SUR UNE APPLICATION DU CONTINGENT À LA THÉORIE DE LA MESURE.

PAR

GEORGES BOULIGAND

à POITIERS.

Les beaux résultats établis par M. Georges Durand dans l'article qui précède, m'ont suggéré le théorème suivant: *soit, dans l'espace euclidien,* à trois dimensions par exemple, *un ensemble ponctuel E, dont le contingent en chaque point P, laisse échapper au moins une demi-droite PT* (ce qui implique l'abandon de tout un pinceau conique solide entourant PT): *je dis qu'un tel ensemble E est de mesure* (cubique) *nulle.*

Puisque la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle est aussi de mesure nulle, il suffit d'établir le théorème pour un ensemble E borné, tel qu'en chaque point, le contingent abandonne tout un demi-cône de révolution (solide) de demi-angle au sommet $\geq \alpha$. Considérons donc ce cas.

A chaque point P de E, je puis faire correspondre une longueur ε_P telle qu'il existe un cône circulaire droit de sommet P, d'apothème ε_P et de demi-angle au sommet $\frac{\alpha}{2}$ ne contenant à son intérieur aucun point de E. De P comme centre, décrivons les sphères de rayons

$$\varepsilon_P, \frac{\varepsilon_P}{2}, \dots \frac{\varepsilon_P}{n}, \dots$$

D'après le théorème de Vitali[1], on peut trouver une suite $\{P_i\}$ de points de E et une suite associée d'entiers a_i, telles que les sphères successives dont l'une

[1] Caratheodory: Vorlesungen über reellen Funktionen, 2. Auflage, p. 299 et suivantes.

a pour centre P_i et pour rayon $\frac{\varepsilon p_i}{a_i}$ ne soient mutuellement jamais empiétantes et recouvrent E à un ensemble de mesure nulle près. On peut d'ailleurs faire ce choix de manière que toutes ces sphères soient dans un voisinage arbitrairement étroit de E, donc que la somme de leurs volumes dépasse d'aussi peu qu'on veut la mesure extérieure μ de E. Or, si μ n'était pas nul, cela serait en contradiction avec la possibilité d'ôter de chaque sphère un cône circulaire droit, d'ouverture constante, ne contenant à son intérieur aucun point de E. On a donc bien $\mu = 0$.

(C. Q. F. D.)

Une application de ce théorème a été donnée par M. Georges Durand, dans sa note: Sur un type de points des enveloppes de sphères, C. R. 191, 1930, p. 823—825.