einen Punkt u mit (16). Für jeden Gitterpunkt $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ mit der Eigenschaft, dass das Polynom $h_1 f_1 + \cdots + h_n f_n$ (d. k. G. a. B. g.) rationalzahlig ist, ist dann

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu u_\nu = 0,$$

also wegen (16)

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu f_\nu(\sigma) \equiv 0 \pmod{1},$$

sodass die in Satz 1 genannte Bedingung gilt.

2. Es sei die in Satz 1 genannte Bedingung erfüllt.

Wegen (4) und (5) gilt (14) bei geeignet gewählten ganzzahligen $G_{\nu\varrho}$. Ich behaupte, dass der Punkt $u = (u_1, \ldots, u_n)$ mit den Koordinaten

$$u_\nu = \sum_{\varrho=1}^{r} G_{\nu\varrho}\, \varphi_\varrho(\sigma) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{17}$$

in R liegt und (16) erfüllt. Denn da $\varphi_{r+1}(x), \ldots, \varphi_n(x)$ (d. k. G. a. B. g.) rationalzahlig sind, so sind nach der in Satz 1 genannten Bedingung $\varphi_{r+1}(\sigma), \ldots, \varphi_n(\sigma)$ ganz, sodass wegen (14) und (17)

$$f_\nu(\sigma) = \sum_{\varrho=1}^{n} G_{\nu\varrho}\, \varphi_\varrho(\sigma) \equiv \sum_{\varrho=1}^{r} G_{\nu\varrho}\, \varphi_\varrho(\sigma) = u_\nu \pmod{1}$$

ist, somit (16) gilt. Wird der Gitterpunkt $(k_1, \ldots, k_n)$ so gewählt, dass das Polynom

$$k_1 f_1(x) + \cdots + k_n f_n(x) = \sum_{\varrho=1}^{n} \varphi_\varrho(x) \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu G_{\nu\varrho}$$

(d. k. G. a. B. g.) rationalzahlig ist, so ist, da die Polynome $\varphi_{r+1}(x), \ldots, \varphi_n(x)$ (d. k. G. a. B. g.) auch rationalzahlig sind, das Polynom

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \varphi_\varrho(x) \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu G_{\nu\varrho}$$

(d. k. G. a. B. g.) gleichfalls rationalzahlig. Die Polynome $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)$ sind rational unabhängig (d. k. G. a. B. g.), sodass

$$\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu G_{\nu\varrho} = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r),$$

also wegen (17)

$$\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu u_\nu = \sum_{\varrho=1}^{r} \varphi_\varrho(\sigma) \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu G_{\nu\varrho} = 0$$

ist. Hiermit ist gezeigt, dass der Punkt u in R liegt, womit Satz 3 vollständig bewiesen ist.

Satz 4: *Bezeichnen*

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

reelle Polynome mit zugeordnetem Raum R, so hat das System (15) *dann und nur dann für jedes positive ε eine Lösung, wenn es einen Punkt $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ in R und einen Gitterpunkt $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ gibt mit*

$$u_\nu \equiv f_\nu(\sigma) \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Beweis: Dieser Satz folgt aus dem vorigen, genau wie Satz 2 aus Satz 1 folgt.

Hilfssatz 3: *Werden zwei quadratische Matrices A und B m-ter Ordnung äquivalent genannt, wenn man zwei quadratische Matrices C und D m-ter Ordnung mit ganzzahligen Elementen, deren Determinanten den Wert ± 1 besitzen, finden kann mit*

$$CAD = B,$$

so kann man jeder Matrix A mit rationalzahligen Elementen eine äquivalente

Matrix B zuordnen, in der die Elemente in der Hauptdiagonale rationalzahlig sind und die übrigen Elemente verschwinden.

Vorbemerkung: Man beachte, dass der hier definierte Äquivalenzbegriff reflexiv, kommutativ und transitiv ist.

Beweis: Hier folgt ein direkter Beweis, obgleich der zu beweisende Hilfssatz unmittelbar aus allgemein bekannten Sätzen folgt.

Da die Behauptung für $m=1$ klar ist, dürfen wir $m>1$ und die Behauptung mit $m-1$ statt m schon bewiesen annehmen. Verschwinden alle Elemente in A, so ist die Behauptung evident, so dass wir voraussetzen können, dass nicht alle Elemente in A Null sind. Durch Vertauschung von zwei Kolonnen, bzw. Zeilen verwandelt eine Matrix sich in eine äquivalente Matrix, sodass das erste Element a_{11} in der Matrix $A=(a_{ik})$ von Null verschieden angenommen werden darf. Bezeichnet p die Anzahl der Elemente $\neq 0$ in der ersten Kolonne von A, q die Anzahl der Elemente $\neq 0$ in der ersten Reihe von A, dann ist somit $p\geqq 1$, $q\geqq 1$. Ist $p\geqq 2$, so dürfen wir die Behauptung mit $p-1$ statt p schon bewiesen voraussetzen; ist $q\geqq 2$, dann können wir annehmen, dass die Behauptung mit $q-1$ statt q gilt.

1. Es sei $p\geqq 2$, sodass bei geeignet gewähltem $j\geqq 2$ $a_{j1}\neq 0$ ist. Da a_{11} und a_{j1} rationale Zahlen bezeichnen, gibt es zwei ganze teilerfremde Zahlen γ und δ mit

$$\gamma a_{11}+\delta a_{j1}=0.$$

Ich wähle die ganzen Zahlen α und β sodass

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1$$

ist, und ich setze

$$\begin{aligned} c_{1k}&=\alpha a_{1k}+\beta a_{jk} && (k=1,2,\ldots,m),\\ c_{jk}&=\gamma a_{1k}+\delta a_{jk} && (k=1,2,\ldots,m)\\ c_{ik}&=a_{ik} && (k=1,2,\ldots,m;\ i=2,3,\ldots,m;\ i\neq j),\end{aligned}$$

so ist A äquivalent mit $C=(c_{ik})$. Wegen $c_{j1}=0$, $c_{11}\neq 0$ enthält die erste Kolonne von C genau $p-1$ Elemente $\neq 0$, sodass nach dem zu beweisenden Hilfssatz mit $p-1$ statt p, die Matrix C, also auch die Matrix A, äquivalent ist mit einer Matrix, die die verlangten Eigenschaften besitzt.

2. Es sei $q \geqq 2$. Der Beweis verläuft wörtlich wie in 1, wenn nur Kolonnen durch Zeilen ersetzt werden.

3. Es sei $p = 1$, $q = 1$, d. h. a_{11} ist von Null verschieden, und alle übrigen Elemente in der ersten Kolonne und alle übrigen Elemente in der ersten Zeile von A verschwinden. Nach dem zu beweisenden Hilfssatz mit $m-1$ statt m ist die quadratische Matrix (a_{ik}) $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $(i = 2, \ldots, m;\ k = 2, \ldots, m)$ äquivalent mit einer quadratischen Matrix (b_{ik}) derselben Ordnung, in der die Elemente in der Hauptdiagonale rationalzahlig sind, und alle übrigen Elemente verschwinden. Setze ich nun $b_{11} = a_{11}$, $b_{1k} = 0$ $(k \neq 1)$, $b_{i1} = 0$ $(i \neq 1)$, so ist A äquivalent mit der quadratischen Matrix (b_{ik}) m^{ter} Ordnung, womit Hilfssatz 3 vollständig bewiesen ist.

Hilfssatz 4: *Sind $l_\mu(x)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ rationalzahlige Linearformen in $x_1, \ldots, x_m$, so existieren zwei Determinanten*

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1m} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \ldots & c_{mm} \end{vmatrix} = \pm 1, \quad \begin{vmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1m} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ d_{m1} & \ldots & d_{mm} \end{vmatrix} = \pm 1 \tag{18}$$

mit ganzzahligen Elementen, derart dass wenn

$$x_\nu = \sum_{\varrho=1}^{m} d_{\nu\varrho} y_\varrho \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m) \tag{19}$$

und

$$\sum_{\varrho=1}^{m} c_{\mu\varrho} l_\varrho(x) = L_\mu(y) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{20}$$

gesetzt wird,

$$L_\mu(y) = A_\mu y_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{21}$$

mit rationalen A_μ ist.

Beweis: Ich setze

$$l_\varrho(x) = \sum_{\nu=1}^{m} a_{\varrho\nu} x_\nu \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m).$$

Nach dem vorigen Hilfssatz kann man der Matrix $A = (a_{ik})$ zwei Matrices $C = (c_{ik})$

und $D=(d_{ik})$ mit ganzzahligen Elementen zuordnen, derart dass (18) gilt, in der Matrix $(b_{ik})=CAD$ die Elemente der Hauptdiagonale rationalzahlig sind und die übrigen verschwinden. Bezeichnet $F=(f_{ik})$ die Matrix $F=CA$, so ist wegen (20)

$$L_\mu(y)=\sum_{\varrho=1}^{m} c_{\mu\varrho}\sum_{\nu=1}^{m} a_{\varrho\nu}x_\nu=\sum_{\nu=1}^{m} f_{\mu\nu}x_\nu \qquad (\mu=1,2,\ldots,m),$$

sodass aus (19) und $(b_{ik})=FD$ folgt

$$L_\mu(y)=\sum_{\nu=1}^{m} f_{\mu\nu}\sum_{\varrho=1}^{m} d_{\nu\varrho}y_\varrho=\sum_{\varrho=1}^{m} b_{\mu\varrho}y_\varrho=b_{\mu\mu}y_\mu \qquad (\mu=1,2,\ldots,m),$$

womit Hilfssatz 4 bewiesen ist.

Hilfssatz 5: *Es seien die rationalzahligen Linearformen $l_\nu(x)$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$ in $x_1,\ldots,x_m$ und die reellen Zahlen $b_1,\ldots,b_n$ so gewählt, dass für jeden Gitterpunkt $(h_1,\ldots,h_n)$ mit der Eigenschaft, dass die Linearform $h_1l_1(x)+\cdots+h_nl_n(x)$ ganzzahlig ist, die Zahl $h_1b_1+\cdots+h_nb_n$ ganz ist. Dann sind bei geeignet gewähltem Gitterpunkt $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$ die n Zahlen $l_\nu(\sigma)+b_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$ ganz.*

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setze ich $m=n$ voraus, da ich sonst nur Veränderlichen mit verschwindenden Koeffizienten oder verschwindende Linearformen mit verschwindenden Zahlen b hinzuzufügen brauche. Ich wende den vorigen Hilfssatz an und ich setze

$$\sum_{\varrho=1}^{m} c_{\mu\varrho}b_\varrho=B_\mu \qquad (\mu=1,2,\ldots,m). \tag{22}$$

Die in (21) auftretenden Koeffizienten A_μ sind rational, sodass ich

$$A_\mu=\frac{P_\mu}{Q_\mu} \qquad (\mu=1,2,\ldots,m)$$

setzen kann, wo P_μ und Q_μ ganze teilerfremde Zahlen sind. Nach (21) und (20) ist

$$P_\mu y_\mu=Q_\mu L_\mu(y)=Q_\mu\sum_{\varrho=1}^{m} c_{\mu\varrho}l_\varrho(x) \qquad (\mu=1,2,\ldots,m).$$

Diese Linearformen sind ganzzahlig, sodass aus der Voraussetzung mit Rücksicht auf (22) folgt, dass

$$Q_\mu \sum_{\varrho=1}^{m} c_{\mu\varrho} b_\varrho = Q_\mu B_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

ganzzahlig ist. Die Zahlen P_μ und Q_μ sind teilerfremd, sodass es möglich ist die ganzen Zahlen $z_1, \ldots, z_m$ so zu wählen, dass

$$(23) \qquad P_\mu z_\mu + Q_\mu B_\mu \equiv 0 \pmod{Q_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

ist.

Der Gitterpunkt $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ mit den Koordinaten

$$(24) \qquad \sigma_\mu = \sum_{\varrho=1}^{m} d_{\mu\varrho} z_\varrho \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

hat die verlangte Eigenschaft. Denn aus (20), (19) und (22) folgt

$$\sum_{\varrho=1}^{m} c_{\mu\varrho} \{l_\varrho(\sigma) + b_\varrho\} = L_\mu(z) + B_\mu = \frac{P_\mu z_\mu + Q_\mu B_\mu}{Q_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Nach (23) sind diese m Zahlen ganz, sodass sich aus (18) ergibt, dass auch die m Zahlen $l_\varrho(\sigma) + b_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, m)$ ganz sind.

Als Satz 5 leite ich den folgenden, schon in der Einleitung erwähnten Giraudschen Satz ab.

Satz 5: *Bezeichnen $f_\nu(x) = f_\nu(x_1, \ldots, x_m)$ reelle lineare Polynome, so hat das System*

$$(25) \qquad -\varepsilon < f_\nu(x) < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

dann und nur dann für jedes positive ε unendlich viele ganzzahlige Lösungen, wenn für jeden Gitterpunkt $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, für den das Polynom $h_1 f_1(x) + \cdots + h_n f_n(x)$ (d. k. G. a. B. g.) ganzzahlig ist, auch das konstante Glied dieses Polynoms gleich einer ganzen Zahl ist.

Beweis: Besitzt (25) für jedes positive ε unendlich viele Lösungen, so hat nach Satz 2 bei geeignet gewähltem Gitterpunkt $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ jeder Gitterpunkt $(h_1, \ldots, h_n)$, für den $h_1 f_1(x) + \cdots + h_n f_n(x)$ (d. k. G. a. B. g.) ganzzahlig ist, die Eigenschaft, dass $h_1 f_1(\sigma) + \cdots + h_n f_n(\sigma)$ eine ganze Zahl bezeichnet. Da σ einen Gitterpunkt bedeutet und $h_1 f_1(x) + \cdots + h_n f_n(x)$ (d. k. G. a. B. g.) ganzzahlig ist, ist $h_1 f_1(\sigma) + \cdots + h_n f_n(\sigma)$ dem konstanten Gliede dieses Polynoms kongruent modulo 1, sodass dieses Glied gleich einer ganzen Zahl ist.

Hiermit habe ich gezeigt, dass die in Satz 5 genannte Bedingung notwendig ist. Um zu beweisen, dass diese Bedingung auch hinreichend ist, nehme ich an, dass sie erfüllt ist, und unterscheide ich zwei verschiedene Fälle:

1. In jedem der Polynome $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ habe jedes lineare Glied einen rationalen Koeffizienten. Dann sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 5 mit

$$f_\nu(x) = l_\nu(x) + b_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt, sodass nach diesem Hilfssatz bei geeignet gewähltem Gitterpunkt $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ die n Zahlen $l_\nu(\sigma) + b_\nu = f_\nu(\sigma)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ ganz sind. Nach Satz 2 besitzt (25) somit für jedes positive ε unendlich viele ganzzahlige Lösungen.

2. In mindestens einem der Polynome $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ kommt wenigstens ein lineares Glied mit irrationalem Koeffizienten vor. Ich wende jetzt Hilfssatz 1 an.

Ist $r = n$, so sind die Polynome $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ (d. k. G. a. B. g.) rational unabhängig, hat also (25) nach dem Kroneckerschen Satze (Satz 1 in § 3) für jedes positive ε unendlich viele Lösungen. Ich darf also weiter $r < n$ voraussetzen.

Für jeden Gitterpunkt $(k_{r+1}, \ldots, k_n)$ mit der Eigenschaft, dass das Polynom $k_{r+1}\varphi_{r+1}(x) + \cdots + k_n\varphi_n(x)$ (d. k. G. a. B. g.) ganzzahlig ist, ist nach der Voraussetzung des zu beweisenden Satzes auch das konstante Glied dieses Polynoms eine ganze Zahl. Bezeichnet c_ν $(\nu = r+1, r+2, \ldots, n)$ das konstante Glied von $\varphi_\nu(x)$, so sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 5 mit $n-r$ statt n, mit den Linearformen $\varphi_{r+1}(x) - c_{r+1}, \ldots, \varphi_n(x) - c_n$ statt der Linearformen $l_1(x), \ldots, l_n(x)$ und mit den Zahlen $c_{r+1}, \ldots, c_n$ statt der Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ erfüllt. Nach diesem Hilfssatz existiert somit ein Gitterpunkt $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ derart, dass die $n-r$ Zahlen $\varphi_{r+1}(\sigma), \ldots, \varphi_n(\sigma)$ ganz sind. Um zu zeigen, dass dieser Punkt σ die in Satz 2 genannte Bedingung erfüllt, wähle ich irgend einen Gitterpunkt $h = (h_1, \ldots, h_n)$ derart, dass das Polynom $h_1 f_1(x) + \cdots + h_n f_n(x)$ (d. k. G. a. B. g.) rationalzahlig ist. Dieses Polynom ist ein lineares Kompositum von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten, also ein lineares Kompositum von $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n$

mit ganzzahligen Koeffizienten, da die Polynome $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ rational unabhängig sind (d. k. G. a. B. g.). Da σ so gewählt worden ist, dass $\varphi_{r+1}(\sigma), \ldots, \varphi_n(\sigma)$ ganze Zahlen sind, ist somit $h_1 f_1(\sigma) + \cdots + h_n f_n(\sigma)$ in der Tat eine ganze Zahl, womit ich gezeigt habe, dass die in Satz 2 genannte Bedingung hier erfüllt ist. Nach Satz 2 besitzt (25) somit für jedes positive ε unendlich viele ganzzahlige Lösungen.

Hiermit ist Satz 5 vollständig bewiesen.

Hilfssatz 6: *Sind $g_1, \ldots, g_l$ Linearformen in $x_1, \ldots, x_r$ mit reellen Koeffizienten, und ist das System der Ungleichungen*

$$g_\lambda > 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

in reellen $x_1, \ldots, x_r$ unlösbar, dann gibt es l Zahlen $z_\lambda \geqq 0$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$, die nicht alle verschwinden, mit

$$z_1 g_1 + z_2 g_2 + \cdots + z_l g_l = 0. \tag{26}$$

Beweis: Dieser Hilfssatz ist schon öfters bewiesen worden. Der erste Beweis, den ich von diesem Hilfssatz habe finden können, rührt von J. Farkas[1] her, aber der Hilfssatz kommt mit Beweis auch bei W. B. Carver[2] und bei A. Haar[3] vor.

Hilfssatz 7: *Sind $g_1, \ldots, g_l$ Linearformen in $x_1, \ldots, x_r$ mit rationalen Koeffizienten, und ist das System*

$$g_\lambda > 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \tag{27}$$

in reellen $x_1, \ldots, x_r$ unlösbar, so gibt es einen Gitterpunkt $k = (k_1, \ldots, k_l) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ mit nicht-negativen Koordinaten, der die Beziehung

$$k_1 g_1 + \cdots + k_l g_l = 0 \tag{28}$$

erfüllt.

Beweis: Nach dem vorigen Hilfssatz existieren l Zahlen $z_\lambda \geqq 0$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$,

[1] J. Farkas, Theorie der einfachen Ungleichungen, Journal für die reine und angewandte Mathematik **124** (1902), S. 1—27.

[2] W. B. Carver, Systems of linear Inequalities, Annals of Mathematics, Second Series **23** (1921—22), p. 212—220.

[3] A. Haar, Über lineare Ungleichungen, Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio Scientiarum Mathematicarum, II 1 (1924), S. 1—14.

die nicht alle verschwinden, mit (26). Es bezeichne t die Anzahl der positiven Zahlen z_λ, sodass $1 \leqq t \leqq l$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir

$$z_1 > 0, \quad z_2 > 0, \ldots, \quad z_t > 0, \quad z_{t+1} = 0, \ldots, \quad z_l = 0$$

annehmen, da wir sonst nur die Linearformen $g_1, g_2, \ldots, g_l$ untereinander zu vertauschen haben. Dann ist

$$z_1 g_1 + z_2 g_2 + \cdots + z_t g_t = 0. \tag{29}$$

Nach der Theorie der linearen Gleichungen werden *alle* Lösungen $z_1, z_2, \ldots, z_t$ dieser Gleichung durch

$$z_\tau = \sum_{\sigma=1}^{s} C_{\tau\sigma} \zeta_\sigma \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, t) \tag{30}$$

gegeben; hierin sind s $(1 \leqq s \leqq t)$ und $C_{\tau\sigma}$ geeignet gewählt, ζ_σ beliebig reell. $C_{\tau\sigma}$ ist gleich dem Verhältnis von zwei Determinanten, deren Elemente Koeffizienten der Linearformen $g_1, g_2, \ldots, g_t$ sind. Da diese Koeffizienten nach der Voraussetzung des zu beweisenden Hilfssatzes rational sind, sind auch die Zahlen $C_{\tau\sigma}$ rational. Nach dem vorigen Hilfssatz können die Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_s$ so gewählt werden, dass die durch (30) definierten Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_t$ alle positiv sind. Die Zahlen ζ_σ können dabei dann rational gewählt werden. Dann sind $z_1, z_2, \ldots, z_t$ positive rationale Zahlen, die (30), also (29) erfüllen. Wählt man nun die natürliche Zahl q so, dass die Zahlen $k_\tau = q z_\tau$ $(\tau = 1, 2, \ldots, t)$ ganz sind, dann ist

$$k_1 g_1 + k_2 g_2 + \cdots + k_t g_t = 0,$$

sodass (28) gilt, wenn $k_{t+1} = k_{t+2} = \cdots = k_l = 0$ gesetzt wird.

Hilfssatz 8: *Es sei $0 < l \leqq n$, und die Polynome $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ in $x_1, x_2, \ldots, x_m$ seien so gewählt, dass für jeden Gitterpunkt $(k_1, k_2, \ldots, k_l) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ mit Koordinaten $\geqq 0$ im Polynom $k_1 f_1(x) + \cdots + k_l f_l(x)$ wenigstens ein nichtkonstantes Glied mit irrationalem Koeffizienten vorkommt. Dann erhält der den Polynomen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ zugeordnete Raum R wenigstens einen Punkt $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ mit*

$$u_1 > 0, \quad u_2 > 0, \ldots, \quad u_l > 0.$$

Vorbemerkung: Die Definition des Raumes R findet der Leser zwischen den Sätzen 2 und 3 in diesem Paragraphen. Aus der Voraussetzung des zu beweisenden Hilfssatzes folgt, dass in jedem der Polynome $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_l(x)$ wenigstens ein nicht-konstantes Glied mit irrationalem Koeffizienten auftritt, sodass die Dimensionszahl r des Raumes R mindestens 1 ist.

Beweis: Ich wende Hilfssatz 1 an. Nach der Voraussetzung des zu beweisenden Hilfssatzes 8 enthält für jeden Gitterpunkt $(k_1, k_2, \ldots, k_l) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ mit Koordinaten $\geqq 0$ das Polynom

$$\sum_{\lambda=1}^{l} k_\lambda f_\lambda(x) = \sum_{\lambda=1}^{l} k_\lambda \sum_{\varrho=1}^{n} G_{\lambda\varrho}\,\varphi_\varrho(x) \qquad \text{(vergl. (14))}$$
$$= \sum_{\varrho=1}^{n} \varphi_\varrho(x) \sum_{\lambda=1}^{l} k_\lambda G_{\lambda\varrho}$$

wenigstens ein nicht-konstantes Glied mit irrationalem Koeffizienten. Hieraus folgt, da die Polynome $\varphi_{r+1}(x), \varphi_{r+2}(x), \ldots, \varphi_n(x)$ (d. k. G. a. B. g.) rationalzahlig sind, dass das System

$$(31) \qquad \sum_{\lambda=1}^{l} k_\lambda G_{\lambda\varrho} = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

nicht erfüllt ist, sodass es keinen Gitterpunkt $(k_1, k_2, \ldots, k_l) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ mit Koordinaten $\geqq 0$ gibt, der (31) erfüllt. Nach dem vorigen Hilfssatz mit

$$g_\lambda = \sum_{\varrho=1}^{r} G_{\lambda\varrho}\, x_\varrho \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

ist somit das System

$$\sum_{\varrho=1}^{r} G_{\lambda\varrho}\, x_\varrho > 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

in reellen $x_1, x_2, \ldots, x_r$ lösbar, sodass r reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_r$ mit

$$(32) \qquad u_\lambda = \sum_{\varrho=1}^{r} G_{\lambda\varrho}\, x_\varrho > 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

existieren.

Um zu zeigen, dass der Punkt $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ mit den Koordinaten

$$(33) \qquad u_\nu = \sum_{\varrho=1}^{r} G_{\nu\varrho}\, x_\varrho \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

in R liegt, wähle ich irgend einen Gitterpunkt $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ derart, dass das Polynom

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu f_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \sum_{\varrho=1}^{n} G_{\nu\varrho}\, \varphi_\varrho(x) \qquad \text{(vergl. (14))}$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{n} \varphi_\varrho(x) \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu G_{\nu\varrho}$$

(d. k. G. a. B. g.) rationalzahlig ist. Da die Polynome $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_r(x)$ (d. k. G. a. B. g.) rational unabhängig sind, so folgt hieraus

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu G_{\nu\varrho} = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r),$$

also wegen (33)

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu u_\nu = \sum_{\varrho=1}^{r} x_\varrho \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu G_{\nu\varrho} = 0,$$

sodass u in R liegt. Mit Rücksicht auf (32) ist der zu beweisende Hilfssatz vollständig bewiesen.

Satz 6: *Ist $0 < l \leqq n$, bezeichnen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ beliebige reelle Polynome in $x_1, x_2, \ldots, x_m$ mit zugeordnetem Raum R, und ist s eine natürliche Zahl mit der in Hilfssatz 2 genannten Eigenschaft, so besitzt das System*

$$(34) \qquad \begin{cases} 0 < f_\lambda(x) < \varepsilon & (\text{mod. } 1) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \\ -\varepsilon < f_\nu(x) < \varepsilon & (\text{mod. } 1) \qquad (\nu = l+1, l+2, \ldots, n) \\ x_\mu \equiv \sigma_\mu & (\text{mod. } s) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

dann und nur dann für jedes positive ε unendlich viele ganzzahlige Lösungen, wenn in R ein Punkt $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ mit

$$(35) \qquad u_\nu \equiv f_\nu(\sigma) \quad (\text{mod. } 1) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

liegt, und ausserdem die Voraussetzungen des vorigen Hilfssatzes gelten.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gibt es eine nur von ε, s und den Polynomen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ abhängige Länge L, derart, dass jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L wenigstens eine Lösung von (34) enthält.

Beweis: Die Voraussetzung, dass in R ein Punkt u mit (35) liegt, ist nach Satz 3 notwendig.

Gäbe es einen Gitterpunkt $(k_1, k_2, \ldots, k_l) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ mit Koordinaten $\geqq 0$, derart dass das Polynom $k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_l f_l(x)$ (d. k. G. a. B. g.) ganzzahlig ist, so wäre bei geeignet gewähltem konstantem c $(0 \leqq c < 1)$

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_l f_l(x) - c$$

ganzzahlig, sodass aus (34) folgen würde

$$0 < c < \varepsilon \sum_{\lambda=1}^{l} k_\lambda \pmod{1}$$

für jedes positive ε, und das kann nicht. Hiermit habe ich gezeigt, dass die in Satz 6 genannten Voraussetzungen notwendig sind.

Um zu zeigen, dass diese Voraussetzungen auch hinreichend sind, nehme ich an, dass in R ein Punkt u mit (35) liegt, und dass die Voraussetzungen des vorigen Hilfssatzes gelten. Nach diesem Hilfssatz liegt dann in R ein Punkt $u^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$ mit

$$u_1^* > 0, \quad u_2^* > 0, \ldots, \quad u_l^* > 0.$$

Der Raum R enthält dann alle Punkte $(u_1^* q, u_2^* q, \ldots, u_n^* q)$, sodass in R auch ein Punkt $U = (U_1, \ldots, U_n)$ mit

$$(36) \qquad \begin{cases} 0 < U_\lambda < \dfrac{\varepsilon}{2} & (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \\ -\dfrac{\varepsilon}{2} < U_\nu < \dfrac{\varepsilon}{2} & (\nu = l+1, l+2, \ldots, n) \end{cases}$$

liegt. Da die Punkte u und U in R liegen, enthält R auch den Punkt mit den Koordinaten

$$u_\nu - U_\nu \equiv f_\nu(\sigma) - U_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Die in Satz 3 genannte Bedingung ist somit mit $(u_1 - U_1, \ldots, u_n - U_n)$ statt $(u_1, \ldots, u_n)$ und mit $f_\nu(x) - U_\nu$ statt $f_\nu(x)$ erfüllt. Dieser Satz gibt also, dass das Diophantische System

$$(37)\qquad \begin{cases} -U_\lambda < f_\lambda(x) - U_\lambda < \frac{\varepsilon}{2} \pmod{1} & (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \\ -\frac{\varepsilon}{2} < f_\nu(x) - U_\nu < \frac{\varepsilon}{2} \pmod{1} & (\nu = l+1, l+2, \ldots, n) \\ x_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s} & (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

für jedes positive ε unendlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt, und dass sogar bei geeignet gewählter Länge L (die nur von ε, s, $f_1, \ldots, f_n$, $U_1, \ldots, U_n$, also nur von ε, s, $f_1, \ldots, f_n$ abhängt) jeder den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L wenigstens eine ganzzahlige Lösung $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ von (37) enthält. Wegen (36) erfüllt diese Lösung auch (34), womit Satz 6 vollständig bewiesen ist.

Satz 7: *Ist* $0 < l \leqq n$, *und bezeichnen*

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

beliebige reelle Polynome in $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *mit zugeordnetem Raum* R, *so besitzt das System*

$$\begin{cases} 0 < f_\lambda(x) < \varepsilon \pmod{1} & (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \\ -\varepsilon < f_\nu(x) < \varepsilon \pmod{1} & (\nu = l+1, l+2, \ldots, n) \end{cases}$$

dann und nur dann für jedes positive ε *wenigstens eine ganzzahlige Lösung* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *wenn ein Punkt* $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *in* R *und ein Gitterpunkt* $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ *zu finden sind mit*

$$u_\nu \equiv f_\nu(\sigma) \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

und ausserdem für jeden Gitterpunkt $(k_1, k_2, \ldots, k_l) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ *mit Koordinaten* $\geqq 0$ *im Polynom*

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_l f_l(x)$$

wenigstens ein nicht-konstantes Glied mit irrationalem Koeffizienten vorkommt.

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann enthält bei geeignet gewähltem, nur von ε *und den Polynomen* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *abhängigem* L, *jeder* m*-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante* L *wenigstens eine ganzzahlige Lösung von* (34).

Beweis: Dieser Satz folgt aus dem vorigen, genau wie Satz 2 aus Satz 1 folgt.

§ 7. Verallgemeinerung des Weylschen Theorems.

Satz 1: *Sind $k_1, k_2, \ldots, k_m$ ganze Zahlen $\geqq 0$, die nicht alle verschwinden, ist $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ in jedem Gitterpunkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ mit positiven Koordinaten definiert und reell mit der Eigenschaft, dass, wenn alle Koordinaten x_μ von x unbeschränkt wachsen,*

$$\Delta_1^{k_1} \Delta_2^{k_2} \ldots \Delta_m^{k_m} f(x) \text{ [1]} \tag{1}$$

nach einem irrationalen Grenzwert strebt, und ist F eine Folge von m-dimensionalen Quadern

$$Q \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

wo a_μ und b_μ natürliche Zahlen bezeichnen, und jede Kante $b_\mu - a_\mu$ unbeschränkt wächst, wenn Q die Folge F durchläuft, dann ist die Funktion $f(x)$ in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich $k_1 \geqq 1$ voraussetzen, da ich sonst nur die Veränderlichen x_μ untereinander zu vertauschen brauche.

Ich unterscheide zwei verschiedene Fälle:

1. Es sei

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = 1,$$

also

$$k_1 = 1, \quad k_2 = k_3 = \cdots = k_m = 0.$$

Wachsen die Koordinaten des Gitterpunktes $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ unbeschränkt, so strebt $\Delta_1 f(x)$ nach einem irrationalen Grenzwert, den ich p nennen werde. Dann ist für jedes feste positive ganze h und jedes feste ganze $l \neq 0$

$$f(x_1 + h, x_2, \ldots, x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \to ph,$$

$$e^{-2\pi i l \{f(x_1+h, x_2, \ldots, x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\}} \to e^{-2\pi i l p h}. \tag{2}$$

---

[1] $\Delta_1^{k_1} \Delta_2^{k_2} \ldots \Delta_m^{k_m} f(x) =$

$$= \sum_{\varkappa_1=1}^{k_1} \sum_{\varkappa_2=1}^{k_2} \cdots \sum_{\varkappa_m=1}^{k_m} (-1)^{k_1+\cdots+k_m-\varkappa_1-\cdots-\varkappa_m} \binom{k_1}{\varkappa_1} \binom{k_2}{\varkappa_2} \cdots \binom{k_m}{\varkappa_m} f(x_1+\varkappa_1, \ldots, x_m+\varkappa_m).$$

Wird die fundamentale Ungleichung (§ 4) mit

$$u(x) = e^{2\pi i l f(x)}$$

angewendet, so ist

(3) $$v_0 = \sum_{x \text{ in } Q} 1 = A(Q)$$

und

$$\frac{v_h}{A(Q_h)} = \frac{1}{A(Q_h)} \sum_{x \text{ in } Q_h} e^{-2\pi i l \{f(x_1+h, x_2, \ldots, x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\}} \to e^{-2\pi i l p h}$$

wegen (2), sodass aus

$$\frac{A(Q_h)}{A(Q)} \to 1$$

folgt

(4) $$\frac{v_h}{A(Q)} \to e^{-2\pi i l p h}.$$

Wegen der Irrationalität von p ist

(5) $$\left| \sum_{h=1}^{q-1} (q-h) e^{-2\pi i l p h} \right| \leqq c q,$$

wo c eine geeignet gewählte, von l und p, aber nicht von q abhängige Zahl bezeichnet. Mit Rücksicht auf (3), (4) und (5) folgt aus der fundamentalen Ungleichung

$$\overline{\lim}\, q^2 \left| \frac{1}{A(Q)} \sum_{x \text{ in } Q} e^{2\pi i l f(x)} \right|^2 \leqq q + 2cq,$$

also

$$\frac{1}{A(Q)} \sum_{x \text{ in } Q} e^{2\pi i l f(x)} \to 0,$$

gültig für jedes feste ganze $l \neq 0$, sodass nach der ersten Haupteigenschaft (Satz 3 in § 2) mit $n = 1$ die Funktion $f(x)$ in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1 ist.

2. Es sei

(6) $$k_1 + k_2 + \cdots + k_m > 1,$$

und es sei der zu beweisende Satz schon bewiesen, wenn $k_1 + k_2 + \cdots + k_m$ durch eine kleinere Zahl ersetzt wird.

Bezeichnet h eine beliebig gewählte feste natürliche Zahl, so kommen wegen $b_1 - a_1 \to \infty$ in der Folge F höchstens endlich viele Quader Q mit

$b_1 - a_1 \leqq h + k_1 - 1$ vor. Diese Quader (falls sie überhaupt vorkommen) lasse ich ausser Betracht, sodass für jeden in Betracht kommenden Quader Q

$$(7) \qquad a_1 < b_1 - h - k_1 + 1 \qquad .$$

ist. Die Funktion

$$(8) \qquad f_h(x) = f(x_1 + h, x_2, \ldots, x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

ist dann in jedem Gitterpunkt x des Quaders

$$Q^{(h)} \ldots a_1 \leqq x_1 < b_1 - h, \quad a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, m)$$

definiert. Ich bezeichne mit $Q_k^{(h)}$ den Quader

$$Q_k^{(h)} \ldots a_1 \leqq x_1 < b_1 - h - k_1 + 1, \quad a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, m),$$

und ich werde zeigen, dass die Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes erfüllt sind, wenn k_1 durch $k_1 - 1$, Q durch $Q^{(h)}$, b_1 durch $b_1 - h$ und $f(x)$ durch $f_h(x)$ ersetzt wird.

Wegen $k_1 \geqq 1$ und (6) sind $k_1 - 1, k_2, \ldots, k_m$ feste ganze Zahlen $\geqq 0$, die nicht alle verschwinden; die Kanten

$$b_1 - a_1 - h \quad \text{und} \quad b_\mu - a_\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, m)$$

von $Q^{(h)}$ wachsen unbeschränkt, und strebt die in (1) genannte Funktion nach dem irrationalen Grenzwert p, so strebt

$$\Delta_1^{k_1 - 1} \Delta_2^{k_2} \ldots \Delta_m^{k_m} f_h(x) = \sum_{l=0}^{h-1} \Delta_1^{k_1} \Delta_2^{k_2} \ldots \Delta_m^{k_m} f(x_1 + l, x_2, \ldots, x_m)$$

nach dem irrationalen Grenzwert ph.

Hiermit ist bewiesen, dass alle Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes nach den genannten Ersetzungen gültig sind. Nach dem zu beweisenden Satz (angewendet mit $k_1 - 1$ statt k_1) ist dann die Funktion $f_h(x)$ in den Quadern $Q^{(h)}$ gleichverteilt mod. 1, sodass nach der dritten Haupteigenschaft (§ 4) $f(x)$ in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1 ist.

Beispiel: Es werde gefragt die Anzahl $A(\omega)$ der Gitterpunkte (x, y) im Bereiche

$$0 \leqq x \leqq \omega, \quad 0 \leqq y \leqq \frac{1}{2} p x^2 + p' x^{\frac{3}{2}},$$

wo p und p' positiv, p irrational ist, bei grossem ganzem ω approximativ zu berechnen.

Setze ich $\psi(v) = v - [v]$, so ist die gesuchte Anzahl

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} A(\omega) &= \omega + 1 + \sum_{x=1}^{\omega} \left(\frac{1}{2} p x^2 + p' x^{\frac{3}{2}} \right) - \sum_{x=1}^{\omega} \psi \left(\frac{1}{2} p x^2 + p' x^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \omega + \frac{1}{12} p \omega (\omega + 1)(2\omega + 1) + p' \left(\frac{2}{5} \omega^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} \omega^{\frac{3}{2}} \right) + r_1(\omega) \\ &\qquad - \sum_{x=1}^{\omega} \psi \left(\frac{1}{2} p x^2 + p' x^{\frac{3}{2}} \right) \end{aligned} \right.$$

mit

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{r_1(\omega)}{\omega} = 0.$$

Nach Satz 1, angewendet mit

$$m = 1, \quad k_1 = 2, \quad a_1 = 1, \quad b_1 = \omega + 1, \quad f(x) = \frac{1}{2} p x^2 + p' x^{\frac{3}{2}}$$

ist die Funktion $\frac{1}{2} p x^2 + p' x^{\frac{3}{2}}$ in den Intervallen $1 \leqq x < \omega + 1$ gleichverteilt mod. 1, sodass nach Satz 2 von § 2

$$\frac{1}{\omega} \sum_{x=1}^{\omega} \psi \left(\frac{1}{2} p x^2 + p' x^{\frac{3}{2}} \right) \to \int_0^1 \psi(v)\, dv = \frac{1}{2}$$

ist. Mit Rücksicht hierauf folgt aus (9)

$$A(\omega) = \frac{1}{2} \omega + \frac{1}{12} p \omega (\omega + 1)(2\omega + 1) + p' \left(\frac{2}{5} \omega^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} \omega^{\frac{3}{2}} \right) + r(\omega)$$

mit

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{r(\omega)}{\omega} = 0.$$

§ 8. Andere Funktionen.

Satz 1: *Sind $k_1, k_2, \ldots, k_m$ feste ganze Zahlen $\geqq 0$ mit $k_1 > 0$, ist F eine Folge von m-dimensionalen Quadern*

$$Q \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

wo a_μ und b_μ ganz sind, und jede Kante $b_\mu - a_\mu$ unbeschränkt wächst, wenn Q die Folge F durchläuft, werden jedem Quader Q der Folge F zwei positive Zahlen r und R $(r \leqq R)$ zugeordnet mit

$$(1) \qquad (b_1 - a_1) r \to \infty, \qquad R \to 0,$$

wenn Q die Folge F durchläuft, und wird schliesslich die Funktion

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

(die von Q abhängen darf) in jedem Gitterpunkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ von Q so definiert, dass die Funktion

$$(2) \qquad \Delta_1^{k_1} \Delta_2^{k_2} \ldots \Delta_m^{k_m} f(x)$$

im Quader

$$Q_k \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu - k_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

eine monotone nicht-abnehmende Funktion von x_1 ist, die in Q_k entweder beständig im Intervall $r \leqq \omega \leqq R$, oder beständig im Intervall $-R \leqq \omega \leqq -r$ liegt, dann ist die Funktion $f(x)$ in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1.

Vorbemerkung: In diesem Satz darf man natürlich das Wort »nicht-abnehmende» durch »nicht-zunehmende» ersetzen, da man dann nur $f(x)$ durch $-f(x)$ zu ersetzen braucht.

Beweis: Ich werde zwei Fälle unterscheiden.

1. Es sei

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = 1,$$

also

$$k_1 = 1, \quad k_2 = k_3 = \cdots = k_m = 0.$$

Für jedes reelle Zahlenpaar u und v ist

$$\begin{aligned}|e^{2\pi i(u+v)} - e^{2\pi i u} - 2\pi i v e^{2\pi i u}| &= |e^{2\pi i v} - 1 - 2\pi i v| \\ &= \left|4\pi^2 \int\limits_0^v e^{2\pi i w}(v-w)\,dw\right| \\ &\leqq 4\pi^2\left|\int\limits_0^v (v-w)\,dw\right| = 2\pi^2 v^2.\end{aligned}$$

Setzt man hierin

$$u = f(x), \qquad v = \Delta_1 f(x), \quad \text{also} \quad u + v = f(x_1 + 1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (a_1 \leqq x_1 \leqq b_1 - 2),$$

so erhält man

$$\left|\frac{e^{2\pi i f(x_1+1, x_2, \ldots, x_m)}}{\Delta_1 f(x)} - \frac{e^{2\pi i f(x_1, \ldots, x_m)}}{\Delta_1 f(x)} - 2\pi i e^{2\pi i f(x_1, \ldots, x_m)}\right|$$
$$\leqq 2\pi^2 |\Delta_1 f(x)| \leqq 2\pi^2 R,$$

also wegen der Monotonie von $\Delta_1 f(x)$

$$\left|\frac{e^{2\pi i f(x_1+1, x_2, \ldots, x_m)}}{\Delta_1 f(x_1 + 1, x_2, \ldots, x_m)} - \frac{e^{2\pi i f(x_1, \ldots, x_m)}}{\Delta_1 f(x_1, \ldots, x_m)} - 2\pi i e^{2\pi i f(x_1, \ldots, x_m)}\right|$$
$$\leqq 2\pi^2 R + \left\{\frac{1}{\Delta_1 f(x_1, \ldots, x_m)} - \frac{1}{\Delta_1 f(x_1 + 1, x_2, \ldots, x_m)}\right\}.$$

Durch Summation über $x_1 = a_1, a_1 + 1, \ldots, b_1 - 2$ folgt hieraus, da $\Delta_1 f(x)$ beständig $\geqq r$ oder beständig $\leqq -r$ ist,

$$\left|\sum_{x_1=a_1}^{b_1-2} e^{2\pi i f(x)}\right| < \pi R \cdot (b_1 - a_1) + \frac{2}{\pi r},$$

also

$$\left|\frac{1}{b_1 - a_1}\sum_{x_1=a_1}^{b_1-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < \frac{1}{b_1 - a_1} + \pi R + \frac{2}{(b_1 - a_1)\pi r}.$$

Hieraus folgt wegen $(b_1 - a_1) \to \infty$ und (1)

$$(3) \qquad \left|\frac{1}{A(Q)}\sum_{x \text{ in } Q} e^{2\pi i f(x)}\right| < \frac{1}{b_1 - a_1} + \pi R + \frac{2}{(b_1 - a_1)\pi r} \to 0.$$

Die Voraussetzungen unseres Satzes bleiben gelten, wenn $f(x)$ durch $hf(x)$ (h fest, ganz $\neq 0$) ersetzt wird, wenn man dann nur r durch $|h|r$ und R durch $|h|R$ ersetzt. Formel (3) verwandelt sich dann in

$$\frac{1}{A(Q)} \sum_{x \text{ in } Q} e^{2\pi i h f(x)} \to 0,$$

sodass nach der ersten Haupteigenschaft (Satz 3 in § 2) mit $n = 1$ die Funktion $f(x)$ in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1 ist.

2. Es sei

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m > 1, \tag{4}$$

und es sei der Satz schon bewiesen, wenn $k_1 + k_2 + \cdots + k_m$ durch eine kleinere Zahl ersetzt wird.

Ich definiere die Zahl σ $(1 \leqq \sigma \leqq m)$ folgendermassen: ist $k_1 \geqq 2$, so sei $\sigma = 1$; ist $k_1 = 1$ (sodass wegen (4) unter den Zahlen $k_2, k_3, \ldots, k_m$ wenigstens eine positive Zahl vorkommt), dann werde $\sigma \geqq 2$ so gewählt, dass k_σ positiv ist.

Ich wähle nun irgend eine feste natürliche Zahl h; ich bezeichne bequemlichkeitshalber den Punkt $(x_1, \ldots, x_{\sigma-1}, x_\sigma + q, x_{\sigma+1}, \ldots, x_m)$ mit $x^{(q)}$, und ich setze

$$\begin{cases} k'_\sigma = k_\sigma - 1; & a'_\sigma = a_\sigma; \quad b'_\sigma = b_\sigma - h; \\ k'_\mu = k_\mu; & a'_\mu = a_\mu; \quad b'_\mu = b_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m; \ \mu \neq \sigma). \end{cases} \tag{5}$$

Die Funktion

$$f_h(x) = f(x^{(h)}) - f(x) \tag{6}$$

ist dann in jedem Gitterpunkt x des Quaders

$$Q' \ldots a'_\mu \leqq x_\mu < b'_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

definiert. Ich werde nun zeigen, dass die Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes erfüllt sind, wenn k_μ durch k'_μ, a_μ durch a'_μ, b_μ durch b'_μ, Q durch Q', r durch $|h|r$, R durch $|h|R$ und schliesslich $f(x)$ durch $f_h(x)$ ersetzt wird. Es ist

$$\begin{aligned} k'_1 &= k_1 - 1 \geqq 1 \qquad \text{falls } \sigma = 1 \quad (\text{also } k_1 \geqq 2), \\ k'_1 &= k_1 = 1 \qquad \text{falls } \sigma \geqq 2; \end{aligned}$$

$$k'_\sigma = k_\sigma - 1 \geqq 0,$$
$$k'_\mu = k_\mu \geqq 0 \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, m;\ \mu \neq \sigma);$$

die Kanten $b'_\mu - a'_\mu$ von Q' wachsen unbeschränkt, und aus (1) folgt

$$(b'_1 - a'_1)\,|h|\,r \to \infty, \qquad |h|\,R \to 0;$$

die Funktion

$$\Delta_1^{k'_1} \Delta_2^{k'_2} \ldots \Delta_m^{k'_m} f_h(x) = \sum_{q=0}^{h-1} \Delta_1^{k_1} \Delta_2^{k_2} \ldots \Delta_m^{k_m} f(x^{(q)})$$

ist im Quader

$$a'_\mu \leqq x_\mu < b'_\mu - k'_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

eine monoton nicht-abnehmende Funktion von x_1, die entweder beständig im Intervall $|h|\,r \leqq \omega \leqq |h|\,R$, oder beständig im Intervall $-|h|\,R \leqq \omega \leqq -|h|\,r$ liegt. Hiermit ist bewiesen, dass nach den genannten Ersetzungen die Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes gültig bleiben. Nach diesem Satze, angewendet mit $k_\sigma - 1$ statt k_σ, ist dann $f_h(x)$ in den Quadern Q' gleichverteilt mod. 1. Die Voraussetzungen der dritten Haupteigenschaft (§ 4) sind hier erfüllt, falls darin die Veränderlichen x_1 und x_σ untereinander vertauscht werden. Folglich ist $f(x)$ in den Quadern Q gleichverteilt mod. 1.

Beispiel: Ist F eine Folge von Intervallen $a \leqq x < b$, wo a und b natürliche Zahlen mit

$$(7) \qquad \frac{b-a}{\sqrt{a}} \to \infty$$

bezeichnen, dann erfüllt die Anzahl $A_8(a, b)$ der im Intervall $a \leqq x < b$ liegenden ganzzahligen Lösungen x des Systems

$$(8) \qquad 2x^{10} + 7x^2y^2 < y^4 - y + 1 < 2x^{10} + x^5y - 2xy^2$$

die Beziehung

$$(9) \qquad \frac{A_8(a, b)}{b-a} \to \frac{1}{8}\sqrt{2}.$$

Beweis: Aus (7) folgt

$$(10) \qquad \frac{\sqrt{b}}{b-a} = \frac{\sqrt{a}}{b-a} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} \to 0.$$

Nach der Einleitung (Vergl. die Beispiele 3 und 2 in § 1) kann man jedem positiven $\delta < \frac{1}{16}\sqrt{2}$ eine natürliche Zahl c zuordnen, derart dass für die Ungleichungen

(11) $$-\frac{1}{8}\sqrt{2} - \delta < \sqrt[4]{2}x^{\frac{3}{2}} < \delta \pmod{1}$$

und

(12) $$-\frac{1}{8}\sqrt{2} + \delta < \sqrt[4]{2}x^{\frac{3}{2}} < -\delta \pmod{1}$$

und für jedes Paar von ganzen Zahlen g und b mit $c \leqq g < b$ die Beziehungen

(13) $$A_{12}(g, b) \leqq A_8(g, b) \leqq A_{11}(g, b)$$

gelten. Die Intervalle $a \leqq x < b$ mit $b \leqq c$ kommen in höchstens einer endlichen Anzahl vor, dürfen also ausser Betracht gelassen werden. Ich kann dann jedem der in Betracht kommenden Intervallen $a \leqq x < b$ eine ganze Zahl $g \geqq a$, $\geqq c$ und $< b$ mit

(14) $$g \to \infty, \quad \frac{g-a}{b-a} \to 0 \quad \left(\text{also } \frac{b-g}{b-a} \to 1\right)$$

zuordnen. Dann gilt (13), also

(15) $$A_{12}(g, b) - (g-a) \leqq A_8(a, b) \leqq A_{11}(g, b) + (g-a)$$

und es ist

(16) $$\frac{b-g}{\sqrt{b}} = \frac{b-g}{b-a} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{b}} \to \infty$$

wegen (14) und (10).

Die Voraussetzungen von Satz 1 sind mit

$$m = 1, \quad k_1 = 3, \quad a_1 = g, \quad b_1 = b,$$

$$f(x) = \sqrt[4]{2}x^{\frac{3}{2}}, \quad r = \Delta^3 f(b-4), \quad R = \Delta^3 f(g)$$

erfüllt; denn im Intervall $g \leqq x < b-3$ ist $\Delta^3 f(x)$ monoton abnehmend, $\geqq r$ und $\leqq R$, und man hat $R = \Delta^3 f(g) \to 0$ wegen $g \to \infty$,

$$(b-g)r = \frac{b-g}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b}\, \Delta^3 f(b-4) \to \infty$$

wegen (16) und

$$\sqrt{b}\, \Delta^3 f(b-4) \to \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}.$$

Nach Satz 1 ist somit $f(x)$ in den Intervallen $g \leqq x < b$ gleichverteilt mod. 1, sodass man hat

$$(17) \qquad \frac{A_{11}(g, b)}{b-g} \to \frac{1}{8}\sqrt{2} + 2\delta; \quad \frac{A_{12}(g, b)}{b-g} \to \frac{1}{8}\sqrt{2} - 2\delta.$$

Aus (15), (14) und (17) folgt einerseits

$$\overline{\lim}\, \frac{A_8(a, b)}{b-a} \leqq \frac{1}{8}\sqrt{2} + 2\delta,$$

andererseits

$$\underline{\lim}\, \frac{A_8(a, b)}{b-a} \geqq \frac{1}{8}\sqrt{2} - 2\delta$$

für jedes positive δ, womit (9) bewiesen ist.

§ 9. Normalsysteme.

Satz 1: *Es sei* $\chi_\lambda(v_1, \ldots, v_n)$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ *in jedem Punkte* $v = (v_1, \ldots, v_n)$ *definiert, reell und stetig, und es sei F eine Folge von m-dimensionalen Quadern*

$$Q \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

wo a_μ *und* b_μ *ganz sind, und*

$$A(Q) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_m - a_m)$$

unbeschränkt wächst, wenn Q die Folge F durchläuft. Jedem dieser Quader Q ordne ich ein mod. 1 gleichverteiltes Funktionensystem

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

zu, und ich betrachte $2l$ *feste (d. h. von Q unabhängige) Zahlen* $\alpha_\lambda, \beta_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$.

Behauptungen: 1. *Das System*

$$(1)\qquad \alpha_\lambda < \chi_\lambda(f_1(x)-y_1, \ldots, f_n(x)-y_n) < \beta_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

(das ich ein Normalsystem nenne) hat dann und nur dann eine Lösung in ganzen $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$, *wenn ein Punkt* $w=(w_1, \ldots, w_n)$ *mit*

$$(2)\qquad \alpha_\lambda < \chi_\lambda(w_1, \ldots, w_n) < \beta_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

existiert. Ist diese Bedingung erfüllt, dann besitzt (1) *unendlich viele ganzzahlige Lösungen.*

2. *Ist* E *die Menge der im Kubus*

$$K \ldots 0 \leqq u_\nu < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

liegenden Punkte $u=(u_1, \ldots, u_n)$, *denen ein Gitterpunkt* $z=(z_1, \ldots, z_n)$ *mit*

$$\alpha_\lambda < \chi_\lambda(u_1-z_1, \ldots, u_n-z_n) < \beta_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

zugeordnet werden kann, und ist E *quadrierbar, d. h. hat* E *einen Inhalt* $J(E)$ *nach der Jordanschen Definition, so erfüllt die Anzahl* $A_1(Q)$ *der in* Q *liegenden ganzzahligen Lösungen* x *von* (1) *die Beziehung*

$$\frac{A_1(Q)}{A(Q)} \to J(E),$$

wenn Q *die Folge* F *durchläuft.*

Beweis: 1. Ich darf annehmen, dass ein Punkt w mit (2) existiert, da (1) sonst natürlich keine Lösung besitzt. Wegen der Stetigkeit der Funktionen χ_λ erfüllt bei geeignet gewähltem positivem ε jeder Punkt $u=(u_1, \ldots, u_n)$ mit

$$-\varepsilon < u_\nu - w_\nu < \varepsilon \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Ungleichungen

$$\alpha_\lambda < \chi_\lambda(u_1, u_2, \ldots, u_n) < \beta_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l).$$

Folglich ist jede ganzzahlige Lösung x des Systems

$$(3)\qquad -\varepsilon < f_\nu(x) - w_\nu < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

auch eine Lösung von (1). Da das System $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ in den Quadern Q

gleichverteilt mod. 1 ist, hat (3), folglich auch (1) unendlich viele ganzzahlige Lösungen.

2. Ich setze für jeden Punkt $v = (v_1, \ldots, v_n)$

$$\psi(v_1, \ldots, v_n) = 1,$$

falls bei geeignet gewähltem Gitterpunkt $t = (t_1, \ldots, t_n)$ der Punkt mit den Koordinaten $v_\nu - t_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ in E liegt, und

$$\psi(v_1, \ldots, v_n) = 0$$

sonst. Die Funktion $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ hat die Periode 1, und es ist

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \psi(v_1, \ldots, v_n)\, dv_1 \ldots dv_n = J(E),$$

wo links das Riemannsche Integral gemeint wird.

Für jeden Gitterpunkt x von Q mit

$$\psi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = 1 \tag{4}$$

gehört bei geeignet gewähltem Gitterpunkt t der Punkt mit den Koordinaten $f_\nu(x) - t_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ zu E, gelten also bei geeignet gewähltem Gitterpunkt $y = (y_1, \ldots, y_n)$ die Ungleichungen (1). Wird umgekehrt gegeben, dass x eine Lösung von (1) ist, dann liegt bei geeignet gewähltem Gitterpunkt t der Punkt mit den Koordinaten $f_\nu(x) - t_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ in E, gilt somit (4). Folglich ist

$$\psi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = 1 \text{ oder } 0,$$

je nachdem x eine Lösung von (1) ist oder nicht. Hieraus folgt

$$\frac{1}{A(Q)} \sum_{x \text{ in } Q} \psi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = \frac{A_1(Q)}{A(Q)}.$$

Die linke Seite, also auch $\dfrac{A_1(Q)}{A(Q)}$, strebt nach Satz 2 von § 2 nach dem Integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \psi(v_1, \ldots, v_n)\, dv_1 \ldots dv_n = J(E),$$

womit Satz 1 vollständig bewiesen ist.

Satz 2: *Wird dem Normalsystem*

$$(5)\qquad \alpha_\lambda < \chi_\lambda\left(f_1(x)-y_1, \ldots, f_n(x)-y_n\right) < \beta_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

ein System der Gestalt

$$(6)\qquad \alpha_{l+\varrho} < g_\varrho(x) + \sum_{\nu=1}^{n+r} C_{\nu\varrho} y_\nu < \beta_{l+\varrho} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

hinzugefügt, wo $C_{\nu\varrho}$ Konstanten mit

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} C_{n+1,1} & C_{n+1,2} & \ldots & C_{n+1,r} \\ C_{n+2,1} & C_{n+2,2} & \ldots & C_{n+2,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n+r,1} & C_{n+r,2} & \ldots & C_{n+r,r} \end{vmatrix} \neq 0$$

bezeichnen, so bilden die zwei Systeme (5) *und* (6) *zusammen ein Normalsystem von $l+r$ Ungleichungen mit den Unbekannten $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n+r}$.*

Beweis: Aus (7) folgt, dass r Funktionen $f_\nu(x)$ $(\nu = n+1, \ldots, n+r)$ mit

$$g_\varrho(x) + \sum_{\nu=1}^{n+r} C_{\nu\varrho} f_\nu(x) = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

bestimmt werden können; dann nimmt (6) die Gestalt

$$\alpha_{l+\varrho} < -\sum_{\nu=1}^{n+r} C_{\nu\varrho}\left(f_\nu(x) - y_\nu\right) < \beta_{l+\varrho} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r),$$

also die Gestalt

$$(8)\qquad \alpha_{l+\varrho} < \chi_{l+\varrho}\left(f_1(x)-y_1, \ldots, f_{n+r}(x)-y_{n+r}\right) < \beta_{l+\varrho} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

an, wenn

$$\chi_{l+\varrho}(v_1, \ldots, v_{n+r}) = -\sum_{\nu=1}^{n+r} C_{\nu\varrho} v_\nu \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

gesetzt wird. Die Systeme (5) und (8) bilden in der Tat zusammen ein Normalsystem von $l+r$ Ungleichungen.

Satz 3: *Ist ein System von l Ungleichungen*

$$(9)\qquad \alpha_\lambda < \varphi_\lambda(x_1, \ldots, x_m) < \beta_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

gegeben, und wird dabei vorausgesetzt, dass bei geeignet gewähltem positivem δ *und bei geeignet gewählter Funktion* $g(x)=g(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$ *(*$g(x)$ *hängt also nicht von* x_m *ab) aus den ersten* $l-1$ *der Ungleichungen* (9) *folgt*

$$|\varphi_l(x_1, \ldots, x_m) - \varphi_l(x_1, \ldots, x_{m-1}, g(x))| < \delta,$$

dann genügt jede Lösung von (9) *auch dem System*

$$(10) \qquad \begin{cases} \alpha_\lambda < \varphi_\lambda(x_1, \ldots, x_m) < \beta_\lambda & (\lambda = 1, 2, \ldots, l-1) \\ \alpha_l - \delta < \varphi_l(x_1, \ldots, x_{m-1}, g(x)) < \beta_l + \delta \end{cases}$$

und jede Lösung von

$$(11) \qquad \begin{cases} \alpha_\lambda < \varphi_\lambda(x_1, \ldots, x_m) < \beta_\lambda & (\lambda = 1, 2, \ldots, l-1) \\ \alpha_l + \delta < \varphi_l(x_1, \ldots, x_{m-1}, g(x)) < \beta_l - \delta \end{cases}$$

erfüllt (9).

Beweis: Klar.

Bemerkung: Bisweilen ist es bequemer die Systeme (10) und (11) statt (9) zu untersuchen, da in der letzten Ungleichung von (10) bzw. (11) die Unbekannte x_m nicht mehr vorkommt; ich kann sagen, dass ich in der letzten Ungleichung von (9) die Unbekannte x_m eliminiert habe.

Beispiel: Das System

$$(12) \qquad \begin{cases} 0 < \sqrt{3}\, x^6 - y < \varepsilon \\ 0 < x^5 \log^2 x - z < \varepsilon \\ 0 < \sqrt{z} - u < \varepsilon \\ 0 < \pi x + \sqrt{2}\, z + \sqrt{3}\, u - v < \varepsilon \end{cases}$$

besitzt für jedes positive $\varepsilon < 1$ unendlich viele positive ganzzahlige Lösungen x, y, z, u, v, und die Wahrscheinlichkeit, dass eine natürliche Zahl x bei geeignet gewählten positiven ganzen y, z, u, v diesem System genügt, hat den Wert ε^4.

Vorbemerkung: Im dritten Teil werde ich mittels der dritten Methode beweisen, dass bei geeignet gewähltem positivem absolut konstantem C jedes Intervall

$$a \leqq x < a + C\sqrt[6]{\frac{a}{\log a}},$$

wo $a \geqq 2$ ist, wenigstens eine ganzzahlige Lösung x von (12) enthält.

Beweis des Beispiels.

Erster Schritt: Normalisierung des gegebenen Systems.

Ist δ eine beliebige feste positive Zahl $< \frac{1}{2}\varepsilon$ und $< \frac{1}{2}(1-\varepsilon)$, so folgt bei geeignet gewähltem positivem ganzem $c = c(\delta)$ aus $x \geqq c$ und

$$0 < x^5 \log^2 x - z < \varepsilon < 1$$

die Ungleichung

$$|\sqrt{z} - x^{\frac{5}{2}} \log x| < \delta,$$

sodass nach Satz 3 in der Ungleichung

$$0 < \sqrt{z} - u < \varepsilon$$

die Unbekannte z eliminiert werden kann, und zwar folgendermassen: bezeichnet Q ein Intervall $c \leqq x < b$, wo b die Folge $c+1, c+2, \ldots,$ durchläuft, so ist die Anzahl $A_{12}(Q)$ der in Q liegenden ganzzahligen Lösungen x von (12) höchstens gleich der Anzahl $A_{13}(Q)$ der in Q liegenden ganzzahligen Lösungen x von

$$(13) \quad \begin{cases} 0 < \sqrt{3}\, x^6 - y < \varepsilon \\ 0 < x^5 \log^2 x - z < \varepsilon \\ -\delta < x^{\frac{5}{2}} \log x - u < \varepsilon + \delta \\ 0 < \pi x + \sqrt{2}\, z + \sqrt{3}\, u - v < \varepsilon, \end{cases}$$

und mindestens gleich der Anzahl $A_{14}(Q)$ der in Q liegenden ganzzahligen Lösungen x von

$$(14) \quad \begin{cases} 0 < \sqrt{3}\, x^6 - y < \varepsilon \\ 0 < x^5 \log^2 x - z < \varepsilon \\ \delta < x^{\frac{5}{2}} \log x - u < \varepsilon - \delta \\ 0 < \pi x + \sqrt{2}\, z + \sqrt{3}\, u - v < \varepsilon. \end{cases}$$

Um die Systeme (13) und (14) zu normalisieren, wende ich Satz 2 mit

$$l = 3, \quad r = 1, \quad n = 3, \quad \alpha_4 = 0, \quad \beta_4 = \varepsilon, \quad g_1(x) = \pi x,$$
$$C_{11} = 0, \quad C_{21} = \sqrt{2}, \quad C_{31} = \sqrt{3}, \quad C_{41} = -1$$

an, sodass die in (7) genannte Determinante den Wert $C_{41} = -1$ besitzt. Die im Beweis von Satz 2 genannte Funktion $f_4(x)$ wird dann definiert durch

$$\pi x + \sqrt{2}\, x^5 \log^2 x + \sqrt{3}\, x^{\frac{5}{2}} \log x - f_4(x) = 0, \tag{15}$$

sodass die Ungleichung

$$0 < \pi x + \sqrt{2}\, z + \sqrt{3}\, u - v < \varepsilon$$

sich verwandelt in

$$0 < -\sqrt{2}\,\{x^5 \log^2 x - z\} - \sqrt{3}\,\{x^{\frac{5}{2}} \log x - u\} + \{f_4(x) - v\} < \varepsilon.$$

System (13) kann also auf die Normalform

$$\left\{\begin{array}{l} 0 < \sqrt{3}\, x^6 - y < \varepsilon \\ 0 < x^5 \log^2 x - z < \varepsilon \\ -\delta < x^{\frac{5}{2}} \log x - u < \varepsilon + \delta \\ 0 < -\sqrt{2}\,\{x^5 \log^2 x - z\} - \sqrt{3}\,\{x^{\frac{5}{2}} \log x - u\} + \{f_4(x) - v\} < \varepsilon \end{array}\right. \tag{16}$$

gebracht werden, und System (14) auf die Normalform

$$\left\{\begin{array}{l} 0 < \sqrt{3}\, x^6 - y < \varepsilon \\ 0 < x^5 \log^2 x - z < \varepsilon \\ \delta < x^{\frac{5}{2}} \log x - u < \varepsilon - \delta \\ 0 < -\sqrt{2}\,\{x^5 \log^2 x - z\} - \sqrt{3}\,\{x^{\frac{5}{2}} \log x - u\} + \{f_4(x) - v\} < \varepsilon. \end{array}\right. \tag{17}$$

Zweiter Schritt: Das System der Funktionen

$$\sqrt{3}\, x^6, \quad x^5 \log^2 x, \quad x^{\frac{5}{2}} \log x \ \text{ und } f_4(x)$$

ist in den Intervallen Q gleichverteilt mod. 1.

Beweis: Nach der zweiten Haupteigenschaft (Satz 4 in § 2) genügt es zu zeigen, dass für jeden festen Gitterpunkt $(h_1, h_2, h_3, h_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ die Funktion

$$\varphi(x) = h_1 \sqrt{3}\, x^6 + h_2 x^5 \log^2 x + h_3 x^{\frac{5}{2}} \log x + h_4 f_4(x)$$

in den Intervallen Q gleichverteilt mod. 1 ist, und dazu unterscheide ich verschiedene Fälle.

1. Es sei $h_1 \neq 0$. Dann strebt $\Delta^6 \varphi(x)$ bei unbeschränkt wachsendem x dem irrationalen Grenzwert $6!\, h_1 \sqrt{3}$ zu, sodass dann $\varphi(x)$ nach dem verallgemeinerten Weylschen Theorem (Anwendung 5 in § 1) in den Intervallen Q gleichverteilt mod. 1 ist.

2. Es sei $h_1 = 0$, und es sei wenigstens eine der Zahlen h_2 und h_4 von Null verschieden. Dann ist

$$h_2 + \sqrt{2}\, h_4 \neq 0,$$

und dann ist $\Delta^6 \varphi(x)$ für hinreichend grosses ganzes x monoton, mit

$$\lim_{x \to \infty} \Delta^6 \varphi(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} x \,|\Delta^6 \varphi(x)| = \infty.$$

Nach der 8. Anwendung in § 1 mit $k = 6$ ist dann $\varphi(x)$ in den Intervallen Q gleichverteilt mod. 1.

3. Es sei $h_1 = h_2 = h_4 = 0$. Dann ist $h_3 \neq 0$, und dann ist $\Delta^3 \varphi(x)$ für hinreichend grosses ganzes x monoton, mit

$$\lim_{x \to \infty} \Delta^3 \varphi(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} x \,|\Delta^3 \varphi(x)| = \infty.$$

Nach der 8. Anwendung in § 1 mit $k = 3$ ist dann $\varphi(x)$ in den Intervallen Q gleichverteilt mod. 1.

Dritter Schritt: Schluss des Beweises. Die im Kubus

$$0 \leqq u_\nu < 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

liegenden Punkte (u_1, u_2, u_3, u_4), denen ein Gitterpunkt (y_1, y_2, y_3, y_4) mit

$$\begin{cases} 0 < u_1 - y_1 < \varepsilon, \quad 0 < u_2 - y_2 < \varepsilon, \quad \pm\delta < u_3 - y_3 < \varepsilon \mp \delta, \\ 0 < -\sqrt{2}\,(u_2 - y_2) - \sqrt{3}\,(u_3 - y_3) + (u_4 - y_4) < \varepsilon \end{cases}$$

zugeordnet werden kann, bilden eine Menge mit Inhalt $\varepsilon^3(\varepsilon \mp 2\delta)$, sodass nach Satz 1

$$\frac{A_{16}(Q)}{A(Q)} \to \varepsilon^3(\varepsilon + 2\delta) \quad \text{und} \quad \frac{A_{17}(Q)}{A(Q)} \to \varepsilon^3(\varepsilon - 2\delta)$$

ist. Wegen

$$A_{17}(Q) \leqq A_{12}(Q) \leqq A_{16}(Q)$$

ist

$$\overline{\lim}\, \frac{A_{12}(Q)}{A(Q)} \leqq \varepsilon^3(\varepsilon + 2\delta) \quad \text{und} \quad \underline{\lim}\, \frac{A_{12}(Q)}{A(Q)} \geqq \varepsilon^3(\varepsilon - 2\delta). \tag{18}$$

Bezeichnet $A_{12}(b)$ die Anzahl der positiven ganzzahligen Lösungen $x \leqq b$ von (12), so ist

$$A_{12}(b) - c \leqq A_{12}(Q) \leqq A_{12}(b),$$

sodass aus (18) und

$$A(Q) = b - c$$

folgt

$$\overline{\lim}\, \frac{A_{12}(b)}{b} \leqq \varepsilon^3(\varepsilon + 2\delta) \quad \text{und} \quad \underline{\lim}\, \frac{A_{12}(b)}{b} \geqq \varepsilon^3(\varepsilon - 2\delta),$$

somit

$$\lim \frac{A_{12}(b)}{b} = \varepsilon^4.$$

Hiermit ist der Beweis geliefert.

Satz 4: *Bezeichnen*

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

reelle Polynome mit zugeordnetem Raum R, *besitzt die natürliche Zahl* s *die in Hilfssatz* 2 *von* § 6 *erwähnte Eigenschaft, ist* $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ *ein Gitterpunkt und sind die Funktionen*

$$\chi_\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

in jedem Punkt $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *definiert, reell und stetig, so hat das System*

$$\begin{cases} \alpha_\lambda < \chi_\lambda(f_1(x) - y_1, \ldots, f_n(x) - y_n) < \beta_\lambda & (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \\ x_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s} & (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{cases} \tag{19}$$

dann und nur dann eine ganzzahlige Lösung, wenn man einen Punkt $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *in* R, *und einen Gitterpunkt* $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *mit*

$$\alpha_\lambda < \chi_\lambda(f_1(\sigma) + u_1 - z_1, \ldots, f_n(\sigma) + u_n - z_n) < \beta_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \tag{20}$$

bestimmen kann.

Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es eine, nur von $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_l, s, f_1, \ldots, f_n, \chi_1, \ldots, \chi_l$ *abhängige Länge* L, *derart dass jeder* m*-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante* L *wenigstens eine ganzzahlige Lösung* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *von* (19) *enthält.*

Beweis: 1. Es sei möglich einen Punkt u in R und einen Gitterpunkt z mit (20) zu finden.

Wegen der Stetigkeit der Funktionen χ_λ existiert eine positive Zahl ζ, derart dass jeder Punkt $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ mit

$$-\zeta < v_\nu - f_\nu(\sigma) - u_\nu < \zeta \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

bei geeignet gewähltem Gitterpunkt $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ die Ungleichungen

$$\alpha_\lambda < \chi_\lambda(v_1 - y_1, \ldots, v_n - y_n) < \beta_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

erfüllt.

Es werde nun das System

$$\begin{cases} -\zeta < f_\nu(x) - f_\nu(\sigma) - u_\nu < \zeta \pmod{1} & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ x_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s} & (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{cases} \tag{21}$$

betrachtet.

Der Raum R ist den Polynomen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, also auch den Polynomen

$$\varphi_\nu(x) = f_\nu(x) - f_\nu(\sigma) - u_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

zugeordnet, und dieser Raum enthält den Punkt mit den Koordinaten

$$-u_\nu = \varphi_\nu(\sigma) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Nach Satz 3 in § 6 mit φ_ν statt f_ν, ist die Bedingung von Satz 1 in § 6 mit φ_ν statt f_ν erfüllt, sodass nach Satz 1 von § 6 (angewendet mit φ_ν statt f_ν) das System (21) unendlich viele ganzzahlige Lösungen x besitzt, und bei geeignet gewähltem L jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte

Kubus K mit Kante L wenigstens eine ganzzahlige Lösung x von (21) enthält. Diese Lösung erfüllt dann auch (19).

2. Ich nehme an, dass (19) wenigstens eine ganzzahlige Lösung $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ besitzt, sodass

$$(22) \qquad \begin{cases} \alpha_\lambda < \chi_\lambda(f_1(\bar{x}) - \bar{y}_1, \ldots, f_n(\bar{x}) - \bar{y}_n) < \beta_\lambda & (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \\ \bar{x}_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s} & (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

ist.

Wird ein Gitterpunkt $(h_1, \ldots, h_n)$ so gewählt, dass das Polynom

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \{f_\nu(x) - f_\nu(\bar{x})\},$$

(d. k. G. a. B. g.) rationalzahlig ist, so ist nach Hilfssatz 2 von § 6 das Polynom

$$s \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \{f_\nu(x) - f_\nu(\bar{x})\}$$

(d. k. G. a. B. g.) ganzzahlig, sodass für jeden Gitterpunkt x mit

$$x_\mu \equiv \bar{x}_\mu \pmod{s} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

die Zahl

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \{f_\nu(x) - f_\nu(\bar{x})\}$$

ganz, insbesondere

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \{f_\nu(\sigma) - f_\nu(\bar{x})\}$$

ganz ist. Folglich ist die Bedingung von Satz 1 in § 6 mit $f_\nu(x) - f_\nu(\bar{x})$ statt $f_\nu(x)$ erfüllt, sodass der Raum R nach Satz 3 von § 6 einen Punkt $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ mit

$$-u_\nu \equiv f_\nu(\sigma) - f_\nu(\bar{x}) \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

enthält. Definiert man nun z durch

$$f_\nu(\bar{x}) - \bar{y}_\nu = f_\nu(\sigma) + u_\nu - z_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

so ist z ein Gitterpunkt, der wegen (22) Ungleichung (20) erfüllt.

Hiermit ist Satz 4 vollständig bewiesen.

Satz 5: *Bezeichnen*

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

reelle Polynome mit zugeordnetem Raum R und sind die Funktionen

$$\chi_\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

in jedem Punkt $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *definiert, reell und stetig, so hat das System*

$$\alpha_\lambda < \chi_\lambda(f_1(x) - y_1, \ldots, f_n(x) - y_n) < \beta_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \tag{23}$$

dann und nur dann eine ganzzahlige Lösung, wenn man einen Punkt $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *in R, und zwei Gitterpunkte* $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *und* $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ *mit*

$$\alpha_\lambda < \chi_\lambda(f_1(\sigma) + u_1 - z_1, \ldots, f_n(\sigma) + u_n - z_n) < \beta_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

bestimmen kann.

Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es eine, nur von $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_l, f_1, \ldots, f_n, \chi_1, \ldots, \chi_l$ *abhängige Länge L, derart dass jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L wenigstens eine ganzzahlige Lösung* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *von (23) enthält.*

Beweis: Dieser Satz folgt aus dem vorigen, genau wie Satz 2 von § 6 aus Satz 1 von § 6 folgt.