SUR LES DIRECTIONS DE BOREL DES FONCTIONS MÉROMORPHES.

PAR

M. BIERNACKI

à WILNO.

Introduction.

M. BOREL a généralisé autrefois le théorème de M. PICARD de la manière suivante[1]: »$f(z)$ étant une fonction méromorphe d'ordre ϱ et $g(z)$ une fonction méromorphe d'ordre inférieur, l'exposant de convergence des racines des équations $f(z)-g(z)=0$ est égal à ϱ sauf pour deux fonctions $g(z)$ au plus». M. JULIA a complété le théorème de M. PICARD en établissant l'énoncé que voici[2]: »$f(z)$ étant une fonction entière il existe une direction singulière $\arg z=\varphi$ telle que $f(z)$ prend dans l'angle $|\arg z-\varphi|<\varepsilon$, quelque soit ε, une infinité de fois toutes les valeurs, sauf une au plus». Ce résultat de M. JULIA a été étendu par M. OSTROWSKI à toutes les fonctions méromorphes d'ordre positif (il y a alors deux valeurs exceptionnelles possibles).[3] Dans un récent mémoire M. VALIRON a établi la proposition suivante[4]: »$f(z)$ étant une fonction méromorphe d'ordre positif ϱ, $R(z)$ une fraction rationnelle et $\varepsilon>0$ un nombre positif arbitrairement petit il existe une suite de cercles $C_n(f)$ de centres z_n et de rayons $\varepsilon_n|z_n|$ $[\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0]$ telle que toute équation de la forme

$$f(z)-R(z)=0 \tag{1}$$

---

[1] Leçons sur les fonctions méromorphes. Paris. Gauthier-Villars, 1903, p. 66.

[2] Annales de Ecole Normale, 3 série, 36, 1919, p. 107.

[3] Mathematische Zeitschrift, Bd. 29, 1925, p. 257—8.

[4] Acta mathematica 52, 1929, p. 82, théorèmes IX et X.

possède au moins $|z_n|^{\varrho-\varepsilon}$ racines dans le cercle C_n dès que $n > n(\varepsilon, R)$ sauf pour deux fractions rationnelles $R(z)$ au plus. [Si $\varrho = \infty$ le nombre de racines sera $|z_n|^{m_n}$ où $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \infty$, la suite $\{m_n\}$ pouvant dépendre du choix de $R(z)$.] Il existe donc une »direction de Borel»[1] $\arg z = \varphi$ telle que l'exposant de convergence des racines des équations (1) contenues dans l'angle $|\arg z - \varphi| < \varepsilon$ est égal à ϱ, quelque soit ε, sauf pour deux fractions rationnelles au plus.[2]»

Je me propose de montrer que l'on peut remplacer dans cet énoncé de M. Valiron l'ensemble des fractions rationnelles $R(z)$ par l'ensemble des fonctions $g(z)$ méromorphes et d'ordre inférieur à ϱ: on obtient ainsi un complément du théorème de M. Borel parfaitement analogue au complément du théorème de M. Picard trouvé par MM. Julia et Ostrowski.[3]

Les résultats de ce mémoire ont été résumés dans une Note parue aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris le 1 juillet 1929.

1. Supposons d'abord, pour fixer les idées, que l'ordre ϱ soit fini. D'après les théorèmes cités de M. Valiron il existe une suite infinie de cercles C_n de centres z_n et de rayons k_n $\left[\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{|z_n|} = 0\right]$ où $f(z)$ prend plus de $|z_n|^{\varrho-\varepsilon}$ fois toute valeur, sauf au plus celles dont les représentations sphériques sont incluses dans deux petits cercles dont les rayons tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Nous pouvons évidemment supposer que $k_n > 1$.

Il résulte de cet énoncé qu'il existe une suite partielle $\{C_{n_k}\}$ des cercles C_n telle que $f(z)$ prend plus de $r_{n_k}^{\varrho-\varepsilon}$ fois $(r_n = |z_n|)$ une au moins des valeurs $0, 1, \infty$, la valeur ∞ par exemple, dans le cercle C_{n_k} dès que $k > k_\varepsilon$. Nous continuerons à désigner cette suite partielle par $\{C_n\}$. (Si c'était la valeur 0 ou 1 qui serait prise plus de $r_{n_k}^{\varrho-\varepsilon}$ fois il suffirait de remplacer f par $\frac{1}{f}$ ou par $\frac{1}{f-1}$, dans tous les raisonnements qui suivent.)

---

[1] G. Valiron loc. cit., p. 69.

[2] les énoncés de M. Valiron sont plus précis que l'énoncé cité dans le texte.

[3] M. Williams a considéré comme probable un théorème analogue relatif aux directions de Julia des fonctions entières, il l'a établi en supposant que les $g(z)$ appartiennent à une classe particulière de fonctions entières d'ordre nul (Rend. del Circolo Mat. di Palermo 52, 1928, p. 373—415). Les résultats de M. Williams sont plus précis que les nôtres en ce qui concerne les rayons des cercles C_n.

Nous supposerons qu'il existe une suite partielle $\{C_{n_k}\}$ (on l'appelera encore $\{C_n\}$) telle que les 3 équations:

$$f(z)-g_1(z)=0, \quad f(z)-g_2(z)=0, \quad f(z)-g_3(z)=0,$$

où les $g_i(z)$ sont 3 fonctions méromorphes d'ordre $<\tau<\varrho$ $[g_i(z)\not\equiv g_k(z)$ si $i\neq k]$, n'auront qu'au plus r_n^τ racines dans chaque cercle C_n' concentrique à C_n et de rayon $40\,k_n$ et nous arriverons à une contradiction: ceci établit visiblement notre proposition.

Posons:

$$h(z)=\frac{g_2(z)-g_3(z)}{g_2(z)-g_1(z)} \qquad \varphi(z)=h(z)\cdot\frac{f(z)-g_1(z)}{f(z)-g_3(z)}\,.$$

Choisissons des nombres fixes μ, σ, λ qui satisfont aux inégalités:

$$\tau<\mu<\sigma<\lambda<\varrho$$

et désignons par $a_m\,(m=1,2,3,\ldots)$ les zéros et les pôles des fonctions: g_1, g_2, g_3, ainsi que les zéros des fonctions $f-g_1, f-g_2, f-g_3$, g_1-g_2, g_1-g_3, g_2-g_3 qui sont contenus dans l'ensemble des cercles C_n'. On constate de suite que tous les zéros et pôles de $\varphi(z)$ et tous les zéros de $[\varphi(z)-1]$ contenus dans les C_n' font partie des points a_m. Les fonctions $f-g_i$ $(i=1,2,3)$ n'ont, d'après l'hypothèse, que r_n^τ zéros au plus dans C_n', les autres fonctions considérées étant toutes d'ordre $<\tau$ elles auront aussi moins de r_n^τ de zéros et de pôles dans ce cercle, si n est assez grand; on voit donc que C_n' contient moins de $12\,r_n^\tau$ points a_m dès que $n>n_0$.

Décrivons de chaque point a_m comme centre un cercle A_m de rayon $|a_m|^{-\mu}$. Puisque $k_n>1$ tandis que la somme des diamètres des cercle A_m contenus dans C_n' est infiniment petite avec $\frac{1}{n}$ (car $\tau<\mu$) il existe une circonférence $|z-z_n|=l_n$ $(k_n<l_n<2k_n)$ qui ne passe par aucun de cercles A_m, on peut d'ailleurs supposer que cette circonférence ne passe pas par des zéros des fonctions: $f(z), f(z)-1$, $f(z)-2$, et des pôles de $f(z)$.

2. *Sur la circonférence* $|z-z_n|=l_n$ *il existe un point* β_n *où l'on a* $|\varphi-h|>$ $>e^{-|\beta_n|^\sigma}$.

Supposons que $|\varphi-h| \leq e^{-r^\sigma}$ $(r=|z|)$ en tout point de la circonférence $|z-z_n|=l_n$. Rappelons nous que d'après une proposition connue sur le minimum de module des fonctions entières on a, dans les C_n', en dehors des cercles A_m

$$|\log|g_i|| < r^\mu, |\log|g_i-g_k|| < r^\mu, |\log|h|| < r^\mu \quad (i, k=1, 2, 3) \tag{2}$$

si n est assez grand.

Or
$$f=h\cdot\frac{g_3-g_1}{\varphi-h}+g_3$$

on aura donc sur $|z-z_n|=l_n$ d'après l'inégalité $|\varphi-h| \leq e^{-r^\sigma}$ et les relations (2):

$$|f| > e^{r^\sigma-2r^\mu}-e^{r^\mu}$$

donc $|f| \to \infty$ (puisque $\mu<\sigma$), uniformément avec n. De plus, $|g_1|$ par exemple est moindre que e^{r^μ}, $\frac{g_1}{f}$ tend donc uniformément vers 0 et $\frac{f-g_1}{f} \to 1$; en appliquant alors le principe de variation de l'argument et en désignant par $P_n(\psi)$ et $N_n(\psi)$ les nombres des pôles et des zéros respectivement de la fonction $\psi(z)$ dans le cercle $|z-z_n|=l_n$ on aura

$$N_n(f)-P_n(f)=N_n(f-g_1)-P_n(f-g_1)$$

d'où

$$N_n(f)=N_n(f-g_1)+P_n(f)-P_n(f-g_1).$$

Or, évidemment,

$$P_n(f)-P_n(f-g_1) \leq P_n(g_1)$$

il vient donc

$$N_n(f) \leq N_n(f-g_1)+P_n(g_1) < 2r_n^\tau.$$

D'autre part l'on aura aussi $|f|$ tendant vers ∞ sur la circonférence $|z-z_n|=l_n$:

$$N_n(f-1)-P_n(f-1)=N_n(f)-P_n(f)$$
$$N_n(f-2)-P_n(f-2)=N_n(f)-P_n(f)$$

donc

$$N_n(f-1)=N_n(f) < 2r_n^\tau$$
$$N_n(f-2) < 2r_n^\tau$$

$f(z)$ prendrait donc dans C_n[1] moins de $2r_n^\tau$ fois les trois valeurs 0, 1, 2; ceci est en contradiction avec le théorème de M. VALIRON, cité au début.

3. Considérons les circonférences Γ_n de centres β_n, de rayons b_n compris entre $4k_n$ et $5k_n$ et qui ne rencontrent pas les cercles A_m.

Il existe sur Γ_n *un point où* $|\varphi| < e^{r_n^\mu}$.

Supposons que l'on ait le long de Γ_n $|\varphi| \geq e^{r_n^\mu}$, comme on y a aussi $|h| < e^{r_n^\tau}$[2] on voit que $\frac{\varphi - h}{\varphi} \to 1$ (car $\tau < \mu$). En désignant par $N_n(\psi)$ et $P_n(\psi)$ les nombres de zéros et de pôles de $\psi(z)$ dans Γ_n nous aurons donc:

$$N_n(\varphi - h) = N_n(\varphi) + P_n(\varphi - h) - P_n(\varphi)$$

et par suite

$$N_n(\varphi - h) < 14 r_n^\tau.$$

Or

$$f = \frac{g_3 \varphi - g_1 h}{\varphi - h}$$

il vient donc

$$P_n(f) \leq N_n(\varphi - h) + P_n(g_1) + P_n(g_3) + P_n(h) + P_n(\varphi) < Q r_n^\tau$$

Q étant un nombre fixe.

Γ_n contient cependant C_n à son intérieur nous sommes donc en contradiction avec l'hypothèse de début.

4. *Il existe sur* Γ_n *un point où* $|\varphi| \geq e^{r_n^\lambda}$.

T désignant la fonction connue de M. NEVANLINNA formons les fonctions $T[b_n, \psi(z + \beta_n)]$ [j'écrirai pour abréger $T(b_n, \psi)$; b_n c'est le rayon du cercle Γ_n, β_n son centre]; en utilisant les inégalités connues[3] il vient:

[1] le cercle $|z - z_n| = l_n$ contient le cercle C_n à son intérieur.

[2] Les fonctions g_1, g_2, g_3 sont d'ordre *inférieur* à τ et le rapport $\frac{|z|}{r_n}$ tend vers un.

[3] $T(r, f_1 f_2) \leq T(r, f_1) + T(r, f_2)$; $T\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r, f) - \log|f(0)|$;

$T(r, f_1 + f_2 + \cdots + f_s) \leq T(r, f_1) + T(r, f_2) + \cdots + T(r, f_s) + \log s$.

$$T(b_n, f) \leq 2T(b_n, \varphi) + T(b_n, g_1) + T(b_n, g_3) + 2T(b_n, h) + \\ + \log 4 - \log|\varphi - h|_{z=\beta_n}. \tag{3}$$

Or sur Γ_n nous avons $\log|g_i| < r_n^\mu$, $\log|h| < r_n^\mu$ $(i = 1, 2, 3)$ (car ces fonctions sont d'ordre inférieur à μ et nous sommes en dehors des cercles A_m). D'autre part le nombre de pôles des fonctions g_i, h, φ dans le cercle $|z-\beta_n| < 5k_n$ est moindre que $12r_n^\tau$ (car ce cercle est contenu dans C_n') tandis que leur distance du point β_n est $\geq r_n^{-s}$, s étant un nombre fixe. Si donc $p(x)$ désigne le nombre de pôles de toutes ces fonctions dans le cercle $|z-\beta_n| < x$ on aura

$$\int_0^{b_n} \frac{p(x)}{x}\,dx < \int_{r_n^{-s}}^{5k_n} \frac{12\,r_n^\tau}{x}\,dx < Q_1 r_n^\tau \log r_n$$

où Q_1 est fixe. Rappelons nous que $\log|\varphi-h|_{z=\beta_n} \geq -|\beta_n|^\sigma$ (§ 2) et supposons que $|\varphi| < e^{r_n^\lambda}$ le long de Γ_n: on voit que le second membre de (3) ne dépasse pas $r_n^{\lambda+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit si n est assez grand). Or f a plus de $r_n^{\varrho-\varepsilon}$ pôles dans le cercle concentrique à Γ_n et de rayon $3k_n$ (puisque ce cercle contient le cercle C_n) donc le 1$^{\text{er}}$ membre de (3) est supérieur à

$$r_n^{\varrho-\varepsilon} \int_{3k_n}^{4k_n} \frac{dx}{x} = \log\frac{4}{3} \cdot r_n^{\varrho-\varepsilon}.$$

Nous arrivons donc de nouveau à une contradiction.

5. Je dis enfin qu'*il existe sur Γ_n un point γ_n où l'on a simultanément:* $|\varphi| < e^{r_n^\lambda}$, $|\varphi-h| > 1$, $|\varphi'| > e^{-r_n^\sigma}$.

En effet, d'après les § 3 et 4 il existe sur cette circonférence un point P_n où $|\varphi| = e^{r_n^\mu}$ et un point Q_n où $|\varphi| = e^{r_n^\lambda}$. Désignons par R_n le *premier* point où l'on a $|\varphi| = e^{r_n^\lambda}$ rencontré en suivant l'arc P_nQ_n dans le sens direct du P_n vers Q_n et par S_n le *dernier* point où l'on a $|\varphi| = e^{r_n^\sigma}$ $(\mu < \sigma < \lambda)$ que l'on rencontre en suivant l'arc P_nR_n de P_n vers R_n. Sur tout l'arc S_nR_n les deux premières inégalités à démontrer sont vérifiées (la seconde résulte de la relation

$|\varphi - h| \geq |\varphi| - |h| > e^{r_n^\sigma} - e^{r_n^\mu})$; si la troisième ne l'était en aucun point de cet arc on aurait, puisque

$$\varphi_{R_n} = \varphi_{S_n} + \int\limits_{S_n R_n} \varphi'(z)dz,$$

$$|\varphi_{R_n}| \leq e^{r_n^\sigma} + Q r_n e^{-r_n^\sigma} \qquad Q \text{ étant fixe}$$

ceci est cependant impossible.

6. M. Valiron a établi la proposition suivante[1]: »Soit $g(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle $|z| < R$, n'y prenant que N fois au plus les valeurs $0, 1, \infty$. On suppose que la plus courte distance de l'origine aux points où $g(z)$ prend ces valeurs $0, 1, \infty$ soit $\geq \delta$ et que $|g'(0)| \neq 0$. Alors

$$T\left(\frac{1}{2}R, g\right) < 36 N \log \frac{eR}{\delta} + 12 \overset{+}{\log} |g(0)| + 4 \overset{+}{\log} \frac{1}{R \cdot |g'(0)|} + C$$

C étant une constante absolue.»

Considérons les cercles H_n de centres aux points γ_n, dont les périphéries ne rencontrent pas les cercles A_m et de rayons $\frac{1}{2} e_n$ compris entre $10 k_n$ et $15 k_n$. (Les cercles $|z - \gamma_n| < e_n$ sont contenus dans les C_n', tandis que les cercles concentriques de rayons $8 k_n$ contiennent les C_n à l'intérieur.) Appliquons l'inégalité de M. Valiron à la fonction $\varphi(z + \gamma_n)$ dans le cercle $|z| \leq e_n$. On pourra prendre pour N le nombre $12 r_n^\tau$ et pour δ le nombre r_n^{-s} (s fixe). Il viendra donc, en tenant compte des résultats du § 5 et du fait que $k_n > 1$

$$T\left[\frac{1}{2} e_n, \varphi(z + \gamma_n)\right] < Q r_n^\tau \log r_n + 12 r_n^\lambda + 4 r_n^\sigma + C \qquad Q \text{ étant fixe}$$

ou encore

$$T\left(\frac{1}{2} e_n, \varphi\right) = T\left[\frac{1}{2} e_n, \varphi(z + \gamma_n)\right] < r_n^{\lambda + \varepsilon}$$

quelque petit que soit ε dès que $n > n_\varepsilon$.

---

[1] loc. cit., p. 71, Théorème VI.

Or nous avons l'inégalité analogue à (3) du § 4:

$$T\left(\frac{1}{2}e_n, f\right) \leq 2\,T\left(\frac{1}{2}e_n, \varphi\right) + T\left(\frac{1}{2}e_n, g_1\right) + T\left(\frac{1}{2}e_n, g_3\right) + $$
$$+ 2\,T\left(\frac{1}{2}e_n, h\right) + \log 4 - \log|\varphi - h|_{z=\gamma_n}$$

il vient donc en tenant compte des inégalités qui sont satisfaites au point γ_n et en raisonnant comme au § 4:

$$T\left(\frac{1}{2}e_n, f\right) < r_n^{\lambda+\varepsilon}.$$

Cependant, $f(z)$ a plus de $r_n^{\varrho-\varepsilon}$ pôles dans le cercle de centre γ_n et de rayon $8\,k_n$, si donc $p(x)$ désigne le nombre de ces pôles dans le cercle $|z-\gamma_n|<x$ il vient:

$$\int_0^{10k_n} \frac{p(x)}{x}\,dx > r_n^{\varrho-\varepsilon} \int_{8k_n}^{10k_n} \frac{dx}{x} = \log\frac{5}{4} \cdot r_n^{\varrho-\varepsilon},$$

il en résulte immédiatement que

$$T\left(\frac{1}{2}e_n, f\right) > \log\frac{5}{4} \cdot r_n^{\varrho-\varepsilon}$$

en contradiction avec le résultat précédent.

7. Si $\varrho = \infty$ il suffit de s'appuyer sur la proposition suivante[1]: »Il existe une suite infinie de cercles C_n de centres z_n et de rayons $k_n \left[\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{|z_n|} = 0\right]$ où $f(z)$ prend plus de $|z_n|^{p_n}$ fois $(\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \infty)$[2] toute valeur sauf au plus celles dont les représentations sphériques sont incluses dans deux petits cercles dont les rayons tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$« et de raisonner exactement de la même manière que dans le cas de l'ordre fini.

[1] G. Valiron, loc. cit.

[2] La suite p_n ne dépend que de la fonction $f(z)$.